Skript zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen III

(Maximale Regularität von Randwertproblemen)

Wintersemester 2007/08

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 26. 1. 2008

Inhaltsverzeichnis

1. Maximale Regularität und $\mathcal{R}$-sektorielle Operatoren

1.1 Worum geht's? Dieser Abschnitt dient der Motivation und untersucht, größtenteils ohne Beweise, den Zusammenhang zwischen maximaler Regularität und R-sektoriellen Operatoren. Maximale Regularität hat sich in den letzten Jahren als wichtiges Hilfsmittel zur Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen erwiesen. Eine äquivalente Beschreibung maximaler Regularität verwendet den Begriff der R-Beschränktheit, der später noch genauer diskutiert wird. Insgesamt wird damit die zeitlich lokale Lösbarkeit einer nichtlinearen Gleichung zurückgeführt auf das genaue Studium der Resolvente des zur linearisierten Gleichung gehörigen Operators.

a) Linearisierung und maximale Regularität

1.2 Beispiel. Die Gleichung des *mean curvature flow* (Gleichung des mittleren Krümmungsflusses) beschreibt das zeitliche Verhalten einer Oberfläche und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n \Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2}\Big)\partial_i\partial_j u &= 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1-1}$$

Dies ist ein typisches Beispiel einer quasilinearen Gleichung: Hier hängen die Koeffizienten der höchsten auftretenden Ableitung (im Beispiel die zweiten Ableitungen) noch von der gesuchten Funktion u und ihren Ableitungen ab.

1.3 Bemerkung (Linearisierung). Abstrakt kann man die obige Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u + F(u)u &= G(u), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

schreiben. Dabei ist $F(u)$ ein *linearer* Operator, der selbst noch von u abhängt, und $G(u)$ ist im allgemeinen ebenfalls eine nichtlineare Funktion von u. Die Linearisierung besteht nur darin, für festes u die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t v + F(u)v &= G(u), \\ v(0) &= u_0 \end{aligned}$$

zu betrachten. Als Gleichung in v ist dies eine lineare Gleichung, und man kann diese Gleichung mit Methoden der linearen Operatortheorie und Halbgruppentheorie behandeln.

Die Idee der maximalen Regularität besteht darin, für die linearisierte Gleichung eine „optimale“ Regularität nachzuweisen. Dies erlaubt es dann, durch eine Iteration die nichtlineare Gleichung zu lösen. Grob gesprochen, darf man beim Lösen der linearen Gleichung keine Glattheit verlieren, da die Lösung beim nächsten Iterationsschritt wieder eingesetzt werden muss. Dieser Zugang erlaubt es, recht allgemeine quasilineare und auch voll nichtlineare Gleichungen zu lösen, jedoch ist die Lösung im allgemeinen nur lokal in der Zeit, d.h. es ist mit diesen Methoden schwer, global existierende Lösungen zu finden.

Der Begriff der maximalen Regularität hängt ganz wesentlich von den Funktionenräumen ab, in welchen die Gleichung betrachtet wird. Es gibt zwei wichtige Klassen von geeigneten Lösungsräumen: Der Raum der Hölder-stetigen Funktionen, und die L^p-Sobolevräume. Wir werden uns in dieser Vorlesung ausschließlich mit den Sobolevräumen befassen.

Die linearisierte Gleichung hat die Form

$$\begin{aligned} \partial_t v + Av &= f \quad (t > 0), \\ v(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1-2}$$

Im folgenden sei $T \in (0, \infty]$ und $J = (0, T)$. Falls man von $f \in L^p(J; X)$ für einen Banachraum X ausgeht, wird man an v die Bedingung

$$\partial_t v \in L^p(J; X) \;\text{ und } v \in L^p(J; D(A))$$

stellen. Aber was ist dann der richtige Raum für u_0? Es handelt sich hier um einen Spurraum, da der Wert von v an der Stelle $t = 0$ gebildet wird.

1.4 Definition und Satz (Spurraum). *Sei $J = (0, T)$, $1 \le p \le \infty$ und $A\colon X \supset D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator im Banachraum X. Dann ist*

$$I_p(A) = \{x = u\,|_{t=0}\colon u \in \mathbb{E} := W^{1,p}(J; X) \cap L^p(J; D(A))\}$$

ausgestattet mit $\|x\|_{I_p(A)} := \inf\{\|u\|_{\mathbb{E}} : u\,|_{t=0} = x\}$ ein Banachraum und es gilt

$$D(A) \hookrightarrow I_p(A) \hookrightarrow X.$$

Man beachte, dass hier die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ von zwei Banachräumen eine kanonische lineare, injektive und stetige Abbildung bezeichnet (in den meisten Fällen als Identität wählbar).

Beweis. Die Soboleveinbettung besagt $W^{1,p}(J; X) \hookrightarrow C([0, T]; X)$, was die Wohldefiniertheit von $u(0) \in X$ garantiert. Weiter ist

$$\|x\| = \|u(0)\| \le \sup_{t \in I} \|u(t)\| \le C\|u\|_{\mathbb{E}} \Longrightarrow I_p(A) \hookrightarrow X.$$

Ist $x \in D(A)$, betrachte $u(t) = e^{-t}x$. Dies zeigt

$$D(A) \hookrightarrow I_p(A).$$

Die anderen Aussagen werden hier nicht bewiesen. □

1.5 Bemerkung. Falls A eine beschränkte holomorphe Halbgruppe erzeugt, kann der Spurraum auch explizit beschrieben werden. Für $p > 1$ gilt

$$I_p(A) = (X, D(A))_{1-1/p,p}$$

wobei die Notation auf der rechten Seite den reellen Interpolationsraum mit Interpolations-Exponent $1 - 1/p$ und Integrabilitäts-Parameter p bezeichnet. Falls $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ $D(A) = W_p^m(\mathbb{R}^n)$ ist (wie das bei Differentialoperatoren A eine natürliche Wahl ist), so folgt

$$I_p(A) = B_{pp}^{m-m/p}(\mathbb{R}^n).$$

Hier bezeichnet $B_{pp}^s(\mathbb{R}^n)$ den Besovraum der Differenzierbarkeitsordnung s.

1.6 Definition. Sei $T \in (0, \infty]$, $J = (0, T)$, $1 \le p \le \infty$ und $A : D(A) \to X$ abgeschlossen. Der Operator A hat maximale (L^p-) Regularität (MR), falls für alle $(f, x) \in L^p(J; X) \times I_p(A) := \mathbb{F}$ ein u existiert, das $(CP)_{f,x}$ fast überall löst, und falls ein $C = C(J) > 0$ existiert, so dass für alle $(f, x) \in \mathbb{F}$ die Ungleichung

$$\|\dot{u}\|_{L^p(J;X)} + \|Au\|_{L^p(J;X)} \le C(\|f\|_{L^p(J;X)} + \|x\|_{I_p(A)}) \tag{1-3}$$

erfüllt ist. Wir setzen

$$MR_p(X, C) := \{A : A \text{ hat MR auf X und (1-3) gilt mit } C\}.$$

Ist C unabhängig von T, schreiben wir $MR_p(X)$, d.h. (1-3) gilt auf $J = (0, \infty)$.

1.7 Bemerkung. In der obigen Definition wird nur $\dot{u} \in L^p(J; X)$, aber nicht $u \in L^p(J; X)$ verlangt. Falls J endlich ist oder $0 \in \rho(A)$ gilt, so kann $\|\dot{u}\|_{L^p(J;X)}$ durch $\|u\|_{W_p^1(J;X)}$ ersetzt werden. In diesem Fall hat A genau dann maximale Regularität, falls durch

$$\begin{pmatrix} \partial_t + A \\ \gamma_0 \end{pmatrix} : W^{1,p}(J; X) \cap L^p(J; D(A)) \to L^p(J; X) \times I_p(A)$$

ein Isomorphismus von Banachräumen gegeben ist. Hierbei steht $\gamma_0 \colon u \mapsto u(0)$ für den Spuroperator.

1.8 Bemerkung. a) Jeder Operator $A \in MR_p(X)$ erzeugt eine beschränkte, holomorphe C_0-Halbgruppe.

b) Falls $A \in MR_p(X)$ für ein $p \in [1, \infty)$ gilt, so folgt bereits $A \in MR_p(X)$ für alle $p \in (1, \infty)$. Deswegen schreiben wir ab jetzt $MR(X)$ statt $MR_p(X)$.

Die beiden Aussagen a) und b) werden hier nicht bewiesen.

Wir wollen jetzt noch mal kurz auf den Gedanken der Linearisierung quasilinearer Gleichungen zurückkommen. Die nichtlineare Gleichung lautete

$$\begin{aligned} \partial_t u + F(u)u &= G(u), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Die zugehörige Linearisierung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_t v + F(u)v &= G(u), \\ v(0) &= u_0 \end{aligned}$$

Für festes u setzt man nun $A := F(u)$ und $f := G(u)$. In den meisten Fällen hängt der Spurraum $I_p(A)$ nicht von u ab, wovon wir hier ausgehen. Falls die linearisierte Gleichung maximale Regularität besitzt, so existiert ein Lösungsoperator

$$S_u \colon L^p(J; X) \times I_p(A) \to W_p^1(J; X) \cap L^p(J; D(A)), \quad (f, u_0) \mapsto v$$

der linearen Gleichung, der selbst noch von der (unbekannten) Lösung u abhängt.

Die nichtlineare Gleichung ist nun genau dann eindeutig lösbar, falls die Fixpunktgleichung

$$u = S_u(G(u), u_0)$$

eine Lösung besitzt. Wegen maximaler Regularität kennt man eine Abschätzung für den Lösungsoperator S_u. Falls auch für die rechte Seite $G(u)$ geeignete Abschätzungen gefunden werden können, so kann versucht werden, den Banachschen Fixpunktsatz anzuwenden. Dazu muss die rechte Seite $\Phi(u) := S_u(G(u), u_0)$ eine Kontraktion im geeigneten Lösungsraum $\mathbb{E}$ definieren. Um die Kontraktionseigenschaft zu erreichen, muss üblicherweise das Zeitintervall $J = (0, T)$ oder die Anfangsdaten u_0 klein gewählt werden. Bei beliebigen Anfangsdaten erhält man (in der Zeit) lokale Lösungen und damit eine maximale Lösung, d.h. eine Lösung auf dem maximalen Existenzintervall. Globale Lösungen können mit dieser Methode üblicherweise nicht bewiesen werden.

Die oben skizzierte Methode ist nur recht abstrakt als allgemeiner Satz formulierbar, funktioniert aber bei einer ganzen Reihe von nichtlinearen Randwertproblemen. Beispiele hierfür sind

- der oben genannte mean-curvature-flow,

- Stefan-Probleme, welche Phasenübergänge beschreiben (inklusive dem Beschreibung des freien Randes zwischen den beiden Aggregatszuständen),
- Cahn-Hilliard-Gleichungen, welche etwa die Grenze zwischen zwei Legierungen in einem Metall beschreiben,
- die Navier-Stokes-Gleichung, welche das Strömungsverhalten von Flüssigkeiten beschreibt, und verwandte Gleichungen, die zur Modellierung z.B. der Erdatmosphäre verwendet werden.

b) $\mathcal{R}$-sektorielle Operatoren

Wir erinnern an den Begriff des sektoriellen Operators aus Teil II der Vorlesung. Im folgenden sei

$$\Sigma_\varphi := \Big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \varphi \Big\}.$$

1.9 Definition. Sei $A\colon D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\sup_{\lambda \in \Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty.$$

Falls A ein sektorieller Operator ist, so heißt

$$\varphi_A := \sup\{\varphi : \ \rho(A) \supset \Sigma_\varphi, \ \sup_{\lambda \in \Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty\}$$

der spektrale Winkel von A.

Sektorielle Operatoren erzeugen holomorphe Halbgruppen, wenn der Sektorwinkel groß genug ist. Der folgende Satz wurde in Teil II bewiesen.

1.10 Satz. *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ linear. Äquivalent sind:*

(i) *A erzeugt eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe T auf X vom Winkel $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.*

(ii) *A ist sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.*

Nach Bemerkung 1.8 erzeugen Operatoren $A \in MR(X)$ holomorphe Halbgruppen, sind also sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, d.h. nicht jeder sektorieller Operator besitzt maximale Regularität!

Vor einigen Jahren wurde eine Charakterisierung der Operatoren in $MR(X)$ gefunden. Bevor wir dieses Resultat formulieren können, benötigen wir noch einige Begriffe. Dabei treten einige aus der Analysis bekannte Objekte Banachraum-wertig auf, so z.B. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n;X)$, der Schwartz-Raum der schnell fallenden X-wertigen Funktionen, oder $\mathscr{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;X)\to\mathscr{S}(\mathbb{R}^n;X)$, die Fouriertransformation auf diesem Raum. Definiert man den Raum der X-wertigen temperierten Distributionen durch

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n;X) := L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}),X),$$

so kann die Fouriertransformation zu einem stetigen Isomorphismus $\mathscr{F}\colon\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n;X)\to\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n;X)$ fortgesetzt werden. Die zugehörigen Beweise übertragen sich direkt aus dem skalaren Fall.

1.11 Definition. Sei X ein Banachraum.

a) Die Hilberttransformation $H\colon\mathscr{S}(\mathbb{R};X)\to\mathscr{S}'(\mathbb{R};X)$ ist definiert durch

$$Hf := \mathscr{F}^{-1}m\mathscr{F}f \quad \text{mit } m(\xi) := \frac{i\xi}{|\xi|}.$$

b) Der Banachraum X ist von Klasse $\mathcal{HT}$, falls ein $p\in(1,\infty)$ existiert, so dass die Hilberttransformation H zu einem stetigen linearen Operator $H\in L(L^p(\mathbb{R};X))$ fortgesetzt werden kann.

1.12 Bemerkung. a) Man kann zeigen, dass die Eigenschaft von Teil b) der obigen Definition nicht von der Wahl von p abhängt, d.h. falls die Bedingung aus b) für ein $p\in(1,\infty)$ erfüllt ist, dann auch für alle $p\in(1,\infty)$.

b) Falls X ein Hilbertraum ist, so ist X von Klasse $\mathcal{HT}$. Denn der Satz von Plancherel gilt für Hilberträume, und wegen $m\in L^\infty(\mathbb{R};L(X))$ gilt somit

$$\mathscr{F}^{-1}m\mathscr{F}\in L(L^2(\mathbb{R};X)) \quad \text{mit } \|F^{-1}m\mathscr{F}\|_{L(L^2(\mathbb{R};X))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R};L(X))} = 1.$$

c) Falls X von Klasse $\mathcal{HT}$ ist und $G\subset\mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist, so ist auch $L^p(G;X)$ von Klasse $\mathcal{HT}$. Insbesondere ist die Hilberttransformation stetig in $L^p(G)$.

d) Es gibt andere Beschreibungen der Klasse $\mathcal{HT}$. Insbesondere ist X genau dann von Klasse $\mathcal{HT}$, falls die Eigenschaft „X ist UMD-Raum“ gilt, wobei UMD für *unconditional martingale differences* steht.

m Folgenden sei $\mathcal{P}=(\Omega,M,\mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum). Wir setzen $\mathcal{E}_\mathcal{P} := \{$Menge aller unabhängigen, symmetrisch verteilten, $\{-1,1\}$-wertigen Zufallsvariablen auf $\mathcal{P}\}$.

1.13 Definition. Eine Familie $\mathcal{T}\subset L(X,Y)$ heißt $\mathcal{R}$-beschränkt, falls eine Konstante $C>0$ und ein $p\in[1,\infty)$ so existiert, dass für alle $N\in\mathbb{N}$, $T_j\in\mathcal{T}$, $x_j\in X$

und alle Folgen $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen, identisch verteilten $\{-1,1\}$-wertigen und symmetrischen Zufallsgrößen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ gilt

$$\|\sum_{j=1}^N \varepsilon_j T_j x_j\|_{L^p(\Omega,Y)} \le C\|\sum_{j=1}^N \varepsilon_j x_j\|_{L^p(\Omega,X)}. \tag{1-4}$$

In diesem Fall heißt $\mathcal{R}(\mathcal{T}) := \min\{C > 0 : \text{(1-4) gilt}\}$ die $\mathcal{R}$-Schranke von $\mathcal{T}$.

1.14 Bemerkung. a) Die obige Formulierung bedeutet für die einzelnen Zufallsgrößen $P(\{\varepsilon_j = 1\}) = P(\{\varepsilon_j = -1\}) = \frac{1}{2}$. Da das Maß $P \circ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^{-1}$ diskret ist, kann die Unabhängigkeit durch folgende Bedingung angegeben werden:

$$P(\{\varepsilon_1 = z_1, \dots, \varepsilon_N = z_N\}) = 2^{-N} \quad (z_1, \dots, z_N) \in \{-1,1\}^N,\ N \in \mathbb{N}).$$

Eine nicht-stochastische Beschreibung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit ist somit gegeben durch die Ungleichung

$$\exists\, C > 0\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, T_j \in \mathcal{T}\ \forall\, x_j \in X$$
$$\Big(\sum_{z_1,\dots,z_N=\pm1} \Big\|\sum_{j=1}^N z_j T_j x_j\Big\|_Y^p\Big)^{1/p} \le C\Big(\sum_{z_1,\dots,z_N=\pm1} \Big\|\sum_{j=1}^N z_j x_j\Big\|_X^p\Big)^{1/p}. \tag{1-5}$$

Die stochastische Beschreibung ist dennoch manchmal günstig; insbesondere kann man als Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$ wählen, wobei die ε_j dann durch die Rademacher-Funktionen gegeben sind (siehe unten). Es ist nicht klar, woher der Namenszusatz „R“ stammt; möglich sind „Rademacher“, „randomisiert“.

Nach diesen Definitionen können wir die Charakterisierung maximaler Regularität angeben. Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen.

1.15 Satz (Weis 2001)**.** *Sei X ein Banachraum der Klasse $\mathcal{HT}$, $1 < p < \infty$, A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel $\varphi_A > \frac{\pi}{2}$. Es gilt genau dann $A \in MR(X)$, falls die Menge*

$$\big\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\varphi\big\} \subset L(X)$$

für ein $\varphi > \frac{\pi}{2}$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist.

In Analogie zum Begriff eines sektoriellen Operators definiert man:

1.16 Definition. Sei $A\colon D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A $\mathcal{R}$-sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\mathcal{R}\big\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\varphi\big\} < \infty.$$

Der $\mathcal{R}$-Winkel von A ist in diesem Fall das Supremum aller Winkel, für die die obige $\mathcal{R}$-Schranke endlich ist.

2. $\mathcal{R}$-Beschränktheit

2.1 Worum geht's? Nachdem im letzten Kapitel der Zusammenhang zwischen maximaler Regularität und $\mathcal{R}$-Beschränktheit diskutiert wurde, geht es jetzt um den Begriff der $\mathcal{R}$-Beschränktheit selbst. Eine gute Beschreibung verwendet die Rademacher-Funktionen als konkretes Beispiel für den stochastischen Zugang. Einige wichtige Prinzipien der $\mathcal{R}$-Beschränktheit werden diskutiert, welche es in den Anwendungen erlauben werden, diese Eigenschaft nachzuweisen.

a) Eigenschaften $\mathcal{R}$-beschränkter Operatorfamilien

2.2 Definition (Rademacher-Funktionen)**.** Die Rademacher-Funktionen $r_n\colon [0,1] \to \{-1,1\}$ sind definiert durch

$$r_n(t) := \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t) \quad (t \in [0,1]).$$

Laut Definition ist

$$r_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \frac{1}{2}), \\ -1, & t \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Die Funktion r_2 nimmt den Wert 1 auf den Teilintervallen $(0, \frac{1}{4})$ und $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ an. Man rechnet sofort nach, dass

$$\int_0^1 r_n(t) r_m(t) dt = \delta_{nm} \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

gilt. Außerdem ist

$$\lambda(\{t \in [0,1] : r_{n_1}(t) = z_1, \ldots, r_{n_M}(t) = z_t\}) = \frac{1}{2^M} = \prod_{j=1}^{M} \lambda(\{t \in [0,1] : r_{n_j}(t) = z_j\}).$$

Somit bildet $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger gleichverteilter Zufallsgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$ wie in Definition 1.13. Man kann sich die Folge $(\varepsilon_j)_j$ in dieser Definition stets als Rademacher-Funktionen vorstellen, da die Aussage dieser Definition nur die Wahrschenlichkeitsverteilung der Zufallsgrößen verwendet. Umgekehrt gelten Aussagen über die Rademacher-Funktionen analog für beliebige Folgen von Zufallsgrößen wie in Definition 1.13.

2.3 Definition. Sei X ein Banachraum und $1 \le p < \infty$. Dann ist $\operatorname{Rad}_p(X)$ definiert als der Banachraum aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, für welche

$$\big\|(x_n)_n\big\| := \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} r_n x_n \Big\|_{L^p([0,1];X)}$$

endlich ist.

2.4 Bemerkung. Da die Rademacher-Funktionen unabhängig sind, kann man eine Folge $(x_n)_n$ mit ihrer Summe $\sum_n r_n x_n \in L^p([0,1];X)$ identifizieren. Denn falls $\sum_n r_n x_n = 0$ in $L^p([0,1];X)$ gilt, so folgt $\sum_n r_n f(x_n) = 0$ für alle $f \in X'$. Nimmt man nun das L^2-Skalarprodukt mit r_{n_0} für ein festes n_0, so erhält man aufgrund der Orthogonalität $f(x_{n_0}) = 0$ für alle $f \in X'$ und damit $x_{n_0} = 0$. Die Abbildung $\operatorname{Rad}_p(X) \to L^p([0,1];X)$, $(x_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^\infty r_n x_n$ ist somit injektiv, und $\operatorname{Rad}_p(X)$ kann als Teilraum von $L^p([0,1];X)$ aufgefasst werden.

2.5 Satz (Ungleichung von Kahane)**.** *Die Räume* $\operatorname{Rad}_p(X)$ *sind isomorph für* $1 \le p < \infty$*, d.h. es existieren Konstanten* $C_p > 0$ *mit*

$$\frac{1}{C_p}\Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^2([0,1];X)} \le \Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^p([0,1];X)} \le C_p\Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^2([0,1];X)}.$$

Der Beweis dieser Ungleichung ist im skalaren Fall $X = \mathbb{C}$ elementar, für beiliebige Banachräume X jedoch recht kompliziert, und wird hier weggelassen. Im skalaren Fall spricht man von der Ungleichung von Khinchine.

2.6 Lemma (Kontraktionsprinzip von Kahane)**.** *Sei* $1 \le p < \infty$*. Dann gilt für alle* $N \in \mathbb{N}$*, für alle* $x_j \in X$ *und alle* $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ *mit* $|a_j| \le |b_j|$, $j = 1, \dots, N$ *gilt*

$$\Big\|\sum_{j=1}^N a_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} \le 2\Big\|\sum_{j=1}^N b_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)}. \tag{2-1}$$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $b_j = 1$ und $|a_j| \le 1$ für alle $j = 1, \dots, N$ annehmen. Dies liegt daran dass mit x_n auch $b_j x_j$ im Banachraum X liegt und somit nach dem Übergang von x_j zu $b_j x_j$ der zu betrachtende Fall vorliegt. Betrachtet man weiter $\operatorname{Re} a_j$ und $\operatorname{Im} a_j$ getrennt, so bleibt also noch für $a_j \in \mathbb{R}$ mit $|a_j| \le 1$ die Ungleichung

$$\|\sum_{j=1}^N a_j \varepsilon_j x_j\|_{L^p(\Omega,X)} \le 1 \cdot \|\sum_{j=1}^N b_j \varepsilon_j x_j\|_{L^p(\Omega,X)} \tag{2-2}$$

zu zeigen. Dazu sei $\{e_k\}_{k=1,\dots,2^N}$ eine Durchnummerierung der Ecken des Würfels $[-1,1]^N$. Wegen $a \in [-1,1]^N$ lässt sich a als Konvexkombination der e_k darstellen, d.h. es existieren $\lambda_k \in [0,1]$ mit

$$\sum_{k=1}^{2^N} \lambda_k = 1 \quad \text{und} \quad a = \sum_{k=1}^{2^N} \lambda_k e_k.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\|\sum_{j=1}^N a_j\varepsilon_j x_j\|_{L^p(\Omega,X)} &\le \sum_{k=1}^{2^N}\lambda_k\|\sum_{j=1}^N \varepsilon_j e_k^j x_j\|_{L^p(\Omega,X)}\\ &\le \max_{1\le k\le 2^N}\|\sum_{j=1}^N \varepsilon_j e_k^j x_j\|_{L^p(\Omega,X)} = \|\sum_{j=1}^N \varepsilon_j x_j\|_{L^p(\Omega,X)}.\end{aligned}$$

Dabei wird für die letzte Gleichheit verwendet, dass $\{\varepsilon_j; j=1,...,N\}$ und $\{\varepsilon_j e_k^j; j=1,...,N\}$ die gleiche gemeinsame Verteilung besitzen. □

2.7 Lemma. *a) Falls die Bedingung (1-4) in der Definition 1.13 für ein $p\in[1,\infty)$ gilt, so für alle $p\in[1,\infty)$. Für die zugehörigen $\mathcal{R}$-Schranken $\mathcal{R}_p(\mathcal{T})$ gilt*

$$\frac{1}{C_p^2}\mathcal{R}_2(\mathcal{T})\le\mathcal{R}_p(\mathcal{T})\le C_p^2\mathcal{R}_2(\mathcal{T})$$

mit den Konstanten C_p aus Satz 2.5.

b) Eine Menge $\mathcal{T}\subset L(X,Y)$ ist genau dann $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}_2(\mathcal{T})\le C$, wenn für alle $N\in\mathbb{N}$ und alle $T_1,\dots,T_N\in\mathcal{T}$ durch

$$\mathbf{T}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\; y_n := \begin{cases} T_n x_n, & n\le N,\\ 0, & n>N\end{cases}$$

ein beschränkter Operator $\mathbf{T}\in L(\mathrm{Rad}_2(X))$ mit Norm $\|\mathbf{T}\|\le C$ definiert wird.

Beweis. Teil a) folgt direkt aus der Ungleichung von Kahane, Teil b) ist eine Umformulierung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit und eine Anwendung der p-Unabhängigkeit aus Teil a). □

2.8 Bemerkung. a) Falls $\mathcal{T}\subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist, so ist $\mathcal{T}$ gleichmäßig beschränkt mit $\sup_{T\in\mathcal{T}}\|T\|\le\mathcal{R}(\mathcal{T})$. Dies folgt direkt aus der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit mit $N=1$.

b) Falls X und Y Hilberträume sind, so ist $\mathcal{R}$-Beschränktheit äquivalent zur gleichmäßigen Beschränktheit. Denn in diesem Fall sind auch $L^2([0,1];X)$ bzw. $L^2([0,1];Y)$ Hilberträume, und $(r_nx_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset L^2([0,1];X)$ und $(r_nT_nx_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset L^2([0,1];Y)$ sind orthogonale Folgen. Falls $\|T\|\le C_{\mathcal{T}}$ für alle $T\in\mathcal{T}\subset L(X,Y)$ gilt, so folgt

$$\Big\|\sum_{n=1}^N r_nT_nx_n\Big\|^2_{L^2[0,1];Y)} = \sum_{n=1}^N\|r_nT_nx_n\|^2_{L^2([0,1];Y)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N \|T_n\|_Y^2 \le C_{\mathcal{T}}^2 \sum_{n=1}^N \|x_n\|_X^2 \\
&= C_{\mathcal{T}}^2 \Big\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \Big\|_{L^2([0,1];X)}^2 .
\end{aligned}
$$

2.9 Bemerkung. Seien X, Y, Z Banachräume und $\mathcal{T}, \mathcal{S} \subset L(X,Y)$ und $\mathcal{U} \subset L(Y,Z)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Dann sind auch

$$\mathcal{T} + \mathcal{S} := \{T + S : T \in \mathcal{T},\ S \in \mathcal{S}\}$$

und

$$\mathcal{U}\mathcal{T} := \{UT : U \in \mathcal{U},\ T \in \mathcal{T}\}$$

$\mathcal{R}$-beschränkt mit

$$\mathcal{R}\{\mathcal{T} + \mathcal{S}\} \le \mathcal{R}(\mathcal{T}) + \mathcal{R}(\mathcal{S}),\ \mathcal{R}(\mathcal{U}\mathcal{T}) \le \mathcal{R}(\mathcal{U})\mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

Denn seien $S_n \in \mathcal{S}$, $T_n \in \mathcal{T}$ und $U_n \in \mathcal{U}$ für $n = 1, \dots, N$. Dann folgt die Behauptung aus

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n (T_n + S_n) x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)} \le \Big\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)} + \Big\| \sum_{n=1}^N r_n S_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)}$$

und

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n U_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Z)} \le \mathcal{R}(\mathcal{U}) \Big\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)} .$$

2.10 Lemma (Square function estimate). *Sei $X = L^q(\Omega;\mu)$ mit einem σ-finiten Maß μ auf Ω, und sei $1 \le q < \infty$. Dann ist $\mathcal{T} \subset L(X)$ genau dann $\mathcal{R}$-beschränkt, falls ein $M > 0$ existiert mit*

$$\Big\| \Big(\sum_{j=1}^N |T_n f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(\Omega;\mu)} \le M \Big\| \Big(\sum_{j=1}^N |f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(\Omega;\mu)}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$, $T_n \in \mathcal{T}$ und $f_n \in L^q(\Omega;\mu)$.

Beweis. Wir schreiben $f \approx g$, falls es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt mit $C_1|f| \le |g| \le C_2|f|$. Um die $\mathcal{R}$-Beschränktheit nachzurechnen, können wir nach der Ungleichung von Kahane die $\mathcal{R}$-Schranke $\mathcal{R}_q$ betrachten. Man berechnet

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n f_n \Big\|_{L^q([0,1];L^q(\Omega;\mu))}^q = \int_0^1 \Big\| \sum_{n=1}^N r_n(t) \|f_n(\cdot)\|_{L^q(\Omega;\mu)}^q dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_\Omega \Big| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega) \Big|^q d\mu(\omega)\, dt \\
&= \int_\Omega \int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega) \Big|^q dt d\mu(\omega) \\
&\approx \int_\Omega \Big(\int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega) \Big|^2 dt \Big)^{q/2} d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega \Big(\sum_{n=1}^N |f_n(\omega)|^2 \Big)^{q/2} d\mu(\omega) \\
&= \Big\| \Big(\sum_{n=1}^N |f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(\Omega;\mu)}^q .
\end{aligned}
$$

Dabei wurden der Satz von Fubini und die Khinchine-Ungleichung verwendet. Auf beide Seiten der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit angewendet, erhalten wir die Behauptung. □

2.11 Beispiel. Die Familie $\{T_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subset L(L^p(\mathbb{R}))$, $T_n f(\cdot) := f(\cdot - n)$ von Translationen ist für $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$ nicht $\mathcal{R}$-beschränkt. Denn für $f_n = \chi_{[0,1]}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\Big\| \Big(\sum_{n=0}^{N-1} |T_n f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|\chi_{[0,N]}\|_{L^p(\mathbb{R})} = N^{1/p}, \\
\Big\| \Big(\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} &= N^{1/2} \|\chi_{[0,1]}\|_{L^p(\mathbb{R})} = N^{1/2},
\end{aligned}
$$

und für $1 \le p < 2$ gilt $\frac{N^{1/p}}{N^{1/2}} \to \infty$ für $N \to \infty$. Ähnlich geht der Beweis für $p > 2$.

2.12 Lemma. *a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$. Zu $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ definiere $m_\varphi \in L(L^p(\Omega; X))$ durch $(m_\varphi f)(x) := \varphi(x) f(x)$. Dann gilt für $r > 0$*

$$
\mathcal{R}_p\Big(\{ m_\varphi : \varphi \in L^\infty(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \le r \} \Big) \le 2r.
$$

b) Sei $1 \le p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{T} \subset L(L^p(\Omega; X), L^p(\Omega; Y))$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}$-Schranke τ. Dann gilt

$$
\mathcal{R}_p\Big(\{ m_\varphi T m_\psi : T \in \mathcal{T},\ \varphi, \psi \in L^\infty(\Omega), \|\varphi\|_\infty \le r,\ \|\psi\|_\infty \le s \} \Big) \le 4rs\tau.
$$

Beweis. a) Nach dem Satz von Fubini und dem Kontraktionsprinzip gilt

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^N r_k m_{\varphi_k} f_k\Big\|_{L^p([0,1];L^p(\Omega;X))} &= \Big\|\sum_{k=1}^N r_k \varphi_k f_k\Big\|_{L^p(\Omega;L^p([0,1];X))}\\ &\le 2r\Big\|\sum_{k=1}^N r_k f_k\Big\|_{L^p(\Omega;L^p([0,1];X))}\\ &= 2r\Big\|\sum_{k=1}^N r_k f_k\Big\|_{L^p([0,1];L^p(\Omega;X))}.\end{aligned}$$

b) folgt aus a) und Bemerkung 2.9. □

2.13 Satz. *Sei $\mathcal{T}\subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Dann sind auch*

$$\operatorname{co}\mathcal{T} := \Big\{\sum_{k=1}^n \lambda_k T_k : n\in\mathbb{N},\, T_k\in\mathcal{T},\, \lambda_k\in[0,1],\, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1\Big\}$$

und

$$\operatorname{aco}\mathcal{T} := \Big\{\lambda_k T_k : n\in\mathbb{N},\, T_k\in\mathcal{T},\, \lambda_k\in\mathbb{C},\, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| = 1\Big\}$$

und der Abschluss von $\operatorname{co}\mathcal{T}$ *und* $\operatorname{aco}\mathcal{T}$ *in der starken Operatortopologie $\mathcal{R}$-beschränkt mit* $\mathcal{R}(\overline{\operatorname{co}\mathcal{T}}^s)\le\mathcal{R}(\mathcal{T})$ *und* $\mathcal{R}(\overline{\operatorname{aco}\mathcal{R}}^s)\le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$.

Beweis. a) Seien $T_1,\dots,T_N\in\operatorname{co}(\mathcal{T})$. Dann existieren $\lambda_{k,j_k}\in[0,1]$, $j_k=1,\dots,m_k$, $T_{k,j_k}\in\mathcal{T}$ mit $\sum_{j_k=1}^{m_k}\lambda_{k,j_k}=1$ und $T_k=\sum_{j_k=1}^{m_k}\lambda_{k,j_k}T_{k,j_k}$.

Setze $\lambda_{k,j_k}:=0$ für $j_k>m_k$ und $l:=(j_1,\dots,j_N)$, $T_{kl}:=T_{k,j_k}$ $(k=1,\dots,N,\ l\in\mathbb{N})$ und $\lambda_l:=\lambda_{k,j_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_{k,j_N}$ für $l\in\mathbb{N}^n$. Dann ist

$$T_k=\sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l T_{kl}\quad(k=1,\dots,N),$$

wobei $\lambda_l\in[0,1]$ und $\sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l=1$. Beachte, dass es sich hierbei um endliche Summen handelt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^N r_k T_k x_k\Big\|_{L^p([0,1];Y)} &\le \sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l\Big\|\sum_{k=1}^N r_k T_{kl} x_k\Big\|_{L^p([0,1];Y)}\\ &\le \mathcal{R}(\mathcal{T})\sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l\Big\|\sum_{k=1}^N r_k x_k\Big\|_{L^p([0,1];X)}\\ &= \mathcal{R}(\mathcal{T})\Big\|\sum_{k=1}^N r_k x_k\Big\|_{L^p([0,1];X)}.\end{aligned}$$

Also gilt $\mathcal{R}(\operatorname{co}\mathcal{T}) \le \mathcal{R}(\mathcal{T})$.

b) Nach dem Kontraktionsprinzip gilt $\mathcal{R}(\mathcal{T}_0) \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$ für

$$\mathcal{T}_0 := \{\lambda T : T \in \mathcal{T},\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| \le 1\}.$$

Wegen $\operatorname{co}\mathcal{T}_0 = \operatorname{aco}\mathcal{T}$ folgt $\mathcal{R}(\operatorname{aco}\mathcal{T}) \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$ nach a).

c) Direkt aus der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit folgt die Absgeschlossenheit unter der starken Operatortopologie. □

2.14 Korollar. *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Sei*

$$\mathcal{N} := \{N \colon \Omega \to L(X,Y) \,|\, N \text{ stark messbar mit } N(\Omega) \subset \mathcal{T}\}.$$

Zu $h \in L^1(\Omega,\mu)$ und $N \in \mathcal{N}$ definiere

$$T_{N,h}x := \int_\Omega h(\omega)N(\omega)x\,d\mu(\omega) \quad (x \in X).$$

Dann ist

$$\mathcal{R}\{T_{N,h} : \|h\|_{L^1(\Omega,\mu)} \le 1,\ N \in \mathcal{N}\} \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

Beweis. Zu $x_1, \dots, x_N \in X$, $h \in L^1(\Omega,\mu)$ und $N \in \mathcal{N}$ definiere die messbare Abbildung

$$M \colon \Omega \to X^N,\ M(\omega) := \big(N(\omega)x_j\big)_{j=1,\dots,N}.$$

Dann existiert eine messbare Partition $\Omega = \sum_{j=1}^\infty \Omega_j$ und $\omega_j \in \Omega_j$ mit

$$\|N(\omega)x_k - N(\omega_j)x_k\|_Y < \varepsilon \quad \text{für fast alle } \omega \in \Omega_j \text{ und alle } k = 1, \dots, N.$$

Setze

$$S := \sum_{j=1}^\infty \Big(\int_{\Omega_j} h(\omega)d\mu(\omega)\Big)N(\omega_j).$$

Dann gilt $\|T_{N,h}x_k - Sx_k\|_Y < \varepsilon$ für alle $k = 1, \dots, N$. Somit liegt $T_{N,h}$ in der durch $x_1, \dots, x_N$ und ε gegebenen Umgebung von S bezüglich der starken Operatortopologie. Wegen $S \in \overline{\operatorname{aco}\mathcal{T}}^s$ folgt $T_{N,h} \in \overline{\operatorname{aco}\mathcal{T}}^s$, und die Behauptung ergibt sich aus Satz 2.13. □

2.15 Korollar. *Sei $N \colon \Sigma_{\theta'} \to L(X,Y)$ holomorph, und $N(\partial\Sigma_\theta \setminus \{0\})$ $\mathcal{R}$-beschränkt für ein $\theta < \theta'$. Dann ist $N(\Sigma_\theta)$ $\mathcal{R}$-beschränkt, und für jedes $\theta_1 < \theta$ ist $\{\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}N(\lambda) : \lambda \in \Sigma_{\theta_1}\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Beweis. Durch Betrachten von $M(\lambda) := N(\lambda^{2\theta/\pi})$ können wir $\theta = \frac{\pi}{2}$ annehmen. Nach der Poissonschen Formel gilt

$$N(\alpha + i\beta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (s-\beta)^2} N(is)ds \quad (\alpha > 0).$$

Wegen $\|\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+(\cdot-\beta)^2}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ folgt die erste Behauptung aus Korollar 2.14.

Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}N(\lambda) = \int_{\partial\Sigma_\theta} h_\lambda(\mu)N(\mu)d\mu \quad (\lambda \in \Sigma_{\theta_1})$$

für $h(\lambda) := \frac{1}{2\pi i}\frac{\lambda}{(\mu-\lambda)^2}$. Wegen $\sup_{\lambda\in\Sigma_{\theta_1}} \|h_\lambda\|_{L^1(\partial\Sigma_\theta)} < \infty$ folgt die zweiten Behauptung ebenfalls aus Korollar 2.14. □

2.16 Lemma. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset G$ kompakt und $H\colon G \to L(X,Y)$ holomorph. Dann ist $H(K)$ $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Beweis. Sei $z_0 \in K$. Dann existiert ein $r > 0$ mit

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} H^{(k)}(z_0)\frac{(z-z_0)^k}{k!} \quad (|z - z_0| \le r),$$

wobei die Reihe absolut konvergiert und

$$\rho_0 := \sum_{k=0}^{\infty} \|H^{(k)}(z_0)\|_{L(X,Y)}\frac{r^k}{k!} < \infty.$$

Nach Satz 2.13 folgt $\mathcal{R}(H(B(z_0, r)) \le 2\rho_0$. Durch Überdeckung von K durch endlich viele Kugeln erhält man die Behauptung. □

2.17 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 < p < \infty$. Sei Λ eine Menge und $\{k_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von messbaren Kernen $k_\lambda\colon G \times G \to L(X,Y)$ mit*

$$\mathcal{R}_p\big\{k_\lambda(z,z') : \lambda \in \Lambda\big\} \le k_0(z,z') \quad (z, z' \in G).$$

Für den zugehörigen skalaren Integraloperatoren

$$(K_0 f)(z) = \int_G k_0(z,z')f(z')dz' \quad (f \in L^p(G))$$

gelte $K_0 \in L(L^p(G))$. Definiere

$$(K_\lambda f)(z) = \int_G k_\lambda(z,z')f(z')dz' \quad (f \in L^p(G;X)).$$

Dann gilt $K_\lambda \in L(L^p(G;X), L^p(G;Y))$ mit

$$\mathcal{R}_p\big(\{K_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\big) \le \|K_0\|_{L(L^p(G))}.$$

Beweis. Wir setzen direkt in die Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{j=1}^N r_j K_{\lambda_j} f_j\Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;Y))}\\
&\qquad = \Big(\int_0^1 \Big\|\sum_{j=1}^N r_j(t)\int_G k_{\lambda_j}(\cdot,z')f_j(z')dz'\Big\|_{L^p(G;Y)}^p dt\Big)^{1/p}\\
&\qquad = \Big(\int_0^1 \Big\|\int_G \sum_{j=1}^N r_j(t)k_{\lambda_j}(\cdot,z')f_j(z')dz'\Big\|_{L^p(G;Y)}^p dt\Big)^{1/p}\\
&\qquad = \Big(\int_0^1 \int_G \Big\|\int_G \sum_{j=1}^N r_j(t)k_{\lambda_j}(z,z')f_j(z')dz'\Big\|_{Y}^p dz\, dt\Big)^{1/p}\\
&\qquad = \Big(\int_G \int_0^1 \Big\|\int_G \sum_{j=1}^N r_j(t)k_{\lambda_j}(z,z')f_j(z')dz'\Big\|_{Y}^p dt\, dz\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Definiert man $\varphi(t,z,z') := \sum_{j=1}^N r_j(t)k_{\lambda_j}(z,z')f_j(z')$, so ist das Integral über t im letzten Ausdruck gerade $\|\int_G \varphi(\cdot,z,z')dz'\|_{L^p([0,1])}^p$. Wir verwenden nun die Abschätzung

$$\Big\|\int_G \varphi(\cdot,z,z')dz'\Big\|_{L^p([0,1])} \le \int_G \|\varphi(\cdot,z,z')\|_{L^p([0,1])}dz'$$

für Bochner-Integrale und erhalten unter Verwendung der Voraussetzung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{j=1}^N r_j K_{\lambda_j} f_j\Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;Y))}\\
&\qquad \le \Big(\int_G \Big[\int_G \Big\|\sum_{j=1}^N r_j(\cdot)k_{\lambda_j}(z,z')f_j(z')\Big\|_{L^p([0,1];Y)}dz'\Big]^p dz\Big)^{1/p}\\
&\qquad \le \Big(\int_G \Big[\int_G k_0(z,z')\Big\|\sum_{j=1}^N r_j(\cdot)f_j(z')\Big\|_{L^p([0,1];X)}dz'\Big]^p dz\Big)^{1/p}\\
&\qquad = \Big\|K_0\Big(\Big\|\sum_{j=1}^N r_j f_j(\cdot)\Big\|_{L^p([0,1];X)}\Big)\Big\|_{L^p(G)}\\
&\qquad \le \|K_0\|_{L(L^p(G))}\Big\|\Big(\Big\|\sum_{j=1}^N r_j f_j(\cdot)\Big\|_{L^p([0,1];X)}\Big)\Big\|_{L^p(G)}\\
&\qquad = \|K_0\|_{L(L^p(G))}\Big\|\sum_{j=1}^N r_j f_j\Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;X))}
\end{aligned}$$

□

Wir wissen nach dem Satz von Weis, dass ein sektorieller Operator A genau dann maximale Regularität besitzt, falls er $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}$-Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$ ist. Die obigen Aussagen über $\mathcal{R}$-Beschränktheit erlauben es eine Reihe dazu äquivalenter Aussagen zu formulieren.

2.18 Satz. *Sei A der Erzeuger einer beschränkten holomorphen Halbgruppe T. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}$-Winkel $\varphi_{\mathcal{R}} = \frac{\pi}{2} + \delta$, $\delta > 0$.*

(ii) *Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\{t^n(it - A)^{-n} : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist.*

(iii) *Die Familie $\{T_z : z \in \Sigma_\delta\}$ ist $\mathcal{R}$-beschränkt.*

(iv) *Die Familie $\{T_t, tAT_t : t > 0\}$ ist $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Zum Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii) ist klar.

(ii)$\Longrightarrow$(i). Schreibe

$$(it - A)^{-n+1} = (n-1)i \int_t^\infty (is - A)^{-n} ds$$

und damit

$$(it)^{n-1}(it - A)^{-n+1} = \int_0^\infty h_t(s)\big[(is)^n(is - A)^{-n}\big] ds$$

für die Funktion $h_t(s) := (n-1)t^{n-1}s^{-n}\chi_{[t,\infty)}$. Es gilt $\int_0^\infty h_t(s)ds = 1$, und nach Korollar 2.14 folgt die Aussage (ii) für $n-1$ anstelle von n. Iterativ erhält man, dass (ii) für $n = 1$ gilt. Verwende nun Korollar 2.15, um die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_{\pi/2}\}$ zu zeigen. Durch Reihenentwicklung (ähnlich wie beim Beweis der Analyzität einer Halbgruppe) kann man zeigen, dass $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ sogar auf einem größeren Sektor $\mathcal{R}$-beschränkt ist.

(iii)$\Longrightarrow$(i). Dies folgt ebenfalls aus Korollar 2.14 und der Darstellung

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t dt.$$

(i)$\Longrightarrow$(iii) folgt analog aus

$$T_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

(iii)$\Longleftrightarrow$(iv) kann man unter Verwendung von Korollar 2.15 zeigen. □

b) Fourier-Multiplikatoren

Seien X, Y Banachräume, $1 < p < \infty$ und sei $m\colon \mathbb{R}^n \to L(X,Y)$ eine beschränkte messbare Funktion. Wegen $\mathscr{F}^{-1} \in L(L^1(\mathbb{R}^n;X), L^\infty(\mathbb{R}^n;Y))$ induziert m eine Abbildung $T_m\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;X) \to L^\infty(\mathbb{R}^n;Y)$ durch

$$T_m f := \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} f \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;X)).$$

Die Funktion m heißt Fourier-Multiplikator, falls

$$\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;Y)} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X)} \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;X)),$$

d.h. falls T_m eindeutig zu einem stetigen Operator $T_m \in L(L^p(\mathbb{R}^n;X), L^p(\mathbb{R}^n;Y))$ fortgesetzt werden kann. Der Satz von Michlin (andere Schreibweise Mihlin) gibt hinreichende Kriterien dafür im skalaren Fall $X = Y = \mathbb{C}$ an: Falls $m \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit

$$|\xi|^{|\alpha|}|D^\alpha m(\xi)| \le C_\alpha \quad \Big(\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ |\alpha| \le \Big[\frac{n}{2}\Big] + 1\Big),$$

so ist $\|T_m\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le C\sum_\alpha C_\alpha$. Eine weitere hinreichende Bedingung ist $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\big|\xi^\alpha D^\alpha m(\xi)\big| \le C_\alpha \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \alpha \in \{0,1\}^n).$$

Für allgemeine Banachräume X, Y ist keines der beiden Kriterien hinreichend. Falls X und Y von Klasse $\mathcal{HT}$ sind, so gilt jedoch das Analogon des Michlinschen Satzes, wenn man die Normbeschränktheit durch die $\mathcal{R}$-Beschränktheit ersetzt, wie der folgende Satz zeigt. Die Aussage dieses Satzes mit $n = 1$ ist auch die wesentliche Beweiszutat des Satzes von Weis über maximale Regularität.

2.19 Satz. *Seien X, Y Banachräume von Klasse $\mathcal{HT}$, und sei $1 < p < \infty$. Sei $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; L(X,Y))$ mit*

$$\mathcal{R}\Big(\big\{|\xi|^{|\alpha|}D^\alpha m(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \alpha \in \{0,1\}^n\big\}\Big) =: \kappa < \infty.$$

Dann ist m ein vektorwertiger Fourier-Multiplikator mit

$$\|T\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n;X), L^p(\mathbb{R}^n;Y))} \le C\kappa,$$

wobei die Konstante C nur von n, p, X und Y abhängt.

Der Beweis dieses Satzes ist selbst für $X = Y = \mathbb{C}$ kompliziert, im vektorwertigen Fall siehe [10] oder [6].

Man beachte, dass in diesem Satz die $\mathcal{R}$-Beschränktheit gefordert wird, um die Norm-Beschränktheit der zugehörigen Fourier-Multiplikatoren zu erhalten. Um sogar $\mathcal{R}$-Beschränktheit zu erhalten (und damit eine Art Iteration möglich zu machen), braucht man noch eine weitere Eigenschaft der Banachräume X und Y.

2.20 Definition. Ein Banachraum X hat die Eigenschaft (α) (englisch: „property (α)“), falls eine Konstante $C > 0$ so existiert, dass für alle $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, $|\alpha_{ij}| \leq 1$ und alle $x_{ij} \in X$ gilt:

$$\int_0^1 \int_0^1 \Big\| \sum_{i,j=1}^N r_i(u) r_j(u) \alpha_{ij} x_{ij} \Big\|_X du dv \leq C \int_0^1 \int_0^1 \Big\| \sum_{i,j=1}^N r_i(u) r_j(v) x_{ij} \Big\|_X du dv.$$

D.h. das Kontraktionsprinzip gilt sogar für Doppelsequenzen $(r_i r_j)_{i,j=1}^N$. Hierbei sind r_i wieder die Rademacher-Funktionen.

2.21 Bemerkung. a) Die Eigenschaft (α) ist unabhängig von der Eigenschaft, dass X von Klasse $\mathcal{HT}$ ist.

b) Falls $X = L^p(\Omega, \mu)$ mit einem σ-finiten Maß μ, so hat X die Eigenschaft (α), wie man leicht mit Hilfe des Satzes von Fubini sieht. Falls X ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(\Omega, \mu)$ ist, gilt Eigenschaft (α) ebenfalls. Somit haben insbesondere Sobolev- und Besovräume die Eigenschaft (α).

c) Falls X die Eigenschaft (α) hat und $Y = L^p(\Omega, \mu; X)$ für ein σ-finites Maß μ ist, so hat auch Y die Eigenschaft (α). Auch dies folgt schnell mit dem Satz von Fubini.

Für Räume mit Eigenschaft (α) von Klasse $\mathcal{HT}$ gilt folgende Verschärfung des vektorwertigen Satzes von Michlin.

2.22 Satz. *Seien X, Y Banachräume von Klasse $\mathcal{HT}$ mit Eigenschaft (α). Sei $\mathcal{T} \subset L(X, Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Betrachte die Menge*

$$M := \Big\{ m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; L(X, Y)) : \xi^\alpha D^\alpha m(\xi) \in \mathcal{T} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, \alpha \in \{0,1\}^n \Big\}.$$

Dann ist $\{T_m : m \in M\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n; X), L^p(\mathbb{R}^n; Y))$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}_p(\{T_m : m \in M\}) \leq C \mathcal{R}_p(\mathcal{T})$, wobei die Konstante C nur von p, m, X und Y abhängt.

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in [10].

2.23 Korollar. *Sei $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von matrizenwertigen Funktionen $m_\lambda \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N \times N})$ mit*

$$|\xi^\alpha D^\alpha m_\lambda(\xi)|_{\mathbb{C}^{N\times N}} \leq C_0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, \alpha \in \{0,1\}^n,\, \lambda \in \Lambda).$$

Dann ist $\{T_{m_\lambda} : \lambda \in \Lambda\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N))$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit Schranke $C \cdot C_0$, wobei C nur von p und N abhängt.

Beweis. Der Raum $X = \mathbb{C}^N$ ist von Klasse $\mathcal{HT}$ und besitzt die Eigenschaft (α). Offensichtlich ändert sich die Eigenschaft der $\mathcal{R}$-Beschränktheit nicht, wenn man auf X zu einer äquivalenten Norm übergeht, d.h. wir können die euklidische Norm auf X wählen. Nach Voraussetzung ist

$$\big\{\xi^\alpha D_\xi^\alpha m_\lambda(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, \alpha \in \{0,1\}^n,\, \lambda \in \Lambda\big\} \subset L(X)$$

normbeschränkt und damit, da X Hilbertraum ist, auch $\mathcal{R}$-beschränkt. Man wählt in Satz 2.22 $\mathcal{T} := \{A \in \mathbb{C}^{N\times N} : |A| \le C_0\}$ und erhält die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\{T_{m_\lambda} : \lambda \in \Lambda\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))$. □

3. Parabolische Differentialgleichungssysteme

3.1 Worum geht's? Als erste Anwendung der bisherigen Abschnitte werden hier parabolische Differentialgleichungssysteme betrachtet. Es wird gezeigt, dass unter geeigneten Glattheitsannahmen die zugehörige L^p-Realisierung maximale Regularität besitzt. Die Beweisidee beruht dabei auf einem Standardzugang elliptischer bzw. parabolischer Theorie: Man betrachtet zunächst das zugehörige Modellproblem und wendet dann Lokalisierung und Störungssätze an.

Im folgenden sei $1 < p < \infty$ und $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} = \Sigma_{\pi/2}$. Gegeben sei ein Differentialoperator $A = A(x, D)$ der Form

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

mit $m \in \mathbb{N}$ und matrizenwertigen Koeffizienten $a_\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{N\times N}$. Die Definition von Parabolizität, welche wir im folgenden verwenden, verwendet den Ansatz der Parameter-Elliptizität, wobei wir (da die Koeffizienten in einem unbeschränkten Gebiet gegeben sind) noch eine Gleichmäßigkeit in x verlangen müssen.

Zum (formalen) Differentialoperator $A = A(x, D)$ definiert man das Symbol

$$a(x, \xi) := \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

und das Hauptsymbol

$$a_0(x, \xi) := \sum_{|\alpha|= 2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Beide Symbole sind Abbildungen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{C}^{N\times N}$. Die L^p-Realisierung A_p von $A(x, D)$ ist definiert als unbeschränkter linearer Operator $A_p \colon L^p(\mathbb{R}^n) \supset D(A_p) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

$$D(A_p) := W_p^{2m}(\mathbb{R}^n),\ A_p u := A(x, D)u \quad (u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)).$$

Die Parameter-Elliptizität wurde in Teil II der Vorlesung für skalare Operatoren definiert und analysiert. Hier ist das Symbol matrizenwertig, und die folgende Definition verwendet Parameter-Elliptizität der Determinante.

3.2 Definition. Der Operator $A(x, D)$ heißt parabolisch, falls

$$\big|\det(a_0(x,\xi)-\lambda)\big| \ge C_P\big(|\xi|^{2m}+|\lambda|\big)^N \quad \big(x \in \mathbb{R}^n,\ (\xi,\lambda) \in (\mathbb{R}^n\times\overline{\mathbb{C}}_+)\setminus\{(0,0)\}\big). \tag{P}$$

3.3 Bemerkung. a) Im skalaren Fall $N = 1$ stimmt diese Definition mit der Definition der gleichmäßigen Parameter-Elliptizität in $\overline{\mathbb{C}}_+$ aus Teil II der Vorlesung überein. Für $N > 1$ ist die obige Bedingung die Parabolizität der Determinante.

b) Für jedes feste $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $(\xi,\lambda) \mapsto p(x,\xi,\lambda) := \det(a_0(x,\xi)-\lambda)$ quasihomogen im Sinn

$$p(x,r\xi,r^{2m}\lambda) = r^{2mN} p(x,\xi,\lambda) \quad \big((\xi,\lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus \{(0,0)\}\big).$$

Damit kann man sich auf die kompakte Menge $\{(\xi,\lambda) : |\xi|^{2m} + |\lambda| = 1\}$ beschränken. Der Operator $A(x,D)$ ist genau dann parabolisch, falls

$$\inf\big\{|\det(a_0(x,\xi)-\lambda)| : x \in \mathbb{R}^n,\ (\xi,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{C}}_+ \text{ mit } |\xi|^{2m} + |\lambda| = 1\big\} > 0.$$

c) Falls $a_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| < 2m$, so können die Terme niederer Ordnung des Symbols gleichmäßig in x abgeschätzt werden, und $A(x,D)$ ist genau dann parabolisch, falls Konstanten $C, R > 0$ existieren mit

$$|\det(a(x,\xi)-\lambda)| \geq C(|\xi|^{2m} + |\lambda|)^N \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\xi| \geq R).$$

Dies entspricht der Definition der Parabolizität bei Pseudodifferentialoperatoren, bei welchen im allgemeinen kein Hauptsymbol existiert. (Ein homogenes Hauptsymbol ist nur bei klassischen Pseudodifferentialoperatoren definiert.)

3.4 Bemerkung. Falls $A(x,D)$ parabolisch ist, so ist $A(x,D)$ parameterelliptisch in einem größeren Sektor $\overline{\Sigma}_\theta$ mit $\theta > \frac{\pi}{2}$, d.h. die Bedingung (P) gilt noch für alle λ in diesem Sektor. Denn es wurde in Teil II der Vorlesung gezeigt, dass die Menge der Winkel der Halbstrahlen, in welchen Bedingung (P) gilt, offen ist.

Nach einem Standardschema in elliptischer Theorie betrachten wir zunächst das zugehörige Modellproblem.

3.5 Satz. *Sei $A(D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$ mit $a_\alpha \in \mathbb{C}^{N\times N}$ $(|\alpha| = 2m)$. Falls $A(D)$ parabolisch mit Konstante C_P ist, so gilt $\rho(A_p) \supset \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$, und die Menge*

$$\big\{\lambda(\lambda - A_p)^{-1} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}\big\}$$

ist $\mathcal{R}$-beschränkt. Die $\mathcal{R}$-Schranke hängt dabei nur von p, n, m, N, C_P und von

$$M := \sum_{|\alpha|=2m} |a_\alpha|_{\mathbb{C}^{N\times N}}$$

ab. Insbesondere ist A_p $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}$-Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$, und $A_p \in MR(L^p(\mathbb{R}^n))$.

Beweis. Wegen Voraussetzung (P) ist für $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ das Symbol $(\lambda - a_0(\xi))^{-1}$ definiert. Wir zeigen, dass die Familie $\{m_\lambda : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}\}$ mit $m_\lambda(\xi) := \lambda(\lambda - a_0(\xi))^{-1}$ die Voraussetzung von Korollar 2.23 erfüllt.

Da für $r > 0$ gilt $r^{2m}\lambda - a_0(r\xi) = r^{2m}(\lambda - a_0(\xi))$, ist die Abbildung $(\xi,\lambda) \mapsto \frac{1}{\lambda}(\lambda - a_0(\xi))$ quasihomogen in (ξ,λ) vom Grad 0. Damit gilt dasselbe für die Abbildung

$(\xi,\lambda) \mapsto \lambda(\lambda - a_0(\xi))^{-1}$. Da quasihomogene und glatte Funktionen die Michlin-Bedingung erfüllen (siehe Teil II der Vorlesung), folgt nach Korollar 2.23 die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\{T_{m_\lambda} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n))$. Wegen $\frac{1}{\lambda} T_{m_\lambda}(\lambda - A_p) = \mathrm{id}_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)}$ und $\frac{1}{\lambda}(\lambda - A_p) T_{m_\lambda} = \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ ist $T_{m_\lambda} = \lambda(\lambda - A_p)^{-1}$. Nach Satz 2.18 ist A_p $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$, und nach Satz 1.15 besitzt A_p maximale L^q-Regularität für alle $q \in (1,\infty)$. Dies zeigt alle Behauptungen des Satzes bis auf die Abhängigkeit der $\mathcal{R}$-Schranke. Um diese nachzuweisen, müssen wir die Michlin-Konstante quantifizieren.

Dazu schreiben wir

$$(\lambda - a_0(\xi))^{-1} = \frac{1}{\det(\lambda - a_0(\xi))} b(\xi,\lambda)$$

mit der adjunkten Matrix $b(\xi,\lambda)$. Die Elemente von $b(\xi,\lambda)$ sind Determinanten von $(N-1)\times(N-1)$-Matrizen, welche durch Streichen einer Zeile und einer Spalte aus der Matrix $\lambda - a_0(\xi)$ entstehen. Damit gilt

$$|b(\xi,\lambda)| \le C(m,n,M,N)(|\xi|^{2m} + |\lambda|)^{N-1}.$$

Mit Voraussetzung (P) folgt

$$|\lambda(\lambda - a_0(\xi))^{-1}| \le C(m,n,M,N,C_p)\frac{|\lambda|}{|\xi|^{2m} + |\lambda|} = C(m,n,M,N,C_p).$$

Für die Ableitung beachte man, dass

$$\begin{aligned}\Big|\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} a_0(\xi)\Big| &= \Big|\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \sum_{|\alpha=2m|} a_\alpha \xi^\alpha\Big| \\ &\le \sum_{|\alpha|=2m} |a_\alpha| \Big|\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \xi^\alpha\Big| \\ &\le 2mM|\xi|^{2m}.\end{aligned}$$

Iterativ folgt $|\xi^\alpha D_\xi^\alpha a_0(\xi)| \le C(m,n,M,N)|\xi|^{2m}$ für alle $\alpha \in \{0,1\}^n$. Genauso lässt sich die Ableitung von $b(\xi,\lambda)$ abschätzen, und man erhält

$$|\xi^\alpha D_\xi^\alpha b(\xi,\lambda)| \le C(m,n,M,N)(|\xi|^{2m} + |\lambda|)^{N-1}.$$

Mit der Produktregel erhält man für die inverse Matrix

$$|\xi^\alpha D_\xi^\alpha (\lambda - a_0(\xi))^{-1}| \le C(m,n,M,N,C_P)(|\xi|^{2m} + |\lambda|)^{-1},$$

d.h. $|\xi^\alpha D_\xi^\alpha m_\lambda(\xi)| \le C(m,n,M,N,C_P)$ für alle $\alpha \in \{0,1\}^n, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Nach Satz 2.18 hängt somit die $\mathcal{R}$-Schranke von $\{\lambda(\lambda - A_p)^{-1} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}\}$ nur von m, n, M, N, C_P und p ab. □

Um Operatoren mit nichtkonstanten Koeffizienten behandeln zu können, benötigen wir noch Störungsresultate für $\mathcal{R}$-Beschränktheit. Dazu definieren wir für einen $\mathcal{R}$-sektoriellen Operator A mit Winkel φ und für $\theta < \varphi$ die Größen

$$
\begin{aligned}
&M_\theta(A) := \sup\big(\{\|\lambda(\lambda-A)^{-1}\| : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big),\\
&\widetilde{M}_\theta(A) := \sup\big(\{\|A(\lambda-A)^{-1}\| : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big).R_\theta(A) \quad := \mathcal{R}\big(\{\lambda(\lambda-A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big),\\
&\widetilde{R}_\theta(A) := \mathcal{R}\big(\{A(\lambda-A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big).
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass auch $\widetilde{M}_\theta(A)$ endlich ist wegen $A(\lambda-A)^{-1} = \lambda(\lambda-A)^{-1} - 1$. Analog für $\widetilde{R}_\theta(A)$.

3.6 Satz. *Sei X ein Banachraum und A ein $\mathcal{R}$-sektorieller Operator in X mit Winkel $\varphi_{\mathcal{R}}(A) > 0$, und sei $\theta \in (0, \varphi_{\mathcal{R}}(A))$. Sei B ein linearer Operator in X mit $D(B) \supset D(A)$ und*

$$\|Bx\| \le a\|Ax\| \quad (x \in D(A)).$$

Falls $a < \frac{1}{\widetilde{R}_\theta(A)}$, so ist $A+B$ wieder $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel größer gleich θ und

$$R_\theta(A+B) \le \frac{R_\theta(A)}{1 - a\widetilde{R}_\theta(A)}.$$

Beweis. Für $\lambda \in \overline{\Sigma_\theta} \setminus \{0\}$ gilt

$$\|B(\lambda-A)^{-1}x\| \le a\|A(\lambda-A)^{-1}x\| \le a\widetilde{M}_\theta(A)\|x\| \quad (x \in X).$$

Wegen $a < \frac{1}{\widetilde{R}_\theta(A)}$ ist also $1 + B(\lambda-A)^{-1}$ invertierbar, und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
(\lambda-(A+B))^{-1} &= (\lambda-A)^{-1}\big[1 + B(\lambda-A)^{-1}\big]^{-1}\\
&= (\lambda-A)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-B(\lambda-A)^{-1})^n.
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist $\rho(A+B) \supset \Sigma_\theta$. Nach Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit und nach Voraussetzung folgt

$$\mathcal{R}(\{B(\lambda-A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}) \le a\mathcal{R}(\{A(\lambda-A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}) = a\widetilde{R}_\theta(A).$$

Setzt man dies in die Reihe ein, erhält man

$$R_\theta(A+B) \le \frac{R_\theta(A)}{1 - a\widetilde{R}_\theta(A)}.$$

Dies zeigt auch, dass $A+B$ $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\ge \theta$ ist. □

Das nächste Störungsresultat lässt noch einen zusätzlichen Term $\|x\|$ auf der rechten Seite zu. Allerdings erkauft man sich hier die $\mathcal{R}$-Sektorialität mit einer Verschiebung des Operators.

3.7 Satz. *Sei A $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\varphi_{\mathcal{R}}(A) > 0$, und sei $\theta < \varphi_{\mathcal{R}}(A)$. Sei B ein linearer Operator mit $D(B) \supset D(A)$ und*

$$\|Bx\| \le a\|Ax\| + b\|x\| \quad (x \in D(A))$$

mit zwei Konstanten $b \ge 0$ und $0 \le a < \big[\widetilde{M}_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)\big]^{-1}$. Dann ist $A + B - \mu$ $\mathcal{R}$-sektoriell für

$$\mu > \frac{bM_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}{1 - a\widetilde{M}_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}$$

mit Winkel $\varphi_{\mathcal{R}}(A + B - \mu) \ge \theta$.

Beweis. Für $\mu > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\|B(A-\mu)^{-1}x\| &\le a\|A(A-\mu)^{-1}x\| + b\|(A-\mu)^{-1}x\| \\ &\le \big(a\widetilde{M}_\theta(A) + \frac{b}{\mu}M_\theta(A)\big)\|x\| \quad (x \in X).\end{aligned}$$

Damit erfüllt B die Voraussetzung von Satz 3.6 mit $A - \mu$ anstelle von A. Dabei war die Bedingung an die Konstante in Satz 3.6 gegeben durch $c(\mu)\widetilde{R}_\theta(A) < 1$ für $c := a\widetilde{M}_\theta(A) + \frac{b}{\mu}M_\theta(A)$. Wegen $a\widetilde{M}_\theta(A) < 1$ ist dies der Fall für

$$\mu > \frac{bM_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}{1 - a\widetilde{M}_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}.$$

□

3.8 Lemma (Kleine Störung im Hauptteil). *Sei $A(x, D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$ parabolisch mit Konstante C_P. Dann existiert ein $\theta > \frac{\pi}{2}$ so, dass $A(x, D)$ parameterelliptisch in $\overline{\Sigma}_\theta$ ist, und es existieren $\varepsilon > 0$, $\theta > \frac{\pi}{2}$ und $K > 0$ so, dass für alle Operatoren $B(x, D) = \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha(x)D^\alpha$ mit $b_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N\times N})$ und*

$$\sum_{|\alpha|=2m} \|b_\alpha\|_\infty < \varepsilon$$

die Abschätzung

$$\mathcal{R}\Big(\big\{\lambda(\lambda - (A_p + B_p))^{-1} : \lambda \in \overline{\Sigma}_\theta \setminus \{0\}\big\}\Big) \le K.$$

Dabei hängen ε und K nur von n, p, m, N, C_P ab.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $f \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$. Dann gilt

$$\|Bf\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)} \le \sum_{|\alpha|=2m} \|b_\alpha\|_\infty \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)} \le \varepsilon \max_{|\alpha|=2m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)},$$

falls B die obige Bedingung erfüllt. Schreibe nun

$$D^\alpha f = (\mathscr{F}^{-1} m_\alpha \mathscr{F}) A(D) f$$

mit

$$m_\alpha(\xi) := \xi^\alpha \Big(\sum_{|\beta|=2m} a_\beta \xi^\beta \Big)^{-1}.$$

Es gilt $m_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N\times N})$, und m_α ist homogen vom Grad 0 und erfüllt daher die Michlin-Bedingung. Somit existiert ein $C_1 > 0$ so, dass für die zugehörigen Operatoren T_{m_α} gilt

$$\|T_{m_\alpha}\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))} \le C_1 \quad (|\alpha| = 2m).$$

Wähle nun $\varepsilon < \big[C_1(\widetilde{R}_\theta(A) + 1)\big]^{-1}$. Dann gilt

$$\|Bf\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)} \le \varepsilon C_1 \|Af\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)} \le a \|Af\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}$$

mit $a = \frac{1}{\widetilde{R}_\theta(A)+1}$. Nach Satz 3.6 ist $A_p + B_p$ $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\ge \theta$ und

$$R_\theta(A+B) \le \frac{R_\theta(A)}{1 - a\widetilde{R}_\theta(A)} =: K.$$

□

Die letzte Aussage betrachtete eine kleine Störung im Hauptteil. Falls der Operator A im Hauptteil gleichmäßig stetige Koeffizienten besitzt, kann man durch Lokalisieren auf diesen Fall kommen. Dabei ist das Gebiet hier nicht beschränkt, und man benötigt eine unendliche Partition. Dies wird im folgenden Lemma behandelt.

3.9 Lemma. *Zu $r > 0$ existiert ein $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $\operatorname{supp}\varphi \subset (-r,r)^n$ und*

$$\sum_{l \in r\mathbb{Z}^n} \varphi_l^2(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

wobei $\varphi_l(x) := \varphi(x - l)$.

Beweis. a) Wir betrachten zunächst den Fall $r = 1$ und $n = 1$. Wähle ein $\varphi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\varphi_1 > 0$ in $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $\operatorname{supp}\varphi_1 = [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$ und $\varphi_1(x) = \varphi_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Setze

$$\varphi(x) := \sqrt{\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x) + \varphi_1^2(1-x)}} \quad (x \ge 0)$$

und $\varphi(x) := \varphi(-x)$ für $x < 0$. Dann ist $\operatorname{supp}\varphi \subset (-1,1)$, und für $x \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi_l^2(x) &= \varphi^2(x) + \varphi^2(x-1) = \varphi^2(x) + \varphi^2(1-x) \\ &= \frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x)+\varphi_1^2(1-x)} + \frac{\varphi_1^2(1-x)}{\varphi_1^2(1-x)+\varphi_1^2(x)} = 1.\end{aligned}$$

Da $\sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi_l^2$ periodisch mit Periode 1 ist, folgt $\sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi_l^2 = 1$ in $\mathbb{R}$.

b) Im allgemeinen Fall setze $\varphi^{(n)}(x) := \prod_{j=1}^n \varphi(\frac{x_j}{r})$ mit φ aus Teil a). Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{l\in r\mathbb{Z}^n} \varphi^2(x-l) &= \sum_{l\in r\mathbb{Z}^n} \prod_{j=1}^n \varphi^2\Big(\frac{x_j-l_j}{r}\Big) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\prod_{j=1}^n \varphi^2(y_j-l_j) \\ &= \prod_{j=1}^n \sum_{l_j\in\mathbb{Z}} \varphi^2(y_j-l_j) = 1\end{aligned}$$

für $y := \frac{x}{r}$. □

3.10 Satz ($\mathcal{R}$-Sektorialität parabolischer Systeme)**.** *Sei $A(x,D) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$ mit*

$$\begin{aligned}a_\alpha &\in BUC(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^{N\times N}) \quad (|\alpha| = 2m),\\ a_\alpha &\in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^{N\times N}) \quad (|\alpha| < 2m).\end{aligned}$$

Sei $1 < p < \infty$. Falls $A(x,D)$ parabolisch ist, so existieren $\theta > \frac{\pi}{2}$ und $\mu > 0$ so, dass $A_p - \mu$ $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel θ ist. Inbesondere besitzt $A_p - \mu$ maximale L^q-Regularität für alle $1 < q < \infty$.

Beweis. Da $A(x,D)$ parabolisch ist, existiert ein $\theta > \frac{\pi}{2}$ so, dass $A(x,D)$ parameter-elliptisch in $\overline{\Sigma}_\theta$ ist. Der Beweis des Satzes erfolgt in mehreren Schritten durch Lokalisierung.

Grob gesprochen handelt es sich um folgende Schritte:

(1) Man friert die Koeffizienten an der Stelle $\ell \in \Gamma$ ein, wobei das Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ so gewählt wird, dass innerhalb eines Würfels des Gitters der (lokalisierte) Operator A^ℓ nur eine kleine Störung des zugehörigen Operators des Modellproblems ist. Dabei wird Lemma 3.8 benutzt um zu zeigen, dass A^ℓ $\mathcal{R}$-sektoriell ist.

(2) Man betrachtet die Folge $A := (A^\ell)_{\ell\in\Gamma}$ aller in (1) erhaltenen Operatoren und zeigt, dass diese Folge in einem geeigneten Folgenraum X_0 wieder $\mathcal{R}$-sektoriell ist.

(3) Die L^p-Realisierung A_p und der Operator A besitzen im wesentlichen dieselben Eigenschaften bis auf Operatoren niedrigerer Ordnung. Genauer gilt $JA_p = AJ$ und

$A_pP = PA$ bis auf Operatoren niedrigerer Ordnung, wobei J bzw. P der Lokalisierungsoperator bzw. der Operator des Zusammensetzens ist.

(4) Unter Verwendung der Interpolationsungleichung für Sobolevräume lassen sich die Operatoren niedrigerer Ordnung aus (3) als kleine Störung auffassen, und man erhält aus der $\mathcal{R}$-Sektorialität von A die $\mathcal{R}$-Sektorialität für A_p.

Im einzelnen können diese Schritte folgendermaßen ausgeführt werden.

(1) Wähle $\varepsilon = \varepsilon(n, p, m, N, C_p)$ wie in Lemma 3.8. Da $a_\alpha \in BUC(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N\times N})$, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\sum_{|\alpha|=2m} |a_\alpha(x) - a_\alpha(y)| < \varepsilon \quad (|x-y| \le \delta,\ |\alpha| = 2m).$$

Wähle $r > 0$ und $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ wie in Lemma 3.9. Wir schreiben $Q := (-r, r)^n$ und $Q_\ell := Q + \ell$ für $\ell \in r\mathbb{Z}^n =: \Gamma$. Wähle weiter $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subset Q$, $0 \le \psi \le 1$, $\psi = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi$, und setze $\psi_\ell(x) := \psi(x - \ell) \quad (\ell \in \mathbb{Z})$. Definiere die Koeffizienten

$$a_\alpha^\ell(x) := \begin{cases} a_\alpha(x), & x \in Q_\ell, \\ a_\alpha(\ell), & x \notin Q_\ell \end{cases} \quad (\ell \in \Gamma,\ |\alpha| = 2m)$$

und $A^\ell(x, D) := \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha^\ell(x) D^\alpha$. Dann gilt für den Hauptteil $A_0(x, D) = A^\ell(x, D) \quad (x \in Q_\ell)$ und damit $A_0(x, D)u = A^\ell(x, D)u$ für alle $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$ mit $\operatorname{supp} u \subset Q_\ell$.

(2) Setze $X_0 := \ell_p(\Gamma; L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N))$ und definiere in X_0 den Operator $A\colon X_0 \supset D(A) \to X_0$ durch $D(A) := X_{2m} := \ell_p(\Gamma; W_p^{2m}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N))$ und

$$A(u_\ell)_{\ell\in\Gamma} := (A^\ell u_\ell)_{\ell\in\Gamma}.$$

Nach Lemma 3.8 ist A^ℓ $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}(A^\ell) \le K$, wobei K nicht von ℓ abhängt. Wir zeigen, dass dies auch für A gilt. Sei dazu $T_j = \lambda_j(A - \lambda_j)^{-1}$ für $j = 1, \dots, J$ und $x_j = (f_\ell^{(j)})_{\ell\in\Gamma}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{j=1}^J r_j T_j x_j \Big\|_{L^p([0,1];X)} = \\
&= \Big(\int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^J r_j(t) T_j x_j \Big\|_X^p dt \Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_0^1 \sum_{\ell\in\Gamma} \Big\| \sum_{j=1}^J r_j(t) \lambda_j (A^\ell - \lambda_j)^{-1} f_\ell^{(j)} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}^p dt \Big)^{1/p} \\
&= \Big(\sum_{\ell\in\Gamma} \int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^J r_j(t) \lambda_j (A^\ell - \lambda_j)^{-1} f_\ell^{(j)} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}^p dt \Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$= \Big(\sum_{\ell\in\Gamma} \Big\| \sum_{j=1}^J r_j \lambda_j (A^\ell - \lambda_j)^{-1} f_\ell^{(j)} \Big\|_{L^p([0,1];L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))} \Big)^{1/p}$$

$$\le \Big(\sum_{\ell\in\Gamma} \big[\mathcal{R}_\theta(A^\ell)\big]^p \Big\| \sum_{j=1}^J r_j f_\ell^{(j)} \Big\|^p_{L^p([0,1];L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))} \Big)^{1/p}$$

$$\le K \Big\| \sum_{j=1}^J r_j x_j \Big\|_{L^p([0,1];X)},$$

d.h. $\mathcal{R}_\theta(A) \le K$.

Definiere den Lokalisierungsoperator $J\colon L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N) \to X_0,\ f \mapsto (\varphi_\ell f)_\ell$. Es gilt

$$\sum_{\ell\in\Gamma} \|\varphi_\ell f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)} \le \sum_{\ell\in\Gamma} \|\chi_{Q_\ell} f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)} = 2\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)},$$

d.h. J ist stetig. Genauso sieht man $J \in L(W_p^{2m}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N), X_{2m})$.

Der Operator des Zusammensetzens ist analog definiert durch

$$P\colon X_0 \to L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N),\ (f_\ell)_{\ell\in\Gamma} \mapsto \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell f_\ell.$$

Beachte, dass die Summe lokal-endlich ist. Es gilt $P \in L(X_0, L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))$ und $PJ = \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}$ wegen $PJf = \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell^2 f = f$.

(3) Sei nun A_p die L^p-Realisierung von $A(x,D)$, A_{p0} die L^p-Realisierung von $A_0(x,D)$ in (2). Dann gilt für $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$ und $\ell \in \Gamma$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}\varphi_\ell A_p u &= A_p(\varphi_\ell u) + (\varphi_\ell A - A\varphi_\ell)u \\ &= A^\ell(\varphi_\ell u) + (A_p - A_{p0})\psi_\ell \varphi_\ell u + \sum_{k: Q_k \cap Q_\ell \neq \emptyset} (\varphi_\ell A - A\varphi_\ell)\varphi_k^2 u.\end{aligned}$$

Somit ist $JA_p = AJ + BJ$ mit

$$B\big((u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\big) := \Big((A_p - A_{p0})\psi_\ell u_\ell + \sum_{k: Q_k \cap Q_\ell \neq \emptyset} (\varphi_\ell A - A\varphi_\ell)\varphi_k u_k \Big)_{\ell\in\Gamma}.$$

Schreibt man $B((u_\ell)_\ell) = (\sum_{k\in\Gamma} B_{k\ell} u_\ell)_{k\in\Gamma}$, so ist B_{kl} ein Differentialoperator der Ordnung $\le 2m-1$, und die Anzahl der Elemente in jeder Zeile der unendlichen Matrix $(B_{kl})_{k,l}$ ist beschränkt. Wegen $a_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$ ist somit $B \in L(X_{2m-1}, X_0)$.

Analog gilt für $(u_\ell)_{\ell\in\Gamma} \in X_{2m}$ die Gleichheit

$$(A_p P - PA)(u_\ell)_{\ell\in\Gamma} = A_p\Big(\sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell u_\ell \Big) - \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell A^\ell u_\ell$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell (A_p - A_{p0}) u_\ell + \sum_{k\in\Gamma} (A\varphi_k - \varphi_k A^k) u_k \\
&= \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell (A_p - A_{p0}) u_\ell + \sum_{k\in\Gamma} \sum_{\ell : Q_k\cap Q_\ell\neq\emptyset} \varphi_l^2 (A^k\varphi_k - \varphi_k A^k) u_k \\
&= \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_e ll \Big((A_p - A_{p0}) u_\ell + \sum_{k : Q_k\cap Q_\ell\neq\emptyset} \varphi_\ell (A^k\varphi_k - \varphi_k A^k) u_k \Big)
\end{aligned}
$$

$$= PD$$

mit

$$D(u_\ell)_{\ell\in\Gamma} := \Big((A_p - A_{p0}) u_\ell + \sum_{k : Q_k\cap Q_\ell\neq\emptyset} (A^k\varphi_k - \varphi_k A^k) u_k \Big)_{\ell\in\Gamma}.$$

Wie oben folgt $D \in L(X_{2m-1}, X_0)$.

(4) Nach der Interpolationsungleichung für Sobolevräume gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\|B(u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\|_{X_0} + \|D(u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\|_{X_0} &\le C\|(u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\|_{X_{2m-1}} \\
&\le \varepsilon\|(u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\|_{X_{2m}} + C_\varepsilon\|(u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\|_{X_0} \quad (u \in X_{2m}).
\end{aligned}
$$

Nach Satz 3.7 existiert ein $\mu > 0$ so, dass $A+B-\mu$ und $A+D-\mu$ beide $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\ge \theta$ sind.

Sei $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$ und $f := (\lambda + \mu - A_p)u \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$. Dann gilt

$$Jf = J(\lambda + \mu - A_p)u = (\lambda + \mu - (A + B))Ju$$

und damit

$$u = PJu = P(\lambda + \mu - (A + B))^{-1} Jf.$$

Somit ist $\lambda + \mu - A_p$ injektiv.

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$ gilt andererseits

$$
\begin{aligned}
f = PJf &= P(\lambda + \mu - (A + D))(\lambda + \mu - (A + D))^{-1} Jf \\
&= (\lambda + \mu - A_p) P(\lambda + \mu - (A + D))^{-1} Jf \in R(\lambda + \mu - A_p),
\end{aligned}
$$

d.h. $\lambda + \mu - A_p$ ist auch surjektiv. Somit ist $\lambda + \mu \in \rho(A_p)$ und

$$(\lambda + \mu - A_p)^{-1} = P(\lambda + \mu - (A + D))^{-1} J.$$

Wegen $P \in L(X, L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N))$, $J \in L(L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N), X_{2m}$ und $\mathcal{R}_\theta(A + D - \mu) < \infty$ folgt $\mathcal{R}_\theta(A_p - \mu) < \infty$, d.h. $A_p - \mu$ ist $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\ge \theta$. □

4. Parabolische Randwertprobleme

4.1 Worum geht's? Im letzten Abschnitt wurden parabolische Systeme im Ganzraum betrachtet. Jetzt sollen analoge Überlegungen für beschränkte Gebiete und zugehörige Randwertprobleme durchgeführt werden. Dabei spielt die Lopatinskii-Shapiro-Bedingung eine wesentliche Rolle. Man erhält $\mathcal{R}$-Sektorialität und damit maximale Regularität für die zugehörige L^p-Realisierung.

a) Die Shapiro-Lopatinksii-Bedingung

Im folgenden sei wieder $1 < p < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Gegeben sei ein Differentialoperator $A = A(x, D)$ der Form

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $a_\alpha \colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ und Randoperatoren $B_1, \dots, B_m$ der Form

$$B_j(x', D) = \sum_{|\beta|\le m_j} b_{j\beta}(x')\gamma_0 D^\beta$$

mit $m_j < 2m$, $b_{j\beta} \colon \partial G \to \mathbb{C}$. Hier steht γ_0 für die Spurabbildung $u \mapsto u|_{\partial G}$, welche etwa bei einem C^{2m}-Gebiet G als stetige lineare Abbildung

$$\gamma_0 \colon W_p^k(\Omega) \to W_p^{k-1/p}(\partial\Omega)$$

für $k = 1, \dots, 2m$ wohldefiniert ist.

Die L^p-Realisierung $A_{B,p}$ des Randwertproblems $(A, B) = (A, B_1, \dots, B_m)$ ist definiert durch

$$D(A_{B,p}) := \{u \in W_p^{2m}(G) : B_1(x, D)u = \dots = B_m(x, D)u = 0\}$$

und $A_{B,p}u := A(x, D)u \quad (u \in D(A_{B,p}))$. Wir werden stets folgende Glattheitsannahmen treffen:

(i) Das Gebiet Ω ist von Klasse C^{2m}.

(ii) Für die Koeffizienten a_α von $A(x, D)$ gilt

$$\begin{aligned} a_\alpha &\in C(\overline{G}) \quad (|\alpha| = 2m), \\ a_\alpha &\in L^\infty(G) \quad (|\alpha| < 2m). \end{aligned}$$

(iii) Für die Koeffizienten $b_{j\beta}$ von $B_j(x', D)$ gilt

$$b_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\partial G) \quad (|\beta| \le m_j,\ j = 1, \dots, m).$$

Unter diesen Annahmen erhält man leicht das folgende Resultat aus den Spursätzen für Sobolevräume:

4.2 Lemma. *Der Operator*

$$(A,B)\colon W_p^{2m}(G) \to L^p(G) \times \prod_{j=1}^m W_p^{2m-m_j-1/p}(\partial G)$$

ist stetig.

Wie üblich seien $a_0(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ und $b_{j0}(x',\xi) := \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}(x')\xi^\beta$ die Hauptsymbole von A bzw. B_j.

4.3 Definition. Das Randwertproblem (A,B) heißt parabolisch, falls es parameter-elliptisch in $\overline{\mathbb{C}}_+$ ist, d.h. falls folgende Bedingungen gelten:

(a) Es gilt $a_0(x,\xi) - \lambda \neq 0$ für alle $x \in \overline{G}$ und alle $(\xi,\lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \overline{C}_+) \setminus \{0\}$.

(b) Die Lopatinskii-Shapiro-Bedingung ist erfüllt, d.h. für alle $x' \in \partial G$ und alle $(\xi',\lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus \{0\}$ hat die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (a_0(x',\xi',D_n)-\lambda)v(x_n) &= 0 \quad (x_n>0),\\ b_{j0}(x',\xi',D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} &= 0 \quad (j=1,\dots,m),\\ v(x_n) &\to 0 \quad (x_n\to\infty) \end{aligned} \tag{4-1}$$

(geschrieben in zu x' gehörigen Koordinaten) nur die triviale Lösung.

Äquivalente Bedingungen wurden in Teil II der Vorlesung behandelt. Man beachte, dass aus (a) die Abschätzung (P) von Definition 3.2 folgt, da $\overline{G}$ kompakt und a_0 stetig in x und ξ und homogen in ξ ist.

4.4 Definition (Lopatinskii-Matrix)**.** In der Situation von Definition 4.3 gelte (a). Sei $(x',\xi',\lambda) \in \partial G \times (\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\})$ fest und seien $\tau_j = \tau_j(x',\xi',\lambda)$, $j=1,\dots,m$ die (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen von $a_0(x',\xi',\cdot)-\lambda)$ mit positivem Imaginärteil. Setze

$$a_+(\tau) := a_+(x',\xi',\lambda,\tau) := \prod_{j=1}^m (\tau - \tau_j(x',\xi',\lambda)) \in \mathbb{C}[\tau].$$

Betrachte die Restklassen $\bar b_{j0} = \bar b_{j0}(x',\xi',\lambda,\cdot) \in \mathbb{C}[\tau]/(a_+)$ von b_{j0} modulo a_+ und schreibe $\bar b_{j0}$ bezüglich der kanonischen Basis $\bar 1, \bar\tau, \dots, \overline{\tau^{m-1}} \in \mathbb{C}[\tau]/(a_+)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \bar b_{10} \\ \vdots \\ \bar b_{m0} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \bar 1 \\ \vdots \\ \overline{\tau^{m-1}} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } L = L(x',\xi',\lambda) \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

Dann heißt L die Lopatinskii-Matrix von (A,B) an der Stelle x.

4.5 Lemma. *Sei A proper elliptisch in $\overline{G}$. Dann gilt die Lopatinskii-Shapiro-Bedingung genau dann, falls*

$$\det L(x', \xi', \lambda) \neq 0 \quad (x' \in \partial G, \, (\xi', \lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus \{0\}).$$

Beweis. Sei v_j $(j = 1, \dots, m)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} \big(a_+(x', \xi, D_n) - \lambda\big) v(x_n) &= 0 \quad (x_n > 0), \\ D_n^{k-1} v(x_n)\big|_{x_n=0} \delta_{kj} & \quad (k = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Dann ist $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis des Lösungsraums $\mathscr{M}_+$ aller stabilen Lösungen von $\big(a_+(x', \xi, D_n) - \lambda\big) v(x_n) = 0$. Sei nun v eine Lösung von (4-1), $v = \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_{10}(D_n) \\ \vdots \\ b_{m0}(D_n) \end{pmatrix} v(x_n)\big|_{x_n=0} &= \begin{pmatrix} b_{10}(D_n) \\ \vdots \\ b_{m0}(D_n) \end{pmatrix} \big(v_1(x_n), \dots, v_m(x_n)\big)\big|_{x_n=0} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{b}_{10}(D_n) \\ \vdots \\ \overline{b}_{m0}(D_n) \end{pmatrix} \big(v_1(x_n), \dots, v_m(x_n)\big)\big|_{x_n=0} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \\ &= L \begin{pmatrix} D_n^0 \\ \vdots \\ D_n^{m-1} \end{pmatrix} \big(v_1(x_n), \dots, v_m(x_n)\big)\big|_{x_n=0} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \\ &= L \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $b_{k0}(D_n) v_j(x_n)\big|_{x_n=0} = \overline{b}_{k0}(D_n) v_j(x_n)\big|_{x_n=0}$ gilt wegen $a_+(D_n) v_j(x_n) = 0$. Somit hat (4-1) genau dann nur die triviale Lösung, falls $\det L \neq 0$. □

4.6 Bemerkung. a) Die Bedingung aus Lemma 4.5 lässt sich folgendermaßen formulieren: Die Randbedingungen sind linear unabhängig modulo a_+, d.h. $\overline{b}_{10}, \dots, \overline{b}_{m0}$ sind linear unabhängig in $\mathbb{C}[\tau]/(a_+)$.

b) Die Randbedingungen $B_1, \dots, B_m$ heißen vollständig elliptisch, falls für jedes proper elliptische A das Randwertproblem (A, B) elliptisch ist. Dies ist der Fall für

(i) $B_j(x', D) = \gamma_0 (\frac{\partial}{\partial x_n})^{j-1}$ $(j = 1, \dots, m)$ (allgemeine Dirichlet-Bedingungen),

(ii) $B_j(x', D) = \gamma_0 (\frac{\partial}{\partial x_n})^{m+j-1}$ $(j = 1, \dots, m)$ (allgemeine Neumann-Bedingungen), oder allgemeiner für festes $s \in \{0, \ldots, m\}$

$$B_j(x', D) = \gamma_0 \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{s+j-1} + \text{ Terme niederer Ordnung } \ (j = 1, \ldots, m).$$

Zu zeigen ist hierfür, dass $\{\overline{\tau^{s+j-1}} : j = 1, \ldots, m\}$ in $\mathbb{C}[\tau]/(a_+)$ linear unabhängig ist. Falls dies nicht der Fall ist, existieren $c_j \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{C}[\tau]$ mit

$$\sum_{j=1}^m c_j \tau^{s+j-1} = p(\tau) a_+(\tau).$$

Wegen $a_+(0) \neq 0$ folgt $\tau^s | p(\tau)$, d.h. $\sum_{j=1}^m c_j \tau^{j-1} = \widetilde{p}(\tau) a_+(\tau)$ mit einem $\widetilde{p} \in \mathbb{C}[\tau]$ im Widerspruch zu $\deg a_+ = m$.

c) Falls das Gebiet und die Koeffizienten von (A, B) glatt sind, sind für festes $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ die Koeffizienten von $L(x', \xi', \lambda)$ Symbole von Pseudodifferentialoperatoren auf der geschlossenen $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit ∂G.

b) Der Hauptsatz über parabolische Randwertprobleme

4.7 Satz (ein Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen)**.** *Sei (A, B) parabolisch und $(x', \xi', \lambda) \in \partial G \times (\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus \{0\}$. Wähle eine geschlossene Kurve $\gamma = \gamma(x', \xi', \lambda)$ in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, welche alle Nullstellen $\tau_1, \ldots, \tau_m$ von a_+ einschließt. Es sei*

$$a_+(x', \xi', \lambda, \tau) = \sum_{\ell=0}^m p_\ell(x', \xi', \lambda) \tau^{m-\ell}.$$

Definiere $N_k(\tau) := N_k(x', \xi', \lambda, \tau) := \sum_{\ell=0}^m p_\ell(x', \xi', \lambda) \tau^{m-k-\ell}$ und

$$(M_1(\tau), \ldots, M_m(\tau)) := \big(N_1(\tau), \ldots, N_m(\tau)\big) L^{-1}.$$

Sei $w_k(x_n) = w_k(x', \xi', \lambda, x_n)$ $(x_n > 0)$ definiert durch

$$w_k(x_n) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{M_k(\tau)}{a_+(\tau)} e^{i x_n \tau} d\tau \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Dann bildet $\{w_1, \ldots, w_m\}$ ein Fundamentalsystem von $a_0(D_n) w = 0$, $w(x_n) \to 0 \quad (x_n \to \infty)$ mit den Randbedingungen

$$b_{j0}(x', \xi', \lambda, D_n) w_k(x_n)\big|_{x_n = 0} = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, m).$$

Beweis. (i) Wir zeigen zunächst, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{N_k(\tau) \tau^{j-1}}{a_+(\tau)} d\tau = \delta_{kj} \quad (j, k = 1, \ldots, m).$$

Dazu ersetze γ durch einen großen Kreis $B(0,R)$. Für $j<k$ gilt $\deg\big(N_k(\tau)\tau^{j-1}\big) = m-k+j-1 \le m-2$, d.h. der Integrand ist $O(R^{-2})$ für $R\to\infty$ und somit ist das Integral 0.

Für $j=k$ ist der Integrand gleich $\frac{\tau^{m-1}+O(\tau^{m-2})}{(\tau-\tau_1)\cdot\ldots\cdot(\tau-\tau_m)}$, also ist das Integral nach dem Residuenkalkül gleich 1.

Für $j>k$ ist

$$\begin{aligned} Q(\tau) &:= -a_+(\tau)\tau^{j-k-1} + N_k(\tau)\tau^{j-1} \\ &= -\sum_{\ell=0}^{m} p_\ell \tau^{m-\ell+j-k-1} + \sum_{\ell=0}^{m-k} p_\ell \tau^{m-\ell+j-k-1}, \end{aligned}$$

also $\deg Q = j-2 \le m-2$. Also ist

$$\int_{B(0,R)} \frac{N_k(\tau)\tau^{j-1}}{a_+(\tau)}\,d\tau = \int_{B(0,R)} \frac{a_+(\tau)\tau^{j-k-1}+Q(\tau)}{a_+(\tau)}\,d\tau = \int_{B(0,R)} \frac{Q(\tau)}{a_+(\tau)}\,d\tau = 0.$$

(ii) Es gilt modulo a_+, d.h. als Gleichheit in $\mathbb{R}[\tau]/(a_+)$:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \overline{b}_{10}(\tau) \\ \vdots \\ \overline{b}_{m0}(\tau) \end{pmatrix} (\overline{M}_1(\tau),\ldots,\overline{M}_m(\tau)) \\ &\qquad = \begin{pmatrix} \overline{b}_{10}(\tau) \\ \vdots \\ \overline{b}_{m0}(\tau) \end{pmatrix} \big(\overline{N}_1(\tau),\ldots,\overline{N}_m(\tau)\big)L^{-1} \\ &\qquad = L \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \vdots \\ \overline{\tau^{m-1}} \end{pmatrix} \big(\overline{N}_1(\tau),\ldots,\overline{N}_m(\tau)\big)L^{-1}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{b_{j0}(\tau)M_k(\tau)}{a_+(\tau)}\,d\tau\Big)_{j,k=1,\ldots,m} &= L\cdot\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\tau^{j-1}N_k(\tau)}{a_+(\tau)}\,d\tau\Big)_{j,k=1,\ldots,m}\cdot L^{-1} \\ &= L\cdot I_m\cdot L^{-1} = I_m, \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{b_{j0}(\tau)M_k(\tau)}{a_+(\tau)}\,d\tau = \delta_{jk} \quad (j,k=1,\ldots,m).$$

(iii) Definiere w_k wie im Satz. Wegen $\gamma\subset\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ gilt $w_k(x_n)\to 0$ für $x_n\to\infty$. Weiter ist

$$a_0(D_n)w(x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{M_k(\tau)}{a_+(\tau)}\,a(\tau)e^{ix_n\tau}d\tau = 0,$$

da der Integrand holomorph ist. Schließlich ist

$$b_{j0}(D_n)w(x_n)\big|_{x_n=0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{b_{j0}(\tau)M_k(\tau)}{a_+(\tau)}\, e^{ix_n\tau}\big|_{x_n=0}d\tau = \delta_{jk} \quad (j,k=1,\dots,m),$$

was zu zeigen war. □

4.8 Bemerkung (Homogenitäten)**.** a) Mit obigen Bezeichnungen sind die folgenden Ausdrücke quasi-homogen in (ξ',λ,τ), genauer positiv homogen in $(\xi',\lambda^{1/2m},\tau)$:

- $a_+(x',\xi',\lambda,\tau)$ vom Grad m,
- $\tau_j(\xi',\lambda)$ vom Grad 1,
- $p_\ell(x',\xi',\lambda)$ vom Grad ℓ,
- $N_k(x',\xi',\lambda,\tau)$ vom Grad $m-k$,
- $b_{j0}(x',\xi',\tau)$ vom Grad m_j $(j=1,\dots,m)$,
- $L_{ij}(x',\xi',\lambda)$ vom Grad m_i-j+1,
- $M_k(x',\xi',\lambda,\tau)$ vom Grad $m-m_k-1$,
- $\gamma(x',\xi',\lambda)$ vom Grad 1,
- $\frac{M_k(\tau)}{a_+(\tau)}$ vom Grad $-m_k-1$.

b) Im folgenden sei C eine generische Konstante und

$$\langle\xi'\rangle_\lambda := |\xi'| + |\lambda|^{1/2m}.$$

Nach Teil a) lässt sich die Länge von $\gamma(x',\xi',\lambda)$ durch $C\langle\xi'\rangle_\lambda$ abschätzen. Für $\tau\in\gamma$ erhält man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\tau &\ge C\langle\xi'\rangle_\lambda,\\ |\tau-\tau_j(x',\xi',\lambda)| &\ge C\langle\xi'\rangle_\lambda,\\ |e^{i\tau x_n}| &\le \exp(-C\langle\xi'\rangle_\lambda\, x_n). \end{aligned}$$

Für $\gamma'\in\mathbb{N}_0^{n-1}$ und $\alpha_n\in\mathbb{N}_0$ erhält man

$$\big|D_n^{\alpha_n}D_{\xi'}^{\gamma'}w_k(x',\xi',\lambda,x_n)\big| \le C\langle\xi'\rangle_\lambda^{-m_k+\alpha_n-|\gamma'|}e^{-C\langle\xi'\rangle\, x_n}.$$

Damit ist w_k das Symbol eines Poisson-Operators; dies ist eine spezielle Klasse parameterabhängiger Pseudodifferentialoperatoren, welche bei Randwertproblemen auftreten.

Im folgenden betrachten wir das zu (A, B) gehörige Modellproblem im Halbraum $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ mit Rand $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$. Dazu fixieren wir $x_0' \in \partial G$ und wählen das zu x_0' gehörige Koordinatensystem. Wir erhalten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} (A_0(D) - \lambda)u = f \quad & \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ B_{j0}(D)u = 0 \quad & (j = 1, \ldots, m) \text{ auf } R^{n-1}. \end{aligned} \tag{4-2}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} A_0(D) &= \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x_0')D^\alpha, \\ B_{j0}(D) &= \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}(x_0')\gamma_0 D^\beta. \end{aligned}$$

4.9 Satz (Resolventendarstellung, Lösungsoperatoren)**.** *Das Randwertproblem (A, B) sei parabolisch. Dann besitzt das Modellproblem (4-2) für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$ und $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$ eine eindeutige Lösung $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n_+)$. Diese ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} u = R_+R(\lambda)E_0 f &- \sum_{j=1}^m T_j(\lambda)\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{B}_{j0}(D)R_+R(\lambda)E_0 f \\ &- \sum_{j=1}^m \widetilde{T}_j(\lambda)\Lambda_{2m-m_j-1}(\lambda)\partial_n\widetilde{B}_{j0}(D)R_+R(\lambda)E_0 f. \end{aligned}$$

Dabei sind die auftretenden Operatoren folgendermaßen definiert:

a) $E_0\colon L^p(\mathbb{R}^n_+) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto E_0 f$ mit

$$E_0 f := \begin{cases} f, & \text{für } x_n > 0, \\ 0, & \text{für } x_n \le 0 \end{cases}$$

(triviale Erweiterung durch 0).

b) $R(\lambda) := (A_p - \lambda)^{-1} \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$, wobei A_p die L^p- Realisierung von $A_0(D)$ ist.

c) $R_+\colon L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n_+)$, $u \mapsto u|_{\mathbb{R}^n_+}$, die Restriktion auf $\mathbb{R}^n_+$.

d) $\widetilde{B}_{j0}(D) := \sum_{|\beta|=m_j} b_{j0}(x_0')D^\beta$, die Randoperatoren ohne Spurbildung.

e) $\Lambda_s(\lambda) := (\mathscr{F}')^{-1}(\lambda + |\xi'|^{2m})^{s/2m}\mathscr{F}' \in L(W_p^s(\mathbb{R}^n_+), L^p(\mathbb{R}^n_+))$ für $s \in \mathbb{N}_0$, wobei $\mathscr{F}'$ die Fourier-Transformation in den tangentialen Variablen $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ bezeichnet.

f) $T_j(\lambda)$ ist gegeben durch

$$(T_j(\lambda)\varphi)(x', x_n) := \int_0^\infty (\mathscr{F}')^{-1}(\partial_n w_j)(x_0', \xi', \lambda, x_n + y_n)\mathscr{F}'(\Lambda_{-2m+m_j}(\lambda)\varphi)(\xi', y_n)dy_n$$

für $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$.

g) $\widetilde{T}_j(\lambda)$ *ist gegeben durch*

$$(\widetilde{T}_j(\lambda)\varphi)(x', x_n) := \int_0^\infty (\mathscr{F}')^{-1} w_j(x_0', \xi', \lambda, x_n + y_n)\mathscr{F}'(\Lambda_{-2m+m_j+1}(\lambda)\varphi)(\xi', y_n)dy_n$$

für $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$.

Die Funktionen $w_j(x_0', \xi', \lambda, x_n)$ *sind in Satz 4.7 definiert.*

Beweis. Wir zeigen hier zunächst nur die Darstellung von u; die Eigenschaft $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n_+)$ wird später bewiesen.

Sei $u_1 \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n_+)$ die nach Satz 3.5 eindeutige Lösung von

$$(A_0(D) - \lambda)u_1 = E_0 f \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

d.h. $u_1 = R(\lambda)E_0 f$. Wir wählen für u den Ansatz $u = u_1 + u_2$. Dann ist u genau dann eine Lösung von (4-2), falls u_2 eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} (A_0(D) - \lambda)u_2 &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ B_{j0}(D)u_2 &= g_j \quad (j = 1, \dots, m) \text{ auf } \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

mit

$$g_j := -B_{j0}(D)R_+u_1$$

ist. Wir nehmen partielle Fouriertransformation $\mathscr{F}'$ in x' und erhalten

$$\begin{aligned} &(a_0(x_0', \xi', D_n) - \lambda)v(x_n) = 0 \quad (x_n > 0), \\ &b_{j0}(x_0', \xi', D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} = h_j(\xi') \quad (j = 1, \dots, m) \end{aligned} \tag{4-3}$$

mit $v(x_n) := v(\xi', x_n) := (\mathscr{F}'u_2(\cdot, x_n))(\xi')$ und $h_j(\xi') := (\mathscr{F}'g_j)(\xi')$. Nach Satz 4.7 ist die eindeutige Lösung von (4-3) gegeben durch

$$v(\xi', x_n) = \sum_{j=1}^m w_j(x_0', \xi', \lambda, x_n)h_j(\xi').$$

Beachte, dass g_j zunächst nur auf $\mathbb{R}^{n-1}$ definiert ist. Durch

$$\widetilde{g}_j := \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}(x_0')D^\beta u_1 = \widetilde{B}_{j0}(D)u_1$$

wird jedoch eine Fortsetzung von g_j auf $\mathbb{R}^n_+$ definiert. Dann ist $\widetilde{h}_j := \mathscr{F}'\widetilde{g}_j(\cdot, x_n)$ eine Fortsetzung von h_j.

Für $j = 1, \dots, m$ schreiben wir („Volevich-Trick")

$$\begin{aligned} w_j(x_0',\xi',\lambda,x_n)h_j(\xi') \\ &= -\int_0^\infty \partial_n\big[w_j(x_0',\xi',\lambda,x_n+y_n)\widetilde{h}_j(\xi',y_n)\big]dy_n \\ &= -\int_0^\infty (\partial_n w_j)(x_0',\xi',\lambda,x_n+y_n)\widetilde{h}_j(\xi',y_n)dy_n \\ &\quad -\int_0^\infty w_j(x_0',\xi',\lambda,x_n+y_n)(\partial_n\widetilde{h}_j)(\xi',y_n)dy_n. \end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ gilt $\Lambda_{-s}(\lambda)\Lambda_s(\lambda) = \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Wir schreiben daher $\widetilde{g}_j = \Lambda_{-2m+m_j}(\lambda)\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{g}_j$ bzw. $\partial_n\widetilde{g}_j = \Lambda_{-2m+m_j+1}(\lambda)\Lambda_{2m-m_j+1}(\lambda)\partial_n\widetilde{g}_j$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} u_2(x',x_n) &= \big((\mathscr{F}')^{-1}v(\cdot,x_n)\big)(x') \\ &= \sum_{j=1}^m \big(T_j(\lambda)\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{g}_j + \widetilde{T}_j(\lambda)\Lambda_{2m-m_j+1}(\lambda)\partial_n\widetilde{g}_j\big). \end{aligned}$$

Setzt man nun $\widetilde{g}_j = \widetilde{B}_{j0}(D)R_+u_1$ und $u = u_1 + u_2$ ein, so erhält man die Darstellung des Satzes.

Da sowohl das Ganzraumproblem als auch (4-3) für $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$ eindeutig lösbar ist und die Fourier-Transformation eine Bijektion in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$ ist, erhält man die eindeutige Lösbarkeit mit Lösung $u = u_1 + u_2$. □

4.10 Satz (Stetigkeit der Hilbert-Transformation)**.** *Durch*

$$(Hf)(x) := \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}\,dy$$

wird ein stetiger Operator $H \in L(L^p(\mathbb{R}_+))$ definiert.

Beweis. Für $\varepsilon \in (0,1]$ sei $m_\varepsilon := \mathrm{sign}(\xi)e^{-\varepsilon\xi}$ $(\xi \in \mathbb{R})$. Dann gilt $|m_\varepsilon(\xi)| \le 1$ und $|\xi|\cdot|m_\varepsilon'(\xi)| = \varepsilon|\xi|e^{-\varepsilon|\xi|} \le 1$, wobei die Ungleichung $te^{-t} < 1$ $(t > 0)$ verwendet wurde. Nach dem Satz von Michlin ist $\|\mathscr{F}_1^{-1}m_\varepsilon\mathscr{F}_1\|_{L(L^p(\mathbb{R}_+))} \le C$ mit einer von ε unabhängigen Konstanten $C > 0$. Hier ist $\mathscr{F}_1$ die eindimensionale Fourier-Transformation.

Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} (\mathscr{F}_1^{-1}m_\varepsilon\mathscr{F}f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{ix\xi}\,\mathrm{sign}(\xi)e^{-\varepsilon|\xi|}(\mathscr{F}_1)(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \Big[e^{ix\xi-\varepsilon\xi}\mathscr{F}_1f(\xi) - e^{-ix\xi-\varepsilon\xi}\mathscr{F}_1f(-\xi)\Big]d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(e^{ix\xi-\varepsilon\xi-iy\xi} - e^{-ix\xi-\varepsilon\xi+iy\xi}\big) f(y)dy\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \Big(\frac{e^{i(x-y)\xi-\varepsilon\xi}}{i(x-y)-\varepsilon}\Big|_{\xi=0}^\infty - \frac{e^{-i(x-y)\xi-\varepsilon\xi}}{-i(x-y)-\varepsilon}\Big|_{\xi=0}^\infty\Big) f(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \Big(-\frac{1}{i(x-y)-\varepsilon} + \frac{1}{-i(x-y)-\varepsilon}\Big) f(y)dy \\
&= \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{x-y}{(x-y)^2+\varepsilon^2}\, f(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Definiere zu $\varepsilon \in (0,1]$

$$(H_\varepsilon f)(x) := \int_0^\infty \frac{x+y}{(x+y)^2+\varepsilon^2}\, f(y)\,dy \quad (f \in L^p(\mathbb{R}_+)).$$

Dann ist $H_\varepsilon f(x) = (-\frac{\pi}{i})(\mathscr{F}_1^{-1} m_\varepsilon \mathscr{F}_1 E_0 f)(-x)$ für $x \geq 0$, wobei $E_0\colon L^p(\mathbb{R}_+) \to L^p(\mathbb{R})$ die triviale Fortsetzung durch 0 ist. Damit folgt

$$\|H_\varepsilon f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \leq \pi \|\mathscr{F}_1^{-1} m_\varepsilon \mathscr{F} E_0 f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|E_0 f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}.$$

Die Folge $H_{1/n}(|f|)$ konvergiert monoton steigend punktweise gegen $H(|f|)$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \leq \|H(|f|)\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} &= \lim_{n\to\infty} \|H_{1/n}(|f|)\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \\
&\leq C\|\,|f|\,\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} = C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}.
\end{aligned}$$

Somit ist $H \in L(L^p(\mathbb{R}_+))$. □

4.11 Satz ($\mathcal{R}$-Beschränktheit der Lösungsoperatoren)**.** *Sei $\delta > 0$ fest. In der Situation von Satz 4.9 sind folgende Operatorfamilien in $L(L^p(\mathbb{R}^n_+))$ $\mathcal{R}$-beschränkt:*

a) $\{\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{B}_{j0}(D)R_+R(\lambda)E_0 : j = 1,\dots,m,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \delta\}$,

b) $\{\Lambda_{2m-m_j-1}(\lambda)\partial_n\widetilde{B}_{j0}(D)R_+R(\lambda)E_0 : j = 1,\dots,m,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \delta\}$,

c) $\{\lambda T_j(\lambda) : j = 1,\dots,m,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \delta\}$,

d) $\{\lambda \widetilde{T}_j(\lambda) : j = 1,\dots,m,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \delta\}$.

Beweis. a) Da $\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{B}_{j0}(D)R_+ = R_+\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{B}_{j0}(D)$ und da $R_+ \in L(L^p(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n_+))$ und $E_0 \in L(L^p(\mathbb{R}^n_+), L^p(\mathbb{R}^n))$, genügt es, die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von

$$\{\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{B}_{j0}(\lambda)R(\lambda) : j = 1,\dots,m,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \delta\}$$

zu zeigen. Die zugehörige Familie von Symbolen (bezüglich der Fourier-Transformation im $\mathbb{R}^n$) ist gegeben durch

$$m(\xi,\lambda) := (\lambda + |\xi'|^{2m})^{\frac{2m-m_j}{2m}} b_{j0}(x_0',\xi)\big(a_0(x_0',\xi)-\lambda\big)^{-1}.$$

Da $m(\xi,\lambda)$ quasihomogen vom Grad 0 in (ξ,λ) und auf $|\lambda|+|\xi|^{2m}=1$ beschränkt ist, folgt

$$|D^\alpha m(\xi,\lambda)| \le C|\xi|^{-|\alpha|} \quad (\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda|\ge\delta).$$

Nach Korollar 2.23 ist die Operatorfamilie von Teil a) $\mathcal{R}$-beschränkt.

b) wird analog bewiesen.

c) Wir schreiben für $\varphi\in L^p(\mathbb{R}^n_+)$

$$\lambda T_j(\lambda)\varphi = \int_0^\infty k_\lambda(x_n,y_n)\psi(y_n)dy_n$$

mit $\psi\in L^p(\mathbb{R}_+;L^p(\mathbb{R}^{n-1}))$, $\psi(y_n):=\varphi(\cdot,y_n)$ und dem operatorwertigen Integralkern

$$\begin{aligned} k_\lambda(x_n,y_n) &:= (\mathscr{F}')^{-1}m(\xi',\lambda,x_n+y_n)\mathscr{F}' \\ &:= (\mathscr{F}')^{-1}\lambda\partial_n w_j(x_0',\xi',\lambda,x_n+y_n)(\lambda+|\xi'|^{2m})^{-\frac{2m-m_j}{2m}}\mathscr{F}'. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 4.8 b) gilt

$$\begin{aligned} |D^{\gamma'}_{\xi'}m(\xi',\lambda,x_n+y_n) &\le C(|\xi'|+|\lambda|^{1/2m}\exp\big(-C(|\xi'|+|\lambda|^{1/2m})(x_n+y_n)\big)|\xi'|^{-|\gamma'|} \\ &\le \frac{C}{x_n+y_n}\,|\xi'|^{-|\gamma'|}. \end{aligned}$$

Hier wurde wieder die Ungleichung $te^{-t}<1$ $(t>0)$ benutzt. Wiederum nach Korollar 2.23 folgt $k_\lambda(x_n,y_n)\in L(L^p(\mathbb{R}_+;L^p(\mathbb{R}^{n-1})))$ mit

$$\mathcal{R}\big\{k_\lambda(x_n,y_n):\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda|\ge\delta\big\}\le\frac{C}{x_n+y_n}\,.$$

Der zu $k_0(x_n,y_n):=\frac{1}{x_n+y_n}$ gehörige skalare Integraloperator

$$(K_0g)(x_n):=\int_0^\infty\frac{g(y_n)}{x_n+y_n}\,dy_n \quad (g\in L^p(\mathbb{R}_+))$$

ist gerade die Hilbert-Transformation in $L^p(\mathbb{R}_+)$ und damit nach Satz 4.10 ein stetiger Operator $K_0\in L(L^p(\mathbb{R}_+))$. Nach Satz 2.17 folgt

$$\mathcal{R}\big\{\lambda T_j(\lambda):\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda|\ge\delta\big\}\le C\|K_0\|_{L(L^p(\mathbb{R}_+))}<\infty.$$

d) folgt analog zu c). □

4.12 Satz ($\mathcal{R}$-Beschränktheit für das Modellproblem)**.** *Das Randwertproblem (A,B) sei parabolisch. Sei $x_0'\in\partial G$ fest und seien zu x_0' gehörige Koordinaten gewählt. Für* *die L^p-Realisierung $A_B^{(0)}$ des Modellproblems $(A_0(x_0', D), B(x_0', D))$ gilt $\rho(A_B^{(0)}) \supset \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$, und für jedes $\delta > 0$ ist die Familie*

$$\big\{\lambda(\lambda - A_B^{(0)})^{-1} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \delta\big\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n_+))$$

$\mathcal{R}$-beschränkt. Insbesondere besitzt $A_B^{(0)} - \delta$ für jedes $\delta > 0$ maximale L^q-Regularität für alle $1 < q < \infty$ (und erzeugt eine holomorphe Halbgruppe).

Beweis. Ersetzt man im Beweis von Satz 4.11 die Operatoren $\lambda T_j(\lambda)$ durch $D^\alpha T_j(\lambda)$ (und analog für $\widetilde{T}_j(\lambda)$) mit $|\alpha| = 2m$, so sieht man, dass die durch die Lösungsoperatoren eine Lösung $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n_+)$ definiert wird. Damit handelt es sich tatsächlich um die Resolvente.

Die $\mathcal{R}$-Beschränktheit folgt direkt aus der Resolventendarstellung von Satz 4.9 und der $\mathcal{R}$-Beschränktheits-Aussagen von Satz 4.11. □

4.13 Satz (Kleine Störung im Hauptteil)**.** *Sei $A(x, D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ mit $a_\alpha \in BUC(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ und sei $B_j(x, D) = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}(x)\gamma_0 D^\beta$ mit $b_{j\beta} \in BUC^{2m-m_j}(\mathbb{R}^{n-1})$. Das Randwertproblem (A, B) sei parabolisch. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ so, dass folgende Aussage gilt: Falls für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ und für ein $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} \sum_{|\alpha|=2m} |a_\alpha(\cdot) - a_\alpha(x_0)|_\infty &< \varepsilon, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^{n-1}} \sum_{|\beta|=m_j} |b_{j\beta}(\cdot) - b_{j\beta}(x_0)|_\infty &< \varepsilon \quad (j = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

gelten, so existiert ein $\mu > 0$, für welches die Familie

$$\big\{\lambda(A_{B,p} - \lambda)^{-1} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \mu\big\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n_+))$$

$\mathcal{R}$-beschränkt ist.

Beweisskizze. Wir schreiben $A(x, D) = A(x_0, D) + \widetilde{A}(x, D)$ und $B_j(x, D) = B_j(x_0, D) + \widetilde{B}_j(x, D)$, wobei $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}_j$ Operatoren mit kleinen Koeffizienten sind. Dann ist

$$\begin{aligned} (A(x, D) - \lambda)u = f &\quad \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ B_j(x, D)u = 0 &\quad (j = 1, \ldots, m) \ \text{ auf } R^{n-1} \end{aligned}$$

äquivalent zu

$$\begin{aligned} (A(x_0, D) - \lambda)u = f - \widetilde{A}(x, D)u &\quad \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ B_j(x_0, D)u = -\widetilde{B}_j(x, D)u &\quad (j = 1, \ldots, m) \ \text{ auf } \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned}$$

Sei $(A_{B,p}^{(0)} - \lambda)^{-1}$ die Resolvente der L^p-Realisierung von $(A(x_0, D), B(x_0, D))$ nach Satz 4.12.

Wir verwenden die Lösungsoperatoren aus Satz 4.9 und erhalten

$$\begin{aligned} u &= (A_{B,p}^{(0)} - \lambda)^{-1} f - (A_{B,p}^{(0)} - \lambda)^{-1} \widetilde{A}(x, D) u \\ &\quad - \sum_{j=1}^{m} T_j(\lambda) \Lambda_{2m-m_j}(\lambda) \widetilde{B}_j(x, D) u \\ &\quad - \sum_{j=1}^{m} \widetilde{T}_j(\lambda) \Lambda_{2m-m_j-1}(\lambda) \partial_n \widetilde{B}_j(x, D) u. \end{aligned}$$

Dabei wurden die $\mathcal{R}$-Schranken der Operatoren $\lambda(A_{B,p}^{(0)} - \lambda)^{-1}$ und $\lambda T(\lambda)$ bzw. $\lambda \widetilde{T}(\lambda)$ bereits abgeschätzt.

Für den zweiten Term in obiger Darstellung erhält man etwa

$$(A_{B,p}^{(0)} - \lambda)^{-1} \widetilde{A}(x, D) u = (A_{B,p}^{(0)} - \lambda)^{-1} \widetilde{A}(x, D)(A_{B,p} - \lambda)^{-1} f.$$

Die $\mathcal{R}$-Schranke der rechten Seite lässt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}\big\{ \widetilde{A}(x, D)(A_{B,p} - \lambda)^{-1} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \mu \big\} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=2m} |a_\alpha(\cdot) - a_\alpha(x_0)|_\infty \mathcal{R}\big\{ D^\alpha (A_{B,p} - \lambda)^{-1} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \mu \big\} \\ &\leq C\varepsilon \mathcal{R}\big\{ D^\alpha (A_{B,p} - \lambda)^{-1} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \mu \big\}. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise können die anderen Terme auf der rechten Seite abgeschätzt werden. Insgesamt erhält man für die Familie

$$\mathcal{T} := \big\{ D^\alpha \lambda^{1 - \frac{|\alpha|}{2m}} (A_{B,p} - \lambda)^{-1} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \mu \big\}$$

die Abschätzung

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}) \leq R_1 + (C_1 \varepsilon + C_2(\mu)) \mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

Hier ist

$$C_1 := \mathcal{R}\big\{ D^\alpha (A_{B,p}^{(0)} - \lambda)^{-1} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \mu \big\} < \infty$$

und $C_2(\mu) \to 0$ für $\mu \to \infty$. Schließlich wählt man ε hinreichend klein und μ hinreichend groß, so dass $C_1 \varepsilon + C_2(\mu) < \frac{1}{2}$ gilt, und erhält $\mathcal{R}(\mathcal{T}) < 2R_1 < \infty$. □

Der ausführliche Beweis des obigen Resultats findet sich in [6], S. 92-97.

4.14 Bemerkung (Lokalisierungstechniken). Sei (A, B) ein parabolisches Randwertproblem in einem beschränkten Gebiet G, wobei die Glattheitsannahmen von Beginn des Kapitels gelten. Für einen Beweis der maximalen Regularität der L^p-Realisierung $A_{B,p}$ verwendet man folgende Lokalisierungsschritte:

a) Für festes $x_0 \in \partial G$ existiert nach Definition eines C^{2m}-Gebietes eine Umgebung $U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^{2m}-Diffeomorphismus $\Phi_{x_0}\colon U(x_0) \to V(x_0) := \Phi_{x_0}(U(x_0)) \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi_{x_0}(U(x_0) \cap G) = V(x_0) \cap \mathbb{R}^n_+.$$

Man erhält in $V(x_0)$ das transformierte Randwertproblem $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$. Die Koeffizienten $\widetilde{a}_\alpha$ von $\widetilde{A}$ sind in $V(x_0) \cap \overline{\mathbb{R}}^n_+$ definiert und erfüllen dieselben Glattheitseigenschaften wie a_α. Analog gilt dies für die transformierten Koeffizienten $\widetilde{b}_{j\beta}$ von $\widetilde{B}_j$. Man kann außerdem zeigen, dass auch das transformierte Problem in $V(x_0) \cap \mathbb{R}^n_+$ parabolisch ist.

Die Koeffizienten $\widetilde{a}_\alpha$ und $\widetilde{b}_{j\beta}$ lassen sich so auf den ganzen Halbraum $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ bzw. auf $\mathbb{R}^{n-1}$ fortsetzen, dass sowohl die Glattheitsbedingungen als auch die Parabolizität erhalten bleibt. Für $\widetilde{a}_\alpha$ lässt sich dies durch geeignete stetige Fortsetzung erfüllen, für $\widetilde{b}_{j\beta}$ braucht man höhere Glattheit. Dazu definiert man etwa

$$\widetilde{b}_{j\beta}(y) := \widetilde{b}_{j\beta}\Big(y_0 + \chi\Big(\frac{y-y_0}{r}\Big)(y-y_0)\Big) \quad (y \in \mathbb{R}^{n-1}),$$

wobei $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $\chi(x) = 1$ für $|x| \le 1$ und $\chi(x) = 0$ für $|x| \ge 2$ gewählt wird. Dabei ist $y_0 := \Phi_{x_0}(x_0)$ und $r > 0$ hinreichend klein.

Wählt man $r = r(x_0)$ klein genug, so folgen für gegebenes $\varepsilon > 0$ die Abschätzungen

$$\sum_{|\alpha|=2m} |\widetilde{a}_\alpha(\cdot) - \widetilde{a}_\alpha(y_0)|_\infty < \varepsilon,$$
$$\sum_{|\beta|=m_j} |\widetilde{b}_{j\beta}(\cdot) - \widetilde{b}_{j\beta}(y_0)|_\infty < \varepsilon \quad (j = 1, \dots, m).$$

Somit erfüllen die lokalisierten Randwertprobleme die Bedingung von Satz 4.13.

b) Für festes $\varepsilon > 0$ erhält man mit der Konstruktion aus a) eine Überdeckung der Form

$$\partial G \subset \bigcup_{x_0 \in \partial G} \Phi_{x_0}^{-1}(B(y_0, r(x_0))).$$

Da ∂G kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\partial G \subset \bigcup_{k=1}^N U_k$ mit $U_k = \Phi_{x_k}^{-1}(B(y_k, r(x_k)))$.

Im Inneren des Gebietes wählt man analog kleine Umgebungen U_k, $k = N+1, \dots, M$, der Form $U_k = \Phi_{x_k}^{-1}(B(y_k, r(x_k)))$, für welche die Abschätzung $sum_{|\alpha|=2m} |\widetilde{a}_\alpha(\cdot) - \widetilde{a}_\alpha(y_k)|_\infty < \varepsilon$ gilt. Dabei treten keine Randoperatoren auf. Da $G \setminus \bigcup_{k=1}^N$ kompakt ist, kann man auch hier eine endliche Teilüberdeckung wählen. Insgesamt erhält man eine Überdeckung $\overline{G} \subset \bigcup_{k=1}^M U_k$.

c) Durch obige Konstruktion erhält man Operatoren $(\widetilde{A}^{(k)}, \widetilde{B}^{(k)})$ für $k = 1, \dots, N$ bzw. $\widetilde{A}^{(k)}$ für $k = N+1, \dots, M$, welche die Voraussetzungen von Satz 4.13 bzw.

Lemma 3.8 (kleine Störung im Ganzraumfall) erfüllen. Die zugehörigen Resolventen werden nun mit Hilfe einer Partition der Eins ähnlich wie im Beweis von Satz 3.10 verwendet, um die RR-Sektorialität von $A_{B,p} - \mu$ für großes μ zu zeigen. Die auftretenden Kommutatoren sind niedrigerer Ordnung und können ebenso wie die Terme in A und B_j von niedrigerer Ordnung mit Hilfe der Interpolationsungleichung abgeschätzt werden.

Unter Verwendung der oben beschriebenen Techniken erhält man folgenden Hauptsatz über parabolische Randwertprobleme:

4.15 Satz (Maximale Regularität parabolischer Randwertprobleme)**.** *Das Randwertproblem* (A, B) *sei parabolisch und erfülle obige Glattheitsbedingungen. Sei* $1 < p < \infty$*. Dann existieren* $\theta > \frac{\pi}{2}$ *und* $\mu > 0$ *so, dass* $\rho(A_{B,p} - \mu) \supset \overline{\mathbb{C}}_+$ *gilt und der Operator* $A_{B,p} - \mu$ $\mathcal{R}$*-sektoriell mit Winkel* θ *ist. Insbesondere besitzt* $A_{B,p} - \mu$ *maximale* L^q*-Regularität für alle* $q \in (1, \infty)$*.*

Literatur

[1] Adams, R. A., Fournier, J.: *Sobolev spaces.* 2nd edition, Academic Press, Amsterdam etc., 2003.

[2] Amann, H.: *Linear and quasilinear parabolic problems I.* Birkhäuser, Basel etc., 1995.

[3] Amann, H., Escher, J.: *Analysis III.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[4] Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M., Neubrander, F.: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[5] Davies, E. B.: *One-parameter semigroups.* Academic Press London etc., 1980.

[6] Denk, R., Hieber, M., Prüss, J.: R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. *Mem. Amer. Math. Soc.* **788** (2003), 114 pp.

[7] Engel, K.-J., Nagel, R.: *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Springer, New York etc., 2000.

[8] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: *Classes of linear operators. I.* Birkhäuser, Basel etc., 1990.

[9] Hörmander, L.: *The analysis of linear partial differential operators*, I-IV. Springer-Verlag Berlin 1976.

[10] Kunstmann, P., Weis, L.: Maximal L_p-regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞-functional calculus. *Lect. Notes Math.* **1855**, 65-312 (2004).

[11] Lunardi, A.: *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, Basel, 1995.

[12] Pazy, A.: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, New York etc., 1992.

[13] Tanabe, H.: *Equations of evolution.* Pitman, London etc., 1979.

[14] Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner-Verlag Stuttgart 1982.