Skript zur Vorlesung

Theorie

partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2018/19

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 04.02.2019

Inhaltsverzeichnis

1. Spektraltheorie für elliptische Operatoren

1.1 Worum geht's? Häufig werden Randwertprobleme in beschränkten Gebieten betrachtet. Hier kann die Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren viele nützliche Informationen liefern. Wir betrachten exemplarisch eine Gleichung zweiter Ordnung mit Dirichlet-Randbedingungen. Es stellt sich heraus, dass unter geeigneten Voraussetzungen eine Spektraldarstellung für den zugehörigen Operator existiert, welche es unter anderem erlaubt, Funktionen des Operators zu definieren. Dies kann für die Lösungsdarstellung von physikalisch relevanten Gleichungen verwendet werden.

Viele Aussagen setzen nur einen selbstadjungierten Operator voraus. Im Hinblick auf spätere Anwendungen, etwa auf die Wellengleichung oder Elastizitätsgleichungen, formulieren wir daher einen großen Teil dieses Kapitels allgemein für selbstadjungierte Operatoren bzw. koerzitive Bilinearformen.

a) Entwicklungen nach Eigenfunktionen

Im Folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir verwenden die Abkürzungen $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(G)}$ und $\| \cdot \| := \| \cdot \|_{L^2(G)}$, wobei $L^2(G) := L^2(G; \mathbb{C})$ sei.

1.2 Beispiel. Gegeben sei ein formaler Differentialoperator

$$A(D) := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i a_{ik} \partial_k + a$$

mit $a_{ik}, a \in L^\infty(G)$ (wobei $\partial_i := \partial_{x_i}$). Bei der Anwendung auf eine Funktion $u \in H^1(G)$ ist dabei die Ableitung $\partial_i a_{ik} \partial_k$ im schwachen Sinn zu verstehen, d.h. für $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ ist

$$-\langle \partial_i a_{ik} \partial_k u, \varphi \rangle = \langle a_{ik} \partial_k u, \partial_i \varphi \rangle = \int_G a_{ik}(x) \partial_k u(x) \overline{\partial_i \varphi(x)} dx.$$

Da $\mathscr{D}(G)$ dicht in $H_0^1(G)$ ist, gilt diese Gleichheit für alle $\varphi \in H_0^1(G)$.

Die zu obigem Operator gehörige Bilinearform $B \colon H_0^1(G) \times H_0^1(G) \to \mathbb{K}$ ist gegeben durch

$$B(u, v) := \sum_{i,k=1}^{n} \langle a_{ik} \partial_k u, \partial_i v \rangle + \langle au, v \rangle \quad (u, v \in H_0^1(G)).$$

Man beachte, dass nach Definition der schwachen Ableitung der Operator A jedem $u \in H_0^1(G)$ eine Abbildung $Au \colon H_0^1(G) \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto (Au)(\varphi) = B(u, \varphi)$ zuweist. Damit wird Au als lineares Funktional auf $H_0^1(G)$ betrachtet, d.h. $A \in$

$L(H_0^1(G),(H_0^1(G))')$. Der Raum $(H_0^1(G))'$ der stetigen linearen Funktionale wird auch als $H^{-1}(G)$ bezeichnet, d.h. $A \in L(H_0^1(G), H^{-1}(G))$.

Versieht man den formalen Differentialoperator $A(D)$ mit Dirichlet-Randbedingungen, so entspricht dies im Sinn von schwachen Lösungen der Bedingung $u \in H_0^1(G)$. Damit wird der zugehörige Operator (L^2-Realisierung) $A\colon L^2(G) \supset D(A) \to L^2(G)$ definiert durch

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{u \in H_0^1(G) : A(D)u \in L^2(G)\}, \\ Au &:= A(D)u \quad (u \in D(A)). \end{aligned}$$

Nach Definition gilt $\langle Au, v\rangle = B(u,v)$ $(u \in D(A), v \in H_0^1(G))$. Nach Definition der schwachen Ableitung gilt

$$D(A) = \{u \in H_0^1(G) : \exists\, f_u \in L^2(G)\,\forall\, v \in H_0^1(G) : B(u,v) = \langle f_u, v\rangle\}.$$

Wir werden im Folgenden voraussetzen, dass die Matrix $(a_{ik})_{i,k=1,\dots,n} \subset (L^\infty(G))^{n\times n}$ gleichmäßig positiv definit ist, d.h. es existiert eine Konstante $p > 0$ so, dass

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\xi_i\overline{\xi_k} \ge p|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{K}^n) \tag{1-1}$$

für fast alle $x \in G$ gilt. Damit folgt insbesondere $a_{ik}(x) = \overline{a_{ki}(x)}$ $(i,k = 1,\dots,n)$ für fast alle $x \in G$. Wir setzen weiter voraus, dass a reellwertig ist, d.h. $a \in L^\infty(G;\mathbb{R})$.

1.3 Bemerkung. a) Der Operator A ist symmetrisch, d.h. es gilt $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ für alle $u, v \in D(A)$.

b) Die Bilinearform $B\colon H_0^1(G) \times H_0^1(G) \to \mathbb{C}$ ist stetig, d.h. es existiert ein $C_b \ge 0$ mit

$$|B(u,v)| \le C_b\|u\|_{H^1(G)}\|v\|_{H^1(G)} \quad (u,v \in H_0^1(G)). \tag{1-2}$$

Weiter ist B symmetrisch, d.h. $B(u,v) = \overline{B(v,u)}$, und koerzitiv, d.h. es existieren Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta \ge 0$ mit

$$B(u,u) \ge \alpha\|u\|^2_{H^1(G)} - \beta\|u\|^2_{L^2(G)} \quad (u \in H_0^1(G)). \tag{1-3}$$

Man definiert die Bilinearform $B + \beta\colon H_0^1(G) \times H_0^1(G) \to \mathbb{C}$ durch

$$(B+\beta)(u,v) := B(u,v) + \beta\langle u, v\rangle_{H^1(G)} \quad (u,v \in H_0^1(G)).$$

Dann gilt

$$(B+\beta)(u,u) \ge \alpha\|u\|^2_{L^2(G)} \quad (u \in H_0^1(G)),$$

d.h. $B + \beta$ ist streng koerzitiv.

Wir werden später noch andere Bilinearformen betrachten. Daher werden wir einige Aussagen bereits jetzt allgemeiner formulieren. Ein zentraler Begriff ist dabei der eines Gelfand-Tripels. Vor der Definition sei nochmal an die obige Situation erinnert: Wir hatten $A \in L(H_0^1(G), (H_0^1(G))')$ mit $(Au)(\varphi) = B(u, \varphi) = \langle f_u, \varphi\rangle$ für $u \in D(A)$. Das Tripel von Hilberträumen $H_0^1(G) \subset L^2(G) \subset (H_0^1(G))'$ ist ein Beispiel eines Gelfand-Tripels.

1.4 Definition. Ein Gelfand-Tripel ist von der Form $V \subset H \subset V'$, wobei V und H $\mathbb{K}$-Hilberträume mit $V \subset H$ sind und folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) V ist dicht in H (bzgl. der Topologie in H).

(ii) Die Inklusion $i\colon V \to H$ ist stetig (bzgl. der Topologien in V und H).

(iii) Die duale (adjungierte) Einbettung $i'\colon H = H' \to V'$ ist stetig und $H \subset V'$ ist dicht.[1] Hierbei wird H' nach dem Satz von Riesz mit seinem Dualraum H' identifiziert.

(iv) Die duale Paarung zwischen V und V' ist kompatibel mit dem Skalarprodukt in H, d.h. es gilt

$$v(u) =: \langle u, v\rangle_{V\times V'} = \langle u, r_H^{-1} v\rangle_H \quad (u \in V \subset H,\, v \in H' \subset V').$$

Dabei ist $r_H\colon H \to H'$, $x \mapsto \langle \cdot, x\rangle$ der Riesz-Isomorphismus von H auf H'.

Im Folgenden sei $V \subset H \subset V'$ ein Gelfand-Tripel mit $\mathbb{C}$-Hilberträumen V und H. Wir werden die duale Paarung in den beiden Versionen $\langle u, v\rangle_{V\times V'} := \langle v, u\rangle_{V'\times V} := v(u)$ $(v \in V',\, u \in V)$ schreiben.

1.5 Definition. a) Sei $\mathcal{A} \in L(V, V')$. Dann ist die H-Realisierung A von $\mathcal{A}$ als unbeschränkter Operator in H definiert durch $D(A) := \{u \in V : \mathcal{A}u \in H\} \subset H$ und $Au := \mathcal{A}u$ $(u \in D(A))$.

b) Die zu $\mathcal{A}$ gehörige Bilinearform $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$B(u, v) := \langle \mathcal{A}u, v\rangle_{V'\times V} = (\mathcal{A}u)v \quad (u, v \in V).$$

Die Bilinearform B (und der Operator $\mathcal{A}$) heißen koerzitiv, falls positive Konstanten α, β existieren mit

$$\operatorname{Re} B(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 - \beta \|u\|_H^2 \quad (u \in V). \tag{1-4}$$

Die Form B und der Operator $\mathcal{A}$ heißen streng koerzitiv oder V-elliptisch, falls die Gleichung (6-3) mit $\beta = 0$ gilt.

Die Bilinearform B heißt symmetrisch, falls $B(u, v) = \overline{B(v, u)}$ $(u, v \in V)$ gilt. Man beachte, dass in diesem Fall $B(u, u)$ bereits reell ist, d.h. in (6-3) steht links $B(u, u)$.

[1] Dies folgt tatsächlich bereits aus (i) und (ii).

1.6 Lemma. *Sei $\mathcal{A} \in L(V, V')$ streng koerzitiv. Dann ist $\mathcal{A}\colon V \to V'$ ein Isomorphismus, und die H-Realisierung $A\colon H \supset D(A) \to H$ ist ein dicht definierter und abgeschlossener Operator mit $0 \in \rho(A)$.*

Beweis. Für die zugehörige Bilinearform $B(u,v) := \langle \mathcal{A}u, v\rangle_{V'\times V}$ gilt nach Voraussetzung die Abschätzung $\operatorname{Re} B(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2$ $(u \in V)$ mit $\alpha > 0$. Wegen $\mathcal{A} \in L(V,V')$ ist $|B(u,v)| \leq \|\mathcal{A}\|_{L(V,V')} \|u\|_V \|v\|_V$, d.h. $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ist eine streng koerzitive und stetige Bilinearform. Nach dem Satz von Lax-Milgram existiert zu jedem $f \in V'$ genau ein $u \in V$ mit

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle_{V'\times V} = \langle f, v\rangle_{V'\times V} \quad (v \in V).$$

Also ist $\mathcal{A}\colon V \to V'$ bijektiv und stetig, und nach dem Satz vom stetigen Inversen ist auch $\mathcal{A}^{-1}$ stetig, d.h. $\mathcal{A}$ ist ein Isomorphismus.

Nach Definition gilt $D(A) = \mathcal{A}^{-1}(H)$. Da $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus ist, gilt

$$\overline{\mathcal{A}^{-1}(H)}^{V} = \mathcal{A}^{-1}(\overline{H}^{V'}) = \mathcal{A}^{-1}(V') = V \overset{d}{\subset} H,$$

also ist $D(A) \overset{d}{\subset} V \overset{d}{\subset} H$, und damit ist A dicht definiert.

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $u_n \to u$ in H und $Au_n \to v$ in H. Dann gilt auch $Au_n \to v$ in V', und mit der Stetigkeit von $\mathcal{A}^{-1}$ erhalten wir für $u_0 := \mathcal{A}^{-1}v$

$$u_n = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}u_n) \to \mathcal{A}^{-1}v = u_0 \text{ in } V.$$

Damit gilt auch $u_n \to u_0$ in H und somit $u = u_0 \in D(A)$ und $Au = \mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 = v$. Also ist A abgeschlossen.

Da $\mathcal{A}\colon V \to V'$ ein Isomorphismus ist, existiert zu jedem $f \in H$ genau ein $u \in V$ mit $\mathcal{A}u = f$. Nach Definition von A gilt $u \in D(A)$. Also ist $A\colon H \supset D(A) \to H$ bijektiv, und da A abgeschlossen ist, gilt $A^{-1} \in L(H)$ und damit $0 \in \rho(A)$. □

1.7 Lemma. *Sei $\mathcal{A} \in L(V, V')$ koerzitiv und $B\colon V \times V \to \mathbb{K}$, $B(u,v) = \langle \mathcal{A}u, v\rangle_{V'\times V}$ die zugehörige Bilinearform. Dann sind äquivalent:*

(i) Die Bilinearform B ist symmetrisch.

(ii) Der Operator $A\colon H \supset D(A) \to H$ ist selbstadjungiert.

Beweis. Sei o.E. $\mathcal{A}$ streng koerzitiv, sonst betrachte $\mathcal{A} + \beta$ mit zugehöriger Bilinearform $B(u,v) + \beta\langle u, v\rangle_H$. Nach Lemma 1.6 ist $\mathcal{A}\colon V \to V'$ ein Isomorphismus, und A ist ein abgeschlossener, dicht definierter Operator mit $0 \in \rho(A)$.

(i)⇒(ii): Sei B symmetrisch. Für $u, v \in D(A)$ gilt dann

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle_H = \langle \mathcal{A}u, v\rangle_{V'\times V} = B(u,v) = \overline{B(v,u)} = \overline{\langle \mathcal{A}v, u\rangle} = \langle u, \mathcal{A}v\rangle.$$

Damit ist A ein symmetrischer Operator mit $\rho(A)\cap\mathbb{R} \neq \emptyset$ und damit selbstadjungiert (siehe Lemma A.9).

(ii)⇒(i): Falls A selbstadjungiert ist, gilt für alle $u, v \in D(A)$ die Gleichheit $B(u,v) = \langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle = \overline{\langle Av, u\rangle} = \overline{B(v,u)}$. Da $D(A) = \mathcal{A}^{-1}(H) \subset V$ dicht ist und die Bilinearform stetig ist, gilt diese Gleichheit für alle $u, v \in V$, d.h. B ist symmetrisch. □

Wir werden im Folgenden eine Spektraldarstellung für den Operator A herleiten. Dabei werden wir stets folgende Voraussetzungen machen:

(V1) $V \subset H \subset V'$ sei ein Gelfand-Tripel mit unendlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Hilberträumen V und H. Wir setzen $\|\cdot\| := \|\cdot\|_H$.

(V2) Gegeben sei ein Operator $\mathcal{A} \in L(V, V')$, für welchen die zugehörige Bilinearform $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$ koerzitiv und symmetrisch sei. Die (nach Lemma 1.7 selbstadjungierte) H-Realisierung von $\mathcal{A}$ sei wieder mit A bezeichnet.

(V3) Die Einbettung $i\colon V \to H$ sei kompakt, d.h. jede in $\|\cdot\|_V$ beschränkte Folge besitzt eine in H konvergente Teilfolge.

Man beachte, dass die dritte Aussage in obigem Beispiel $V = H_0^1(G)$ und $H = L^2(G)$ erfüllt ist, falls G ein beschränktes Gebiet ist (Satz von Relllich-Kondrachov), nicht aber für $G = \mathbb{R}^n$. Wir beginnen mit einigen elementaren Aussagen über Eigenwerte.

1.8 Bemerkung. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, und $u \in D(A)$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt mit der Symmetrie von A

$$\lambda\|u\|^2 = \langle \lambda u, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \langle u, Au\rangle = \overline{\lambda}\|u\|^2,$$

d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$. Genauso sieht man, dass Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten zueinander orthogonal sind. Falls B streng koerzitiv ist, so folgt $\lambda \geq q$ wegen

$$\langle Au, u\rangle = B(u,u) \geq q\|u\|_V^2 \geq q\|u\|^2.$$

1.9 Lemma. *Seien $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\|\varphi_n\| = 1$ und $(\mathcal{A}-\lambda)\varphi_n \to 0$ $(n \to \infty)$ in V'. Dann gilt $\lambda \in \sigma_p(A)$.*

Beweis. Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in der Voraussetzung. Da B koerzitiv ist, erhält man

$$(B-\lambda)(\varphi_n, \varphi_n) \geq \alpha\|\varphi_n\|_V^2 - (\beta+\lambda)\|\varphi_n\|^2$$

und damit

$$\|\varphi_n\|_V^2 \le \tfrac{1}{\alpha}(B-\lambda)(\varphi_n,\varphi_n) + \tfrac{\beta+\lambda}{\alpha}\|\varphi_n\|^2. \tag{1-5}$$

Wir schätzen $(B-\lambda)(\varphi_n,\varphi_n) = \langle(\mathcal{A}-\lambda)\varphi_n,\varphi_n\rangle_{V'\times V}$ mit der Youngschen Ungleichung ab: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\begin{aligned}|\langle(\mathcal{A}-\lambda)\varphi_n,\varphi_n\rangle_{V'\times V}| &\le \|(\mathcal{A}-\lambda)\varphi_n\|_{V'}\|\varphi_n\|_V \\ &\le \varepsilon\|\varphi_n\|_V^2 + C_\varepsilon\|(\mathcal{A}-\lambda)\varphi_n\|_{V'}^2.\end{aligned}$$

Wir wählen ε so klein, dass in (1-5) $\frac{\varepsilon}{\alpha} \le \frac{1}{2}$ gilt, und erhalten

$$\|\varphi_n\|_V^2 \le 2C_\varepsilon\|(\mathcal{A}-\lambda)\varphi_n\|_{V'}^2 + 2\tfrac{\beta+\lambda}{\alpha}\|\varphi_n\|^2. \tag{1-6}$$

Damit ist $(\|\varphi_n\|_V)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt (beachte $\|\varphi_n\| = 1$). Da $V \subset H$ nach Voraussetzung (V3) kompakt ist, existiert eine Teilfolge (wieder $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$) und ein $u \in V$ mit $\varphi_n \to u$ in H.

Wendet man (1-6) auf $\varphi_n - \varphi_m$ statt φ_n an, so sieht man, dass $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V ist. Also existiert ein $u_1 \in V$ mit $\varphi_n \to u_1$ in V. Wegen $u_1 \to u$ in H folgt $u = u_1$, d.h. es gilt sogar die Konvergenz $\varphi_n \to u$ in V.

Da $\mathcal{A} \in L(V,V')$, folgt $(\mathcal{A}-\lambda)u = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{A}-\lambda)\varphi_n = 0$ und damit $\mathcal{A}u = \lambda u$ in V'. Insbesondere ist $\mathcal{A}u \in H$ und damit $u \in D(A)$. Also ist λ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor u. □

1.10 Satz. *Sei*

$$\lambda_1 := \inf\big\{B(u,u) : u \in V,\ \|u\| = 1\big\} = \inf_{u\in V\setminus\{0\}} \frac{B(u,u)}{\langle u,u\rangle}$$

(Rayleigh-Quotient). Dann gilt $\lambda_1 \in \sigma_p(A)$.

Beweis. O.E. sei $\lambda = 0$ (sonst betrachtet man $A - \lambda_1$). Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge mit $\|\varphi_n\| = 1$ und $\langle\mathcal{A}\varphi_n,\varphi_n\rangle = B(\varphi_n,\varphi_n) \to 0$ $(n\to\infty)$. Da $\mathcal{A}$ koerzitiv ist, gilt

$$\|\varphi\|_V^2 \le \tfrac{1}{q}B(\varphi,\varphi) + \tfrac{C_q}{q}\|\varphi\|^2 \quad (\varphi \in V).$$

Daher existiert ein $R \ge 0$ mit $\|\varphi_n\|_V \le R$ $(n \in \mathbb{N})$. Nach Voraussetzung (V3) existiert eine in H konvergente Teilfolge, d.h. o.E. sei $\varphi_n \to u_1$ in H. Es gilt $\|u_1\| = 1$. Wir zeigen, dass u_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 0 ist.

Da $B(\cdot,\cdot)$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform ist, können wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung anwenden und erhalten für alle $v \in V$ mit $\|v\|_V \le 2R$ die Abschätzung

$$|B(\varphi_n,v)| \le B(\varphi_n,\varphi_n)^{1/2}B(v,v)^{1/2} \le \sqrt{C_b(2R)^2B(\varphi_n,\varphi_n)} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Somit existiert zu $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|B(\varphi_n, v)| < \tfrac{\delta}{2} \quad (n \geq N,\, v \in V \text{ mit } \|v\|_V \leq 2R).$$

Speziell für $v = \varphi_n - \varphi_m$, $n, m \geq N$, folgt

$$B(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) \leq |B(\varphi_n, \varphi_n - \varphi_m)| + |B(\varphi_m, \varphi_n - \varphi_m)| < \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} = \delta.$$

Mit der Abschätzung

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_V^2 \leq \tfrac{1}{q} B(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) + \tfrac{C_q}{q} \|\varphi_n - \varphi_m\|^2 \to 0 \; (n, m \to \infty)$$

sieht man, dass $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Cauchyfolge und damit auch konvergent ist. Wegen $\varphi_n \to u_1$ in H ist der Grenzwert gleich u_1, d.h. wir erhalten $\varphi_n \to u_1$ $(n \to \infty)$ in V. Da $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$ stetig ist, gilt

$$\langle \mathcal{A} u_1, v\rangle = B(u_1, v) = \lim_{n\to\infty} B(\varphi_n, v) = 0 \quad (v \in V).$$

Also folgt $\mathcal{A} u_1 = 0$. Daran sieht man insbesondere, dass $u_1 \in D(A)$ gilt, und wegen $Au_1 = 0$ ist u_1 Eigenvektor zum Eigenwert 0. □

1.11 Satz. *Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man iterativ*

$$\lambda_n := \inf\big\{B(u,u) : u \in V,\, \|u\|_H = 1,\, \langle u, u_1\rangle = \ldots = \langle u, u_{n-1}\rangle = 0\big\}.$$

Dann gilt $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, und λ_n ist Eigenwert von A, d.h. es gibt ein $u_n \in D(A)$ mit $\|u_n\|_H = 1$ und $Au_n = \lambda_n u_n$.

Die Eigenwerte $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ besitzen keinen endlichen Häufungspunkt, d.h. kein Eigenwert hat unendliche Vielfachheit und es gilt $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Beweis. **(i)** Seien λ_1 und u_1 wie im obigen Beweis, und sei $\lambda_2 := \inf\{B(u,u) : u \in V,\, \|u\| = 1,\, \langle u, u_1\rangle = 0\}$. Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ mit $\|\varphi_n\| = 1$, $\langle \varphi_n, u_1\rangle = 0$ und $B(\varphi_n, \varphi_n) \to \lambda_2$. Dann zeigt man wie im Beweis von Satz 1.10, dass für alle $v \in V$ mit $\langle v, u_1\rangle = 0$

$$B(\varphi_n, v) - \lambda_2 \langle \varphi_n, v\rangle \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1-7}$$

gilt, und dass $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Übergang zu einer Teilfolge in V konvergiert. Für $v = \alpha u_1$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt wegen $B(\varphi_n, u_1) = \lambda_1 \langle \varphi_n, u_1\rangle$

$$B(\varphi_n, v) - \lambda_2 \langle \varphi_n, v\rangle = \overline{\alpha} \lambda_1 \langle \varphi_n, u_1\rangle - \lambda_2 \overline{\alpha} \langle \varphi_n, u_1\rangle = 0.$$

Also gilt (1-7) für alle $v \in V$. Wie oben folgt, dass u_2 ein Eigenvektor und λ_2 der zugehörige Eigenwert ist.

(ii) Iterativ erhält man eine Folge $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ von Eigenwerten mit zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren $u_1, u_2, \ldots$. Angenommen, es existieren nur endlich viele $u_1, \dots, u_N$. Da $\dim V = \infty$, existiert ein $\varphi \in V \setminus \{0\}$ mit $\langle \varphi, u_n \rangle = 0$ für alle $n \in \{1, \dots, N\}$. Damit ist

$$\lambda_{N+1} := \inf \big\{ B(\varphi, \varphi) : \varphi \in V,\ \|\varphi\| = 1,\ \langle \varphi, u_1 \rangle = \ldots = \langle \varphi, u_n \rangle = 0 \big\}$$

wohldefiniert. Dies liefert einen Eigenwert λ_{N+1} und eine Eigenfunktion u_{N+1} mit $u_{N+1} \notin \{u_1, \dots, u_N\}$.

(iii) Angenommen, es existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten mit $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda_n = \lambda_n \langle u_n, u_n \rangle = B(u_n, u_n) \geq q\|u_n\|_V^2 - C_q \|u_n\|^2.$$

Wie im Beweis von Satz 1.10 ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Übergang zu einer Teilfolge in H konvergent nach Voraussetzung (V3). Dies ist aber ein Widerspruch zu $\|u_n - u_m\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u_m\|^2 = 2$ für $n \neq m$. □

Der folgende Satz liefert eine Darstellung des n-ten Eigenwerts ohne vorherige Berechnung von $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

1.12 Satz (Courantsches Minimax-Prinzip)**.** *Für $n \in \mathbb{N}$ und $h_1, \dots, h_{n-1} \in H$ definiert man*

$$\mu_n(h_1, \dots, h_{n-1}) := \inf \big\{ B(u, u) : u \in V,\ \|u\| = 1,\ \langle u, h_1 \rangle = \cdots = \langle u, h_{n-1} \rangle = 0 \big\}.$$

Dann gilt für die in Satz 1.11 konstruierten Eigenwerte

$$\lambda_n = \sup \big\{ \mu_n(h_1, \dots, h_{n-1}) : h_j \in H\ (j = 1, \dots, n-1) \big\}.$$

Beweis. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen, sei also $n \geq 2$. Nach Konstruktion gilt $\mu_n(u_1, \dots, u_{n-1}) = \lambda_n$, d.h. es ist zu zeigen, dass $\mu_n(h_1, \dots, h_{n-1}) \leq \lambda_n$ für alle $h_1, \dots, h_{n-1} \in H$ gilt. Zu $h_1, \dots, h_{n-1} \in H$ definieren wir $v := \sum_{i=1}^n c_i u_i$ mit $\|v\| = 1$ und $\langle v, h_i \rangle = 0$ für $i = 1, \dots, n-1$. Dann gilt

$$B(v, v) = \sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} B(u_j, u_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j |c_j|^2 \leq \lambda_n \sum_{j=1}^n |c_j|^2 = \lambda_n.$$

Ferner gilt nach Definition von μ_n

$$\mu_n(h_1, \dots, h_{n-1}) \leq B(v, v) \leq \lambda_n.$$

□

Wir fassen im folgenden Satz die wichtigsten spektraltheoretischen Aussagen über A zusammen. Dabei sind immer noch (V1)-(V3) vorausgesetzt.

1.13 Satz. *a) Es gilt*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R},$$

wobei λ_n die in Satz 1.11 gegebene Folge ist. Die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen endlichen Häufungspunkt.

b) Für alle $\lambda \in \rho(A)$ ist die Resolvente $(A-\lambda)^{-1} \in L(H)$ ein kompakter Operator.

c) Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die in Satz 1.11 konstruierte Orthonormalfolge von Eigenvektoren. Dann ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem (Hilbertraumbasis) von H, und es gilt für alle $f \in H$ die Darstellung von f in From einer verallgemeinerten Fourierreihe

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, u_n\rangle u_n$$

(Konvergenz der Reihe in H) sowie $\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, u_n\rangle|^2$. Für alle $f \in D(A)$ gilt

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, u_n\rangle u_n \quad \textit{(Konvergenz in } H\textit{)}$$

sowie $\|Af\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^2 |\langle f, u_n\rangle|^2$.

d) Für eine beliebige Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert man den Operator $g(A)\colon H \supset D(g(A)) \to H$ durch

$$D(g(A)) := \Big\{ f \in H : \sum_{n\in\mathbb{N}} |g(\lambda_n)|^2 |\langle f, u_n\rangle|^2 < \infty \Big\},$$
$$g(A)f := \sum_{n\in\mathbb{N}} g(\lambda_n)\langle f, u_n\rangle u_n \quad (f \in D(g(A))).$$

Damit ist $g \mapsto g(A)$ der zu A gehörige Funktionalkalkül.

Beweis. a) Da A selbstadjungiert ist, gilt $\sigma_r(A) = \emptyset$ und $\sigma(A) = \sigma_{\text{app}}(A) \subset \mathbb{R}$. Sei $\lambda \in \sigma_{\text{app}}(A)$. Dann existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $\|\varphi_n\| = 1$ und $(A-\lambda)\varphi_n \to 0$ in H. Damit gilt auch $(A-\lambda)\varphi_n \to 0$ in V', und mit Lemma 1.9 folgt $\lambda \in \sigma_p(A)$. Also erhalten wir $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

Sei nun $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von Eigenwerten aus Satz 1.11. Angenommen, es existiert ein $\mu \in \sigma_p(A)$ mit $\mu \neq \lambda_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei u ein zu μ gehöriger Eigenvektor mit $\|u\| = 1$. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht sind, folgt $\langle u, u_n\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition von λ_n erhält man $\mu = B(u,u) \geq \lambda_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu $\lambda_n \to \infty$.

Somit gilt $\sigma(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$. Die Aussage über die Häufungspunkte findet sich in Satz 1.11.

b) Wir wählen $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathcal{A}-\lambda$ streng koerzitiv ist. Nach Lemma 1.6 ist dann $\mathcal{A}-\lambda\colon V' \to V$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}\colon V' \to V$ stetig. Wegen $(A-\lambda)^{-1} = (\mathcal{A}-\lambda)^{-1}|_H$ und der stetigen Einbettung $H \hookrightarrow V'$ ist $(A-\lambda)^{-1}\colon H \to V$ stetig. Da die Identität $\mathrm{id}\colon V \to H$ kompakt ist, ist $(A-\lambda)^{-1}$ als Operator von H nach H als Komposition eines stetigen Operators und eines kompakten Operators selbst kompakt. Somit ist die Resolvente $(A-\lambda)^{-1}$ für mindestens ein $\lambda \in \rho(A)$ kompakt. Mit der Resolventengleichung

$$(A-\lambda)^{-1} - (A-\mu)^{-1} = (\lambda-\mu)(A-\lambda)^{-1}(A-\mu)^{-1} \quad (\lambda, \mu \in \rho(A))$$

folgt die Kompaktheit für alle $\lambda \in \rho(A)$.

c) und d) sind Spezialfälle des Spektralsatzes. Sei $E\colon \mathscr{B}(\sigma(A)) \to L(H)$ das zu A gehörige PV-Maß. Da $\sigma(A)$ abzählbar ist, gilt $\mathscr{B}(\sigma(A)) = \mathscr{P}(\sigma(A))$ sowie

$$\int_{\sigma(A)} g(\lambda) dE(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(\lambda_n) E(\{\lambda_n\}).$$

Dabei ist $E(\{\lambda\})$ die orthogonale Projektion auf $\operatorname{span}\{u_n\}$ und damit gegeben durch $E(\{\lambda\})f = \langle f, u_n\rangle u_n$. □

1.14 Beispiele. a) Sei $g(\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$D(g(A)) = \Big\{ f \in H : \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, u_n\rangle|^2 < \infty \Big\} = H$$

und $g(A)f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, u_n\rangle u_n = f$, d.h. $g(A) = \mathrm{id}_H$.

b) Für $g(\lambda) = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) erhält man $g(A) = A$ (inklusive Gleichheit der Definitionsbereiche).

c) Weitere wichtige Funktionen sind $g(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ (falls alle Eigenwerte von A nichtnegativ sind) sowie $g(\lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}t)$ und $g(\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}$ für festes $t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$D(\cos\sqrt{A}t) = D(\tfrac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}) = H.$$

Die Bedeutung dieser beiden Funktionen liegt darin, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t) + Au(t) &= 0 \quad (t \geq 0),\\ u|_{t=0} &= u_0,\\ \partial_t u|_{t=0} &= u_1 \end{aligned}$$

gegeben ist durch $u(t,\cdot) = \cos(\sqrt{A}t)(u_0) + \frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}(u_1)$, wie wir später sehen werden.

1.15 Beispiel. a) Wir kommen zurück auf die Situation von Beispiel 1.2, d.h. wir betrachten einen elliptischen Operator zweiter Ordnung mit Dirichlet-Randbedingungen.Wie oben erwähnt, sind alle Voraussetzungen (V1)-(V3) erfüllt, und alle obigen Aussagen gelten für dieses Beispiel. Falls $G = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ und $Au = -u''$, so erhält man die klassischen Fourierreihen.

b) In der Situation von a) betrachten wir nun (verallgemeinerte) Neumann-Randbedingungen, welche (bei hinreichend glattem G) die Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} \nu_i(x) a_{ik}(x) \partial_k u(x) = 0 \quad (x \in \partial G)$$

haben, wobei $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))^\top$ der äußere Normalenvektor an ∂G ist. Bei diesen Randbedingungen besitzt der zugehörige Operator A den Definitionsbereich

$$D(A) := \{u \in H^1(G) : \exists\, f_u \in L^2(G)\, \forall\, v \in H^1(G) : B(u, v) = \langle f_u, v\rangle\},$$

und die Bilinearform B wird nun auf $H^1(G) \times H^1(G)$ betrachtet. Wieder sind alle Voraussetzungen (V1)-(V3) erfüllt, und wir erhalten die Ergebnisse der Sätze 1.10–1.13. Man beachte, dass jetzt stets $0 \in \sigma(A)$ gilt, da die konstanten Funktionen in $D(A)$ liegen.

Im Fall von Beispiel 1.2, d.h. bei Dirichlet-Randbedingungen, lässt sich noch eine Monotonie der Eigenwerte als Funktion des Gebietes zeigen:

1.16 Satz. *In der Situation von Beispiel 1.2 seien G und $\widetilde{G}$ beschränkte Gebiete mit $\widetilde{G} \subset G$, und seien λ_n bzw. $\widetilde{\lambda}_n$ die jeweils n-ten Eigenwerte des Operators A. Dann gilt $\widetilde{\lambda}_n \geq \lambda_n$.*

Beweis. Sei $e_0 \colon L^2(\widetilde{G}) \to L^2(G)$ die triviale Fortsetzung durch Null von $\widetilde{G}$ auf G. Für $\widetilde{u} \in H_0^1(\widetilde{G})$ gilt dann $u := e_0 \widetilde{u} \in H_0^1(G)$. Denn es existiert eine Folge $(\widetilde{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\widetilde{G})$ mit $\widetilde{\varphi}_n \to \widetilde{u}$ in $H^1(\widetilde{G})$, und für $\varphi_n := e_0 \widetilde{\varphi}_n$ gilt $\varphi_n \in \mathscr{D}(G)$ und $\varphi_n \to u$ in $H^1(G)$. Offensichtlich gilt $\|u\|_{L^2(G)} = \|\widetilde{u}\|_{L^2(\widetilde{G})}$ und $B(u, u) = \widetilde{B}(\widetilde{u}, \widetilde{u})$, wobei $\widetilde{B}$ die Einschränkung von B auf $H_0^1(\widetilde{G}) \times H_0^1(\widetilde{G})$ bezeichne.

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}_1 &= \inf \big\{ \widetilde{B}(\widetilde{u}, \widetilde{u}) : \widetilde{u} \in H_0^1(\widetilde{G}),\, \|\widetilde{u}\|_{L^2(\widetilde{G})} = 1 \big\} \\
&= \inf \big\{ B(e_0\widetilde{u}, e_0\widetilde{u}) : \widetilde{u} \in H_0^1(\widetilde{G}),\, \|\widetilde{u}\|_{L^2(\widetilde{G})} = 1 \big\} \\
&\geq \inf \big\{ B(u, u) : u \in H_0^1(G),\, \|u\|_{L^2(G)} = 1 \big\} = \lambda_1.
\end{aligned}$$

Sei nun $n \geq 2$, und seien $\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{h}_{n-1} \in L^2(\widetilde{G})$. Sei $\widetilde{u} \in L^2(\widetilde{G})$ mit $\|\widetilde{u}\|_{L^2(\widetilde{G})} = 1$ und $\langle \widetilde{u}, \widetilde{h}_1 \rangle = \dots = \langle \widetilde{u}, \widetilde{h}_{n-1} \rangle = 0$. Wie oben definieren wir $u := e_0 \widetilde{u}$. Dann gilt

$\|u\|_{L^2(G)} = 1$, und u ist orthogonal zu $h_1, \dots, h_{n-1}$, wobei $h_j \in L^2(G)$ eine beliebige Fortsetzung von $\widetilde{h}_j$ sei. Nimmt man das Infimum über alle $\widetilde{u}$, so erhält man

$$\widetilde{\mu}_n(\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{h}_{n-1}) \geq \mu_n(h_1, \dots, h_{n-1}).$$

Mit dem Courantschen Minimax-Prinzip folgt

$$\widetilde{\lambda}_n = \sup_{\widetilde{h}_1,\dots,\widetilde{h}_{n-1} \in L^2(\widetilde{G})} \widetilde{\mu}_n(\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{h}_{n-1}) \geq \sup_{h_1,\dots,h_{n-1} \in L^2(G)} \mu_n(h_1, \dots, h_{n-1}) = \lambda_n.$$

□

b) Anwendung des Spektralsatzes

Im Folgenden sei H wieder ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\|\cdot\|$ und $A\colon H \supset D(A) \to H$ ein selbstadjungierter Operator. In diesem Abschnitt wollen wir den Spektralsatz anwenden, um Cauchyprobleme erster und zweiter Ordnung zu lösen.

In der Anwendung des Spektralsatzes ist es oft wichtig, das Spektrum zu lokalisieren, da z.B. Funktionen wie $\sqrt{\lambda}$ auf $\sigma(A)$ wohldefiniert sein sollen. (Die Werte von f auf der Resolventenmenge haben keinen Einfluss auf das Integral.) Eine Möglichkeit der Lokalisierung liefert folgendes Resultat:

1.17 Lemma. *Man definiert den numerischen Wertebereich von A durch*

$$W(A) := \{\langle Ax, x \rangle : x \in D(A),\ \|x\| = 1\}.$$

Dann gilt $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$.

Beweis. Falls $\lambda \in \sigma_p(A)$, folgt $\lambda \in W(A)$. Sei also $\lambda \in \sigma_c(A)$. Dann ist $R(A - \lambda)$ nicht abgeschlossen, d.h. es existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(A - \lambda)$ mit $y_n \to y \in H \setminus R(A - \lambda)$. Wir nehmen an, dass gilt:

$$\exists\, C > 0\, \forall\, x \in D(A) : \|(A - \lambda)x\| \geq C\|x\|. \tag{1-8}$$

Wir setzen in (1-8) $y_n = (A - \lambda)x_n$ mit $x_n \in D(A)$ ein und erhalten, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ eine Cauchyfolge ist. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt $(x_n, y_n) \to (x, y)$, und da $A - \lambda$ abgeschlossen ist, folgt $x \in D(A)$ sowie $y = (A - \lambda)x$, im Widerspruch zu $y \notin R(A - \lambda)$.

Also gilt (1-8) nicht, d.h. es existiert eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $\|(A-\lambda)z_n\| \to 0$ und $\|z_n\| = 1$. Damit gilt $\langle (A - \lambda)z_n, z_n \rangle = \langle Az_n, z_n \rangle - \lambda \to 0$, d.h. $\lambda \in \overline{W(A)}$. □

Wir betrachten nun das abstrakte (parabolische) Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) + Au(t) &= 0 \quad (t>0), \\ u|_{t=0} &= u_0 \end{aligned} \tag{1-9}$$

Man beachte für die Aussage des nächsten Satzes, dass $D(A)$ mit der Graphennorm versehen wird, $\|x\|_{D(A)} := \sqrt{\|x\|_H^2 + \|Ax\|_H^2}$. Da A abgeschlossen ist, ist $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ ein Hilbertraum. Im Folgenden sei stets $E\colon \mathscr{B}(\sigma(A)) \to L(H)$ (oder die triviale Fortsetzung $E\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to L(H)$) das zu A gehörige Spektralmaß.

1.18 Satz. *In obiger Situation gelte zusätzlich $\sigma(A) \subset [0,\infty)$. Zu $u_0 \in D(A)$ definiert man*

$$u(t) := e^{-At}u_0 := \int_0^\infty e^{-\lambda t} dE(\lambda) u_0.$$

Dann ist

$$u \in C^1([0,\infty), H) \cap C([0,\infty), D(A)),$$

und u ist eine Lösung von (1-9).

Beweis. **(i)** Wir zeigen zunächst: Für alle $v_0 \in H$ ist $v(t) := e^{-At}v_0 \in H$ wohldefiniert und $v \in C([0,\infty), H)$. Die Wohldefiniertheit folgt aus $\lambda \mapsto e^{-\lambda t} \in L^\infty([0,\infty))$. Für $f_h(\lambda) := e^{-\lambda(t+h)}$ mit $h \in \mathbb{R}$ und $f(\lambda) := e^{-\lambda t}$ gilt $f_h \to f$ punktweise sowie $\sup_{|h|\le 1} \|f_h\|_\infty < \infty$. Nach Satz A.10 (iv) folgt $v(t+h) = f_h(A)v_0 \to f(A)v_0 = v(t)$ $(h \to 0)$.

(ii) Nach (i) ist $Au(t) = Ae^{-At}u_0 = e^{-At}Au_0 = e^{-At}v_0$ mit $v_0 := Au_0$ wohldefiniert, und es gilt $u \in C([0,\infty), H)$ sowie $Au \in C([0,\infty), H)$ und damit $u \in C([0,\infty), D(A))$.

(iii) Nun sei $f_h(\lambda) := \frac{1}{\lambda h}(e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t})$ sowie $f(\lambda) := -e^{-\lambda t}$. Dann gilt $f_h \to f$ $(h \to 0)$ punktweise sowie $\sup_{|h|\le 1} \|f_h\|_\infty < \infty$. Nach Satz A.10 (iv) folgt wieder $f_h(A)v_0 \to f(A)v_0$ für alle $v_0 \in H$. Damit folgt mit den Eigenschaften des Funktionalkalküls für $v_0 := Au_0$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) &= \int_0^\infty f_h(\lambda)\lambda dE(\lambda)u_0 = f_h(A)Au_0 \\ &= f_h(A)v_0 \to f(A)v_0 = f(A)Au_0 = \int_0^\infty f(\lambda)\lambda dE(\lambda)u_0 \\ &= -e^{-tA}Au_0 = -Ae^{-tA}u_0 = -Au(t) \quad (h \to 0). \end{aligned}$$

Dies zeigt $u \in C^1([0,\infty), H)$ und $\partial_t u(t) = -Au(t)$ $(t > 0)$. □

1.19 Korollar. *Falls in der Situation von Satz 1.18 sogar $u_0 \in D(A^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt für die oben konstruierte Lösung*

$$u \in \bigcap_{j=0}^{k} C^j([0,\infty), D(A^{k-j})).$$

Beweis. Für alle $j \in \{0,\dots,k\}$ gilt $A^{k-j}u(t) = A^{k-j}e^{-tA}u_0 = e^{-tA}(A^{k-j}u_0)$, und wie im Beweis von Satz 1.18 gesehen, folgt $A^{k-j}u \in C([0,\infty), H)$. Wählt man $j = 0$, folgt insbesondere $u \in C([0,\infty), D(A^k))$. Wegen $\partial_t u = -Au$ erhalten wir auch $\partial_t^j u = (-1)^j A^j u \in C([0,\infty), D(A^{k-j}))$. □

Wir betrachten nun das abstrakte (hyperbolische) Cauchyproblem zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t) + Au(t) &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} &= u_1. \end{aligned} \tag{1-10}$$

1.20 Satz. *In obiger Situation gelte wieder $\sigma(A) \subset [0,\infty)$. Zu $u_0 \in D(A)$ und $u_1 \in D(\sqrt{A})$ definiert man*

$$u(t) := \cos(\sqrt{A}t)u_0 + \Big(\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\Big)u_1 \quad (t \geq 0).$$

Dann gilt

$$u \in C^2([0,\infty), H) \cap C^1([0,\infty), D(\sqrt{A})) \cap C([0,\infty), D(A)),$$

und u ist eine Lösung von (1-10).

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 1.18. Wir schreiben

$$Au(t) = \cos(\sqrt{A}t)Au_0 + \Big(\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\Big)Au_1 = \cos(\sqrt{A}t)v_0 + \sin(\sqrt{A}t)v_1$$

mit $v_0 := Au_0$ und $v_1 := \sqrt{A}u_1$. Da $\lambda \mapsto \cos(\sqrt{\lambda}t)$ und $\lambda \mapsto \sin(\sqrt{\lambda}t)$ beschränkt sind, ist $u(t) \in D(A)$ wohldefiniert für alle $t \geq 0$, und es gilt $u \in C([0,\infty), D(A))$.

Für die Ableitung von $t \mapsto \cos(\sqrt{A}t)u_0$ betrachtet man analog zum obigen Beweis die Funktion $f_h(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{\lambda}h}(\cos(\sqrt{\lambda}(t+h)) - \cos(\sqrt{\lambda}t))$ und $f(\lambda) := -\sin(\sqrt{\lambda}t)$. Dann gilt wieder $f_h \to f$ punktweise und gleichmäßig beschränkt, und mit dem Funktionalkalkül folgt

$$\sqrt{A}\big(\tfrac{1}{h}(u(t+h) - u(t))\big) = \sqrt{A}f_h(A)\sqrt{A}u_0 = f_h(A)v_0 \to f(A)v_0 = -A\sin(\sqrt{A}t)u_0.$$

Damit ist $u \in C^1([0,\infty), D(\sqrt{A}))$. Analog geht man für den sin-Term in der Definition von $u(t)$ vor. Leitet man dies noch einmal ab, sieht man genauso, dass $u \in C^2([0,\infty), H)$ gilt und dass u eine Lösung von (1-10) ist. □

1.21 Korollar. *Falls in der Situation von Satz 1.20 sogar $u_0 \in D(A^k)$ und $u_1 \in D(A^{k-\frac{1}{2}})$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ gilt, so folgt für die obige Lösung*

$$u \in \bigcap_{j=0}^{2k} C^j([0,\infty), D(A^{(2k-j)/2})).$$

Beweis. Dies sieht man genauso wie in Korollar 1.19 wegen

$$A^{(2k-j)/2}u(t) = \cos(\sqrt{A}t)A^{(2k-j)/2}u_0 + \Big(\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\Big)A^{(2k-j)/2}u_1 \quad (t \geq 0).$$

□

2. Operatorhalbgruppen

2.1 Worum geht's? Wir betrachten wieder das abstrakte Cauchyproblem

$$\partial_t u = Au,\ u(0) = u_0.$$

Allerdings wird jetzt nicht mehr vorausgesetzt, dass der Operator A selbstadjungiert ist, d.h. der Spektralsatz ist nicht anwendbar. In diesem Fall ist es auch sinnvoll, diese Gleichung in Banachräumen zu betrachten, was in den Anwendungen manchmal von Vorteil ist (z.B. L^p-Theorie mit $p \neq 2$). Ein zentraler Begriff für die Behandlung derartiger Evolutionsgleichungen ist der der Operatorhalbgruppe. Dieser fasst die wesentlichen Eigenschaften zusammen, welche etwa die im endlich-dimensionalen Fall bekannte Fundamentalmatrix $\exp(tA)$ zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = Ay$ mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ besitzt. Dabei werden die Halbgruppen, welche im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen auftreten, nicht normstetig sein, sondern nur stark stetig.

Es zeigt sich, dass das obige Cauchyproblem genau dann wohlgestellt ist, wenn der Operator A eine C_0-Halbgruppe erzeugt. Damit wird die Lösbarkeit von Gleichungen zurückgeführt auf Eigenschaften des in der Gleichung auftretenden Operators. In Anwendungen, in welchen etwa A ein Differentialoperator (im Ort) ist, sind diese Eigenschaften oft leichter nachzurechnen als die Lösbarkeit selbst.

Im Folgenden sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum.

a) Generatoren von Halbgruppen

Eine Zusammenfassung einiger Bezeichnungen sowie grundlegender Begriffe und Aussage aus der Theorie linearer Operatoren findet sich in Anhang A. Wir beginnen mit dem zentralen Begriff der Operatorhalbgruppen.

2.2 Beispiel. Bevor wir die allgemeine Definition für Operatorhalbgruppen einführen, wollen wir zur Motivation den endlich-dimensionalen Fall betrachten: Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und $T(t) := \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$. Es gilt

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ $(t, s \geq 0)$ (Halbgruppeneigenschaft),

(iii) $T \in C([0,\infty), L(\mathbb{C}^n))$.

Ferner sieht man schnell, dass $A = T'(0)$ gilt. Diese Formulierung der Eigenschaften von $\exp(tA)$ macht auch in einem allgemeineren Rahmen Sinn.

2.3 Bemerkung. Sei $T : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$, so dass (i), (ii) und (iii) erfüllt sind. Dann gilt $T(t) = \exp(tA)$ mit $A = T'(0)$. Insbesondere gilt $T \in C^\infty\big((0,\infty), L(\mathbb{C}^n)\big)$.

Um dies zu beweisen, betrachtet man $V(t) := \int\limits_0^t T(s)ds$ und zeigt, dass $\lim_{t\searrow 0} \frac{V(t)}{t} = I$ gilt. Insbesondere ist $V(t)$ für kleine t invertierbar, und unter Verwendung von $T(t) = V^{-1}(t_0)V(t_0)T(t)$ für kleines t_0 kann man zeigen, dass $u := T(\cdot)x$ die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - Au(t) &= 0 \quad (t > 0),\\ u(0) &= x, \end{aligned}$$

mit $A := T'(0)$ löst. Die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen besagt aber, dass die eindeutige Lösung dieser Anfangswertaufgabe als $T(t)x = \exp(tA)x$ gegeben ist.

Die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) genügen somit, um eine Halbgruppe mit *Generator* A zu definieren. Dies motiviert

2.4 Definition. Eine Abbildung $T\colon [0,\infty) \to L(X)$ wird *C_0-Halbgruppe* oder *stark stetige Halbgruppe* genannt, falls

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$,

(iii) T ist stark stetig, d.h. für alle $x \in X$ ist $[0,\infty) \to X,\ t \mapsto T(t)x$ stetig.

Häufig schreibt man Halbgruppen auch in der Form $(T(t))_{t\geq 0}$

Für eine C_0-Halbgruppe setzen wir

$$D := \Big\{ x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{existiert} \Big\}.$$

Im allgemeinen ist $D \neq X$. Wir werden später sehen, dass D immer eine dichte Teilmenge von X ist.

2.5 Definition. Sei $T\colon [0,\infty) \to L(X)$ eine C_0-Halbgruppe. Dann definiert man den *Generator* oder *Erzeuger* von T als den linearen Operator A, gegeben durch $D(A) := D$ und

$$Ax := \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad (x \in D(A)).$$

Falls A der Erzeuger der C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ ist, schreibt man auch oft $T(t) = e^{tA}$ in Analogie zum endlich-dimensionalen Fall.

2.6 Beispiel. $\big(\exp(tA)\big)_{t\geq 0}$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist C_0-Halbgruppe auf $\mathbb{C}^n$ mit Generator A.

2.7 Lemma (Translationshalbgruppe)**.** *Definiere* $\big(T(t)f\big)(x) := f(x+t)$, $t \geq 0$. *Dann ist* $(T(t))_{t\geq 0}$ *eine* C_0 *- Halbgruppe auf* $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, *mit Generator*

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \Big\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \frac{d}{dx} f \in L^p(\mathbb{R}) \Big\} = W_p^1(\mathbb{R}).$$

Beweis. Zunächst ist $T(t)$ beschränkt wegen

$$\|T(t)f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t+x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p \quad \Longrightarrow \quad \|T(t)\|_{L(L^p(\mathbb{R}))} \leq 1.$$

Bekannt ist, dass $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{R})$. Für $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\|T(t)f - f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t+x) - f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} < |K|^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_{x \in K} |f(x+t) - f(x)| \xrightarrow{t \to 0} 0$$

für kompakte Intervalle $K := \{x + y : x \in \operatorname{supp}(f), y \in [-1, +1]\}$. Aus Bemerkung A.2 b) und Lemma A.3 folgt die starke Stetigkeit, d.h. Eigenschaft (iii). Eigenschaften (i) und (ii) sind trivial. Damit ist T eine C_0-Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$. Sei B der Generator von T. Aus der Gleichheit

$$\frac{T(t)f - f}{t} = \frac{f(\cdot + t) - f(\cdot)}{t}$$

für $f \in L^p(\mathbb{R})$ ergibt sich

$$D(B) = \Big\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{t \to 0} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existiert in } L^p(\mathbb{R}) \Big\} \overset{(*)}{=} W_p^1(\mathbb{R}) = D(A).$$

Dabei ist $(*)$ noch zu zeigen (Übungsaufgabe 5.1). Wegen

$$Bf = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)f - f}{t} = \frac{d}{dx} f = Af.$$

folgt $A = B$, d.h. A erzeugt T. □

2.8 Beispiele. a) Betrachte den *Gaußkern*

$$G_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t} \right).$$

Dann definiert $T(t) := G_t * f$ eine C_0 - Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Generator $A = \Delta$ und $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Dies sieht man unter Verwendung der Fouriertransformation und des Satzes von Plancherel.

b) Sei $A \in L(X)$. Dann ist

$$T(t) = \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A. Außerdem ist T gleichmäßig stetig wegen

$$\|T(t) - I\|_{L(X)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(t\|A\|\big)^k}{k!} = \exp\big(t\|A\|\big) - 1 \stackrel{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

2.9 Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung zu Beispiel 2.8 b): Sei $\big(T(t)\big)_{t\ge 0}$ eine C_0-Halbgruppe mit Generator $A: D(A) \to X$, so dass

$$\|T(t) - I\|_{L(X)} \to 0.$$

Dann gilt $A \in L(X)$. Dies sieht man wie in Bemerkung 2.3 (Übungsaufgabe 3.2).

Im Folgenden werden wir Integrale der Form $\int_0^t T(s)ds$ betrachten, d.h. es wird über Funktionen integriert, welche in einen Banachraum abbilden (in diesem Fall $L(X)$). Der zugehörige Integralbegriff ist das Bochner-Integral, die Banachraum-wertige Version des Lebesgue-Integrals. Im Wesentlichen bleiben alle bekannten Sätze aus der Lebesgueschen Integrationstheorie erhalten. Wir fassen die wichtigsten Definitionen und Sätze in Anhang B zusammen.

Im Zusammenhang mit Halbgruppen werden wir insbesondere über reelle Intervalle integrieren. Man beachte, dass stetige Funktionen auf kompakten reellen Intervallen Bochner-integrierbar sind. Wir zeigen einige Aussagen, die später noch nützlich sein werden.

2.10 Lemma. *Sei $A: X \supset D(A) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator und $f \in C\big([0,\infty), X\big)$ mit $f(t) \in D(A)$ für $t \ge 0$ und $Af \in C\big([0,\infty), X\big)$. Dann gilt $\int_0^t f(s)ds \in D(A)$ und*

$$A\int_0^t f(s)ds = \int_0^t Af(s)ds \quad (t \ge 0).$$

Beweis. Sei $t > 0$ fest. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $t_k := \frac{tk}{n}$ $(k = 0, \dots, n)$ und definieren die Stufenfunktionen f_n, g_n durch $f_n := \sum_{k=1}^n f(t_k)\chi_{(t_{k-1},t_k]}$ und $g_n := \sum_{k=1}^n A[f(t_k)]\chi_{(t_{k-1},t_k]}$. Als stetige Funktionen auf dem kompakten Intervall $[0,t]$ sind f und Af gleichmäßig stetig, und daher gilt $f_n \to f$ und $g_n \to Af$ gleichmäßig auf dem Intervall $(0,t]$. Somit folgt

$$\int_0^t f_n(s)ds \to \int_0^t f(s)ds \quad \text{und} \quad \int_0^t g_n(s)ds \to \int_0^t Af(s)ds \quad (n \to \infty)$$

(Konvergenz in der Norm von X). Aufgrund der Linearität von A, der Definition des Integrals über Stufenfunktionen und der Voraussetzung $f(s) \in D(A)$ $(s \geq 0)$ gilt $\int f_n(s)ds \in D(A)$ und

$$A\Big(\int_0^t f_n(s)ds\Big) = \int_0^t Af_n(s)ds = \int_0^t g_n(s)ds.$$

Da A abgeschlossen ist, erhalten wir $\int_0^t f(s)ds \in D(A)$ und

$$A\Big(\int_0^t f(s)ds\Big) = \int_0^t Af(s)ds.$$

$\square$

2.11 Bemerkung. Die Aussage des obigen Lemmas gilt allgemeiner: Falls $f \in L^1(\mu; X)$ mit $f(s) \in D(A)$ und $Af \in L^1(\mu; X)$ für einen abgeschlossener Operator A, so folgt bereits $\int f d\mu \in D(A)$ und $A\big(\int f d\mu\big) = \int Af d\mu$.

2.12 Definition. Sei X ein Banachraum. Eine Funktion $f \in C\big([0,\infty), X\big)$ heißt differenzierbar in $t_0 \in [0,\infty)$ genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} =: f'(t_0)$$

in X existiert. Man schreibt $f \in C^k\big([0,\infty), X\big)$, falls f k-mal stetig differenzierbar ist.

2.13 Bemerkung. a) Sei $f \in C([0,\infty), X)$. Dann gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f(s)ds = f(0).$$

Für $F(t) := \int_0^t f(s)ds$ $(t \geq 0)$ gilt $F \in C^1([0,\infty), X)$ und $F' = f$.

b) Falls $f \in C^1([0,\infty), X)$, so gilt

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds \quad (t \in [0,\infty)).$$

2.14 Satz. *Sei T eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator $A : D(A) \to X$.*

a) Für alle $x \in D(A)$ gilt $T(t)x \in D(A)$ und

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \quad (t \geq 0).$$

b) Für alle $x \in X$ gilt $\int\limits_0^t T(s)xds \in D(A)$ und

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)xds \quad (x \in X) \tag{2-1}$$

c) (Allerweltsformel). Sei $x \in X$. Dann gilt $x \in D(A)$ genau dann, wenn ein $y \in X$ existiert mit

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds \quad (t \geq 0). \tag{2-2}$$

In diesem Fall ist $y = Ax$.

Beweis. a) Sei $x \in D(A)$ und $h \geq 0$. Dann ergibt sich

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \xrightarrow{h\to 0} T(t)Ax \quad (t \geq 0).$$

Damit existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} = AT(t)x$$

und stimmt mit dem obigen überein. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt die Abschätzung $\|T(s)\|_{L(X)} \leq M_t$, $s \in [0,t]$, für beliebiges $t > 0$. Damit folgt für $t > 0$ und $h \leq t$

$$\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = -T(t-h)\frac{x - T(h)x}{h} \xrightarrow{h\to 0} T(t)Ax,$$

d.h. auch die linksseitige Ableitung existiert und stimmt mit der rechtsseitigen überein. Somit ist Aussage a) gezeigt.

b) Sei $x \in X$ und $t \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big(T(h)\int_0^t T(s)xds - \int_0^t T(s)xds\Big) &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds \\
&\xrightarrow{h\to 0} T(t)x - x
\end{aligned}$$

nach Bemerkung 2.13 a). Also gilt $\int_0^t T(s)ds \in D(A)$ und die Gleichheit (2-1).

c) Sei $x \in D(A)$. Mit der Abschätzung $\|T(s)\|_{L(X)} \leq M_t$, $s \in [0,t]$, folgt

$$T(s)\,\frac{T(h)x - x}{h} \xrightarrow{h\to 0} T(s)Ax \;\text{ gleichmäßig für } s \in [0,t],$$

was schließlich

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)-1}{h} \int_0^t T(s)x\,ds = \lim_{h\to 0} \int_0^t T(s)\frac{T(h)x-x}{h}ds = \int_0^t T(s)Ax\,ds$$

impliziert.

Nun gelte (2-2). Es folgt

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x-x}{t} = \lim_{t\searrow 0} \tfrac{1}{t} \int_0^t T(s)y\,ds = T(0)y = y$$

und damit $x \in D(A)$ sowie $Ax = y$. □

2.15 Lemma. *Sei T eine C_0-Halbgruppe auf X. Dann existieren $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ so, dass gilt*

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M \exp(\omega t) \quad (t \geq 0). \tag{2-3}$$

Hierzu zunächst

2.16 Definition. Sei T eine C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X.

a) Die Zahl

$$\omega(T) := \inf\Big\{\omega \in \mathbb{R} : \text{ Es existiert ein } M_\omega \geq 1 \text{ so, dass (2-3) gilt}\Big\}$$

heißt die *Wachstumsschranke* von T.

b) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega = 0$ gilt, so heißt T beschränkt.

c) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega = 0$ und $M = 1$ gilt, so heißt T eine *Kontraktionshalbgruppe*.

d) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega < 0$ gilt, so heißt T *exponentiell stabil*.

Beweis von Lemma 2.15. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M$ für $t \in [0,1]$, setze $\omega = \log M$. Für $t \in [0,\infty)$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $t \leq m \leq t+1$ gilt

$$\|T(t)\|_{L(X)} = \Big\|T\Big(\frac{t}{m}\Big)^m\Big\| \leq \Big\|T\Big(\frac{t}{m}\Big)\Big\|^m \leq M^m \leq M^{t+1} = M\exp(\omega t).$$

□

2.17 Satz. *Der Generator $A : D(A) \to X$ einer C_0 - Halbgruppe T auf X ist ein abgeschlossener, dicht definierter Operator, der die C_0-Halbgruppe T eindeutig bestimmt.*

Beweis. Abgeschlossenheit: Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \to x$ und $Ax_k \to y$ in X. Nach Satz 2.14 b) gilt

$$T(t)x_k - x_k = \int_0^t T(s)Ax_k ds.$$

Die gleichmäßige Konvergenz von $T(s)Ax_k$ in $[0,t]$ impliziert

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds.$$

Mit der Allerweltsformel folgt $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

Dichtheit von $D(A)$: Nach Bemerkung 2.13 a) gilt für $x \in X$,

$$D(A) \ni \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x ds \xrightarrow{t\to 0} x.$$

Eindeutigkeit von T: Seien S eine weitere von A erzeugte Halbgruppe auf X, $x \in D(A)$, und $t > 0$. Setze

$$u(s) := T(s)S(t-s)x\ , \qquad 0 \le s \le t.$$

Dann folgt

$$\frac{du(s)}{ds} = AT(s)S(t-s)x + T(s)(-A)S(t-s)x = 0.$$

Nach Bemerkung 2.13 b) ist u konstant auf $[0,t]$, also

$$T(t)x = u(t) = u(0) = S(t)x \quad (t > 0, x \in D(A)),$$

d.h. es gilt $T = S$. □

Im letzten Teil dieses Abschnitts wollen wir zurückkommen zum Cauchyproblem im Banachraum X, was ja die ursprüngliche Motivation für die Einführung von Halbgruppen war. Die Frage ist nun, ob die bereitgestellte Theorie die Ausgangsfragen zur Lösung solcher Probleme in zufriedenstellender Weise beantwortet. Hierzu zunächst folgende

2.18 Definition. Sei $A : X \supset D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Das Cauchyproblem

$$\text{(CP)} \quad \begin{cases} \partial_t u - Au &= 0, \quad t > 0, \\ u(0) &= x, \end{cases}$$

heißt *(klassisch) wohlgestellt* in X, falls

(i) eine eindeutige klassische Lösung existiert, d.h. für alle $x \in D(A)$ existiert genau eine Lösung $u \in C^1([0,\infty), X)$ von (CP) mit $u(t) \in D(A)$ $(t \ge 0)$.

(ii) u stetig von den Daten abhängt, d.h. für alle $t > 0$ existiert eine Konstante $C_t > 0$ mit $\|u(t)\| \leq C_t \|x\|$ $(x \in D(A))$.

2.19 Satz. *Sei $A : X \supset D(A) \to X$ abgeschlossen mit $\overline{D(A)} = X$. Das Cauchyproblem (CP) ist genau dann wohlgestellt, wenn A Generator einer C_0-Halbgruppe T auf X ist.*

Beweis. (i) Sei A Generator der C_0-Halbgruppe T, und sei $x \in D(A)$. Wir setzen $u(t) := T(t)x$. Nach Satz 2.14 a) ist $u \in C^1\big([0,\infty), X\big)$ Lösung von (CP), $u(t) \in D(A)$ $(t \geq 0)$ und $u(t) \stackrel{t\to 0}{\longrightarrow} x \in X$. Außerdem stellt Lemma 2.15 für $t > 0$ sicher, dass
$$\|u(t)\| = \|T(t)x\| \leq M \exp(\omega t)\|x\|,$$
d.h. u hängt stetig von den Daten ab.

Zur Eindeutigkeit: Sei v eine weitere klassische Lösung von (CP), $x \in D(A)$, und $t \geq 0$. Wir setzen
$$w(s) := T(s)v(t-s) \quad (0 \leq s \leq t).$$
Wie im Beweis von Satz 2.17 folgt $\frac{dw(s)}{ds} = 0$ und daher $w = \text{const}$. Dies impliziert
$$T(t)x = w(t) = w(0) = v(t) \quad (t > 0, x \in D(A)).$$

(ii) Sei (CP) wohlgestellt und sei $x \in D(A)$. Diesmal setzen wir $T(t)x := u(t,x)$, wobei $u(\cdot, x)$ die eindeutige Lösung von (CP) zum Anfangswert x sei. Aus (ii) folgt $T(t) \in L(X)$, $t \geq 0$. Klar sind die Eigenschaften $T(0) = I$ sowie $T(t)x \stackrel{t\to 0}{\longrightarrow} x$, d.h. T ist stark stetig. Zum Nachweis der Halbgruppeneigenschaft seien $s, t \geq 0$. Man beachte, dass $u(t+s, x)$ und $u\big(t, u(s,x)\big)$ beides Lösungen von (CP) zum Anfangswert $u(s,x)$ sind. Aus der Eindeutigkeit folgt
$$u(t+s, x) = u\big(t, u(s,x)\big),$$
was zeigt, dass
$$T(t+s)x = u(t+s,x) = u\big(t, u(s,x)\big) = T(t)u(s,x) = T(t)T(s)x.$$
Damit ist T eine C_0 - Halbgruppe. Sei B der Generator von T. Für $x \in D(A)$ erhält man
$$Au(t,x) = \partial_t u(t,x) \stackrel{t\to 0}{\longrightarrow} y := \partial_t u(0,x) \in X$$
nach Voraussetzung. Aus der Abgeschlossenheit von A folgt somit
$$Ax = y = \partial_t u(0,x) = T'(0)x.$$
Da der rechte Limes bei Existenz mit Bx übereinstimmt folgt also $x \in D(B)$ und $Ax = Bx$ für $x \in D(A)$. Sei umgekehrt $x \in D(B)$. Wegen $\overline{D(A)} = X$ können

wir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ wählen mit $x_k \to x$. Da $T(s)x_k = u(s, x_k)$ sowie $AT(s)x_k = Au(s, x_k) = u'(s, x_k)$ stetig sind, folgt mit Lemma 2.10

$$A \int_0^t T(s)x_k ds = \int_0^t AT(s)x_k ds = \int_0^t u'(s, x_k)ds = T(t)x_k - x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T(t)x - x$$

und wegen Abgeschlossenheit von A, dass $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ sowie

$$A\frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds = \frac{T(t)x - x}{t}\,, \qquad t > 0.$$

Da die rechte Seite für $t \to 0$ gegen Bx konvergiert, sehen wir unter erneuter Ausnutzung der Abgeschlossenheit von A, dass

$$x = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t} \int_0^t T(s)xds \in D(A).$$

Somit haben wir $D(A) = D(B)$ und deshalb $A = B$. $\square$

Mit Satz 2.19 reduziert sich das Lösen von linearen Cauchyproblemen auf den Nachweis, dass A ein Generator ist. Doch auch nichtlineare Probleme können mit Hilfe eines Generatorresultates angegangen werden. Wie das funktioniert wollen wir hier nur kurz skizzieren. Wir werden später bei der Anwendung auf konkrete Beispiele sehen, wie diese Methode im Einzelnen durchzuführen ist.

Wir betrachten das inhomogene Cauchyproblem

$$\text{(ICP)} \quad \begin{cases} \partial_t u(t) - Au(t) = f(t) & (t > 0) \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Dann ergibt *Variation der Konstanten* die formale Lösung

$$u(t) = \exp(tA)x + \int_0^t \exp\big((t-s)A\big) f(s)ds.$$

Falls (ICP) nichtlinear ist, d.h. $f = f(s, u)$ wie z.B. in der Navier - Stokes - Gleichung $f(u) = (u\cdot\nabla)u$, kann versucht werden ein Fixpunktargument (z.B. den *Banachschen Fixpunktsatz*) auf die Integralformel anzuwenden. Bei erfolgreicher Anwendung zieht diese Methode i.d.R. die Existenz einer lokalen Lösung nach sich, d.h. es existiert ein $T > 0$ und ein $u : [0, T) \to X$, die (ICP) im sogenannten milden Sinne löst. Wir möchten an dieser Stelle anmerken, dass im Allgemeinen keine Existenz einer globalen Lösung erwartet werden kann. Z.B. ist zur Gleichung

$$u_t - \Delta u = |u|^\alpha$$

bekannt, dass i.A. keine globale (milde) Lösung in $L^p(\Omega)$ für gewisse Werte von p und α existiert.

b) Die Sätze von Hille-Yosida und von Lumer-Phillips

Um zu zeigen, dass ein Operator der Generator einer C_0-Halbgruppe ist, gibt es zwei wesentliche Sätze: den Satz von Hille-Yosida (und seine Varianten) und den Satz von Lumer-Phillips.

2.20 Bemerkung. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\big(T(t)\big)_{t\ge 0}$ ist C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A und $\omega(T) = \omega_0$.

(ii) $\big(\exp(-\lambda t)T(t)\big)_{t\ge 0}$ ist C_0-Halbgruppe auf X mit Generator $A - \lambda I$ und $\omega\big(\exp(-\lambda\,\cdot)T\big) = \omega_0 - \lambda$.

2.21 Satz (Satz von Hille-Yosida; Kontraktionshalbgruppen-Fall)**.** *Für einen linearen Operator $A\colon X \supset D(A) \to X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) A ist der Generator einer C_0 - Kontraktionshalbgruppe T auf X.

(ii) Es gilt $\overline{D(A)} = X$, $(0,\infty) \subset \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \le 1$ für $\lambda > 0$.

In diesem Fall gilt

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)ds \quad (\lambda > 0). \tag{2-4}$$

2.22 Bemerkung. a) Die rechte Seite von (2-4) ist gerade die (vektorwertige) Laplace-Transformation von T, welche somit die Verbindung zwischen der Halbgruppe und der Resolvente des Operators A herstellt.

b) Die rechte Seite von (2-4) ist holomorph im Gebiet $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ und kann dort durch $\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$ abgeschätzt werden. Da die Resolvente eines Operators am Rand der Resolventenmenge in der Operatornorm unbeschränkt wird, folgt aus der Gleichheit (2-4) und der Holomorphie, dass $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ und dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ die Gleichheit (2-4) sowie die Abschätzung $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$ gilt.

Beweis von Satz 2.21, (i) $\Rightarrow$ (ii) . Nach Bemerkung 2.20 generiert $A - \lambda I$ die C_0 - Halbgruppe $\big(\exp(-\lambda t)T(t)\big)_{t\ge 0}$ für festes $\lambda > 0$. Aus Satz 2.14 folgt

$$\exp(-\lambda t)T(t)x - x = (A - \lambda)\int_0^t \exp(-\lambda s)T(s)xds, \quad \text{falls} \quad x \in X \tag{2-5}$$

und

$$\exp(-\lambda t)T(t)x - x = \int_0^t \exp(-\lambda s)T(s)(A - \lambda)xds, \quad \text{falls} \quad x \in D(A) \tag{2-6}$$

Es gilt

$$\int_0^\infty \|\exp(-\lambda s)T(s)x\|\, ds \leq \int_0^\infty \exp(-\lambda s) ds \|x\| \leq \frac{\|x\|}{\lambda}. \tag{2-7}$$

Somit existiert das Integral $\int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)ds$. Weiterhin erhält man

$$\begin{aligned}\Big\| \int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)xds - \int_0^t \exp(-\lambda s)T(s)xds \Big\| \\ &= \int_0^\infty \chi_{(t,\infty)}(s)\exp(-\lambda s) \big\|T(s)x\big\| ds \\ &\leq \int_0^\infty \chi_{(t,\infty)}(s)\exp(-\lambda s)ds\|x\| \qquad \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Satz von Lebesgue angewendet wurde. Die Abgeschlossenheit von A und $t \to \infty$ liefern dann in (2-5) bzw. (2-6),

$$\begin{aligned}&x = (\lambda - A) \int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)xds =: (\lambda - A)R(\lambda)x \quad (x \in X),\\ &x = R(\lambda)(\lambda - A)x, \quad (x \in D(A)).\end{aligned}$$

Folglich ist $(\lambda - A) : D(A) \to X$ beschränkt und bijektiv. Nach dem Satz der stetigen Inversen gilt $\lambda \in \rho(A)$ und

$$(\lambda - A)^{-1} = R(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)ds,$$

und schließlich impliziert (2-7)

$$\big\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\big\|_{L(X)} \leq 1 \quad (\lambda > 0).$$

□

Um der Idee von Yosida zu folgen benötigen wir eine Folge von beschränkten Operatoren die in einem gewissen Sinne gegen A konvergiert. Hierzu hilft das

2.23 Lemma (Yosida-Approximation)**.** *Sei $A\colon D(A) \to X$ mit $\overline{D(A)} = X$ gegeben, und seien $\omega \in \mathbb{R}, M > 0$ so, dass $[\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq M, \lambda \geq \omega$. Dann gilt*

(i) $\lambda(\lambda - A)^{-1}x \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} x \quad (x \in X)$,

(ii) $\lambda A(\lambda - A)^{-1}x = \lambda(\lambda - A)^{-1}Ax \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} Ax \quad (x \in D(A))$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beweis von Satz 2.21 (ii) $\Rightarrow$ (i). Lemma 2.23 (ii) motiviert die Approximation von $\exp(tA)$ durch

$$\big(\exp(tA_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}\ , \qquad A_k = kA(k-A)^{-1} = k^2(k-A)^{-1} - kI.$$

Dann gilt $A_k \in L(X), k \in \mathbb{N}$ und $A_k x \to Ax$ in X für $x \in D(A)$. Nach Beispiel 2.8 b) ist

$$T_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA_k)^n}{n!}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ eine C_0-Halbgruppe auf X. Weiterhin gilt $A_k A_m = A_m A_k$, womit $T_k T_m = T_m T_k$ folgt.

1. Schritt: Definition der Halbgruppe. Obiges T_k ist kontraktiv für alle $k \in \mathbb{N}$, denn

$$T_k(t) = \exp(tA_k) = \exp(-kt)\exp\big(tk^2(k-A)^{-1}\big),$$

also

$$\|\exp(tA_k)\|_{L(X)} \le \exp(-tk)\exp\big(tk\|k(k-A)^{-1}\|\big) \le 1.$$

Für $x \in D(A)$ gilt nun $T_k(\cdot)x \in C^1\big([0,\infty), X\big)$. Mit Bemerkung 2.13 b) folgt

$$\begin{aligned} T_k(t)x - T_m(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds}\big(T_m(t-s)T_k(s)x\big)ds \\ &= \int_0^t T_m(t-s)T_k(s)(A_k - A_m)x ds, \end{aligned}$$

d.h.

$$\big\|T_k(t)x - T_m(t)x\big\| \le t\big\|(A_k - A_m)x\big\|, \quad t \ge 0, \tag{2-8}$$

was bedeutet, dass $T_k(t)x$ eine Cauchyfolge ist. Deshalb können wir T definieren als

$$T(t)x := \lim_{k\to\infty} T_k(t)x\ , \qquad x \in D(A), t \ge 0. \tag{2-9}$$

2. Schritt: T ist C_0-Kontraktionshalbgruppe. Wegen $\|T_k\|_{L(X)} \le 1$ und (2-7) sind die Voraussetzungen von Bemerkung A.2 erfüllt, d.h. (2-9) gilt nicht nur für $x \in D(A)$, sondern für alle $x \in X$ und man hat $\|T(t)\|_{L(X)} \le 1$. Klar ist $T(0) = I$. Als nächstes ist

$$\begin{aligned} T(t+s)x &= \lim_{k\to\infty} T_k(t+s)x \\ &= \lim_{k\to\infty} T_k(t)T_k(s)x = T(t)T(s)x, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gilt wegen

$$\|T_k(t)T_k(s)x - T(t)T(s)x\| = \|T_k(t)T_k(s)x - T_k(t)T(s)x + T_k(t)T(s)x - T(t)T(s)x\|$$

$$\begin{aligned}&\le \|T_k(t)T_k(s)x - T_k(t)T(s)x\|\\&\quad + \|T_k(t)T(s)x - T(t)T(s)x\|\\&\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Was die starke Stetigkeit angeht, nehme $x \in D(A)$. Dann gilt unter erneuter Benutzung von Satz 2.14

$$\begin{aligned}T(t)x - x &= \lim_{k\to\infty} \big(T_k(t)x - x\big)\\&= \lim_{k\to\infty} \int_0^t T_k(s)A_k x ds = \int_0^t T(s)Axds. \qquad (2\text{-}10)\end{aligned}$$

Also folgt $T(t)x \to x$ für alle $x \in D(A)$, was sich nach Bemerkung A.2 wegen $\|T(t)\| \le 1$ überträgt auf $T(t)x \to x$ für alle $x \in X$.

3. Schritt: A generiert T. Sei B der Generator von T. Mit der Allerweltsformel folgt

$$D(A) \subset D(B) \quad \text{und } Ax = Bx \quad (x \in D(A)).$$

Nach Voraussetzung ist $1 \in \rho(A)$, die Richtung $(i) \Rightarrow (ii)$ des Beweises besagt aber, dass auch $1 \in \rho(B)$ gilt. Damit folgt $A = B$. □

2.24 Beispiele. (a) Schrödinger - Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Betrachte das zur Schrödingergleichung gehörige Resolventenproblem

$$(\lambda - i\Delta)u(x) = f(x)\ , \qquad x \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n). \qquad (2\text{-}11)$$

Da die Fourier-Transformation ein Isomorphismus im Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen ist, ist die obige Gleichung äquivalent zur Gleichung

$$\big(\lambda + i|\xi|^2\big)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\ , \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\ , \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n). \qquad (2\text{-}12)$$

Als Lösungsansatz für u wähle

$$u = \mathscr{F}^{-1}\hat{u} = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda + i|\xi|^2}\right]\hat{f}\ , \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Man benutzt die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda + i|\xi|^2}\right| &\le \frac{1}{\big|\mathrm{Re}\{\lambda + i|\xi|^2\}\big|} = \frac{1}{\lambda}\ , \qquad \lambda > 0,\\ \left|\frac{i|\xi|^2}{\lambda + i|\xi|^2}\right| &\le \frac{|\xi|^2}{\big|\mathrm{Im}\{\lambda + i|\xi|^2\}\big|} \le 1\ , \qquad \lambda > 0,\end{aligned}$$

und die Plancherelsche Formel, um

$$\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2 \le \frac{\|\hat{f}\|_2}{\lambda} = \frac{\|f\|_2}{\lambda}, \quad \lambda > 0, \qquad (2\text{-}13)$$

$$\|i\Delta u\|_2 = \big\|-i|\cdot|^2\hat{u}\big\|_2 \leq \|f\|_2, \quad \lambda > 0, \tag{2-14}$$

zu erhalten. Klar ist, dass $\hat{u}$ eindeutige Lösung von (2-12) in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, d.h. wegen der Unitarität von $\mathscr{F}$ ist also u eindeutige Lösung von (2-11) in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Als $L^2(\mathbb{R}^n)$ - Realisierung des Schrödingeroperators definiere $A_s u := i\Delta u$ mit

$$\begin{aligned} D(A_s) &= \Big\{v \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathscr{F}^{-1}|\xi|^2\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)\Big\} \\ &= \Big\{v \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta v \in L^2(\mathbb{R}^n)\Big\} \\ &= H^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset D(A_s)$ implizieren $D(A_s) \overset{d}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^n)$, also ist A_s dicht definiert.

Weiterhin setzen wir $R(\lambda)f := u_f$, wobei u_f die Lösung zu (2-11) mit rechter Seite f bezeichnet. Aus (2-14) folgt für $\lambda > 0$, dass $R(\lambda) : L^2(\mathbb{R}^n) \to D(A_s)$ und wir erhalten

$$(\lambda - i\Delta)R(\lambda)f = (\lambda - i\Delta)u_f = f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

sowie

$$R(\lambda)(\lambda - i\Delta)v = u_{(\lambda - i\Delta)v} = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda + i|\xi|^2}\right]\mathscr{F}(\lambda - i\Delta)v = v.$$

$$\Longrightarrow R(\lambda) = (\lambda - A_s)^{-1}\,, \qquad \lambda > 0.$$

Mit (2-13) folgt ferner $(0, \infty) \subset \rho(A_s)$, sowie

$$\|\lambda(\lambda - A_s)^{-1}f\|_2 = \|\lambda R(\lambda)f\|_2 = \|\lambda u_f\|_2 \leq \|f\|_2\,, \qquad \lambda > 0, f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Nach Theorem 2.21 generiert A_s also eine C_0 - Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Diese ist gegeben durch

$$\exp(tA_s) = \mathscr{F}^{-1}\exp\big(i|\xi|^2 t\big)\mathscr{F}\,, \qquad t \geq 0.$$

b) Wärmeleitungs - Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Das zugehörige Resolventenproblem lautet

$$(\lambda - \Delta)u(x) = f(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

$$\overset{FT}{\Longleftrightarrow} (\lambda + |\xi|^2)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Setze $u := \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda + |\xi|^2}\right]$. Analog zu (a) folgt, dass Δ eine C_0 - Kontraktionshalbgruppe $\big(\exp(t\Delta)\big)_{t \geq 0}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ generiert, die gegeben ist durch

$$\exp(t\Delta) = \mathscr{F}^{-1}\exp\big(-t|\xi|^2\big)\mathscr{F}.$$

Speziell für Hilberträume gibt es ein in Anwendungen sehr nützliches Kriterium für die Erzeugung einer C_0-Halbgruppe, den Satz von Lumer-Phillips. Der entscheidende Begriff dafür ist der des dissipativen Operators.

2.25 Definition. Seien X ein Hilbertraum und $A : X \supset D(A) \to X$ ein linearer Operator. A heißt *dissipativ*, falls gilt:

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \le 0 \quad (x \in D(A)).$$

2.26 Bemerkung. Sei X ein Hilbertraum und $A\colon X \supset D(A) \to X$ ein dissipativer Operator. Dann gilt

$$\|(\lambda - A)x\| \ge \lambda\|x\| \quad (x \in D(A),\, \lambda > 0).$$

Denn für $x \in D(A)$ mit $\|x\| = 1$ und $\lambda > 0$ gilt mit dem Satz von Riesz

$$\begin{aligned}\|(\lambda - A)x\| &= \sup_{\substack{x'\in X'\\ \|x'\|=1}} \big|x'((\lambda - A)x)\big| = \sup_{y\in X} |\langle y, (\lambda - A)x\rangle| \ge \big|\langle x, (\lambda - A)x\rangle\big| \\ &\ge \operatorname{Re}\langle x, (\lambda - A)x\rangle = \lambda - \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \ge \lambda.\end{aligned}$$

2.27 Satz (Satz von Lumer-Phillips)**.** *Sei X ein Hilbertraum und $A : X \supset D(A) \to X$ linear. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist dissipativ mit $\overline{D(A)} = X$, und es existiert ein $\lambda_0 > 0$ mit $R(A - \lambda_0) = X$.*

(ii) *A ist Erzeuger einer C_0-Kontraktionshalbgruppe.*

Beweis. **(i)⇒(ii). (a)** Wir zeigen zunächst, dass A abschließbar ist, d.h. dass der Abschluss des Graphen von A selbst wieder der Graph eines Operators ist (welcher dann Abschluss $\overline{A}$ von A genannt wird). Dazu ist zu zeigen: Falls $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ eine Folge mit $x_k \to 0$ und $Ax_k \to y$ ist, so gilt $y = 0$.

Seien (x_k), y wie oben, $\lambda > 0$ und $w \in D(A)$. Dann folgt aus der Dissipativität und Bemerkung 2.26

$$\|\lambda(\lambda - A)x_k + (\lambda - A)w\| \overset{(i)}{\ge} \lambda\|\lambda x_k + w\|.$$

Für $k \to \infty$ erhält man

$$\Big\| -y + \Big(1 - \frac{A}{\lambda}\Big)w\Big\| \ge \|w\|,$$

und für $\lambda \to \infty$ ergibt sich

$$\|-y + w\| \ge \|w\|\,, \qquad w \in D(A).$$

Wegen $\overline{D(A)} = X$ wähle $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $w_k \to y$. Damit ist

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|y - w_k\| \geq \lim_{k\to\infty} \|w_k\| = \|y\|,$$

also $y = 0$.

(b) Wir zeigen, dass $\lambda_0 \in \rho(A)$ gilt. Mit A ist offensichtlich auch $\overline{A}$ dissipativ und damit (Bemerkung 2.26) ist $\lambda_0 - \overline{A}$ injektiv. Da $A \subset \overline{A}$ gilt, $\lambda_0 - A\colon D(A) \to X$ surjektiv und $\lambda_0 - \overline{A}\colon D(\overline{A}) \to X$ injektiv ist, folgt bereits $D(A) = D(\overline{A})$, d.h. $A = \overline{A}$. Somit ist $\lambda_0 - A\colon D(A) \to X$ bijektiv und abgeschlossen, und nach dem Satz vom stetigen Inversen ist $(\lambda_0 - A)^{-1}$ stetig. Somit ist $\lambda_0 \in \rho(A)$.

(c) Wir zeigen $(0,\infty) \subset \rho(A)$. Die Menge $\rho(A) \cap (0,\infty)$ ist nichtleer und relativ offen in $(0,\infty)$. Sei $\lambda \in (0,\infty)$ ein Häufungspunkt von $\rho(A) \cap (0,\infty)$. Dann existiert eine Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty) \cap \rho(A)$ mit $\lambda_k \to \lambda > 0$. Wegen

$$\sigma\big((\mu - A)^{-1}\big) \setminus \{0\} = \left\{\frac{1}{\mu - \lambda}, \lambda \in \sigma(A)\right\}, \qquad \mu \in \rho(A),$$

folgt für den Spektralradius $r\big((\mu - A)^{-1}\big) := \max\big\{|\lambda| : \lambda \in \sigma\big((\mu - A)^{-1}\big)\big\}$, dass

$$r\big((\mu - A)^{-1}\big) = \frac{1}{\operatorname{dist}\big(\mu, \sigma(A)\big)}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}\big(\lambda_k, \sigma(A)\big) &= \frac{1}{r\big((\lambda_k - A)^{-1}\big)} \geq \|(\lambda_k - A)^{-1}\|_{L(X)}^{-1} \\ &\geq \lambda_k \geq C > 0 \quad (k \geq k_0).\end{aligned}$$

Dies bedeutet $\lambda \in \rho(A)$. Damit ist die Menge $(0,\infty) \cap \rho(A)$ auch relativ abgeschlossen. Da $(0,\infty)$ zusammenhängend ist, erhalten wir $(0,\infty) \subset \rho(A)$.

(d) Da A dissipativ ist, folgt aus Bemerkung 2.26 die Ungleichung

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_{L(X)} \leq \|x\| \quad (x \in X, \lambda > 0).$$

Aus dem Theorem 2.21 von Hille-Yosida folgt (ii).

(ii)⇒(i). Wir verwenden die Yosida-Approximation $kA(k-A)^{-1}x = k^2(k-A)^{-1}x - kx \to Ax$ ($k \to \infty$, $x \in D(A)$) und erhalten für $x \in D(A)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle &= \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re}(\langle k^2(k-A)^{-1}x - kx, x\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re}\left(\langle k^2(k-A)^{-1}x, x\rangle - k\|x\|^2\right) \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} k\big(\|k(k-A)^{-1}x\|\,\|x\| - \|x\|^2\big) \leq 0,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Satz von Hille-Yosida angewendet wurde, nach welchem $\|k(k-A)^{-1}x\| \leq \|x\|$ gilt. □

2.28 Bemerkung. Wir haben den Satz von Lumer-Phillips nur für Hilberträume formuliert, da er in diesem Fall am häufigsten anwendbar ist. Der Satz gilt aber in gleicher Weise in Banachräumen, falls man den Begriff der Dissipativität entsprechend verallgemeinert: Ein Operator $A\colon X \supset D(A) \to X$ in einem Banachraum X heißt dissipativ, falls für jedes $x \in D(A)$ ein Funktional $\varphi_x \in X'$ existiert mit $\|\varphi_x\|_{X'}^2 = \|x\|^2 = \varphi_x(x)$ und $\operatorname{Re}\varphi_x(Ax) \le 0$. (Im Hilbertraum-Fall ist $\varphi_x = \langle x, \cdot\rangle$ ein solches Funktional.)

2.29 Bemerkung. Wegen $\left|\frac{1}{\lambda+i|\xi|^2}\right| \le \frac{1}{|\lambda|}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, gilt für den Schrödingeroperator $A_s = i\Delta$ die Ungleichung

$$\|\lambda(\lambda - A_s)^{-1}\|_{L(L^2(\mathbb{R}^n))} \le 1 \quad (\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}),$$

d.h. auch $-A_s$ erzeugt eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Man spricht insgesamt von der *Schrödingergruppe*

$$(\exp(i\Delta t))_{t\in\mathbb{R}} \subset L\big(L^2(\mathbb{R}^n)\big).$$

Diese ist stark stetig auf $\mathbb{R}$, und es gilt $\exp\big(i\Delta(t+s)\big) = \exp(i\Delta t)\exp(i\Delta s)$ $(s,t\in\mathbb{R})$.

Bemerkung 2.29 motiviert die folgende allgemeine Definition.

2.30 Definition. Eine stark stetige Abbildung $T\colon \mathbb{R} \to L(X)$ mit

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\qquad t, s \in \mathbb{R}$,

heißt C_0-*Gruppe* auf X.

2.31 Satz (Hille-Yosida für Kontraktionsgruppen)**.** *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein linearer Operator. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) A generiert eine C_0-Kontraktionsgruppe auf X,

*(ii) A und $-A$ generieren C_0-Kontraktions**halb**gruppen auf X,*

(iii) $\overline{D(A)} = X$, $\mathbb{R}\setminus\{0\} \subset \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \le 1$, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Beweis. Klar sind $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ nach Theorem 2.21 sowie $(i) \Rightarrow (ii)$ nach Definition 2.30. Es bleibt $(ii) \Rightarrow (i)$ zu zeigen. Definiere dazu

$$T(t) := \begin{cases} T_+(t) & : t \ge 0, \\ T_-(-t) & : t < 0, \end{cases}$$

wobei $T_\pm$ von $\pm A$ generiert werden. Sind $(T_+)_k$ und $(T_-)_k$ die Yosida - Approximationen aus Theorem 2.21, dann gilt $A_k(-A)_m = (-A)_m A_k$ und somit auch

$(T_+)_k(T_-)_m = (T_-)_m(T_+)_k$. Für $k, m \to \infty$ erhält man $T_+(t)T_-(t) = T_-(t)T_+(t)$. Setze nun

$$S(t) := T_+(t)T_-(t)\ , \qquad t \geq 0.$$

Dann gilt $S(0) = I$ und $\big(S(t)\big)_{t\geq 0} \subset L(X)$. Für die Ableitung ergibt sich

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AT_+(t)T_-(t)x - AT_+(t)T_-(t)x = 0 \quad (x \in D(A)).$$

Aus Bemerkung 2.13 b) folgt $S(t)x = S(0)x = x$ $(t \geq 0, x \in D(A))$ und nach Bemerkung A.2 b) weiter $S = I$. Damit existiert $T_+(t)^{-1}$ und ist gegeben durch $T_-(t)$.

Seien $t, s \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, $s < 0$ und o.B.d.A. $t + s \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(t+s)T(t)^{-1}T(s)^{-1} &= T_+(t+s)T_+(t)^{-1}T_-(-s)^{-1} \\ &= T_+(t+s)T_+(-s)T_+(t)^{-1} = I \end{aligned}$$

und damit

$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad (t, s \in \mathbb{R}).$$

Weiterhin ist in $t_0 > 0$ die Gruppe T stark stetig. Dies pflanzt sich wegen der Halbgruppeneigenschaft auf $\mathbb{R}$ fort. Klar ist, dass A die Gruppe T erzeugt. □

2.32 Bemerkung. Da $\frac{1}{\lambda+|\xi|^2}$ singulär ist für $\lambda < 0$, generiert Δ keine C_0-Gruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Aus Bemerkung 2.20 sieht man, dass nicht alle Halbgruppen kontraktiv sind. Umgekehrt erhält man durch Verschieben i.a. bestenfalls eine beschränkte C_0 - Halbgruppe. Deshalb ist die folgende Verallgemeinerung wichtig.

2.33 Satz (Satz von Hille-Yosida, allgemeine Form)**.** *Seien $A : X \supset D(A) \to X$ linear, $\omega \in \mathbb{R}$ und $M \geq 1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist Generator einer C_0-Halbgruppe T mit $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M \exp(\omega t)$ $(t \geq 0)$.*

(ii) *Es gilt $\overline{D(A)} = X$, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und*

$$\|(\lambda - \omega)^k(\lambda - A)^{-k}\|_{L(X)} \leq M \quad (\lambda > \omega, k \in \mathbb{N}).$$

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $\omega = 0$ voraus. Das ist nach Bemerkung 2.20 möglich.

„*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*“: Nach Voraussetzung gilt $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M$ für alle $t \geq 0$. Wir definieren uns eine neue Norm durch

$$|||x||| := \sup_{s\geq 0} \|T(s)x\|\ , \qquad x \in X.$$

Für diese gelten die Abschätzungen

$$\|x\| \le |||x||| \le M\|x\| \,, \qquad x \in X,$$
$$|||T(t)x||| = \sup_{s\ge 0} \|T(t+s)x\| \le |||x||| \,, \qquad x \in X, t \ge 0.$$

Also ist T kontraktiv auf $(X, |||\cdot|||)$. Nach Theorem 2.21 folgt schließlich

$$|||\lambda(\lambda - A)^{-1}x||| \le |||x||| \,, \qquad x \in X, \lambda > 0,$$
$$\implies |||\lambda^k(\lambda - A)^{-k}x||| \le |||x||| \,, \qquad x \in X, \lambda > 0, k \in \mathbb{N},$$
$$\implies \|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}x\| \le M\|x\| \,, \qquad x \in X, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}.$$

„$(ii) \implies (i)$“: Voraussetzung ist $\|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}\|_{L(X)} \le M, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}$. Auch hier definiert man sich für $\mu > 0$,

$$\|x\|_\mu := \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mu^k(\mu - A)^{-k}x\| \,, \qquad x \in X.$$

Es gilt das *Umnormierungslemma*:

(1) $\|x\| \le \|x\|_\mu \le M\|x\|, \quad x \in X,$
(2) $\|\mu(\mu - A)^{-1}x\|_\mu \le \|x\|_\mu, \quad x \in X,$
(3) $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \le \|x\|_\mu, \quad x \in X, 0 < \lambda \le \mu,$
(4) $\|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}x\| \le \|x\|_\mu, \quad x \in X, 0 < \lambda \le \mu,\ k \in \mathbb{N}_0,$
(5) $\|x\|_\lambda \le \|x\|_\mu, \quad x \in X, 0 < \lambda \le \mu.$

Wir wollen an dieser Stelle lediglich (3) beweisen, der Rest ist eine einfache Übungsaufgabe.

Aus der Resolventengleichung

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

folgt für $x \in X$,

$$(\lambda - A)^{-1}x = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}x + (\mu - A)^{-1}x.$$

Damit erhält man

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \le \frac{\mu - \lambda}{\mu}\|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu + \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu$$

und somit

$$\underbrace{\left(1 - \frac{\mu - \lambda}{\mu}\right)}_{=\lambda/\mu} \|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \le \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu \quad \implies \quad (3).$$

Mit diesem Umnormierungslemma kann man eine weitere Norm auf X definieren:

$$|||x||| := \sup_{\mu>0} \|x\|_\mu, \quad x \in X.$$

Es ist einfach einzusehen, dass

$$\|x\| \le |||x||| \le M\|x\|, \quad x \in X.$$

und man erhält

$$\begin{aligned} |||\lambda(\lambda - A)^{-1}x||| &= \sup_{\mu>0} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \\ &= \max\Big\{ \sup_{0<\lambda\le\mu} \underbrace{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu}_{\le\|x\|_\mu\le|||x|||}, \sup_{\mu<\lambda} \underbrace{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu}_{\le\|\lambda(\lambda-A)^{-1}x\|_\lambda\le\|x\|_\lambda\le|||x|||} \Big\} \\ &\le |||x|||, \quad x \in X, \lambda > 0. \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung des $0 < \lambda \le \mu$ - Supremums wurde (3), und für $\mu < \lambda$ erst (5) dann (2) ausgenutzt. Nach Theorem 2.21 generiert A eine C_0 - Kontraktionshalbgruppe auf $(X, |||\cdot|||)$, damit auch eine C_0 - Halbgruppe auf $(X, \|\cdot\|)$ und man hat

$$\|\exp(tA)x\| \le |||\exp(tA)x||| \le |||x||| \le M\|x\| , \qquad x \in X, t \ge 0.$$

□

2.34 Bemerkung. a) Entsprechend zu Satz 2.31 gilt ein allgemeines Resultat wie Satz 2.33 auch für C_0-Gruppen.

b) Aus Satz 2.33 folgt insbesondere, dass für zwei Generatoren A und B von C_0-Halbgruppen mit $A \subset B$ bereits $A = B$ folgt. Denn für hinreichend großes $\lambda > 0$ gilt $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$, und damit kann B keine echte Fortsetzung von A sein.

3. Holomorphe Halbgruppen und holomorpher Funktionalkalkül

3.1 Worum geht's? In einer Reihe von Beispielen, insbesondere in der parabolischen Theorie, hat man nicht nur eine C_0-Halbgruppe, sondern sogar eine holomorphe Halbgruppe. Dabei handelt es sich um die Holomorphie einer Banachraum-wertigen Abbildung (nämlich in den Banachraum der beschränkten linearen Operatoren). Beschränkte holomorphe Halbgruppen sind durch Abschätzungen der Resolvente charakterisiert.

Holomorphe Halbgruppen besitzen eine Glättungseigenschaft. Für derartige Probleme lässt sich die klassische Lösbarkeit beweisen, wobei für inhomogene Probleme die Variation der Konstanten verwendet wird, welche schon aus dem endlichdimensionalen Fall bekannt ist.

Zunächst müssen in diesem Abschnitt einige Grundlagen über holomorphe Banachraum-wertige Funktionen bereitgestellt werden. Insbesondere wird der Dunford-Kalkül diskutiert, welcher etwa auch für die Spektraltheorie in Banachräumen wesentlich ist.

a) Holomorpher Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren

Im folgenden sei stets X ein komplexer Banachraum.

3.2 Bemerkung. Sei X ein Banachraum, $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to L(X)$. Äquivalent sind

(i) $f : G \to L(X)$ ist holomorph (d.h. in G komplex differenzierbar),

(ii) für jedes $x \in X$ ist $f(\cdot)x : G \to X$ holomorph,

(iii) für jedes $x \in X$ und jedes $x' \in X'$ ist $\langle f(\cdot)x, x'\rangle : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

Dies sieht man unter Verwendung der Cauchy-Integralformel und des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit. Wir schreiben im Folgenden $\mathscr{H}(G; X)$ für die Menge aller in G holomorphen X-wertigen Funktionen und $\mathscr{H}(G) := \mathscr{H}(G; \mathbb{C})$.

Für holomorphe Banachraumwertige Funktionen gelten die bekannten Sätze der Funktionentheorie. So gilt zum Beispiel der Cauchy-Integralsatz und die Cauchy-Integralformel

$$f(z)\,\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\, f(w)dw \quad (z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma))$$

für $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathscr{H}(G;X)$ und γ ein nullhomologer Zyklus in G.

3.3 Definition. Eine C_0-Halbgruppe T auf dem Banachraum X heißt *beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe auf X vom Winkel* $\varphi \in (0, \pi/2]$, falls $T\colon [0,\infty) \to L(X)$ eine holomorphe Fortsetzung auf

$$\Sigma_\varphi := \Big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \varphi \Big\}$$

besitzt, so dass für alle $\widetilde{\varphi} \in (0, \varphi)$ ein $M_{\widetilde{\varphi}}$ existiert mit

$$\|T(z)\|_{L(X)} \le M_{\widetilde{\varphi}}\,, \qquad z \in \Sigma_{\widetilde{\varphi}}.$$

3.4 Lemma. *Sei T beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe auf X vom Winkel φ.*

(i) *Es gilt* $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2) \quad (z_1, z_2 \in \Sigma_\varphi)$.

(ii) *Es gilt für alle $\widetilde{\varphi} < \varphi$ die Gleichheit* $\lim\limits_{\Sigma_{\widetilde{\varphi}} \ni z \to 0} T(z)x = x \quad (x \in X)$.

(iii) *Für $\widetilde{\varphi} < \varphi$ existiert der Limes*

$$\lim_{\Sigma_{\widetilde{\varphi}} \ni h \to 0} \frac{T(h)x - x}{h}$$

genau dann, wenn $x \in D(A)$. In diesem Fall stimmt dieser Limes mit Ax überein.

Beweis. Übung. □

3.5 Definition (beschränkter Dunford-Kalkül, holomorpher Funktionalkalkül)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $A \in L(X)$ mit $\sigma(A) \subset \Omega$. Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$, welche $\sigma(A)$ einschließt. Zu $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ definiere

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

3.6 Satz. *In der Situation von Definition 7.11 ist $f \mapsto f(A)$, $\mathscr{H}(\Omega) \to L(X)$ ein Algebren-Homomorphismus, d.h. eine lineare Abbildung mit*

$$(fg)(A) = f(A)g(A) \quad (f, g \in \mathscr{H}(\Omega)).$$

Beweis. Wegen $\sup_{\lambda \in \mathcal{R}(\gamma)} |f(\lambda)| < \infty$ ist $f(A) \in L(X)$ wohldefiniert. Die Linearität von $f \mapsto f(A)$ ist klar.

Seien $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ und seien γ_1, γ_2 zwei Kurven in Ω, welche $\sigma(A)$ einschließen, so dass γ_1 im Inneren von γ_2 liegt. Dann gilt unter Verwendung der Resolventengleichung (Bemerkung A.7)

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \Big(\int_{\gamma_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda\Big)\Big(\int_{\gamma_2} g(\mu)(\mu - A)^{-1} d\mu\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda}\big[(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\big] d\mu d\lambda \\ &=: T_1 - T_2. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} T_1 &:= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda}\,(\lambda - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu\Big) f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} g(\lambda) f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= (f \cdot g)(A), \end{aligned}$$

da $\operatorname{ind}_{\gamma_2}(\lambda) = 1$ für $\lambda \in \mathcal{R}(\gamma_1)$ gilt. Mit $\operatorname{ind}_{\gamma_1}(\mu) = 0$ für $\mu \in \mathcal{R}(\gamma_2)$ folgt analog

$$T_2 := \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda}\,(\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda = 0.$$

□

3.7 Bemerkung. In der Situation von Definition 7.11 sei $f(z) = 1$ $(z \in G)$. Dann gilt $f(A) = \mathrm{id}_X$, d.h.

$$\mathrm{id}_X = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Für $f(z) = z$ $(z \in G)$ erhält man $f(A) = A$, d.h.

$$A = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Der Beweis verwendet die sogenannte Riesz-Projektion und ist in Anhang E ausgeführt (Lemma E.3 und Lemma E.4). Mit Satz 7.12 erhält man, dass für Polynome p der Operator $p(A)$ (definiert über den Funktionalkalkül) mit der üblichen Definition übereinstimmt.

Nun ist es das Ziel, auch für unbeschränkte Operatoren einen Funktionalkalkül zu entwickeln. Dabei werden sektorielle Operatoren betrachtet.

3.8 Definition. Sei $A\colon D(A) \to X$ ein linearer abgeschlossener Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\sup_{\lambda\in\Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty.$$

Falls A ein sektorieller Operator ist, so heißt

$$\varphi_A := \sup\{\varphi :\ \rho(A) \supset \Sigma_\varphi,\ \sup_{\lambda\in\Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty\}$$

der spektrale Winkel von A.

3.9 Lemma. *Sei A ein sektorieller Operator in X mit spektralem Winkel φ_A. Zu $\varepsilon > 0$ definiere*

$$A_\varepsilon := (A - \varepsilon)(1 - \varepsilon A)^{-1}.$$

a) Es gilt $A_\varepsilon \in L(X)$, und A_ε ist invertierbar mit $A_\varepsilon^{-1} = A_{1/\varepsilon}$.

b) Es gilt $\rho(A_\varepsilon) \supset \Sigma_{\varphi_A}$, und für $\lambda \in \Sigma_{\varphi_A}$ ist

$$(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} = \frac{1-\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\lambda)^2}\Big(\frac{\lambda+\varepsilon}{1+\varepsilon\lambda} - A\Big)^{-1} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\lambda}\,.$$

c) Für alle $\varphi \in (0, \varphi_A)$ existiert eine Konstante $C = C(\varphi)$, welche nicht von ε abhängt, mit

$$\|\lambda(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}\| \le C \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi,\ \varepsilon > 0).$$

d) Für $\varepsilon \to 0$ erhält man $(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} \to (\lambda - A)^{-1}$ in $L(X)$ und $A_\varepsilon x \to Ax \quad (x \in D(A))$.

Beweis. a) und b): Man verwendet die Identität

$$\alpha(A+\beta)(A+\gamma)^{-1} = \alpha + \alpha(\beta-\gamma)(A+\gamma)^{-1}$$

und erhält

$$A_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(A-\varepsilon)\Big(A - \frac{1}{\varepsilon}\Big)^{-1} = -\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\Big)\Big(A - \frac{1}{\varepsilon}\Big)^{-1}$$

und damit

$$\lambda - A_\varepsilon = \frac{\varepsilon\lambda+1}{\varepsilon}\Big(A - \frac{\varepsilon+\lambda}{\varepsilon\lambda+1}\Big)\Big(A - \frac{1}{\varepsilon}\Big)^{-1}$$

sowie

$$\begin{aligned}(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon\lambda+1}\Big(A - \frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big(A - \frac{\varepsilon+\lambda}{\varepsilon\lambda+1}\Big)^{-1} \\ &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon\lambda+1} + \frac{\varepsilon^2-1}{(\varepsilon\lambda+1)^2}\Big(A - \frac{\varepsilon+\lambda}{\varepsilon\lambda+1}\Big)^{-1}.\end{aligned}$$

c) Sei $\|\lambda(\lambda-A)^{-1}\| \le M \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi)$. Dann folgt unter Verwendung der Darstellung in b) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}\| &\le M\Big|\frac{1-\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\lambda)^2}\cdot\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda+\varepsilon}\Big| + \Big|\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\lambda}\Big| \\ &= \frac{1}{|\lambda|}\Bigg[\frac{M(1-\varepsilon^2)}{|1+\varepsilon\lambda|\cdot|1+\frac{\varepsilon}{\lambda}|} + \frac{1}{|1+\frac{1}{\varepsilon\lambda}|}\Bigg].\end{aligned}$$

Da $\varphi < \pi$, existiert eine Konstante K_φ so, dass für alle $\mu \in \Sigma_\varphi$ die Abschätzung $|1+\mu| \ge K_\varphi$ gilt. Angewendet auf $\mu = \varepsilon\lambda$, $\mu = \frac{\varepsilon}{\lambda} \in \Sigma_\varphi$ bzw. $\mu = \frac{1}{\lambda\varepsilon} \in \Sigma_\varphi$ erhält man

$$\|(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}\| \le \frac{1}{|\lambda|}\Big[\frac{M}{K_\varphi^2} + \frac{1}{K_\varphi}\Big] = \frac{C}{|\lambda|}.$$

d) Die Konvergenz der Resolventen sieht man an der Darstellung in b). Für die Konvergenz von $A_\varepsilon x$ verwende

$$A_\varepsilon x - Ax = -\varepsilon(1-\varepsilon A)^{-1}x \quad (x \in D(A)).$$

Wegen $\|\varepsilon(1-\varepsilon A)^{-1}\| = \|(\frac{1}{\varepsilon} - A)^{-1}\| \le C\varepsilon$ folgt $A_\varepsilon x \to A_x \quad (x \in D(A))$. □

Wir wollen zu einem sektoriellen Operator A die Funktion $f(A)$ durch einen Dunford-Kalkül definieren. Da nun über einen unendlich langen Weg integriert werden muss, muss man die Menge der Funktionen einschränken. Beachte in folgender Definition, dass $\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |\arg\lambda| > \varphi\} = -\Sigma_{\pi-\varphi}$.

3.10 Definition. Sei $\varphi \in (0,\pi]$. Zu $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi})$ definiere

$$\|f\|^\varphi_{\alpha,\beta} := \sup\{|\lambda^\alpha f(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi}, |\lambda| \le 1\} + \sup\{|\lambda^{-\beta} f(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi}, |\lambda| \ge 1\}.$$

Man setzt

$$\mathscr{H}_{\alpha,\beta}(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi}) := \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi}) : \|f\|^\varphi_{\alpha,\beta} < \infty\}$$

und

$$\mathscr{H}_0(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi}) := \bigcup_{\alpha,\beta<0} \mathscr{H}_{\alpha,\beta}(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi}).$$

3.11 Satz (Ein Dunford-Kalkül für sektorielle Operatoren)**.** *Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel φ_A, und sei $\varphi < \varphi_A$. Fixiere $\psi \in (\varphi, \varphi_A)$ und betrachte die Kurve*

$$\gamma_\psi := \{re^{-i\psi} : \infty > r \geq 0\} \cup \{re^{i\psi} : 0 \leq r < \infty\}.$$

Dann definiert

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (f \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}))$$

einen Algebren-Homomorphismus $\Phi_A\colon f \mapsto f(A)$, $\mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}) \to L(X)$. Die Abbildung Φ_A ist stetig im Sinn, dass für alle $\alpha, \beta < 0$ ein $C_{\alpha,\beta} > 0$ existiert mit

$$\|f(A)\|_{L(X)} \leq C_{\alpha,\beta} \|f\|^\varphi_{\alpha,\beta} \quad (f \in \mathscr{H}_{\alpha,\beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})).$$

Falls A sektoriell, beschränkt und invertierbar ist, stimmt die obige Definition mit dem Dunford-Kalkül aus Definition 7.11 überein.

Für $f \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})$ gilt ferner $f(A_\varepsilon) \to f(A)$ in $L(X)$ für $\varepsilon \to 0$, und die Menge $\{f(A_\varepsilon) : \varepsilon > 0\} \subset L(X)$ ist beschränkt.

Beweis. **(i)** Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Wegen $\psi < \varphi_A$ existiert ein $M_A > 0$ mit

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M_A}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \mathcal{R}(\gamma_\psi)). \tag{3-1}$$

Nach Lemma 7.15 c) gilt diese Abschätzung (nach eventueller Vergrößerung von M_A) auch für A_ε anstelle von A.

Sei $f \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi})$, d.h. es existieren $\alpha, \beta < 0$ mit $f \in \mathscr{H}_{\alpha,\beta}(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi})$. Für $\lambda \in \mathcal{R}(\gamma_\psi)$ gilt dann

$$|f(\lambda)|\; \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \begin{cases} M_A \|f\|^\varphi_{\alpha,\beta} |\lambda|^{-1-\alpha}, & |\lambda| \leq 1, \\ M_A \|f\|^\varphi_{\alpha,\beta} |\lambda|^{-1+\beta}, & |\lambda| \geq 1. \end{cases}$$

Somit ist

$$h_f(\lambda) := M_A \|f\|^\varphi_{\alpha,\beta} \big(|\lambda|^{-1-\alpha} \chi_{\{|\lambda| \leq 1\}}(\lambda) + |\lambda|^{-1+\beta} \chi_{\{|\lambda| \geq 1\}}(\lambda) \big)$$

eine integrierbare Majorante von $f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}$ auf γ_ψ. Da A_ε ebenfalls der Abschätzung (3-1) genügt, ist h_f auch eine simultane Majorante von $f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}$ für alle $\varepsilon > 0$.

(ii) Sei zunächst A sektoriell, beschränkt und invertierbar. Dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{C}\setminus\Sigma_{\varphi_A}$ kompakt. Wegen $0 \notin \sigma(A)$ existieren $r > 0$ und $R > 0$ so, dass $\sigma(A)$ von der Kurve $\gamma_{\psi,r,R}$ eingeschlossen wird, wobei $\gamma_{\psi,r,R} := re^{i[-\psi,\psi]} \cup [r,R]e^{i\psi} \cup Re^{i[\psi,-\psi]} \cup [R,r]e^{-i\psi}$. Dies gilt z.B. für $R > \|A\|$ und $r < \|A^{-1}\|^{-1}$.

Für $f \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})$ gilt nach dem beschränkten Dunford-Kalkül

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,r,R}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Nach dem Cauchy-Integralsatz hängt der Wert des Integrals nicht von r und R ab, falls r hinreichend klein und R hinreichend groß ist. Nach Teil (i) des Beweises ist $f(\cdot)(\cdot - A)^{-1}$ auf γ_ψ integrierbar, und wir erhalten im Limes $r \to 0$ und $R \to \infty$ die Darstellung

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

(iii) Sei nun A unbeschränkt. Wir wenden Teil (ii) auf die Approximationen A_ε an und erhalten

$$f(A_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda.$$

Nach Lemma 7.15 d) gilt $(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} \to (\lambda - A)^{-1}$ in $L(X)$ für $\varepsilon \searrow 0$. Nach Teil (i) des Beweises existiert eine integrierbare Majorante h_f, d.h. das Integral $f(A) \in L(X)$ ist wohldefiniert, und mit majorisierter Konvergenz folgt $f(A_\varepsilon) \to f(A)$ $(\varepsilon \to 0)$ in $L(X)$. Die Definition von h_f zeigt außerdem, dass $\|f(A)\| \le C_{\alpha,\beta} \|f\|_{\alpha,\beta}^\varphi$ wie auch $\|f(A_\varepsilon)\| \le C_{\alpha,\beta} \|f\|_{\alpha,\beta}^\varphi$ gilt. Insbesondere ist Φ_A stetig und die Familie $\{f(A_\varepsilon) : \varepsilon > 0\} \subset L(X)$ beschränkt.

Schließlich gilt $(fg)(A_\varepsilon) = f(A_\varepsilon) g(A_\varepsilon)$ nach Satz 7.12, und für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir $(fg)(A) = f(A)g(A)$, d.h. Φ_A ist ein Algebren-Homomorphismus. □

3.12 Definition und Satz. *Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel φ_A, und sei $\varphi < \varphi_A$. Sei*

$$\mathscr{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi) := \Big\{ f \in \bigcup_{\beta < 0} \mathscr{H}_{0,\beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi) : f \text{ holomorph an der Stelle 0 fortsetzbar} \Big\}.$$

Zu $f \in \mathscr{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$ definiere

$$f_0(\lambda) := f(\lambda) - \frac{f(0)}{1 - \lambda}.$$

Dann gilt $f_0 \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$. Definiere

$$f(A) := f_0(A) + f(0)(1 - A)^{-1}.$$

Beweis. Wie etwa der Mittelwertsatz der Differentialrechnung zeigt, ist eine Funktion $f \in \mathscr{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$ genau dann in $\mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$, wenn $f(0) = 0$ ist. Dies ist für f_0 der Fall, also ist $f_0(A)$ nach Satz 3.11 definiert. □

3.13 Satz. *Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel φ_A, und sei $\varphi < \varphi_A$. Betrachte für $\psi \in (\varphi, \varphi_A)$ und $\delta > 0$ die Kurve*

$$\gamma_{\psi,\delta} := (\infty, \delta]e^{-i\psi} \cup \delta e^{i[-\psi,\psi]} \cup [\delta, \infty)e^{i\psi}$$

(„Schlüssellochweg"). Dann gilt für hinreichend kleines $\delta > 0$ die Gleichheit

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (f \in \mathscr{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)).$$

Die Abbildung $\Phi\colon \mathscr{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi) \to L(X)$, $f \mapsto f(A)$ ist wohldefiniert und ein Algebren-Homomorphismus. Die Konvergenzaussagen von Satz 3.11 gelten analog.

Beweis. Wir approximieren wieder den Operator A durch A_ε. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt für hinreichend kleines $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
f(A_\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} f_0(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} f(0)(1-\lambda)^{-1}(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\psi} f_0(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda + f(0)(1 - A_\varepsilon)^{-1} \\
&= f_0(A_\varepsilon) + f(0)(1 - A_\varepsilon)^{-1}.
\end{aligned}$$

Wir nehmen den Grenzwert $\varepsilon \to 0$: Nach Lemma 7.15 gilt $(1 - A_\varepsilon)^{-1} \to (1 - A)^{-1}$, nach Satz 3.11 gilt $f_0(A_\varepsilon) \to f_0(A)$, und mit majorisierter Konvergenz erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda = f_0(A) + f(0)(1 - A)^{-1} = f(A).$$

Beachte hierbei, dass $f(\cdot)(\cdot - A)^{-1}$ auf $\gamma_{\psi,\delta}$ integrierbar ist. Wie im Beweis von Satz 3.11 folgen die Konvergenzaussagen von $f(A_\varepsilon)$ gegen $f(A)$ und damit die Multiplikativität von Φ aus der Gleichheit $(fg)(A_\varepsilon) = f(A_\varepsilon)g(A_\varepsilon)$. $\square$

3.14 Korollar. *a) Sei A sektorieller Operator mit Winkel $\varphi_A > 0$. Für $\mu \in \Sigma_{\varphi_A}$ gilt*

$$(\mu - A)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{1}{\lambda - \mu}(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

b) Sei A sektorieller Operator mit Winkel $\varphi_A \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, und sei $\vartheta \in (0, \varphi_A - \frac{\pi}{2})$. Dann ist für $z \in \Sigma_\vartheta$ der Operator

$$\exp(zA) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{z\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \in L(X)$$

wohldefiniert. Es gilt

$$\exp(z_1 A)\exp(z_2 A) = \exp((z_1+z_2)A) \quad (z_1, z_2 \in \Sigma_\vartheta).$$

Die Abbildung $z \mapsto \exp(zA)$, $\Sigma_\vartheta \to L(X)$ *ist holomorph.*

Beweis. a) Die Funktion $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda-\mu}$ gehört zu $\mathscr{H}_a(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma}_\varphi)$, wobei $\varphi < \varphi_A$ so groß gewählt wird, dass $\mu \in \Sigma_\varphi$ gilt. Damit folgt die Aussage aus Satz 3.13 (beachte, dass $(\mu - A_\varepsilon)^{-1} \to (\mu - A)^{-1}$ für $\varepsilon \to 0$).

b) Wähle $\varphi \in (\vartheta + \frac{\pi}{2}, \varphi_A)$. Für $z \in \Sigma_\vartheta$ gilt dann $\lambda \mapsto e^{\lambda z} \in \mathscr{H}_a(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma}_\varphi)$, und die Wohldefiniertheit und die Multiplikativität folgen aus Satz 3.13. Zum Nachweis der Holomorphie beachte man, dass $\lambda \mapsto \lambda e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1}$ über $\gamma_{\psi,\delta}$ integrierbar ist. Nach dem Satz über parameterabhängige Integrale existiert also die komplexe Ableitung $\frac{d}{dz}\exp(zA) \in L(X)$ für alle $z \in \Sigma_\vartheta$, d.h. $\exp(\cdot A)$ ist holomorph. □

3.15 Bemerkung. a) Wir haben den Dunford-Kalkül für Funktionen $f \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma}_\varphi)$ sowie für $f \in \mathscr{H}_a(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma}_\varphi)$ definiert. Eine weitere Verallgemeinerung ist (unter der Zusatzbedingung, dass $R(A)$ dicht in X ist) möglich auf alle Funktionen f, welche holomorph im Sektor $\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma}_\varphi$ und polynomial beschränkt an der Stelle 0 und bei Unendlich sind. Der dadurch definierte Operator ist nicht notwendigerweise beschränkt, man spricht von einem erweiterten Dunford-Kalkül.

b) Ein Operator $A\colon X \supset D(A) \to X$ besitzt einen beschränkten H^∞-Kalkül (mit Winkel φ_A), falls A sektoriell mit spektralem Winkel φ_A ist, $R(A)$ dicht in X ist und für alle $\varphi < \varphi_A$ die Abschätzung

$$\|f(A)\|_{L(X)} \le C_\varphi \|f\|_\infty \quad (f \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma}_\varphi)$$

gilt. In diesem Fall ist $f(A)$ für alle $f \in \mathscr{H}^\infty(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma}_\varphi) := \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma}_\varphi) : f \text{ beschränkt}\}$ definiert, und die obige Abschätzung gilt für alle $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma}_\varphi)$.

c) Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel $\varphi_A > \frac{\pi}{2}$. Seien weiter $R(A)$ dicht in X, $s \in \mathbb{R}$ und $h_s(\lambda) := (-\lambda)^{is}$. Dann kann im erweiterten Dunford-Kalkül der Operator $A^{is} := h_s(A)$ definiert werden. Falls eine Konstante $C > 0$ existiert mit $A^{is} \in L(X)$ und

$$\|A^{is}\|_{L(X)} \le C \quad (|s| \le 1),$$

so sagt man, dass A beschränkte imaginäre Potenzen besitzt, kurz $A \in BIP(X)$.

b) Generatoren holomorpher Halbgruppen

3.16 Lemma. *Sei T eine differenzierbare Halbgruppe, d.h. die Abbildung* $(0,\infty) \to X$, $t \mapsto T(t)x$ *sei differenzierbar für alle* $x \in X$. *Sei A der Generator von T. Dann* *gilt* $T(t)x \in D(A^n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*, und* $t \mapsto T(t)x \in C^\infty((0,\infty), X)$ *mit*

$$T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x \quad (t > 0,\, x \in X).$$

Es gilt weiter $A^n T(t) \in L(X)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit Induktion über n.

(i) $n = 1$: Sei $x \in X$. Da $t \mapsto T(t)x$ differenzierbar ist, folgt $T(t)x \in D(A)$ für alle $t > 0$ (denn für $y := T(t)x$ existiert $T'(0)y = T'(t)x$) sowie $T'(t)x = AT(t)x$. Da A abgeschlossen ist und $T(t) \in L(X)$, ist auch $AT(t)$ abgeschlossen mit Definitionsbereich X. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen gilt $AT(t) \in L(X)$.

(ii) $n \to n+1$: Sei $s > 0$. Dann ist

$$(s,\infty) \to X,\, t \mapsto T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x = T(t-s)A^n T(s)x$$

nach Schritt (i) differenzierbar mit Ableitung

$$T^{(n+1)}(t)x = \frac{d}{dt}T(t-s)A^n T(s)x = AT(t-s)A^n T(s)x = A^{n+1}T(t)x.$$

Wegen $A^n T(t) \in L(X)$ nach (i) folgt wie oben $A^{n+1}T(t) = A(A^n T(t)) \in L(X)$. □

Man erhält folgende Charakterisierung für holomorphe Halbgruppen.

3.17 Satz. *Sei* X *ein Banachraum,* $A : D(A) \to X$ *linear. Äquivalent sind:*

(i) *A erzeugt eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe T auf X vom Winkel $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.*

(ii) *A ist sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.*

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Sei $\widetilde{\vartheta} \in (0, \vartheta)$. Für $\alpha \in (-\widetilde{\vartheta}, \widetilde{\vartheta})$ definiere $S(t) := T\big(\exp(i\alpha)t\big)$ $(t \geq 0)$. Nach Lemma 7.5 (i) und (ii) ist S eine C_0-Halbgruppe. Sei B ihr Erzeuger, dann gilt $x \in D(B)$ genau dann, wenn $\lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t}$ existiert. Dies ist aber äquivalent dazu, dass $\lim_{t\to 0} \frac{T(\exp(i\alpha)t)x - x}{\exp(i\alpha)t}$ existiert. Nach Lemma 7.5 (iii) ist dies genau dann der Fall, wenn $x \in D(A)$. Also ist $D(A) = D(B)$ und $B = \exp(i\alpha)A$.

Aus Theorem 2.21 folgt $(0,\infty) \subset \rho\big(\exp(i\alpha)A\big)$ und

$$(\lambda - e^{i\alpha}A)^{-1} = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)T(e^{i\alpha}t)dt \quad (\lambda > 0). \tag{3-2}$$

Nach Voraussetzung existiert eine Konstante $M = M(\widetilde{\vartheta})$ mit

$$\|T(z)\|_{L(X)} \leq M \quad (z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}).$$

Wegen

$$\int_0^\infty |\exp(-\lambda t)| \, \|T(e^{i\alpha}t)\| dt \le \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda} \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0) \tag{3-3}$$

ist das Integral auf der rechten Seite von (3-2) sogar für alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$ konvergent und dort eine holomorphe Funktion von λ.

Da beide Seiten von (3-2) holomorph in λ sind, folgt $\rho(e^{i\alpha}A) \supset \Sigma_{\pi/2}$ und (3-2) für alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2} \cap \rho(e^{i\alpha}A)$ (siehe Bemerkung 2.22 b)).

Insgesamt haben wir $e^{-i\alpha}\lambda \in \rho(A)$ für alle $|\alpha| < \widetilde{\vartheta}$ und alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$, d.h. $\Sigma_{\widetilde{\vartheta}+\pi/2} \supset \rho(A)$.

Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\widetilde{\vartheta} + \varepsilon < \vartheta$. Für $z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}+\pi/2}$ existiert ein $\lambda \in \Sigma_{\pi/2-\varepsilon}$ und ein α mit $|\alpha| < \vartheta + \varepsilon$ und $z = e^{-i\alpha}\lambda$. Aus (3-2) folgt

$$\|(z-A)^{-1}\| = \|(e^{-i\alpha}\lambda - A)^{-1}\| = \|(\lambda - B)^{-1}\| \le \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda} \le \frac{M}{C_\varepsilon|\lambda|},$$

wobei wir die Abschätzung $\operatorname{Re}\lambda \ge C_\varepsilon|\lambda|$ $(\lambda \in \Sigma_{\pi/2-\varepsilon})$ verwendet haben. Für alle $\lambda \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}+\pi/2}$ folgt somit

$$\sup\{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| : \lambda \in \Sigma_\psi\} < \infty \quad (\psi \in (0, \widetilde{\vartheta} + \frac{\pi}{2})).$$

Da $\widetilde{\vartheta} < \vartheta$ beliebig war, ist A sektoriell mit Winkel $\varphi_A \ge \vartheta + \frac{\pi}{2}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Sei $z \in \Sigma_\vartheta$. Wähle φ, ψ mit $\frac{\pi}{2} + |\arg z| < \varphi < \psi < \varphi_A$ und definiere

$$T(z) := \exp(zA) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Da $\lambda \mapsto e^{\lambda z}$ in ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, kann man hier $\delta > 0$ beliebig wählen. Nach Korollar 3.14 ist $T\colon \Sigma_\vartheta \to L(X)$ holomorph und erfüllt die Funktionalgleichung. Da $\lambda \mapsto Ce^{\lambda z}\max\{|\lambda|^{-1}, 1\}$ mit einer Konstanten $C > 0$ ein integrierbare Majorante von $e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1}$ auf $\gamma_{\psi,\delta}$ ist, folgt

$$\sup\{\|T(z)\| : z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}\} < \infty \quad (\widetilde{\vartheta} \in (0, \vartheta)).$$

Wir zeigen nun, dass T stark stetig ist. Seien $x \in D(A)$ und $z > 0$. Es gilt $\lambda(\lambda - A)^{-1}x = x + (\lambda - A)^{-1}Ax$, also

$$\begin{aligned} T(z)x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda - 0} x d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax d\lambda \\ &= x + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax d\lambda. \end{aligned}$$

Wir schätzen das letzte Integral auf jeder Wegstrecke ab, wobei wir $\delta := \frac{1}{z}$ wählen. Mit der Parametrisierung $\lambda = re^{i\psi}$, $r \in [\delta, \infty)$, erhalten wir

$$\Big\| \int_{[z^{-1},\infty)e^{i\psi}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Axd\lambda \Big\| \le \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{|\exp(rze^{i\psi})|}{r} \, \|(re^{i\psi} - A)^{-1}Ax\| dr.$$

Wegen $\psi > \frac{\pi}{2}$ existiert eine positive Konstante c mit $\operatorname{Re}(\lambda z) \le -c|\lambda| z$ ($\arg \lambda = \psi$). Damit erhalten wir $|\exp(rze^{i\psi})| \le \exp(-crz)$ ($r > 0$). Eingesetzt erhalten wir unter Verwendung der Resolventenabschätzung $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le M|\lambda|^{-1}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{|\exp(rze^{i\psi})|}{r} \, \|(re^{i\psi} - A)^{-1}Ax\| dr &\le \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-czr}}{r} \, \|(re^{i\psi} - A)^{-1}Ax\| dr \\
&\le M \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-czr}}{r^2} \, \|Ax\| dr \\
&= Mz \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-cs}}{s^2} \, ds \, \|Ax\| \to 0 \quad (z \to 0).
\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit wurde $s = zr$ substituiert. Analog erhalten wir

$$\int_{(\infty,\delta]e^{-i\psi}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Axd\lambda \to 0 \quad (z \to 0).$$

Für den Bogen $z^{-1}e^{[-i\psi,i\psi]}$ wählen wir die Parametrisierung $\lambda = z^{-1}e^{i\alpha}$, $\alpha \in [-\psi, \psi]$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_{z^{-1}e^{[-i\psi,i\psi]}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Axd\lambda \Big\| &\le \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(z^{-1}e^{i\alpha}z)| \, \|(z^{-1}e^{i\alpha} - A)^{-1}Ax\| d\alpha \\
&\le Mz \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(e^{i\alpha})| d\alpha \, \|Ax\| \to 0 \quad (z \to 0).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $T(z)x - x \to 0$ ($z \to 0$) für alle $x \in D(A)$. Da $D(A)$ dicht in X ist, ist T stark stetig.

Nach dem bisher Bewiesenen ist T eine C_0-Halbgruppe. Es bleibt noch zu zeigen, dass T von A erzeugt wird. Mit majorisierter Konvergenz erhalten wir für $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}T(z)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z}\lambda(\lambda - A)^{-1}xd\lambda \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z}xd\lambda}_{=0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1}Axd\lambda = T(z)Ax
\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{d}{dz}T(z)x = T(z)Ax \xrightarrow{|z|\to 0} Ax.$$

Sei B der Generator von T. Dann folgt $D(A) \subset D(B)$ und $Ax = Bx$ für alle $x \in D(A)$. Wegen $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$ ist deshalb $A = B$. □

3.18 Beispiele. a) Der Laplaceoperator in $L^2(\mathbb{R}^n)$ hat nach Beispiel 2.24 die Resolvente

$$(\lambda - \Delta)^{-1} = \mathscr{F}^{-1} \left[\frac{1}{\lambda + |\xi|^2} \right] \mathscr{F}.$$

Für Winkel $\varphi \in (0, \pi)$ können wir abschätzen

$$\frac{1}{|\lambda + |\xi|^2|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\operatorname{Re}\lambda + |\xi|^2\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\lambda\right)^2}} \le \frac{C_\varphi}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Aus dem Satz von Plancherel (Unitarität von $\mathscr{F}$) folgt

$$\|\lambda(\lambda - \Delta)^{-1}\|_{L(X)} \le C_\varphi \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi),$$

also ist Δ der Generator einer beschränkten holomorphen C_0-Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ vom Winkel $\frac{\pi}{2}$.

b) Der Schrödingeroperator $i\Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ erzeugt nach Bemerkung 2.29 eine C_0-Gruppe, insbesondere sind alle $T(t)$ invertierbar mit Inversem $T(-t)$. Daher kann es nicht sein, dass

$$T(t)u \in D(A) \quad (u \in L^2(\mathbb{R}^n), t > 0).$$

Das bedeutet T ist weder differenzierbar noch holomorph. Das kann man sich auch daran klarmachen, dass das Spektrum $\sigma(i\Delta)$ gerade durch Rotation um $i = \exp(i\pi/2)$ aus $\sigma(\Delta) = \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$ hervorgeht. Man findet keine in die linke Halbebene (negativer Realteile) hineinreichende Sektoren, die in $\rho(i\Delta)$ liegen.

Wir wollen auch noch die folgende, für Anwendungen wichtige, reelle Carakterisierung holomorpher Halbgruppen zeigen.

3.19 Satz. *Sei A der Generator einer beschränkten C_0-Halbgruppe T auf dem Banachraum X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) T ist beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe,

(ii) T ist differenzierbar und $\sup_{t>0} \|tAT(t)\|_{L(X)} < \infty$.

Beweis. **(i) $\Longrightarrow$ (ii).** Nach Definition ist T differenzierbar mit $T'(t) = AT(t) \in L(X)$ (siehe Lemma 3.16). Wie im Beweis von Satz 3.17 wählen wir φ, ψ mit $\frac{\pi}{2} < \varphi < \psi < \varphi_A$. Für festes $t > 0$ gilt dann $f(\lambda) := \lambda e^{\lambda t} \in \mathscr{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$, und wegen $f(A_\varepsilon) \to f(A)$ $(\varepsilon \to 0)$ folgt

$$AT(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \lambda e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Wieder können wir $\delta > 0$ beliebig wählen, da $t \mapsto \lambda e^{\lambda t}$ eine ganze Funktion ist. Wir setzen $\delta := t^{-1}$ und erhalten mit Konstanten $c, C > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|AT(t)\|_{L(X)} &\le C\Big(\int_{t^{-1}}^{\infty} e^{-ctr}dr + \frac{1}{t}\int_{-\psi}^{\psi} |\exp(e^{i\alpha})| d\alpha\Big)\\ &\le C\left(\frac{1}{t} + \frac{2\psi\exp(1)}{t}\right) = \frac{C}{t}.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\sup_{t>0}\|tAT(t)\|_{L(X)} < \infty$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Nach Lemma 3.16 gilt $T^{(k)}(t) = A^kT(t)$ $(t > 0,\ k \in \mathbb{N})$. Die Taylor-Formel mit Integraldarstellung des Restgliedes R_N liefert für $t > 0$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < t$

$$T(t+h) = \sum_{k=0}^{N}\frac{h^k}{k!}T^{(k)}(t) + \frac{1}{N!}\int_t^{t+h}(t+h-s)^N T^{(N+1)}(s)ds.$$

Mit der Voraussetzung $\|tAT(t)\|_{L(X)} \le M$ und der Stirlingschen Formel $k^k \le e^k k!$ folgt

$$\begin{aligned}\|T^{(k)}(t)\|_{L(X)} &= \|A^kT(t)\|_{L(X)} = \left(\frac{k}{t}\right)^k \left\|\left[\frac{t}{k}AT\left(\frac{t}{k}\right)\right]^k\right\|_{L(X)}\\ &\le \left(\frac{Mk}{t}\right)^k \le \left(\frac{Me}{t}\right)^k k!.\end{aligned}$$

In obiges Integral eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{N!}\int_t^{t+h}(t+h-s)^N T^{(N+1)}(s)ds\right\|\\ &\qquad\le \frac{1}{N!}\left|\int_t^{t+h}|t+h-s|^N\left(\frac{Me}{s}\right)^{N+1}(N+1)!\, ds\right|\\ &\qquad\le (N+1)\left(|h|\,\frac{Me}{t-|h|}\right)^{N+1}.\end{aligned}$$

Sei nun $q < 1$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \le \frac{qt}{Me+1}$. Dann gilt

$$|h|\,\frac{Me}{t-|h|} \le \frac{qtMe}{(Me+1)(t-\frac{qt}{Me+1})} = \frac{qtMe}{Met+t-qt} = q\,\frac{Me}{Me+1-q} \le q,$$

und somit konvergiert das Restglied der Taylorreihe gegen 0. Für solche h existiert daher die Taylorreihe und es gilt

$$T(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}T^{(k)}(t).$$

Wegen $\|T^{(k)}(t)\| \le \big(\frac{Me}{t}\big)^k k!$ konvergiert die Reihe aber auch für $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| \le \frac{qt}{Me+1}$. Daher besitzt T eine analytische Fortsetzung auf den Sektor Σ_φ mit $\varphi = \arctan\big(\frac{1}{Me+1}\big)$. Sei nun $\widetilde{\varphi} \in (0,\varphi)$. Für $z \in \Sigma_{\widetilde{\varphi}}$ gilt (mit einem $q \in (0,1)$),

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \le \tan\widetilde{\varphi} = q \cdot \tan\varphi = \frac{q}{Me+1}.$$

und damit

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}(Me+1) \le q < 1 \quad (z \in \Sigma_{\widetilde{\varphi}}).$$

Wir schreiben $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = t + ih$ und erhalten

$$\|T(z)\|_{L(X)} = \Big\|T\big(t+ih\big)\Big\| \le \sum_{k=0}^\infty h^k \Big(\frac{Me}{t}\Big)^k \le \sum_{k=0}^\infty q^k = \frac{1}{1-q} \quad (z = t+ih \in \Sigma_{\widetilde{\varphi}}).$$

Also ist $T : \Sigma_\varphi \to L(X)$ beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe. □

4. Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen im Hilbertraum

4.1 Worum geht's? Inzwischen kennen wir wichtige Charakterisierungen für Generatoren von C_0-Halbgruppen. Da ein Operator genau dann eine C_0-Halbgruppe erzeugt, wenn das zugehörige Cauchy-Problem klassisch wohlgestellt ist, sind die Eigenschaften konkreter Operatoren wesentlich für das Lösen partieller Differentialgleichungen. In diesem Abschnitt werden einige Beispiele partieller Differentialgleichungen aus der Sichtweise der Halbgruppentheorie diskutiert.

a) Die Wärmeleitungsgleichung und die Schrödingergleichung

Der Laplace-Operator ist im Ganzraum über die Fouriertransformation einfach zu analysieren.

4.2 Satz. *a) Sei $p \in (1, \infty)$. Betrachte den Laplace-Operator Δ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $D(\Delta) := W_p^2(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann erzeugt Δ eine holomorphe Halbgruppe in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

b) Der Schrödingeroperator $i\Delta$ mit Definitionsbereich $D(i\Delta) := H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ erzeugt eine C_0-Kontraktionsgruppe, aber keine holomorphe Halbgruppe in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Für $p = 2$ finden sich die Aussagen in Beispiel 3.18. Die Aussagen über den Laplace-Operator für den Fall $p \neq 2$ wurden in Aufgabe 7.3 gezeigt. □

4.3 Bemerkung. a) Wir werden später sehen, dass wesentlich allgemeinere Operatoren ebenfalls eine holomorphe Halbgruppe in L^p erzeugen. Dazu muss man aber einen Ersatz für den Satz von Plancherel finden.

b) Sei $p \in (1, \infty) \setminus \{2\}$. Dann erzeugt der Schrödingeroperator keine C_0-Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere ist die Schrödingergleichung für $p \neq 2$ nicht wohlgestellt. Diese Aussage ist bekannt als Satz von Hörmander, ein Beweis findet sich z.B. in [5], p. 176.

Falls der Laplace-Operator in einem Gebiet betrachtet wird, kann die Fouriertransformation nicht direkt angewendet werden. Für den Hilbertraumfall $p = 2$ können aber die Methoden aus Kapitel 1 angewendet werden, um die Erzeugung einer C_0-Kontraktionshalbgruppe und sogar einer holomorphen Halbgruppe zu zeigen. Dafür können wir deutlich allgemeinere Operatoren betrachten.

Sei im Folgenden $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und sei $A(D)$ ein formaler Differentialoperator de Form

$$A(D) = \sum_{i,k=1}^n \partial_i a_{ik}(x) \partial_j.$$

Dabei sei $a := (a_{ij})_{i,k=1}^n \in L^\infty(G, \mathbb{C}^{n\times n})$. Es gelte $a_{ik} = \overline{a_{ki}}$, und die Matrix a sei gleichmäßig positiv definit, d.h. es gilt

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\xi_i\overline{\xi_k} \geq C_a|\xi|^2 \quad (x \in G,\, \xi \in \mathbb{C}^n)$$

mit einer Konstanten $C_a > 0$. Das einfachste Beispiel eines solchen Operators ist $A = \Delta$. In Kurzschreibweise schreibt man auch $A(D) = \operatorname{div} a(x)\nabla$.

Die zu $A(D)$ und Dirichlet-Randbedingungen gegebene Sesquilinearform B ist gegeben durch

$$B\colon H_0^1(G) \times H_0^1(G) \to \mathbb{C},\ (u, v) \mapsto B(u, v) := -\langle a\nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^n)}. \tag{4-1}$$

Der Operator $\mathcal{A}\colon H_0^1(G) \to H^{-1}(G)$ sei wie in Kapitel 1 definiert durch $(\mathcal{A}u)(\varphi) := B(u, \overline{\varphi})$ $(\varphi \in H_0^1(G))$.

Zu $A(D)$ definiert man die Dirichlet-Realisierung A_D durch

$$D(A_D) := \{u \in H_0^1(G) : \mathcal{A}u \in L^2(G)\}, \quad A_D u := \mathcal{A}u.$$

Für den Laplace-Operator erhält man $D(\Delta_D) = \{u \in H_0^1(G) : \Delta u \in L^2(G)\}$. Man beachte, dass G hier nicht notwendig beschränkt ist und auch der Fall $G = \mathbb{R}^n$ eingeschlossen ist (in diesem Fall ist $H_0^1(G) = H^1(G)$).

4.4 Bemerkung. Falls a_{ik} nicht von x abhängt, gilt für alle $u \in H^2(G) \cap H_0^1(G)$ die Gleichheit

$$A_D u = \operatorname{div} a\nabla u = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}\partial_i\partial_k u.$$

Denn in diesem Fall gilt für $\varphi \in H_0^1(G)$ mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}u)(\varphi) &= B(u, \overline{\varphi}) = -\langle a\nabla u, \nabla\overline{\varphi}\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^n)} \\
&= -\int_G \sum_{i,k=1}^n a_{ik}\partial_i u(x)\partial_k\varphi(x)dx \\
&= \int_G \sum_{i,k=1}^n a_{ik}\partial_k\partial_i u(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_G (\operatorname{div} a\nabla u)(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Das lineare Funktional $\mathcal{A}u$ auf $H_0^1(G)$ ist somit gegeben durch $\int_G (\operatorname{div} a\nabla u)\varphi dx$. Wegen $\operatorname{div} a\nabla u \in L^2(G)$ für $u \in H^2(G)$ erhalten wir

$$H^2(G) \cap H_0^1(G) \subset D(A_D) \quad \text{sowie } A_D u = \operatorname{div} a\nabla u \; (u \in H^2(G) \cap H_0^1(G)).$$

Wir betrachten die verallgemeinerte Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen auf G:

$$\text{(WLG)} \quad \begin{cases} u_t - A_D u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times G, \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial G, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } G. \end{cases}$$

Dabei ist $u_0 \in L^2(G)$ gegeben.

4.5 Satz. *Der Operator A_D erzeugt eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe mit Winkel $\frac{\pi}{2}$ von Kontraktionen auf $L^2(\Omega)$. Insbesondere ist (WLG) klassisch wohlgestellt, und besitzt sogar für jeden Anfangswert $u_0 \in L^2(G)$ eine eindeutige Lösung $u \in C^\infty((0,\infty); L^2(G))$ mit $u(t,\cdot) \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D(A_D^k)$.*

Beweis. Da $H_0^1(G) \subset L^2(G) \subset H^{-1}(G)$ auch für unbeschränktes G ein Gelfand-Tripel ist, können wir die Ergebnisse aus Kapitel 1 anwenden. Die positive Definitheit von a liefert

$$\begin{aligned} -B(u,u) &= \int_G \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\partial_i u(x)\overline{\partial_k u(x)} dx \\ &\geq C_a \int_G |\nabla u(x)|^2 dx \geq C_a \|u\|_{H^1(G)}^2 - C_a \|u\|_{L^2(G)}^2. \end{aligned}$$

Also ist $-B$ koerzitiv. Da die durch (4-1) gegebene Bilinearform symmetrisch ist, ist A_D nach Lemma 1.7 selbstadjungiert (und insbesondere dicht definiert). Für $u \in D(A_D)$ gilt

$$\langle A_D u, u\rangle_{L^2(G)} = B(u,u) \leq 0. \tag{4-2}$$

Somit gilt für den numerischen Wertebereich von A_D die Inklusion $W(A_D) \subset (-\infty, 0]$. Nach Lemma 1.17 folgt $\sigma(A_D) \subset (-\infty, 0]$.

Da A_D nach (4-2) dissipativ ist und $1 \in \rho(A_D)$, folgt mit dem Satz von Lumer-Phillips, dass A eine C_0-Kontraktionshalbgruppe erzeugt. Wir zeigen, dass A_D sektoriell mit Winkel $\varphi_{A_D} = \pi$ ist, wobei wegen $\rho(A_D) \supset \Sigma_\pi = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ nur die Resolventenabschätzung zu zeigen ist.

Sei $\theta < \pi$, und sei $\lambda \in \Sigma_\theta$. Nach dem Spektralsatz und dem zugehörigen Funktionalkalkül (der eine Isometrie ist), gilt

$$\|(\lambda - A_D)^{-1}\|_{L(X)} = \sup\{|\tfrac{1}{\lambda - t}| : t \in \sigma(A_D)\} = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A_D))} \geq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \geq \frac{C}{|\lambda|}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\arg\lambda| \in [\pi/4, \theta]$, wobei die Konstante $C = C(\theta)$ unabhängig von λ gewählt werden kann. Da für $\lambda \in \Sigma_{\pi/4}$ (und damit $\operatorname{Re}\lambda \geq |\operatorname{Im}\lambda|$) trivialerweise $\operatorname{dist}(\lambda, (-\infty, 0]) \geq \operatorname{Re}\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{2}}|\lambda|$, erhalten wir für alle $\lambda \in \Sigma_\theta$ die Abschätzung

$$\|(\lambda - A_D)^{-1}\| \geq \frac{C_\theta}{|\lambda|}$$

mit einer Konstanten $C_\theta > 0$.

Also ist A_D sektoriell mit Winkel π und erzeugt damit eine holomorphe beschränkte C_0-Halbgruppe mit maximalem Winkel $\frac{\pi}{2}$. □

4.6 Bemerkung. a) Falls a hinreichend glatt (z.B. $a \in BUC^1(G)$ und falls der Rand des Gebietes G hinreichend glatt ist (z.B. genügt bei beschränkten Gebieten die Bedingung $C^{1,1}$), dann gilt

$$D(A_D) = H_0^1(G) \cap H^2(G).$$

Bei glatten (z.B. konstanten) Koeffizienten und Gebieten gilt $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} D(A_D^k) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und die Lösung ist C^∞ in t und x für alle $t > 0$.

Diese Aussagen sind wesentlich schwerer zu beweisen und werden in einer allgemeinen Theorie von Randwertproblemen in L^2 und L^p mitbewiesen.

b) Wir haben hier Dirichlet-Randbedingungen betrachtet. Im Falle von Neumann-Randbedingungen betrachtet man die Bilinearform

$$B_N \colon H^1(G) \times H^1(G) \to \mathbb{C},\ B(u, v) := -\langle a\nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(G;C^n)}.$$

Dieselben Rechnungen wie im Dirichlet-Fall zeigen, dass der zugehörige Operator A_N ebenfalls selbstadjungiert mit $\sigma(A_N) \subset (-\infty, 0]$ ist und daher ebenfalls eine holomorphe C_0-Halbgruppe von Kontraktionen mit maximalem Winkel $\frac{\pi}{2}$ erzeugt.

Die Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung $u_t - i\Delta u = 0$ mit Dirichlet-Randbedingungen ist gegeben durch Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten

$$(\mathrm{SG}) \begin{cases} u_t - iA_D u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times G, \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial G, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } G. \end{cases}$$

Die L^2-Realisierung des allgemeinen Schrödingeroperators ist gegeben durch

$$A_{S,D} := iA_D, \quad D(A_{S,D}) = D(A_D).$$

Dabei ist A_D wie oben die Realisierung von $A(D) = \operatorname{div} a(x)\nabla$ mit Dirichlet-Randbedingungen.

4.7 Satz. *Der Schrödinger-Operator $A_{S,D}$ erzeugt in $L^2(G)$ eine starkstetige unitäre Gruppe. Insbesondere ist (SG) wohlgestellt, d.h. besitzt für jedes $u_0 \in D(A_{S,D})$ eine klassische Lösung. Der Operator $A_{S,D}$ erzeugt keine holomorphe Halbgruppe.*

Dieselben Aussagen gelten für den allgemeinen Schrödingeroperator mit Neumann-Randbedingungen $A_{S,N} := iA_N$.

Beweis. Wegen $A_{S,D} = iA_D$ gilt $A_{S,D}^* = -A_{S,D}$, d.h. der Schrödinger-Operator ist schief-selbstadjungiert. Insbesondere gilt $\sigma(A_{S,D}) = i\sigma(A_D) \subset \{iz : z \le 0\}$ sowie für den numerischen Wertebereich $W(A_{S,D}) \subset \{iz : z \le 0\}$.

Somit ist $A_{S,D}$ dicht definiert und wegen $\operatorname{Re}\langle A_{S,D}u, u\rangle_{L^2(G)} = 0$ dissipativ. Da auch $A_{S,D}^* = -A_{S,D}$ dissipativ ist, erzeugt $A_{S,D}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(G)$ nach Übungsaufgabe 5.3. Dasselbe gilt für $-A_{S,D}$, d.h. $A_{S,D}$ erzeugt eine C_0-Gruppe von Kontraktionen.

Wegen $\sigma(A_{S,D}) \subset i\mathbb{R}$ existiert kein Sektor Σ_φ mit $\varphi > \frac{\pi}{2}$ so, dass $A_{S,D}$ in Σ_φ sektoriell ist. Nach Satz 3.17 erzeugt $A_{S,D}$ keine holomorphe Halbgruppe in $L^2(G)$.

Dieselben Argumente zeigen auch die Aussage für die Neumann-Randbedingungen. □

b) Die Wellengleichung: L^2-Theorie

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten zunächst die um 1 verschobene Wellengleichung

$$\text{(WG)} \begin{cases} w_{tt} - (\Delta - 1)w = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times G, \\ w = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial G, \\ w|_{t=0} = w_0 & \text{in } G, \\ w_t|_{t=0} = w_1 & \text{in } G. \end{cases}$$

Dabei sei $w_0 \in H_0^1(G, \mathbb{R})$ und $w_1 \in L^2(G, \mathbb{R})$. Man transformiert (WG) auf ein System erster Ordnung in der Zeit durch die Definitionen $u_1 := w$ und $u_2 := w_t$. Das zugehörige System erster Ordnung lautet somit

$$u_t = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_t \\ w_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_t \\ (\Delta - 1)w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - 1 & 0 \end{pmatrix} u.$$

Dies gibt Anlass zur Definition des Operators

$$Au := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

im Hilbertraum $H := H_0^1(G; \mathbb{R}) \times L^2(G; \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_H := \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(G;\mathbb{R})} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(G;\mathbb{R})},$$

wobei der Definitionsbereich durch $D(A) := D(\Delta_D) \times H_0^1(G; \mathbb{R}) \subset H$ gegeben ist.

4.8 Satz. *Der oben definierte Operator A erzeugt eine C_0-Gruppe von Kontraktionen auf $H_0^1(G;\mathbb{R})\times L^2(G;\mathbb{R})$. Insbesondere besitzt* (WG) *für jedes $\binom{w_0}{w_1}\in D(A)$ eine eindeutige klassische Lösung.*

Beweis. (i) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle Au,u\rangle_H &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1\\ \Delta-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right\rangle_H\\ &= \langle u_2,u_1\rangle_{H^1} + \langle(\Delta-1)u_1,u_2\rangle_{L^2}\\ &= \langle u_2,u_1\rangle_{L^2} + \langle\nabla u_2,\nabla u_1\rangle_{L^2} - \langle\nabla u_1,\nabla u_2\rangle_{L^2} - \langle u_1,u_2\rangle_{L^2} = 0.\end{aligned}$$

Daher ist A ist dissipativ. Wir rechnen nach, dass $1-A$ surjektiv ist. Dazu sei $f\in H$ gegeben. Wir suchen u mit

$$(1-A)u = \begin{pmatrix} u_1-u_2\\ u_2-(\Delta-1)u_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\\ f_2\end{pmatrix}.$$

Dies ist äquivalent zu den Bedingungen

$$u_2 = u_1 - f_1,\quad 2u_1-\Delta u_1 = f_1+f_2.$$

Da Δ_D Generator einer C_0 - Kontraktionshalbgruppe ist (Satz 4.25), folgt $2\in\rho(\Delta_D)$. Daher existiert genau ein $u_1\in D(\Delta_D)$ mit $2u_1-\Delta u_1 = f_1+f_2$. Mit $u_2 := u_1-f_1\in H_0^1(\Omega;\mathbb{R})$ gilt $(1-A)u=f$, d.h. $1-A$ ist surjektiv. Nach dem Satz von Lumer-Phillips erzeugt A eine C_0-Kontraktionshalbgruppe T auf $H_0^1(G)\times L^2(G)$. Insbesondere ist die erste Komponente des Vektors $T(t)\binom{w_0}{w_1}$ die eindeutige klassische Lösung zu (WG).

(ii) Wegen $\langle Au,u\rangle_H = 0$ ist auch $-A$ dissipativ. Die Gleichung $(1+A)u=f$ führt jetzt auf $u_1+u_2=f_1$ und $(\Delta-1)u_1+u_2=f_2$. Dies liefert $u_1=f_1-u_2$ und damit

$$(\Delta-2)u_1 = f_2-f_1.$$

Wieder ist dies eindeutig lösbar, und mit $u_2 := f_2-u_1$ erhält man eine Lösung von $(1+A)u=f$. Somit ist $1+A$ surjektiv, und nach dem Satz von Lumer-Phillips erzeugt auch $-A$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe. Damit erzeugt A eine C_0-Gruppe von Kontraktionen. □

Für die Behandlung der eigentlichen Wellengleichung verwenden wir folgendes Störungsresultat, das später bewiesen wird.

4.9 Satz. *Sei A Generator einer C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X und $B\in L(X)$. Dann ist $A+B$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe auf X.*

4.10 Korollar (Wellengleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Der Operator $\widetilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ mit Definitionsbereich $D(\widetilde{A}) := D(\Delta_D) \times H_0^1(\Omega)$ erzeugt eine C_0-Halbgruppe auf $H_0^1(G) \times L^2(G)$. Insbesondere ist die Wellengleichung*

$$\text{(WG)} \begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times G, \\ w = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial G, \\ w|_{t=0} = w_0 & \text{in } G, \\ w_t|_{t=0} = w_1 & \text{in } G. \end{cases}$$

wohlgestellt.

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.8 gilt $\widetilde{A} = A + B$ mit

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in L\big(H_0^1(G) \times L^2(G)\big).$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.9. □

c) Die Stokesgleichung

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die Stokesgleichung ist gegeben durch das System

$$\text{(SG)} \begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla p = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times G, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times G, \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial G, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } G. \end{cases}$$

Unbekannt ist hier nicht nur das Geschwindigkeitsfeld $u : G \to \mathbb{R}^n$, sondern auch der Druck $p : G \to \mathbb{R}$. Um Resultate der Halbgruppentheorie anwenden zu können, muss zunächst (SG) ein Grundraum sowie ein geeigneter Operator zugeordnet werden. Unter der Annahme, dass eine genügend glatte Lösung existiert, ergibt sich

$$0 = (\operatorname{div} u)|_{t=0} = \operatorname{div}\,(u|_{t=0}) = \operatorname{div}\, u_0.$$

Um die Wohlgestelltheit zu garantieren, muss also a priori schon $\operatorname{div} u_0 = 0$ vorausgesetzt werden. Diese Bedingung nimmt man daher schon in die Definition des Grundraums auf. Dies ist die Motivation der folgenden Definition.

4.11 Definition. a) Sei $\mathscr{H}^1(G;\mathbb{R}) := \{v \in L^1_{\text{loc}}(G;\mathbb{R}) : \nabla v \in L^2(G;\mathbb{R}^n)\}$. Definiere auf $\mathscr{H}^1(G;\mathbb{R})$ die Äquivalenzrelation $u \sim v :\Leftrightarrow u - v = \text{const}$. Dann heißt die Menge der Äquivalenzklassen $\dot{H}^1(G;\mathbb{R}) := \mathscr{H}^1(G;\mathbb{R})/\sim$ der homogene L^2-Sobolevraum der Ordnung 1. Auf $\dot{H}^1(G)$ wird das Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{\dot{H}^1(G;\mathbb{R})} = \int_G \nabla u \nabla v dx \quad (u, v \in \dot{H}^1(G;\mathbb{R}))$$

erklärt.

b) Die Menge

$$L^2_\sigma(G;\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(G;\mathbb{R}^n) : \langle u, \nabla\varphi\rangle_{L^2(G;\mathbb{R}^n)} = 0 \quad (\varphi \in \dot{H}^1(G;\mathbb{R}))\}$$

heißt der Unterraum der divergenzfreien L^2-Vektorfelder auf G.

4.12 Bemerkung. Der Raum $\dot{H}^1(G;\mathbb{R})$ ist ein Hilbertraum. Dies wird hier nicht bewiesen.

4.13 Lemma. *a) Die Teilräume $L^2_\sigma(G;\mathbb{R}^n)$ und $G_2(G;\mathbb{R}^n) := \{\nabla q : q \in \dot{H}^1(G;\mathbb{R})\}$ sind beide abgeschlossen in $L^2(G;\mathbb{R}^n)$.*

b) Für $u \in L^2_\sigma(G;\mathbb{R}^n)$ gilt $\operatorname{div} u = 0$ in $\mathscr{D}'(G;\mathbb{R}^n)$.

c) Sei G ein C^1-Gebiet und $\nu\colon \partial G \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenvektorfeld. Dann gilt für $u \in C^1(\overline{G};\mathbb{R}^n) \cap L^2_\sigma(G;\mathbb{R}^n)$ die Gleichheit $u \cdot \nu = 0$ auf ∂G.

Beweis. a) Die Abbildung $T\colon \dot{H}^1(G;\mathbb{R}) \to L^2(G;\mathbb{R}^n)$, $q \mapsto \nabla q$ ist nach Definition der Normen eine Isometrie zwischen zwei Hilberträumen. Daher ist $G_2(G;\mathbb{R}^n) = R(T)$ abgeschlossen. Wegen $L^2_\sigma(G;\mathbb{R}^n) = (G_2(G;\mathbb{R}^n))^\perp$ ist auch $L^2_\sigma(G;\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen.

b) Wegen $\mathscr{D}(G;\mathbb{R}) \subset \mathscr{H}^1(G)$ folgt für $u \in L^2_\sigma(G;\mathbb{R}^n)$ insbesondere $\langle u, \nabla\varphi\rangle = 0$ ($\varphi \in \mathscr{D}(G;\mathbb{R})$), d.h. $\operatorname{div} u = 0$ in $\mathscr{D}'(G;\mathbb{R}^n)$.

c) Nach dem Satz von Gauß gilt für $u \in C^1(\overline{G};\mathbb{R}^n) \cap L^2_\sigma(G;\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathscr{D}(G;\mathbb{R})$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}\int_{\partial G} \varphi(u\cdot\nu)dS(x) &= \int_{\partial G} (\varphi u)\cdot\nu dS(x)\\ &= \int_G \operatorname{div}(\varphi u)dx = \int_G \varphi \operatorname{div} u\, dx + \int_G u\nabla\varphi\, dx = 0,\end{aligned}$$

d.h. $u \cdot \nu = 0$ auf ∂G. □

Allgemein erfüllen die Funktionen in $L^2_\sigma(G)$ die Bedingung aus Teil c) des vorigen Lemmas in einem schwachen Sinne. Dies kann rigoros definiert werden, auf was wir hier allerdings nicht weiter eingehen wollen. Beachte, dass die plausible physikalische Interpretation dieser Bedingung darin besteht, dass in Normalenrichtung keine Flüssigkeit durch den festen Rand treten kann.

4.14 Definition (Helmholtz-Zerlegung)**.** Die orthogonale Zerlegung

$$L^2(G;\mathbb{R}^n) = L^2_\sigma(G;\mathbb{R}^n) \oplus G_2(G;\mathbb{R}^n) \tag{4-3}$$

heißt die Helmholtz-Zerlegung von $L^2(G;\mathbb{R}^n)$. Die zu (4-3) gehörende orthogonale Projektion $P_G : L^2(G;\mathbb{R}^n) \to L^2_\sigma(G;\mathbb{R}^n)$ mit $N(P_G) = G_2(G)$ heißt *Helmholtz-Projektion*.

4.15 Bemerkung. (4-3) ist die aus der Physik bekannte Tatsache, dass gewisse Vektorfelder f eine eindeutige Zerlegung $f = f_1 + f_2$ besitzen mit $\operatorname{div} f_1 = 0$ und $\operatorname{rot} f_2 = 0$. Beispielsweise gilt (4-3) für $L^q(G)$ für $1 < q < \infty$, wenn G beschränkt der Klasse C^1 ist, nicht jedoch z.B. in $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C^k(G)$.

Die Anwendung von P_G auf die erste Zeile von (SG) ergibt

$$0 = P_G(\partial_t u - \Delta u + \nabla p) = \partial_t u - P_G \Delta u.$$

Damit reduziert sich (SG) zum Cauchyproblem

$$\begin{cases} u' - Au = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times G, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } G \end{cases}$$

mit $u_0 \in L^2_\sigma(G)$ und dem Operator

$$A := P_G \Delta \;, \qquad D(A) = \Big\{ u \in H^1_0(G) \cap L^2_\sigma(G) : P_G \Delta u \in L^2_\sigma(G) \Big\}.$$

4.16 Satz. *Der Stokesoperator $A = P_G\Delta$ ist der Generator einer C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $L^2_\sigma(G)$.*

Beweis. Für $u \in D(A)$ gilt unter Verwendung der Orthogonalität von P_G

$$\langle Au, u\rangle_{L^2} = \langle P_G \Delta u, u\rangle_{L^2} = \langle \Delta u, P_G u\rangle_{L^2} = \langle \Delta u, u\rangle_{L^2} = -\|\nabla u\|_{L^2} \le 0.$$

Somit ist A ist dissipativ. Um die Voraussetzung des Satzes von Lumer-Phillips nachzuweisen, wendet man den Satz von Lax-Milgram im Raum $H^1_0(G) \cap L^2_\sigma(G)$ an. Dies erfolgt analog zu den vorherigen Abschnitten und sei deshalb dem Leser überlassen. □

d) Elastizitätsgleichungen

Elastizitätsgleichungen beschreiben das Verhalten elastischer Körper. Wir beschränken uns hier nur auf den physikalisch interessanten dreidimensionalen Fall. Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Dann betrachten wir zu $x \in G$ und $t \ge 0$ den Positionsvektor $X(t,x)$ des Teilchens, welches zur Zeit $t = 0$ an der Stelle x ist (d.h. es gilt nach Definition $X(0,x) = x$). Sei $u(t,x) := X(t,x) - x \in \mathbb{R}^3$ der Verschiebungsvektor (Auslenkung).

In der linearen Elastizitätstheorie sind unter anderem die folgenden Größen relevant:

(E1) Die Massendichtematrix $m = (m_{ij})_{i,j=1,2,3} \in L^\infty(G;\mathbb{R}^{3\times 3})$ beschreibt die Massenverteilung im Körper. Wir nehmen an, dass $m(x)$ für fast alle $x \in G$ eine symmetrische Matrix ist, und dass m gleichmäßig positiv definit ist, d.h. es existiert ein $m_1 > 0$ so, dass

$$\sum_{i,j=1}^{3} m_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_1|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^3)$$

für fast alle $x \in G$ gilt.

(E2) Der Spannungstensor $\overline{\boldsymbol{\tau}} = (\tau_{ij})_{i,j=1,2,3}\colon (0,\infty) \times G \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschreibt die mechanischen Spannungen im Körper, d.h. $\boldsymbol{\tau}(t,x)$ beschreibt die Spannungen an der Stelle x zur Zeit t und ist ebenfalls symmetrisch. Eine andere übliche Schreibweise ist $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$. Es handelt sich um einen Tensor zweiter Ordnung, der durch eine Matrix beschrieben werden kann. Die durch den Spannungstensor induzierte Kraft ist gegeben durch

$$\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{\tau}} := \Big(\sum_{j=1}^{3} \partial_j \tau_{ij}\Big)_{i=1,2,3}.$$

(E3) Der Dehnungstensor (Verzerrungstensor) $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1,2,3}\colon (0,\infty) \times G \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist im linearisierten Modell gegeben durch

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} := \tfrac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^\top) := \tfrac{1}{2}\big(\partial_i u_j + \partial_j u_i\big)_{i,j=1,2,3}.$$

(E4) Der Elastizitätstensor $\overline{\boldsymbol{C}} = (C_{ijk\ell})_{i,j,k,\ell=1,2,3} \in L^\infty(G;\mathbb{R}^{3\times3\times3\times3})$ ist ein Tensor vierter Stufe und tritt im Hookeschen Gesetz auf, welches

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\boldsymbol{C}}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

besagt. In Koordinaten geschrieben, lautet das Hookesche Gesetz

$$\tau_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{3} C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \quad (i,j = 1,2,3).$$

Aufgrund der Symmetrien von $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ und $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ kann man o.E. annehmen, dass

$$C_{ijk\ell} = C_{k\ell ij} = C_{jik\ell} \quad (i,j,k,\ell = 1,2,3).$$

Wir setzen weiter im Folgenden voraus, dass $\overline{\boldsymbol{C}}$ gleichmäßig positiv definit ist, d.h. dass ein $c_1 > 0$ existiert mit

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{3} C_{ijk\ell}(x)\xi_{ij}\xi_{k\ell} \geq c_1 \sum_{i,j=1}^{3} |\xi_{ij}|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^{3\times 3})$$

für fast alle $x \in G$.

Die Elastizitätsgleichungen selbst ergeben sich nun aus dem zweiten Newtonschen Gesetz (die Kraft ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung) und lauten

$$m(x)\partial_t^2 u(t,x) - \operatorname{div}\overline{\boldsymbol{\tau}}(t,x) = F(t,x) \quad ((t,x)\in(0,\infty)\times G), \tag{4-4}$$

wobei $F\colon (0,\infty)\times G \to \mathbb{R}^3$ eine gegebene äußere Kraft sei. Durch die Symmetrien in (4-4) ergibt sich in dieser Gleichung eine gewisse Redundanz, welche in der folgenden Schreibweise vermieden wird (nach Sommerfeld, auch bekannt als Voigt-Notation).

4.17 Definition. a) Den obigen Matrizen $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ und $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ mit jeweils 6 Freiheitsgraden wird ein Vektor $\boldsymbol{\tau}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ in folgender Weise zugeordnet:

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \text{(symm.)} & & \tau_{33} \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\tau} := \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \text{(symm.)} & & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

Man beachte den Faktor 2 bei $\boldsymbol{\varepsilon}$. Die Komponenten werden wie üblich mit $\boldsymbol{\tau} =: (\tau_1,\dots,\tau_6)^\top$ und $\boldsymbol{\varepsilon} =: (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_6)^\top$ bezeichnet. Man verwendet somit die Zuordnung der Indizes

$$\pi\colon (1,1)\mapsto 1, (2,2)\mapsto 2, (3,3)\mapsto 3, (2,3)\mapsto 4, (3,1)\mapsto 5, (1,2)\mapsto 6.$$

b) Dem Tensor $\overline{\boldsymbol{C}}$ wird die Matrix $S = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,6}$ zugeordnet durch $s_{\pi(i,j),\pi(k,\ell)} := C_{ijk\ell}$. Ausgeschrieben bedeutet dies

$$S := \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Symmetrien von $\overline{\boldsymbol{C}}$ ist auch die Matrix S symmetrisch.

c) Der verallgemeinerte Gradient $\mathcal{D}$ wird definiert durch

$$\mathcal{D} := \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.18 Lemma. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

a) Es gilt das Hookesche Gesetz $\overline{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\boldsymbol{C}}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ *genau dann, wenn* $\boldsymbol{\tau} = S\boldsymbol{\varepsilon}$*. Die Matrix* S *ist gleichmäßig positiv definit, d.h. es existiert ein* $s_1 > 0$ *mit* $\sum_{i,j=1}^3 s_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_1|\xi|^2$ $(\xi \in \mathbb{R}^3)$ *für fast alle* $x \in G$*.*

b) Es gilt $\mathcal{D}u = \boldsymbol{\varepsilon}$ *und* $\operatorname{div}\overline{\boldsymbol{\tau}} = \mathcal{D}^\top\boldsymbol{\tau}$*.*

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

Mit diesen Bezeichnungen erhält man

$$\operatorname{div}\overline{\boldsymbol{\tau}} = \mathcal{D}^\top\boldsymbol{\tau} = \mathcal{D}^\top S\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u,$$

also lauten die Elastizitätsgleichungen

$$m(x)\partial_t^2 u(t,x) - \mathcal{D}^\top S(x)\mathcal{D}u(t,x) = F(t,x) \quad ((t,x) \in (0,\infty)\times G) \tag{4-5}$$

mit geeigneten Rand- und Anfangsbedingungen.

4.19 Bemerkung. Die Matrix S besitzt als symmetrische 6×6-Matrix 21 unabhängige Koeffizienten, welche durch die Materialeigenschaften bestimmt sind. Häufig treten zusätzliche Symmetrien auf, z.B. anisotrope Medien mit

(i) kubischer Symmetrie (3 unabhängige Koeffizienten),

(ii) rhombischer Symmetrie (9 unabhängige Koeffizienten),

(iii) monoklinische Symmetrie (13 unabhängige Koeffizienten)

Im Fall eines isotropen Mediums hat S die Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} 2\mu+\kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ & 2\mu+\kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu+\kappa & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & \text{(symm.)} & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $\mu, \kappa \in \mathbb{R}$ die sogenannten Lamé-Konstanten und erfüllen $\mu > 0$, $2\mu + 3\kappa > 0$.

Wir werden nun die Elastizitätsgleichungen in einem geeigneten Hilbertraum formulieren. Dabei betrachten wir simultan zwei Fälle: $G = \mathbb{R}^3$ (Ganzraumfall) oder G ein beschränktes Gebiet mit Dirichlet-Randbedingungen. Wir betrachten also unter den oben formulierten Voraussetzungen an die Koeffizienten

$$\begin{aligned} m(x)u_{tt}(t,x) - \mathcal{D}^\top S(x)\mathcal{D}u(t,x) &= 0 \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times G), \\ u(t,x) &= 0 \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times \partial G), \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad (x \in G), \\ \partial_t u(x,0) &= u_1(x) \quad (x \in G). \end{aligned} \tag{4-6}$$

Man beachte, dass im Ganzraumfall die zweite Zeile eine leere Bedingung ist. Wir wählen als Hilbertraum $H := L^2(G; \mathbb{C}^3)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_H := \langle u, mv \rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} \quad (u, v \in H).$$

Da $m \in L^\infty(G; \mathbb{R}^{3\times 3})$ gleichmäßig positiv definit ist, ist $\|\cdot\|_H$ äquivalent zum Standard-Skalarprodukt $\|\cdot\|_{L^2(G;\mathbb{C}^3)}$.

Wir wenden die Ergebnisse des ersten Kapitels an, wobei wir das Gelfand-Tripel $V \subset H \subset V'$ betrachten mit $V := H_0^1(G; \mathbb{C}^3)$. Man beachte, dass $H_0^1(\mathbb{R}^3) = H^1(\mathbb{R}^3)$ gilt.

Der Operator $\mathcal{A} \in L(V, V')$ ist definiert durch

$$(\mathcal{A}u)(\varphi) := -\langle m^{-1}\mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u, \varphi \rangle_H = -\langle m^{-1}\mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u, m\varphi \rangle_{L^2(G,\mathbb{C}^3)} = \langle S\mathcal{D}u, \mathcal{D}\varphi \rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}.$$

Wie in Kapitel 1 ist damit die Bilinearform $B\colon H_0^1(G;\mathbb{C}^3) \times H_0^1(G;\mathbb{C}^3) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$B(u,v) := (\mathcal{A}u)(v) \quad (u, v \in H_0^1(G; \mathbb{C}^3)).$$

Wir zeigen zunächst eine Abschätzung für den verallgemeinerten Gradienten.

4.20 Lemma (Erste Kornsche Ungleichung)**.** *Sei $G = \mathbb{R}^3$ oder G ein beschränktes Gebiet. Dann gilt für alle $\varphi \in H_0^1(G; \mathbb{C}^3)$ die Abschätzung*

$$\|\mathcal{D}\varphi\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} \geq \tfrac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})},$$

wobei $\nabla\varphi := (\partial_i \varphi_j)_{i,j=1,2,3}$ und als Norm in $\mathbb{C}^{3\times 3}$ die Hilbert-Schmidt-Norm

$$\big\|(a_{ij})_{i,j=1,2,3}\big\| := \Big(\sum_{i,j=1}^3 |a_{ij}|^2\Big)^{1/2}$$

verwendet wird.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(G;\mathbb{C}^3)$. Wir verwenden die Definition von $\mathcal{D}$ und multiplizieren die Terme $\|\partial_i\varphi_j + \partial_j\varphi_i\|^2_{L^2(G)}$ aus und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned} 4\|\mathcal{D}\varphi\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} &= \sum_{i,j=1}^3 \|\partial_i\varphi_j + \partial_j\varphi_i\|^2_{L^2(G)} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \Big(\|\partial_i\varphi_j\|^2_{L^2(G)} + \|\partial_j\varphi_i\|^2_{L^2(G)} + 2\operatorname{Re}\langle \partial_i\varphi_j, \partial_j\varphi_i\rangle_{L^2(G)}\Big) \\ &= 2\sum_{i,j=1}^3 \|\partial_i\varphi_j\|^2_{L^2(G)} + 2\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^3 \langle \partial_i\varphi_i, \partial_j\varphi_j\rangle_{L^2(G)} \\ &= 2\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})} + 2\Big\|\sum_{i=1}^3 \partial_i\varphi_i\Big\|^2_{L^2(G)} \ge 2\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})}. \end{aligned}$$

Da $C_0^\infty(G)$ dicht in $H_0^1(G)$ ist, folgt die Behauptung. □

4.21 Lemma. *Die oben definierte Bilinearform B ist symmetrisch und koerzitiv mit $B(u,u) \ge 0$ ($u \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3)$). Falls G ein beschränktes Gebiet ist, so ist B streng koerzitiv.*

Beweis. Wegen $B(u,v) = \langle S\mathcal{D}u, \mathcal{D}v\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)}$ und der Symmetrie von S ist B symmetrisch. Da S positiv definit ist (Lemma 4.18), gilt mit der ersten Kornschen Ungleichung

$$\begin{aligned} B(u,u) &= \langle S\mathcal{D}u, \mathcal{D}u\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} \ge s_1\|\mathcal{D}u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} \\ &\ge \tfrac{s_1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})} \ge \tfrac{s_1}{2}\|u\|^2_{H^1(G;\mathbb{C}^3)} - \tfrac{s_1}{2}\|u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^3)}. \end{aligned}$$

Also ist B koerzitiv. Falls G ein beschränktes Gebiet ist, so verwenden wir anstelle der letzten Abschätzung die erste Poincaré-Ungleichung und erhalten

$$B(u,u) \ge \tfrac{s_1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})} \ge c_p\|u\|^2_{H^1(G;\mathbb{C}^3)}$$

mit einer vom Gebiet abhängigen Konstante $c_p > 0$. Also ist B in diesem Fall streng koerzitiv. In beiden Fällen haben wir $B(u,u) \ge 0$ ($u \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3)$) erhalten. □

Wir betrachten nun die $L^2(G;\mathbb{C}^3)$-Realisierung A, welche gegeben ist durch $D(A) := \{u \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3) : \mathcal{A}u \in L^2(G;\mathbb{C}^3)\} = \{u \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3) : \mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u \in L^2(G;\mathbb{C}^3)\}$ und $Au := \mathcal{A}u = -m^{-1}\mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u$ ($u \in D(A)$). Die Elastizitätsgleichungen schreiben sich damit als

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t) + Au(t) &= 0 \quad (t > 0), \\ u(0) &= u_0, \\ \partial_t u(0) &= u_1. \end{aligned} \tag{4-7}$$

4.22 Satz. *Der oben definierte Operator A ist selbstadjungiert mit $\sigma(A) \subset [0,\infty)$. Falls G beschränkt ist, besitzt A diskretes Spektrum, und es existiert ein $c > 0$ mit $\sigma(A) \subset [c,\infty)$.*

Für jedes $u_0 \in L^2(G;\mathbb{C}^3)$ und $u_1 \in D(\sqrt{A})$ ist durch

$$u(t) := \cos(\sqrt{A}t)u_0 + \Big(\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\Big)u_1 \quad (t > 0)$$

eine Lösung

$$u \in C^2([0,\infty), L^2(G;\mathbb{C}^3)) \cap C^1([0,\infty), D(\sqrt{A})) \cap C([0,\infty), D(A))$$

gegeben.

Beweis. Das folgt direkt aus den Ergebnissen des ersten Kapitels, speziell Satz 1.20. Für beschränkte Gebiete folgt die Aussage wieder aus dem Satz von Rellich-Kondrachov und aus der Poincaré-Ungleichung. □

4.23 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und hinreichend glatt (z.B. ein C^1-Gebiet). Dann definiert man die (verallgemeinerten) Neumann-Randbedingungen für die Elastizitätsgleichungen durch $\mathcal{N}^\top S\mathcal{D}u|_{\partial G} = 0$ mit

$$\mathcal{N} := \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 \\ 0 & \nu_3 & \nu_2 \\ \nu_3 & 0 & \nu_1 \\ \nu_2 & \nu_1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_3)^\top$ der äußere Normalenvektor ist. Der zugehörige Operator $A_N\colon H \supset D(A_N) \to H$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} D(A_N) &:= \big\{u \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3) : \mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u \in H, \\ &\qquad \langle \mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u, v\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} = -\langle S\mathcal{D}u, \mathcal{D}v\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} \; (v \in H^1(G;\mathbb{C}^3))\big\}, \\ A_N u &:= -m^{-1}\mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u \quad (u \in D(A_N)). \end{aligned}$$

Dies verallgemeinert die Neumann-Randbedingungen auch für nichtglatte Gebiete.

4.24 Bemerkung. Wie bei Dirichlet-Randbedingungen kann man zeigen, dass auch A_N selbstadjungiert ist, und bei beschränktem Gebiet ist das Spektrum von A_N diskret und eine Teilmenge von $[0,\infty)$. Zum Beweis verwendet man die zweite Kornsche Ungleichung, welche komplizierter zu beweisen ist. Im Gegensatz zum Fall der Dirichlet-Randbedingungen ist hier allerdings 0 ein Eigenwert von A_N, da die konstante Funktion im Kern liegt.

e) Die Plattengleichung

Bei einer schwingenden Platte wird die potentielle Energie proportional zur Krümmung der Platte angesetzt. Wir betrachten die Gleichung wieder im $\mathbb{R}^3$, um die Analogie zur Elastistizitätsgleichung zu zeigen (obwohl diesmal $G \subset \mathbb{R}^2$ physikalisch am relevantesten ist). Man erhält ähnlich wie bei den Elastizitätsgleichungen folgendes Anfangswertproblem in $G \subset \mathbb{R}^3$, wobei die gesuchte Funktion $u\colon (0,\infty)\times G \to \mathbb{C}$ jetzt skalar ist.

$$\begin{aligned} m(x)u_{tt}(t,x) - \operatorname{div} \mathcal{D}^\top S(x)\mathcal{D}\nabla u(t,x) &= 0 \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times G),\\ u(t,x) &= 0 \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times \partial G),\\ \partial_\nu u(t,x) &= 0 \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times \partial G),\\ u(0,x) &= u_0 \quad (x \in G),\\ u_t(0,x) &= u_1 \quad (x \in G). \end{aligned} \tag{4-8}$$

Hierbei seien die Größen $m, \mathcal{D}, S, \mathcal{N}$ wie oben definiert mit denselben Voraussetzungen (m ist jetzt skalar.) Man beachte, dass die Gleichung jetzt von vierter Ordnung in x ist und daher zwei Randbedingungen gestellt werden müssen. In diesem Fall spricht man bei

$$u|_{\partial G} = 0, \quad \partial_\nu u|_{\partial G} = 0$$

wieder von (verallgemeinerten) Dirichlet-Randbedingungen. Wir betrachten wieder die beiden Fälle $G = \mathbb{R}^3$ (ohne Randbedingungen) und $G \subset \mathbb{R}^3$ beschränktes Gebiet (mit obigen Randbedingungen).

Die operatortheoretische Formulierung ist gegeben durch $H := L^2(G)$ mit dem Skalarprodukt $\langle u, v\rangle_H := \langle u, mv\rangle_{L^2(G)}$,

$$\begin{aligned} V &:= \{u \in H^2(G) : u = 0 \text{ auf } \partial G,\, \partial_\nu u = 0 \text{ auf } \partial G\},\\ B&\colon V \times V \to \mathbb{C},\ B(u,v) := \langle \mathcal{D}\nabla u, S\mathcal{D}\nabla u\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}. \end{aligned}$$

Der Operator $A\colon L^2(G) \supset D(A) \to L^2(G)$ ist wieder definiert durch

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{u \in V : -m^{-1}\nabla^\top \mathcal{D}^\top S\mathcal{D}\nabla u \in L^2(G)\},\\ Au &:= -m^{-1}\nabla^\top \mathcal{D}^\top S\mathcal{D}\nabla u \quad (u \in D(A)). \end{aligned}$$

4.25 Satz. *a) Die Bilinearform B ist symmetrisch, koerzitiv und positiv semidefinit.*

b) Der Operator A ist selbstajdungiert mit $\sigma(A) \subset [0,\infty)$. Falls G beschränkt ist, so besitzt A diskretes Spektrum und es gilt $\sigma(A) \subset [c,\infty)$ mit $c > 0$. Die Lösungsdarstellung von Satz 4.22 gelten analog.

Beweis. Offensichtlich ist B symmetrisch. Für $u \in V$ gilt mit partieller Integration

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} = \sum_{i=1}^3 \|\partial_i u\|^2_{L^2(G)} \le \sum_{i,j=1}^3 \big|\langle \partial_i u, \partial_j u\rangle_{L^2(G)}\big|$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{3} \big|\langle \partial_i\partial_j u, u\rangle_{L^2(G)}\big| \\
&\le \sum_{i,j=1}^{3} \tfrac{1}{2}\big(\|\partial_i\partial_j u\|_{L^2(G)}^2 + \|u\|_{L^2(G)}^2\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\|\nabla^2 u\|_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})}^2 + \tfrac{9}{2}\|u\|_{L^2(G)}^2,
\end{aligned}$$

wobei in $\mathbb{C}^{3\times 3}$ wieder die Hilbert-Schmidt-Norm verwendet wird. Mit

$$\|u\|_{H^2(G)}^2 = \|u\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(G;\mathbb{C}^3)}^2 + \|\nabla^2 u\|_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})}^2$$

erhalten wir

$$\|u\|_{H^2(G)}^2 \le \tfrac{11}{2}\big(\|u\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla^2 u\|_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})}^2\big).$$

Direktes Einsetzen liefert $\|\mathcal{D}\nabla u\|_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}^2 = \|\nabla^2 u\|_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})}^2$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
B(u,u) &\ge c_s\|\mathcal{D}\nabla u\|_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}^2 = c_s\|\nabla^2 u\|_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})}^2 \\
&\ge p\|u\|_{H^2(G)}^2 - c_p\|u\|_{L^2(G)}^2.
\end{aligned}$$

Somit ist B symmetrisch, koerzitiv, und es gilt $B(u,u)\ge 0$ ($u\in V$).

b) folgt nun aus a) wie bei den Elastizitätsgleichungen (Satz 4.22). □

5. L^p-Theorie: Parabolische Operatoren im Ganzraum

5.1 Worum geht's? Wir kennen bereits äquivalente Kriterien dafür, dass ein Operator etwa eine holomorphe Halbgruppe erzeugt. Dieses Kriterium verlangt es, die Resolvente des zugehörigen Operators genauer zu studieren, insbesondere die Resolventenabschätzung (a priori-Abschätzung) zu beweisen. Hier soll nun gezeigt werden, wie man dies für eine große Klasse von Differentialoperatoren im $\mathbb{R}^n$ nachweisen kann. Dabei handelt es sich um parameterelliptische oder parabolische Operatoren.

Der „Königsweg", um nichtselbstadjungierte Differentialoperatoren zu untersuchen, liegt in der Fouriertransformation. Während in L^2 der Satz von Plancherel verwendet werden kann, gibt es in L^p den Satz von Michlin, der Bedingungen an das Symbol des Operators stellt.

a) Fouriermultiplikatoren und der Satz von Michlin

Im folgenden sei stets $D := -i(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$. Mit C, C_1, C_2 bezeichnen wir generische Konstanten, d.h. Konstanten, welche bei jedem Auftreten einen anderen Wert besitzen können, aber nicht von den in der Gleichung auftretenden Größen abhängt.

5.2 Bemerkung. Wir betrachten den Laplace-Operator im $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit maximalem Definitionsbereich $D(\Delta) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. Offensichtlich ist $D(\Delta) \supset W_p^2(\mathbb{R}^n)$. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich Gleichheit gilt. Sei dazu $u \in D(\Delta)$ und $f := u - \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sei $|\alpha| \le 2$. Dann gilt

$$D^\alpha u = \mathscr{F}^{-1}\xi^\alpha \mathscr{F} u = \mathscr{F}^{-1}\frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}\mathscr{F} f$$

als Gleichheit in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Um $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen, muss also $\mathscr{F}^{-1} m_\alpha(\xi)\mathscr{F} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gelten, wobei $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$. Die Frage lautet also: Wird durch

$$f \mapsto \mathscr{F}^{-1} m_\alpha(\xi)\mathscr{F} f$$

ein stetiger linearer Operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ definiert? Die (positive) Antwort liefert der Satz von Michlin.

5.3 Definition. Sei $1 \le p \le \infty$. Eine Funktion $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt Fouriermultiplikator in L^p, falls $f \mapsto \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} f$ einen stetigen linearen Operator $M \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$ definiert. Genauer ist m Fouriermultiplikator, wenn für die Abbildung $\widetilde{M}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F}\varphi$ gilt $R(\widetilde{M}) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\widetilde{M}\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)),$$

d.h. wenn $\widetilde{M}$ eine eindeutige Fortsetzung $M \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$ besitzt. Die Funktion m heißt in diesem Fall das Symbol des Operators M. Wir schreiben $\operatorname{op}(m) := \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} := M$ und $\operatorname{symb}(M) := m$.

5.4 Bemerkung. Für $p = 2$ gilt nach dem Satz von Plancherel genau dann $\operatorname{op}(m) \in L(L^2(\mathbb{R}^n))$, falls der Multiplikationsoperator $g \mapsto mg$ stetig in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt. Denn falls $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so folgt $\|mg\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Falls andererseits $m \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so existiert eine Folge messbarer Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $0 \le c_k \to \infty$, mit $0 < \lambda(A_k) < \infty$ und $|m| \ge c_k$ auf A_n. Für $g_k := \chi_{A_k}$ gilt dann $g_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|mg_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int |m(\xi) g_k(\xi)|^2 d\xi \ge c_k^2 \lambda(A_k) = c_k^2 \|g_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $\operatorname{op}(m)$ ist kein beschränkter Operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Der folgende Satz ist fundamental für die L^p-Theorie von Differentialoperatoren. Der Beweis ist für diese Vorlesung zu aufwändig. Hier bezeichnet $[\frac{n}{2}]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich $\frac{n}{2}$. Wir geben den Satz in zwei Varianten an.

5.5 Satz (Michlin)**.** *Sei $1 < p < \infty$ und $m \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Falls eine der beiden Bedingungen*

(i) *$m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und*

$$|\xi|^{|\beta|} |D^\beta m(\xi)| \le C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ |\beta| \le [\tfrac{n}{2}] + 1),$$

(ii) *$m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und*

$$\left|\xi^\beta D^\beta m(\xi)\right| \le C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \beta \in \{0,1\}^n)$$

mit einer Konstanten $C_M > 0$ gilt, so ist m ein L^p-Fouriermultiplikator mit

$$\|\operatorname{op}(m)\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le c(n,p) C_M,$$

wobei die Konstante $c(n,p)$ nur von n und p abhängt.

5.6 Bemerkung. a) Die Bedingung (i) in obigem Satz wird häufig als die Michlin-Bedingung (aus dem Jahr 1957) bezeichnet, während Bedingung (ii) auf Lizorkin (1963) zurückgeht. Eine übliche Schreibweise ist auch Mikhlin.

b) Sei die Funktion $m \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ homogen in ξ vom Grad $d \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$m(\rho\xi) = \rho^d m(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \rho > 0).$$

Falls $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, so ist $D^\beta m(\xi)$ homogen in ξ vom Grad $d - |\beta|$ für alle $|\beta| \le k$.

Denn z.B. für $\beta = (1, 0, \dots, 0)$ gilt

$$(\partial_{\xi_1} m)(\rho\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{m(\rho\xi + he_1) - m(\rho\xi)}{h} = \lim_{h\to 0} \rho^d \, \frac{m(\xi + \frac{h}{\rho}e_1) - m(\xi)}{\rho\frac{h}{\rho}}$$
$$= \rho^{d-1}\partial_{\xi_1} m(\xi).$$

Für beliebige β folgt die Aussage dann iterativ.

c) Sei $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogen vom Grad 0. Dann erfüllt m die Michlin-Bedingung. Denn für $|\beta| \le [\frac{n}{2}] + 1$ ist $m_\beta(\xi) := |\xi|^{|\beta|} D^\beta m(\xi)$ homogen vom Grad 0 nach Teil b). Damit folgt

$$|m_\beta(\xi)| = \Big| m_\beta\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)\Big| \le \max_{|\eta|=1} |m_\beta(\eta)| < \infty \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Als erste Anwendung des Satzes von Michlin wird die Frage aus Bemerkung 5.2 beantwortet.

5.7 Korollar. *Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt $\{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} = W^2_p(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Betrachte wie in Bemerkung 5.2 die Funktion $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$ für $|\alpha| \le 2$. Sei $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Für $|\xi| \le 1$ ist $D^\beta m_\alpha$ als stetige Funktion beschränkt, für $|\xi| \ge 1$ können wir bei Berechnung von $D^\beta m_\alpha$ den Nenner $1 + |\xi|^2$ durch $|\xi|^2$ abschätzen und erhalten eine homogene Funktion vom Grad $-|\beta|$, welche auf $|\xi| \ge 1$ ebenfalls beschränkt ist. Somit erfüllt m_α die Michlin-Bedingung. □

b) Parameterelliptische Differentialoperatoren

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

5.8 Definition (elliptische und parabolische Differentialoperatoren)**.** Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A = A(x, D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten $a_\alpha \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$.

a) Der Operator $A_0(x, D) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha$ heißt der Hauptteil des Operators $A(x, D)$.

b) Die Abbildung $a \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $a(x, \xi) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ heißt das Symbol von $A(x, D)$. Wir schreiben $a = \operatorname{symb}(A)$ bzw. $A = \operatorname{op}(a)$. Das Symbol $a_0 := \operatorname{symb}(A_0)$ heißt das Hauptsymbol von $A(x, D)$.

c) Der Operator A heißt elliptisch in $\overline{\Omega}$, falls

$$a_0(x, \xi) \ne 0 \quad (x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Analog definiert man elliptisch in einer Menge $M \subset \overline{\Omega}$, z.B. elliptisch an der Stelle $x \in \overline{\Omega}$.

d) Sei $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ ein geschlossener Sektor in $\mathbb{C}$ mit Spitze in 0. Dann heißt der Operator $A(x, D)$ parameterelliptisch im Sektor $\mathscr{L}$, falls

$$a_0(x, \xi) - \lambda \neq 0 \quad (x \in \overline{\Omega},\ (\xi, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathscr{L}) \setminus \{(0, 0)\}).$$

e) Der Operator $\partial_t - A(x, D)$ heißt parabolisch, falls $A(x, D) - \lambda$ parameterelliptisch im Sektor $\overline{\Sigma_{\pi/2}}$ ist.

5.9 Beispiele. a) Der Cauchy-Riemann-Operator $A := \partial_{x_1} + i\partial_{x_2}$ ist elliptisch in $\mathbb{R}^2$.

b) Der Laplace-Operator $A := \Delta$ ist elliptisch, parameterelliptisch in jedem Sektor, der den negativen Halbstrahl $(-\infty, 0)$ nicht enthält, und insbesondere parabolisch.

c) Der Operator $A(x, D) := \partial_{x_1} + i\partial_{x_2} + (ix_1 - x_2)\partial_{x_3}$ ist nicht elliptisch in $\mathbb{R}^3$, denn

$$a_0(x, \xi) = i\xi_1 - \xi_2 + i(ix_1 - x_2)\xi_3 = 0 \ \text{ für } \ \xi = (x_2, -x_1, 1).$$

Für diesen Operator existieren C^∞-Funktionen f, für welche $Au = f$ nicht einmal in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ lösbar ist.

5.10 Definition. Sei $n \geq 2$ und $A(x, D)$ ein elliptischer Differentialoperator in Ω. Dann heißt $A(x, D)$ eigentlich elliptisch in Ω, falls das Polynom $P := A_0(x, \xi', \cdot)$ für jedes $x \in \Omega$ und jedes $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ genauso viele Nullstellen in der oberen komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ wie in der unteren komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ besitzt.

5.11 Bemerkung. a) Man beachte in obiger Definition, dass P keine reelle Nullstelle besitzt, da $A(x, D)$ elliptisch ist.

b) Das Hauptsymbol eines Operators A der Ordnung m ist homogen vom Grad m in ξ. Falls A elliptisch ist, enthält $a_0(x, \xi)$ einen Term der Form $a(x)\xi_n^m$, denn sonst wäre $a_0(x, \xi) = 0$ für $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = 0$ und $\xi_n = 1$. Somit ist P ein Polynom vom Grad m, und falls A eigentlich elliptisch ist, ist m eine gerade Zahl.

c) Falls a_α für $|\alpha| = m$ reellwertige Koeffizienten sind und $A(x, D)$ elliptisch ist, so ist A auch eigentlich elliptisch. Denn dann ist P ein Polynom mit reellen Koeffizienten ohne reelle Nullstelle.

5.12 Satz. *Sei $A(x, D)$ elliptisch in Ω und $n \geq 3$. Dann ist A eigentlich elliptisch. Insbesondere ist die Ordnung von A eine gerade Zahl.*

Beweis. Sei $x \in \Omega$ und $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Wegen $n \geq 3$ existiert ein stetiger Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(0) = \xi'$ und $\gamma(1) = -\xi'$. Sei $n_+(t)$ die Anzahl der Nullstellen z mit $\operatorname{Im} z > 0$ des Polynoms $p_t := a_0(x, (\gamma(t), \cdot))$. Dann ist $n_+(t)$ unabhängig von t. Denn da die Nullstellen eines Polynoms stetig von den Koeffizienten abhängen, gäbe es sonst ein $t \in (0,1)$, für welches p_t eine reelle Nullstelle besitzt, was wegen $\gamma(t) \neq 0$ einen Widerspruch zur Elliptizität darstellt.

Daher gilt $n_+(0) = n_+(1)$, d.h. die Polynome $a_0(x, \xi', \cdot)$ und $a_0(x, -\xi', \cdot)$ besitzen dieselbe Anzahl von Nullstellen in $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Wegen

$$a_0(x, -\xi', z) = (-1)^m a_0(x, \xi', -z)$$

ist aber $n_+(1)$ auch die Anzahl der Nullstellen von $a_0(x, \xi', \cdot)$ in $\mathbb{C}_- := -\mathbb{C}_+$, d.h. A ist eigentlich elliptisch. □

5.13 Definition. Sei $A = A(x, D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m in Ω. Dann heißt A gleichmäßig elliptisch in $\overline{\Omega}$, falls

$$|a_0(x, \xi)| \geq C|\xi|^m \quad ((x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n),$$

und gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L}$, falls

$$|a_0(x, \xi) - \lambda| \geq C(|\xi|^{2m} + |\lambda|) \quad (x \in \overline{\Omega}, (\xi, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathscr{L}) \setminus \{0\}).$$

Der Operator A heißt gleichmäßig stark elliptisch in $\overline{\Omega}$, falls

$$\operatorname{Re} a_0(x, \xi) \geq C|\xi|^m \quad ((x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n).$$

5.14 Lemma. *Sei Ω beschränkt und $A = A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ mit $a_\alpha \in C(\overline{\Omega})$. Falls A elliptisch in $\overline{\Omega}$ ist, so ist A dort auch gleichmäßig elliptisch.*

Beweis. Für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $x \in \overline{\Omega}$ gilt

$$|a_0(x, \xi)| = |\xi|^m \Big| a_0\Big(x, \frac{\xi}{|\xi|}\Big) \Big| \geq M|\xi|^m,$$

wobei $M := \min\{|a_0(x, \xi)| : (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times S^{n-1}\} > 0$. Hier wurde verwendet, dass $a_0(x, \xi)$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{\Omega} \times S^{n-1}$ ihr Minimum annimmt. □

5.15 Definition. Sei $A(x, D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung $2m$ und sei $1 < p < \infty$.

a) Sei $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ ein geschlossener Sektor und $s \in [0, 2m]$. Dann definiert man die parameterabhängigen Normen $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_{s,p,\Omega}$ durch

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{s,p,\Omega} := \|u\|_{W_p^s(\Omega)} + |\lambda|^{s/(2m)} \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad (\lambda \in \mathscr{L},\ u \in W_p^{2m}(\Omega)).$$

b) Die L^p-Realisierung A_p des Differentialoperators $A(x, D)$ ist gegeben durch $D(A_p) := W_p^m(\Omega)$ und $A_p u := A(x, D)u \quad (u \in D(A_p))$.

5.16 Satz (Modellproblem für parameterelliptische Operatoren)**.** *Seien $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $|\alpha| = 2m$ und $A(D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$ parameterelliptisch im $\overline{\Sigma_\varphi}$ mit $\varphi \in [0, \pi]$. Dann gilt für die L^p-Realisierung $\rho(A_p) \supset \overline{\Sigma_\varphi}$, und A_p ist sektoriell mit Winkel $\varphi_{A_p} \geq \varphi$. Falls $\varphi > \frac{\pi}{2}$, so erzeugt A_p eine beschränkte holomorphe Halbgruppe mit Winkel $\geq \varphi - \frac{\pi}{2}$. Zu jedem $\lambda_0 > 0$ existiert ein $C_{\lambda_0} > 0$ mit*

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C_{\lambda_0} \|(\lambda - A_p)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\lambda \in \mathscr{L},\ |\lambda| \geq \lambda_0). \tag{5-1}$$

Beweis. Setze $\lambda = q^{2m}$ mit $q \in \overline{\Sigma}_{\varphi/2m}$ und definiere für festes α mit $|\alpha| \leq 2m$ die Funktion

$$m_\alpha(\xi, q) := \frac{q^{2m-|\alpha|}\xi^\alpha}{a(\xi) - q^{2m}} \quad ((\xi, q) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma}_{\varphi/2m} \setminus \{0\}).$$

Dann ist $m_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma}_{\varphi/2m} \setminus \{0\})$ homogen in (ξ, q) vom Grad 0 und erfüllt nach Bemerkung 5.6 die Michlin-Bedingung bzgl. ξ. Nach dem Satz von Michlin ist $\|\operatorname{op}(m_\alpha(\cdot, q))\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C_\alpha$.

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $q \in \overline{\Sigma}_{\varphi/2m} \setminus \{0\}$ und $u := \mathscr{F}^{-1}\frac{1}{A(\xi)-q^{2m}}\mathscr{F}f$. Dann gilt

$$|q|^{2m-|\alpha|}\|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\operatorname{op}(m_\alpha(\cdot, q))f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_\alpha \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5-2}$$

Insbesondere ist $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n) = D(A_p)$ und $(A_p - \lambda)u = f$, d.h. $A_p - \lambda$ ist surjektiv. Falls andererseits $(A_p - \lambda)u_1 = (A_p - \lambda)u_2 = f$ mit $u_{1,2} \in D(A_p)$ gilt, so folgt $u_1 = \mathscr{F}^{-1}\frac{1}{A(\xi)-\lambda}\mathscr{F}f = u_2$ als Gleichheit in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und damit $u_1 = u_2$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Somit ist $A_p - \lambda$ auch injektiv, d.h. $\rho(A_p) \supset \overline{\Sigma}_\varphi \setminus \{0\}$. Aus (5-2) folgt mit $\alpha = 0$ die Resolventenabschätzung

$$\|\lambda(\lambda - A_p)^{-1}\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C_0 \quad (\lambda \in \overline{\Sigma_\varphi} \setminus \{0\}).$$

Damit ist A_p sektoriell mit Winkel $\varphi_{A_p} \geq \varphi$, und für $\varphi > \frac{\pi}{2}$ erzeugt A_p eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe mit Winkel $\geq \varphi - \frac{\pi}{2}$.

Zu zeigen ist noch die Abschätzung (5-1). Sei $q_0 > 0$. Dann folgt aus (5-2) für $q \in \overline{\Sigma}_{\varphi/2m}$, $|q| \geq q_0$, die Abschätzung

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} = \|u\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + |\lambda|\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\Big(\sum_{|\alpha|\leq 2m}\|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+|q|^{2m}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)\\
&\leq C_1\min\{1,q_0\}^{-2m}\Big(\sum_{|\alpha|\leq 2m}C_\alpha\Big)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C_{\lambda_0}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}
$$

wobei $\lambda_0 = q_0^{2m}$. □

5.17 Bemerkung. Im vorigen Beweis wurde die Homogenität von $m_\alpha(\xi, q)$ verwendet, wobei $q = \lambda^{1/2m}$. In diesem Fall sagt man, m_α ist quasi-homogen von (ξ, λ) ab. Im allgemeinen heißt eine Funktion $m = m(\xi, \lambda)$ quasi-homogen mit Gewicht $r \in \mathbb{R}$ in (ξ, λ) vom Grad d, falls

$$m(\rho\xi, \rho^r\lambda) = \rho^d m(\xi, \lambda) \quad ((\xi, \lambda) \neq 0,\ \rho > 0).$$

Die Zahl r heißt das relative Gewicht von λ bzgl. ξ. In obigem Beweis hat λ das relative Gewicht $2m$. Neben spektraltheoretischen Betrachtungen wie im obigen Beweis sind parabolische Gleichungen der Grund für das Auftreten quasihomogener Symbole. So hat bei der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t - \Delta$ die Zeitableitung im obigen Sinn relatives Gewicht 2 bzgl. den Ortsableitungen (man spricht von parabolischer Skalierung).

5.18 Korollar. *Falls in der Situation von Satz 5.16 der Operator $\partial_t - A(D)$ parabolisch ist, so erzeugt die L^p-Realisierung A_p eine beschränkte holomorphe Halbgruppe in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $A(D)$ parameterelliptisch in $\overline{\Sigma}_{\pi/2}$, d.h. es gilt $a(\xi) - \lambda \neq 0$ für alle $(\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma}_{\pi/2} \setminus \{0\}$. Wegen $a(\rho\xi) = \rho^{2m} a(\xi)$ ist der Wertebereich $R(a) := \{a(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}$ ein Kegel, und da $\{a(\xi) : |\xi| = 1\}$ kompakt ist, ist dieser Kegel abgeschlossen. Damit ist aber die Menge der Winkel $W := \{\alpha \in (-\pi, \pi]) : e^{i\alpha} \notin R(a)\}$ offen. Da $A(D)$ parabolisch ist, gilt $[-\pi/2, \pi/2] \subset W$, und somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[-\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon] \subset W$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\arg \lambda \in [-\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon]$ folgt damit $\lambda \notin R(a)$, d.h. $a(\xi) - \lambda \neq 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$.

Wir haben gezeigt, dass $A(D)$ parameterelliptisch in einem Sektor $\overline{\Sigma}_{\pi/2+\varepsilon}$ ist. Nach Satz 5.16 ist A_p sektoriell mit einem Winkel $\varphi > \pi/2$, und nach Satz 3.17 erzeugt A_p eine holomorphe Halbgruppe. □

5.19 Bemerkung. Wir haben in obigem Beweis gezeigt, dass die Menge aller Winkel $\alpha \in (-\pi, \pi]$ offen ist, für welche $A(D)$ die Bedingung der Parameterelliptizität auf dem Halbstrahl $\{\rho e^{i\alpha} : \rho \geq 0\}$ erfüllt.

5.20 Lemma. *Sei $1 < p < \infty$ und $A(x,D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten $a_\alpha \in L^\infty(\Omega)$ $(|\alpha| \le m)$. Dann ist $A_p \in L(W_p^m(\Omega), L^p(\Omega))$ mit*

$$\big\|A_p\big\|_{L(W_p^m(\Omega),L^p(\Omega))} \le C \max_{|\alpha|\le m} \|a_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Beweis. Das folgt sofort aus $\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{W_p^m(\Omega)}$ für $|\alpha| \le m$ und aus der Tatsache, dass der Multiplikationsoperator $u \mapsto a_\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ die Norm $\|a_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}$ besitzt. $\square$

5.21 Satz (Hauptsatz über parameterelliptische Operatoren)**.** *Sei $A = A(x,D) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator in $\mathbb{R}^n$ mit Koeffizienten*

$$a_\alpha \in \begin{cases} C(\mathbb{R}^n), & |\alpha| = 2m, \\ L^\infty(\mathbb{R}^n), & |\alpha| < 2m. \end{cases}$$

Ferner existiere $a_\alpha(\infty) := \lim_{|x|\to\infty} a_\alpha(x)$ für alle $|\alpha| = 2m$. Falls A parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ für $x \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ist, so existiert ein $\lambda_0 > 0$ so, dass für die L^p-Realisierung von A die Inklusion $\rho(A_p) \supset \{\lambda \in \mathscr{L} : |\lambda| \ge \lambda_0\}$ gilt. Ferner gilt die a priori-Abschätzung

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le C \|(A_p - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\lambda \in \mathscr{L},\ |\lambda| \ge \lambda_0).$$

Falls $\mathscr{L} = \overline{\Sigma}_\varphi$, so ist $A - \lambda_0$ sektoriell mit Winkel φ; falls $\varphi \ge \frac{\pi}{2}$, so erzeugt $A - \lambda_0$ eine beschränkte holomorphe Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

(i) *Lokalisierung („Freezing the coefficients“):* Wir fixieren die Koeffizienten von A an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ und betrachten nur den Hauptteil, also den Operator $A_0(x_0, D)$. Nach Satz 5.16 ist $A_0(x_0,D) - \lambda$ invertierbar für alle $\lambda \in \mathscr{L} \setminus \{0\}$, und es existiert eine Konstante $C_1 > 0$ mit

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le C_1 \|(A_0(x_0,D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathscr{L}, |\lambda| \ge 1).$$

Wie man im Beweis von Satz 5.16 sieht, kann die Konstante C_1 unabhängig von x_0 gewählt werden.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $R > 0$ mit

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(\infty)| < \varepsilon \quad (|x| \ge R,\ |\alpha| = 2m).$$

Da $\overline{B(0,R)} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist und die Koeffizienten a_α für $|\alpha| = 2m$ stetig sind, existieren endlich viele $x_1, \dots, x_N \in \overline{B(0,R)}$ und offene Umgebungen U_i von x_i mit $\overline{B(0,R)} \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ und

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(x_i)| < \varepsilon \quad (x \in U_i,\ |\alpha| = 2m,\ i = 0, \dots, N) \tag{5-3}$$

Setze hierbei $U_0 := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,R)}$ und $x_0 := \infty$.

(ii) *Beweis der a priori-Abschätzung:* Wir wählen $\varepsilon := \frac{1}{2C_1}$ in (5-3) und zugehörige Umgebungen U_i. Dann gilt für alle $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset U_i$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} &\le C_1 \|(A_0(x_i,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_1 \|(A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_1 \|(A_0(x,D)-A_0(x_i,D))u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_1 \|(A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_1 \cdot \frac{1}{2C_1} |\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Ungleichung wurde Lemma 5.20 verwendet. Damit erhalten wir

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le 2C_1 \|(A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Wähle nun eine zu U_i gehörige C^∞-Partition der Eins, d.h. $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \varphi_i \le 1$, $\sum_{i=0}^N \varphi_i = 1$ und $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_i$ $(i = 0, \dots, N)$. Dann gilt für $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le \sum_{i=0}^N |\!|\!| \varphi_i u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le 2C_1 \sum_{i=0}^N \|(A_0(x,D)-\lambda)\varphi_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Es ist

$$(A_0(x,D)-\lambda)\varphi_i u = \varphi_i (A_0(x,D)-\lambda)u + R_{1,i} u,$$

wobei $R_{1,i}$ ein Differentialoperator mit Ordnung nicht größer als $2m-1$ ist.

Nach Wahl der Umgebungen U_i und wegen $0 \le \varphi \le 1$ gilt für $w \in L^p(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\|\varphi_i w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \sum_{i=0}^N \|\varphi_i w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le N_0 \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} &\le 2C_1 \sum_{i=0}^N \big(\|\varphi_i (A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_{1,i} u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \big) \\
&\le C_2 \big(\|(A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_1 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \big)
\end{aligned}$$

mit $C_2 := 2(N+1)C_1$ und $R_1 := \sum_{i=0}^N R_{1,i}$. Wir schreiben weiter $R_2 := A(x,D) - A_0(x,D)$ und erhalten

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le C_2 \big(\|(A(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_1 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \big).$$

Da R_1, R_2 Differentialoperatoren von Ordnung nicht größer als $2m-1$ sind, gilt $\|R_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_3 \|u\|_{W_p^{2m-1}(\mathbb{R}^n)}$ mit einer Konstanten $C_3 > 0$. Wir verwenden nun die Interpolationsungleichung (Satz C.8) und erhalten

$$\|u\|_{W_p^{2m-1}(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{4C_2C_3} \|u\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + C_4 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{4C_2C_3} |\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n},$$

falls $|\lambda| \geq \lambda_1 := 4C_2C_3C_4$. Eingesetzt ergibt sich

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C_2 \|(A(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2} |\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n},$$

d.h. die a priori-Abschätzung des Satzes gilt mit der Konstante $2C_2$ für alle $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ und alle $\lambda \in \mathscr{L}$ mit $|\lambda| \geq \lambda_1$.

(iii) *Existenz der Resolvente:* Wir wählen $\varepsilon := \frac{1}{16C_1(N+1)}$ in (i) und zugehörige Umgebungen U_i. Definiere dazu die Partition der Eins $(\varphi_j)_{j=0,\dots,N}$ wie oben und $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\operatorname{supp}\psi_j \subset U_j$ und $\psi_j = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi_j$. Sei $A_{p,j}$ die L^p-Realisierung von $A_0(x_j, D)$. Wir definieren

$$R(\lambda)f := \sum_{j=0}^N \varphi_j (A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f \quad (f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathscr{L},\ |\lambda| \geq \lambda_1).$$

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(A_p-\lambda)R(\lambda)f &= \sum_{j=0}^N (A_p-\lambda)\varphi_j(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f \\ &= \sum_{j=0}^N \big(\varphi_j(A_p-\lambda)(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f + T_{1,j}(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f\big),\end{aligned}$$

wobei $T_{1,j}$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq 2m-1$ ist. Wir schreiben weiter

$$\begin{aligned}\varphi_j(A_p-\lambda)(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f &= \varphi_j(A_0(x_j,D)-\lambda)(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f \\ &\quad + \varphi_j\big(A(x,D)-A_0(x_j,D)\big)(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f \\ &= \varphi_j f + T_{2,j} f\end{aligned}$$

mit $T_{2,j}f := \varphi_j\big(A(x,D)-A_0(x_j,D)\big)(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f$.

Für $v_j := (A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f$ gilt nach Teil (i) des Beweises

$$\|v_j\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + |\lambda|\,\|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Andererseits gilt nach Wahl der Umgebungen U_i und unter Verwendung der Interpolationsungleichung die Abschätzung

$$\|(A(x,D)-A_0(x_j,D))v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{8C_1(N+1)} \|v_j\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + C_5 \|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

mit einer Konstanten $C_5 > 0$. Für den Operator $T_2 := \sum_{j=0}^N T_{2,j}$ erhalten wir daher

$$\|T_2 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j=0}^N \|T_{2,j} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{N} \|\varphi_j\big(A(x,D)-A_0(x_j,D)\big)v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\le \sum_{j=0}^{N} \|\big(A(x,D)-A_0(x_j,D)\big)v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\le \sum_{j=0}^{N} \Big(\frac{1}{8C_1N_0}\, C_1\|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{C_5\cdot C_1}{|\lambda|}\|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)\\
&\le \Big(\frac{1}{8}+\frac{C_5C_1N_0}{|\lambda|}\Big)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{4}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}
$$

falls $|\lambda| \ge \lambda_2 := \max\{\lambda_1, 8C_5C_1N_0\}$. Genauso folgt aus der Interpolationsungleichung

$$\sum_{j=0}^{N} \|T_{1,j}(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{4}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

falls $\lambda \in \mathscr{L}$, $|\lambda| \ge \lambda_3$ mit geeignetem $\lambda_3 > 0$ ist. Wir setzen $\lambda_0 := \max\{\lambda_2, \lambda_3\}$ und erhalten insgesamt

$$(A_p-\lambda)R(\lambda)f = f + T(\lambda)f \quad (\lambda\in\mathscr{L},\ |\lambda|\ge\lambda_0),$$

wobei $T(\lambda)f := T_2 f + \sum_{j=0}^{N} T_{1,j}(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f$ ein beschränkter Operator in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist mit Norm $\|T(\lambda)\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le \frac{1}{2}$. Somit gilt

$$(A_p-\lambda)R(\lambda)(1+T(\lambda))^{-1} = \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $A_p-\lambda$ ist surjektiv. Nach der a priori-Abschätzung aus Teil (ii) des Beweises ist $A_p-\lambda$ auch injektiv und abgeschlossen, d.h. es gilt

$$\rho(A_p) \supset \{\lambda\in\mathscr{L} : |\lambda|\ge\lambda_0\}.$$

Die a priori-Abschätzung des Satzes wurde bereits in Teil (ii) bewiesen, die restlichen Aussagen folgen wie im Modellproblem. $\square$

6. Energiemethoden für nichtautonome Evolutionsgleichungen

6.1 Worum geht's? Nichtautonome Evolutionsgleichungen haben die Form $\partial_t u(t) - A(t)u(t) = 0$, d.h. jetzt hängt der Operator selbst von der Zeit ab. Hier greift die Halbgruppentheorie nicht mehr. Mögliche Ansätze zur Behandlung derartiger Gleichungen sind etwa die Lokalisierung (bzgl. t), die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren (in t und x simultan) sowie Energiemethoden, auch variationelle Methoden genannt. Die Hauptidee ist es, schwache Hilbertraumwertige Lösungen zu betrachten. Eine ähnliche alternative Methode, derartige Gleichungen zu behandeln, ist die Theorie der CD-Systeme von Kato, welche hier aber nicht betrachtet wird.

a) Parabolische Gleichungen

Im Folgenden seien $T > 0$ und $V \subset H \subset V'$ ein Gelfand-Tripel mit separablen reellen Hilberträumen V und H (siehe Definition 1.4). Mit C werde eine generische Konstante bezeichnet, d.h. der Wert von C kann sich bei jedem Auftreten ändern.

Wir betrachten eine abstrakte nichtautonome Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(t)u(t) &= f(t) \quad (t \in (0,T)), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{6-1}$$

Dabei ist $A\colon [0,T] \to L(V,V')$ eine zeitabhängige Familie von Operatoren, und $f\colon [0,T] \to V'$ und $u_0 \in H$ sind gegeben.

6.2 Satz (Ein Interpolationssatz). *Falls $u \in L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);V')$, so gilt (nach eventueller Änderung auf einer Nullmenge) $u \in C([0,T],H)$. Die Einbettung*

$$L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);V') \subset C([0,T],H)$$

ist stetig.

Beweis. Wir setzen $Z := L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);V')$ mit Norm

$$\|u\|_Z := \big(\|u\|^2_{L^2((0,T);V)} + \|u\|^2_{H^1((0,T);V')}\big)^{1/2}.$$

Sei zunächst $u \in Z \cap C^1([0,T],H)$. Wegen $\frac{\partial}{\partial t}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u(t), \partial_t u(t)\rangle_H$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für alle $t, t_0 \in [0,T]$

$$\|u(t)\|_H^2 = \|u(t_0)\|_H^2 + 2\int_{t_0}^t \langle u(s), \partial_s u(s)\rangle_H ds.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein t_0 mit

$$\|u(t_0)\|_H^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds.$$

Mit diesem t_0 und der Abschätzung

$$|\langle u(s), \partial_s u(s)\rangle_H| = |\langle u(s), \partial_s u(s)\rangle_{V\times V'}| \le \|\partial_s u(s)\|_{V'}\|u(s)\|_V \quad (s\in[0,T])$$

erhält man für alle $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_H^2 &\le \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds + 2\int_0^T \|\partial_s u(s)\|_{V'}\|u(s)\|_V ds\\ &\le \frac{1}{T}\|u\|^2_{L^2((0,T);H)} + 2\|u\|_{H^1((0,T);V')}\|u\|_{L^2((0,T);V)}.\end{aligned}$$

Wegen $\|u\|_{L^2((0,T);H)} \le C\|u\|_{L^2((0,T);V)}$ gilt also für alle $u\in Z\cap C^1([0,T],H)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C([0,T],H)} \le C\big(\|u\|^2_{L^2((0,T);V)} + \|u\|_{H^1((0,T);V')}\|u\|_{L^2((0,T);V)}\big)^{1/2} \le C\|u\|_Z. \tag{6-2}$$

Sei nun $u\in Z$ allgemein. Da $Z\cap C^1([0,T];H)$ dicht in Z ist, existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset Z\cap C^1([0,T];H)$ mit $\|u_n-u\|_Z\to 0$. Nach (6-2) gilt $\|u_n-u_m\|_{C([0,T],H)}\to 0$, d.h. $(u_n)_n$ ist eine Cauchyfolge in $C([0,T],H)$ und damit konvergent gegen ein Element $\widetilde{u}\in C([0,T],H)$. Da $u_n\to u$ in Z, folgt $u=\widetilde{u}$ fast überall. Die Stetigkeit der Einbettung $Z\subset C([0,T],H)$ folgt aus (6-2). □

In Verallgemeinerung des autonomen Falls (Definition 1.5) definiert man:

6.3 Definition. Die zur Operatorfamilie $(A(t))_{t\in[0,T]}$ gehörige parametrisierte Bilinearform (quadratische Form) $a\colon (0,T)\times V\times V\to\mathbb{K}$ ist definiert durch

$$a(t,u,v) := -\langle A(t)u, v\rangle_{V'\times V} = -\big(A(t)u\big)v \quad (t\in(0,T),\ u,v\in V).$$

Die Form (und die Operatorfamilie) heißt koerzitiv, falls positive Konstanten α,β existieren mit

$$a(t,u,u)\ge \alpha\|u\|_V^2 - \beta\|u\|_H^2 \quad (t\in[0,T],\ u\in V). \tag{6-3}$$

Die Form und die Operatorfamilie heißen streng koerzitiv oder V-elliptisch, falls die Gleichung (6-3) mit $\beta=0$ gilt.

6.4 Satz (A priori-Abschätzung)**.** *Sei $A\in C([0,T],L(V,V'))$ koerzitiv. Dann existiert eine Konstante $C_A>0$ so, dass für alle $u\in Z:=L^2((0,T);V)\cap H^1((0,T);V')$ die Abschätzung*

$$\|u\|_{L^2((0,T),V)} \le C_A\big(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2((0,T),V')}\big) \tag{6-4}$$

gilt, wobei $f(t):=\partial_t u(t) - A(t)u(t)$ und $u_0:=u(0)$ gesetzt wurde. Insbesondere ist die Lösung von (6-1) eindeutig und hängt stetig von den Daten ab.

Beweis. O.E. sei A streng koerzitiv, sonst betrachte $v(t) := e^{-\beta t}u(t)$, welches das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \partial_t v(t) - A(t)v(t) + \beta v(t) &= e^{-\beta t} f(t), \\ v(0) &= u_0 \end{aligned}$$

erfüllt, mit zugehöriger Bilinearform $a(t,u,u) + \beta\|u\|_H^2$.

Man beachte, dass $u_0 \in H$ nach Satz 6.2 wohldefiniert ist und $f \in L^2((0,T), V')$ wegen $u \in Z$ gilt. Für $u \in Z \cap C^1([0,T], H)$ folgt für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\|u(t)\|_H^2 &= 2\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_H = 2\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{V'\times V} \\ &= 2\big\langle A(t)u(t) + f(t), u(t)\big\rangle_{V'\times V} = -2a(t,u(t),u(t)) + 2\langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V}. \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\|u(T)\|_H^2 + 2\int_0^T a(t,u(t),u(t))dt = \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V} dt.$$

Wir nützen die Koerzitivität aus, schätzen den rechten Integranden ab und erhalten

$$\|u(T)\|_H^2 + 2\alpha\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \le \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^T \|f(t)\|_{V'}\|u(t)\|_V dt.$$

Auf der linken Seite lassen wir den ersten Term weg, auf der rechten Seite verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Youngsche Ungleichung $ab \le \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2$ (mit frei wählbarem $\varepsilon > 0$). Es ergibt sich

$$2\alpha\|u\|_{L^2((0,T);V)}^2 \le \|u_0\|_H^2 + 2\varepsilon\|u\|_{L^2((0,T);V)}^2 + 2C_\varepsilon\|f\|_{L^2((0,T),V')}^2.$$

Wählt man ε klein genug (etwa $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$), so erhält man (6-4) für alle $u \in Z \cap C^1([0,T], H)$. Für allgemeine $u \in Z$ folgt (6-4) wieder mit einem Dichtheitsargument.

Da die Gleichung linear ist, folgt aus (6-4) die Eindeutigkeit der Lösung, da die Differenz zweier Lösungen die Gleichung mit $f = 0$ und $u_0 = 0$ erfüllt. □

6.5 Satz. *Sei $A \in C([0,T], L(V,V'))$ koerzitiv. Dann existiert zu jedem $u_0 \in H$ und $f \in L^2((0,T); V')$ genau eine Lösung $u \in L^2((0,T); V) \cap H^1((0,T); V')$ von (6-1).*

Der Beweis verwendet das sogenannte Faedo-Galerkin-Verfahren, welches auf einer Projektion auf endlich-dimensionale Unterräume basiert.

Beweis. **(i)** Eindeutige Lösbarkeit der endlich-dimensionalen Systeme:

Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Orthonormalbasis von V (bzgl. der Topologie von V). Man definiert $V_n := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ und betrachtet die orthogonalen Projektionen $P_n\colon H \to V_n$ (orthogonal in H).

Die Funktion $u_n = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) v_i$ sei definiert als die Lösung von

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u_n(t), v_j\rangle_{V'\times V} - \langle A(t)u_n(t), v_j\rangle_{V'\times V} &= \langle f(t), v_j\rangle_{V'\times V} \quad (j = 1, \dots, n), \\ u_n(0) &= P_n u_0. \end{aligned} \tag{6-5}$$

Für die Koeffizienten $(c_{in}(t))_{i=1,\dots,n}$ erhält man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Setzt man die obige Entwicklung von u_n ein, erhält man das System

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\partial_t c_n(t) &= \mathcal{A}(t)c_n(t) + F(t) \quad (t \in (0, T)), \\ c_n(0) &= C_0. \end{aligned} \tag{6-6}$$

Dabei wurden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned} c_n(t) &:= \big(c_{in}(t)\big)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n, \\ C_0 &:= \big(\langle P_n u_0, v_i\rangle_V\big)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{A}(t) &:= \big(\langle A(t)v_i, , v_j\rangle_{V'\times V}\big)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \\ \mathcal{M} &:= \big(\langle v_i, v_j\rangle_H\big)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \\ F(t) &:= \big(\langle f(t), v_i\rangle_{V'\times V}\big)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Es gilt $\mathcal{A} \in C([0,T], \mathbb{R}^{n\times n})$ und $F \in L^2((0,T); \mathbb{R}^n) \subset L^1((0,T); \mathbb{R}^n)$, und die Matrix $\mathcal{M}$ ist invertierbar. Für das homogene System ist daher der Satz von Picard-Lindelöf in der globalen Version anwendbar, für das inhomogene System die Variation der Konstanten. Daher existiert eine eindeutige Lösung $c_n \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_t c_n \in L^2((0,T); \mathbb{R}^n)$ von (6-6), und somit eine eindeutige Lösung

$$u_n \in C([0,T], V) \quad \text{mit } \partial_t u_n \in L^2((0,T); V)$$

von (6-5).

(ii) Gleichmäßige Abschätzung für die Lösungen und Konvergenz einer Teilfolge:

Da u_n die Lösung von (6-5) ist und $\partial_t u_n \in L^2((0,T); V)$ sowie $u_n(t) \in V_n$ gilt, erhalten wir

$$\langle \partial_t u_n(t), u_n(t)\rangle_H - \langle A(t)u_n(t), u_n(t)\rangle_{V'\times V} = \langle f(t), u_n(t)\rangle_{V'\times V}.$$

Nur diese schwache Formulierung der Differentialgleichung wurde im Beweis von Satz 6.4 benötigt. Es gilt also (mit derselben Konstante wie in Satz 6.4, welche somit nicht von n abhängt)

$$\|u_n\|_{L^2((0,T);V)} \le C_A\big(\|f\|_{L^2((0,T),V')} + \|u_0\|_H\big),$$

wobei $\|P_n u_0\|_H \le \|u_0\|_H$ verwendet wurde.

Somit ist die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2((0,T);V)$ beschränkt und besitzt daher eine schwach konvergente Teilfolge (Satz D.5), welche wieder mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet sei. Es sei $u_n \rightharpoonup u \in L^2((0,T);V)$.

(iii) Der schwache Grenzwert löst die ursprüngliche Gleichung:

Zu zeigen ist, dass u eine Lösung von (6-1) ist. Dazu sei $\varphi \in \mathscr{D}((0,T))$ und $v \in V_N$. Da u_n eine Lösung von (6-5) ist, folgt für $n \ge N$ und für fast alle $t \in [0,T]$

$$\varphi(t)\langle \partial_t u_n(t), v\rangle_H = \varphi(t)\langle A(t)u_n(t), v\rangle_{V'\times V} + \varphi(t)\langle f(t), v\rangle_{V'\times V}.$$

Integration bzgl. t und partielle Integration liefert

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u_n(t), v\rangle_H dt = \int_0^T \varphi(t)\langle A(t)u_n(t), v\rangle_{V'\times V} dt + \int_0^T \varphi(t)\langle f(t), v\rangle_{V'\times V} dt.$$

Da $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2((0,T);V)$ und damit auch $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2((0,T),H)$ sowie $Au_n \rightharpoonup Au$ in $L^2((0,T),V')$ gilt (Lemma D.7), können wir den Grenzwert $n \to \infty$ betrachten und erhalten

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u(t), v\rangle_H dt = \int_0^T \varphi(t)\langle A(t)u(t), v\rangle_{V'\times V} dt + \int_0^T \varphi(t)\langle f(t), v\rangle_{V'\times V} dt.$$

Dies gilt für alle $v \in V_N$ mit beliebigem $N \in \mathbb{N}$. Da $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von V ist, ist $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} V_N$ dicht in V, und somit gilt

$$-\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt = \int_0^T \varphi(t)A(t)u(t)dt + \int_0^T \varphi(t)f(t)dt$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}((0,T))$ als Gleichheit in V'. Also gilt für die distributionelle Ableitung $\partial_t u$ die Gleichheit $\partial_t u = Au + f \in L^2((0,T);V')$. Insbesondere ist

$$u \in H^1((0,T);V') \cap L^2((0,T);V) \subset C([0,T],H).$$

Zu zeigen ist noch $u(0) = u_0$. Sei dazu $\varphi \in C^1([0,T])$ mit $\varphi(T) = 0$ und $v \in V_N$. Dann gilt wieder für $n \ge N$ mit partieller Integration

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u_n(t), v\rangle_H dt + \varphi(0)\langle u_n(0), v\rangle_H = \int_0^T \varphi(t)\langle A(t)u_n(t) + f(t), v\rangle_{V'\times V} dt. \tag{6-7}$$

Für $n \ge N$ gilt wegen $v \in V_N$ und da P_n eine orthogonale Projektion und damit selbstadjungiert ist,

$$\langle u_n(0), v\rangle_H = \langle P_n u_0, v\rangle_H = \langle u_0, P_n v\rangle_H = \langle u_0, v\rangle_H.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir daher aus (6-7)

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u(t), v\rangle_H dt + \varphi(0)\langle u_0, v\rangle_H = \int_0^T \varphi(t)\langle A(t)u(t) + f(t), v\rangle_{V'\times V} dt. \tag{6-8}$$

Andererseits gilt $\partial_t u = Au + f \in L^2((0,T), V')$. Multiplikation mit φ und Anwendung auf v, Integration über $(0,T)$ und partielle Integration liefert

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u(t), v\rangle_H dt + \varphi(0)\langle u(0), v\rangle_H = \int_0^T \varphi(t)\langle A(t)u(t) + f(t), v\rangle_{V'\times V} dt.$$

Der Vergleich mit (6-8) liefert $\varphi(0)\langle u_0 - u(0), v\rangle_H = 0$. Für $\varphi(0) \neq 0$ folgt $\langle u_0 - u(0), v\rangle_H = 0$ für alle $v \in V_N$. Da $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} V_N$ dicht in V und damit auch in H ist, folgt $u(0) = u_0 \in H$. □

6.6 Bemerkung. Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes ist somit die Abbildung

$$L^2((0,T); V) \cap H^1((0,T); V') \to L^2((0,T); V') \times H, \; u \mapsto (\partial_t u - Au, u(0))$$

ein Isomorphismus von Hilberträumen, insbesondere ist die Umkehrabbildung, d.h. die Lösung der Gleichung, ebenfalls stetig. Diese Stetigkeit könnte auch mit dem Satz vom stetigen Inversen bewiesen werden, allerdings wird in obigem Beweis die a priori-Abschätzung sowohl für die Eindeutigkeit der Lösung als auch für die Existenz des schwachen Grenzwerts beim Galerkin-Ansatz benötigt.

Der Isomorphismus zeigt auch, dass die Lösung so glatt ist, wie es aufgrund der Gleichung erwartet werden kann; man verliert also keine Regularität. Dies ist typisch für parabolische Gleichung und wird auch als maximale Regularität oder optimale Regularität bezeichnet.

6.7 Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Gebiet, und sei $A = A(x,t)$ ein Differentialoperator der Form

$$A(x,t)u = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}\big(a_{ij}(x,t)\partial_{x_i} u\big) + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\partial_{x_i} u + c(x,t)u.$$

Dabei seien die Koeffizienten reellwertig, stetig in x und t und beschränkt, und die Matrix $(a_{ij})_{i,j}$ sei strikt positiv definit, d.h. es gelte

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq q|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\, x \in \Omega,\, t \in [0,T]).$$

Dann sind die Bedingungen von Satz 6.5 erfüllt, wobei $V := H_0^1(\Omega)$, $H := L^2(\Omega)$ und damit $V' = H^{-1}(\Omega)$ gewählt wird. Somit besitzt das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - A(x,t)u(x,t) &= f(x,t) \quad && (x \in \Omega,\, t \in [0,T]),\\ u(x,t) &= 0 && (x \in \partial\Omega,\, t \in [0,T]), \end{aligned}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (x \in \Omega)$$

für jedes $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $f \in L^2((0,T), H^{-1}(\Omega))$ eine eindeutige Lösung

$$u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega)) \cap H^1((0,T); H^{-1}(\Omega)).$$

Man spricht hier auch von einer schwachen Lösung.

Wir werden im Folgenden eine Aussage für höhere Regularität der Lösung zeigen. Dafür betrachtet man den Operator $A(t)$ als unbeschränkten Operator in H (vgl. Definition 1.5).

6.8 Definition. Sei $A\colon [0,T] \to L(V,V')$ eine Operatorfamilie. Dann definiert man die Familie $(A_H(t))_{t\in[0,T]}$ unbeschränkter Operatoren in H, wobei $A_H(t)$ die H-Realisierung von $A(t)$ sei, gegeben durch $D(A_H(t)) := \{u \in V : A(t)u \in H\} \subset H$ und $A_H(t)u := A(t)u$ $(u \in D(A_H(t)))$.

6.9 Satz (Höhere Regularität)**.** *Sei $A \in C^1([0,T], L(V,V'))$ koerzitiv, und seien $u_0 \in D(A_H(0))$ und*

$$f \in Z := L^2((0,T); V) \cap H^1((0,T); V').$$

Dann gilt für die (nach Satz 6.5 existierende und eindeutige) Lösung u von (6-1) die höhere Regularität

$$\begin{aligned} u &\in H^1((0,T); V) \cap H^2((0,T); V') \subset C^1([0,T], H),\\ Au &\in L^2((0,T); V) \cap H^1((0,T); V') \subset C([0,T], H). \end{aligned}$$

Beweis. Wieder sei o.E. A koerzitiv mit Konstante $\beta = 0$ in (6-3). Formales Differenzieren der Gleichung (6-1) liefert

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t) - A(t)\partial_t u(t) - (\partial_t A)(t)u(t) &= \partial_t f(t) \quad (t \in (0,T)),\\ \partial_t u(0) &= A(0)u_0 + f(0). \end{aligned}$$

Nach Satz 6.2 ist $f \in C([0,T], H)$ und damit $f(0) \in H$, nach Voraussetzung gilt $u_0 \in D(A_H(0))$ und damit $A(0)u_0 \in H$ sowie $t \mapsto (\partial_t A(t))u(t) + \partial_t f(t) \in L^2((0,T); V')$. (Man beachte, dass $u \in L^2((0,T); V)$ und $\partial_t A \in C([0,T], L(V,V'))$ gilt.) Somit existiert nach Satz 6.5 eine eindeutige Lösung $v \in Z$ von

$$\begin{aligned} \partial_t v(t) - A(t)v(t) &= (\partial_t A(t))u(t) + (\partial_t f)(t) \quad (t \in (0,T)),\\ v(0) &= A(0)u_0 + f(0). \end{aligned} \tag{6-9}$$

Wir zeigen nun $\partial_t u = v$. Dazu sei

$$z(t) := u_0 + \int_0^t v(s)ds \quad (t \in [0,T]).$$

Dann gilt $z \in H^1((0,T);V)$ mit $\partial_t z = v$ und für alle $t \in [0,T]$ als Gleichheit in V'

$$\begin{aligned}A(t)z(t) &= A(t)u_0 + \int_0^t A(t)v(s)ds\\ &= A(t)u_0 + \int_0^t A(s)v(s)ds + \int_0^t \big(A(t)-A(s)\big)v(s)ds.\end{aligned}$$

Da v (6-9) löst, gilt für fast alle $s \in [0,T]$ die Gleichheit $A(s)v(s) = \partial_s v(s) - (\partial_s A(s))u(s) - \partial_s f(s)$ und damit

$$\begin{aligned}A(t)z(t) = A(t)u_0 + v(t) - v(0) - f(t) + f(0) - \int_0^t (\partial_s A(s))u(s)ds\\ + \int_0^t \big(A(t)-A(s)\big)v(s)ds.\end{aligned}$$

Mit $v(s) = \partial_s z(s)$ und partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}A(t)z(t) &= A(t)u_0 + \partial_t z(t) - v(0) - f(t) + f(0) - \int_0^t (\partial_s A)(s)u(s)ds\\ &\quad + \int_0^t (\partial_s A(s))z(s)ds - \big(A(t)-A(0)\big)z(0)\\ &= \partial_t z(t) - f(t) + \int_0^t (\partial_s A(s))\big(z(s)-u(s)\big)ds,\end{aligned}$$

wobei $v(0) = A(0)u_0 + f(0)$ verwendet wurde. Für die Differenz $w := z - u \in Z$ erhält man also die Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_t w - A(t)w &= -\int_0^t (\partial_s A)(s)w(s)ds \quad (t \in (0,T)),\\ w(0) &= 0\end{aligned}$$

als Gleichheit in V' für fast alle t. Wendet man dies auf $w(t) \in V$ an, so erhält man für fast alle t

$$\frac{1}{2}\partial_t\big(\|w(t)\|_H^2\big) - \langle A(t)w(t), w(t)\rangle_{V'\times V} = \int_0^t \langle \partial_s A(s)w(s), w(t)\rangle_{V'\times V} ds.$$

Integriert man über $t \in [0,\tau]$ mit $\tau \in [0,T]$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}\|w(\tau)\|_H^2 = -\int_0^\tau a(t,w(t),w(t)) + \int_0^\tau \int_0^t \langle (\partial_s A)(s)w(s), w(t)\rangle_{V'\times V} ds\, dt. \quad \text{(6-10)}$$

Für $C_1 := \max_{t\in[0,T]} \|\partial_t A(t)\|_{L(V,V')}$ gilt

$$\Big|\int_0^\tau \int_0^t \langle (\partial_s A)(s)w(s), w(t)\rangle_{V'\times V} ds\, dt\Big| \le C_1 \int_0^\tau \int_0^t \|w(s)\|_V \|w(t)\|_V ds\, dt.$$

Unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\int_0^t \|w(s)\|_V ds = \int_0^\tau \chi_{[0,t]}(s)\|w(s)\|_V ds \le \sqrt{t}\|w\|_{L^2((0,t);V)} \le \sqrt{t}\|w\|_{L^2((0,\tau);V)}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \int_0^t \|w(s)\|_V \|w(t)\|_V ds\, dt &\le \|w\|_{L^2((0,\tau);V)} \int_0^\tau \|w(t)\|_V \sqrt{t}dt \\ &\le \|w\|^2_{L^2((0,\tau);V)} \Big(\int_0^\tau t dt\Big)^{1/2} = \frac{\tau}{\sqrt{2}}\|w\|^2_{L^2((0,\tau);V)}.\end{aligned}$$

Da A koerzitiv mit $\beta = 0$ ist, gilt andererseits

$$\int_0^\tau a(t, w(t), w(t))dt \ge \alpha\|w\|^2_{L^2((0,T);V)}.$$

In (6-10) eingesetzt erhält man für alle $\tau \in [0, T]$

$$\frac{1}{2}\|w(\tau)\|^2_H \le \Big(\frac{C_1\tau}{\sqrt{2}} - \alpha\Big)\|w\|^2_{L^2((0,\tau);V)}.$$

Für $\tau \in [0, \tau_0]$ mit $\tau_0 := \frac{\sqrt{2}\alpha}{C_1}$ ist die rechte Seite nichtpositiv, und es folgt $w(\tau) = 0$. Eine Wiederholung dieses Arguments in den Intervallen $[\tau_0, 2\tau_0]$, $[2\tau_0, 3\tau_0], \dots$ liefert schließlich $w = 0$ und damit $0 = \partial_t w = \partial_t z - \partial_t u = v - \partial_t u$, d.h. es gilt $\partial_t u = v$.

Wegen $v \in Z$ folgt damit $\partial_t u \in Z$ und wegen $Au = \partial_t u - f$ auch $Au \in Z$. Nach dem Einbettungssatz gilt $Z \subset C([0, T], H)$ und damit $u \in C^1([0, T], H)$ sowie $Au \in C([0, T], H)$. □

b) Nichtlineare Gleichungen

Im Folgenden sei X ein reflexiver Banachraum und X' sein topologischer Dualraum. Unter einem Operator $A\colon X \to X'$ ist ab sofort nicht notwendigerweise eine lineare Abbildung gemeint. Man schreibt üblicherweise auch für nichtlineare Operatoren $Au := A(u)$.

6.10 Definition. Sei $A\colon X \to X', u \mapsto Au$ ein Operator.

a) A heißt monoton, falls

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_{X'\times X} \ge 0 \quad (u, v \in X).$$

Falls für $u \ne v$ sogar „>“ gilt, so heißt A strikt monoton. Der Operator A heißt stark monoton, falls ein $c > 0$ existiert mit

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_{X'\times X} \ge c\|u - v\|^2_X \quad (u, v \in X).$$

b) A heißt maximal monoton, falls A monoton ist und falls gilt: Wenn $u \in X$ und $b \in X'$ die Ungleichung $\langle b - Av, u - v\rangle_{X' \times X} \geq 0$ $(v \in X)$ erfüllen, so ist $Au = b$.

c) A heißt koerzitiv, falls

$$\lim_{\|u\|_X \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle_{X' \times X}}{\|u\|_X} = \infty.$$

d) A heißt beschränkt, falls beschränkte Mengen in X auf beschränkte Mengen in X' abgebildet werden.

e) A heißt hemistetig, falls für alle $u, v, w \in X$ die Abbildung

$$s \mapsto \langle A(u + sv), w\rangle_{X' \times X},\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

stetig ist.

In vielen Anwendungsfällen ist ein nichtlinearer Operator mengenwertig, d.h. eine Abbildung $A\colon X \to \mathscr{P}(X')$, wobei $\mathscr{P}(X')$ die Potenzmenge von X' ist. Man beachte, dass mengenwertige Abbildung mit Teilmengen $G_A \subset X \times X'$ identifiziert werden können (dabei ist $G_A = \{(u, u') : u' \in Au\}$ der Graph von A). Für $A, \widetilde{A}\colon X \to \mathscr{P}(X')$ heißt $\widetilde{A}$ eine Fortsetzung von A, falls $G_{\widetilde{A}} \supset G_A$, d.h. falls $\widetilde{A}u \supset Au$ $(u \in X)$ gilt.

6.11 Definition. Sei $A\colon X \to \mathscr{P}(X')$ ein mengenwertiger Operator. Dann heißt A monoton, falls

$$\langle u' - v', u - v\rangle_{X' \times X} \geq 0 \quad (u, v \in X,\ u' \in Au,\ v' \in Av)$$

gilt. Der Operator A heißt maximal monoton, falls es keine monotone echte Fortsetzung $\widetilde{A}\colon X \to \mathscr{P}(X')$ von A gibt.

6.12 Satz. *Sei $A\colon X \to X'$ ein Operator.*

a) Falls A stark monoton ist, so ist A koerzitiv.

b) Sei A monoton und hemistetig. Dann gilt:

(i) A ist maximal monoton.

(ii) Sei $(u_n)_n \subset X$ eine Folge mit $u_n \rightharpoonup u$ in X und $Au_n \rightharpoonup b$ in X' sowie $\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle_{X' \times X} \leq \langle b, u\rangle_{X' \times X}$. Dann gilt $Au = b$.

Beweis. a) Es gilt $\langle Au, u\rangle_{X' \times X} = \langle Au - A(0), u\rangle_{X' \times X} + \langle A(0), u\rangle_{X' \times X} \geq c\|u\|_X^2 - \|A(0)\|_{X'}\|u\|_X$ und damit

$$\frac{\langle Au, u\rangle_{X' \times X}}{\|u\|_X} \geq c\|u\|_X - \|A(0)\|_{X'} \to \infty \quad (\|u\|_X \to \infty).$$

b) Sei A monoton und hemistetig, und seien u, b wie in (i) gegeben. Für festes $w \in X$ setzt man $v := u - sw$ $(s > 0)$ und erhält

$$0 \le \langle b - Av, u - v\rangle_{X' \times X} = s\langle b - A(u - sw), w\rangle_{X' \times X}.$$

Für $s \searrow 0$ folgt unter Verwendung der Hemistetigkeit $\langle b - Au, w\rangle_{X' \times X} \ge 0$. Ersetzt man w durch $-w$, erhält man analog $\langle b - Au, w\rangle_{X' \times X} \le 0$. Somit gilt $Au = b$ in X', d.h. A ist maximal monoton.

Sei nun $(u_n)_n \subset X$ eine Folge wie in (ii). Dann gilt für alle $v \in X$

$$\langle Au_n, u_n\rangle_{X' \times X} - \langle Av, u_n\rangle_{X' \times X} - \langle Au_n - Av, v\rangle_{X' \times X} = \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle_{X' \times X} \ge 0.$$

Man nimmt von dieser Gleichung den $\limsup_{n \to \infty}$ und erhält

$$\langle b, u\rangle_{X' \times X} - \langle Av, u\rangle_{X' \times X} - \langle b - Av, v\rangle_{X' \times X} \ge 0$$

und damit $\langle b - Av, u - v\rangle_{X' \times X} \ge 0$ $(v \in X)$. Nach (i) gilt $Au = b$.

□

Im Folgenden sei wieder $V \subset H \subset V'$ ein Gelfand-Tripel mit reellen separablen Hilberträumen V, H. Gegeben sei jetzt eine Familie $(A(t, \cdot))_{t \in [0,T]}$ von nicht notwendigerweise linearen Abbildungen $A(t, \cdot) \colon V \to V'$. Wir betrachten die parabolische nichtlineare Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(t, u(t)) &= f(t) \quad (t \in (0, T)), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{6-11}$$

Wieder werden wir die erste Gleichung dabei als Gleichheit in V' für fast alle $t \in (0, T)$ auffassen.

Zur Operatorfamilie $(A(t, \cdot))_{t \in [0,T]}$ betrachtet man den Operator

$$\mathcal{A} \colon L^2((0, T); V) \to L^2((0, T); V'),\ u \mapsto A(\cdot, u(\cdot)).$$

6.13 Satz. *Gegeben sei eine Familie nichtlinearer Operatoren $(A(t, \cdot))_{t \in [0,T]}$. Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:*

(i) Beschränktheit: Es existiert ein $\gamma \in L^2((0, T))$ mit

$$\|A(t, v)\|_{V'} \le C(\gamma(t) + \|v\|_V) \quad (t \in (0, T),\ v \in V).$$

(ii) Hemistetigkeit: Die Abbildung $[0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, s) \mapsto \langle A(t, u + sv), w\rangle_{V' \times V}$ ist stetig für alle $u, v, w \in V$.

(iii) Koerzitivität: Es gibt $\alpha, \beta > 0$ so, dass für alle $t \in [0,T]$ und alle $u \in V$ $-\langle A(t,u), u\rangle_{V'\times V} \geq \alpha \|u\|_V^2 - \beta\|u\|_H^2$ gilt.

(iv) Monotonie: Für alle $t \in [0,T]$ ist der Operator $-A(t,\cdot)\colon V \to V'$ monoton.

Dann existiert zu jedem $f \in L^2((0,T);V')$ und zu jedem $u_0 \in H$ genau eine Lösung $u \in L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);V')$ von (6-11).

Beweis. **(i)** Wir zeigen zunächst, dass der Operator $-\mathcal{A}\colon L^2((0,T);V) \to L^2((0,T);V')$ beschränkt, hemistetig und monoton ist. Für $u, v \in L^2((0,T);V)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle A(t,u(t)), v(t)\rangle_{V'\times V} dt &\leq C\int_0^T (\gamma(t) + \|u(t)\|_V)\|v(t)\|_V dt\\ &\leq C\big(\|\gamma\|_{L^2((0,T))} + \|u\|_{L^2((0,T);V)}\big)\|v\|_{L^2((0,T);V)},\end{aligned}$$

also ist $\mathcal{A}$ beschränkt. Die Hemistetigkeit ergibt sich analog mit majorisierter Konvergenz aus der Hemistetigkeit von $A(t,\cdot)$. Die Positivität von $-\mathcal{A}$ folgt sofort aus

$$-\int_0^T \langle A(t,u(t)) - A(t,v(t)), u(t) - v(t)\rangle_{V'\times V} dt \geq 0 \quad (u, v \in L^2((0,T);V)).$$

(ii) Galerkin-Approximation:

Sei $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Orthonormalbasis von V, $V_n := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ und $P_n\colon H \to V_n$ die orthogonale Projektion in H auf V_n. Sei ferner $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,T], V')$ eine Folge mit $f_n \to f$ in $L^2((0,T);V')$. Wir betrachten die Differentialgleichung in V_n

$$\begin{aligned}\langle \partial_t u_n, v_j\rangle_{V'\times V} - \langle A(t,u_n(t)), v_j\rangle_{V'\times V} &= \langle f_n(t), v_j\rangle_{V'\times V} \quad (t \in (0,T)),\\ u_n(0) &= P_n u_0.\end{aligned} \tag{6-12}$$

Für $u_n(t) = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) v_i$, $c_n(t) := \big(c_{in}(t)\big)_{i=1,\dots,n}$ erhält man folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\partial_t c_n(t) - \mathcal{G}(t, c_n(t)) &= F_n(t) \quad (t \in (0,T)),\\ c_n(0) &= C_0\end{aligned} \tag{6-13}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &:= \big(\langle v_i, v_j\rangle_H\big)_{i,j=1,\dots,n},\\ \mathcal{G}(t, c_n(t)) &:= \big(\langle A(t, \textstyle\sum_{i=1}^n c_{in}(t) v_i), v_j\rangle_{V'\times V}\big)_{i,j=1,\dots,n},\\ F_n(t) &:= \big(\langle f_n(t), v_i\rangle_{V'\times V}\big)_{i=1,\dots,n}.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{G}\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, ebenso $F_n\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$. Die Matrix $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist symmetrisch und positiv definit. Nach dem Satz von Peano existiert eine maximale Lösung $c_n \in C^1([0,t_n),\mathbb{R}^n)$ mit $t_n > 0$. Für die zugehörige Funktion u_n gilt $u_n \in C^1([0,t_n),V_n) \subset C^1([0,t_n),V)$.

(iii) Energieabschätzung und schwache Konvergenz:

Setzt man in (6-12) punktweise $u_n(t) \in V_n$ statt v_j ein, erhält man

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u_n(t)\|_H^2 - \langle A(t,u_n(t)),u_n(t)\rangle_{V'\times V} = \langle f_n(t),u_n(t)\rangle_{V'\times V} \quad (t\in(0,t_n)). \tag{6-14}$$

Unter Verwendung der Koerzivität erhält man

$$\frac{1}{2}\partial_t\|u_n(t)\|_H^2 + \alpha\|u_n(t)\|_V^2 \le \beta\|u_n(t)\|_H^2 + \langle f_n(t),u_n(t)\rangle_{V'\times V} \quad (t\in(0,t_n)).$$

Wie im Beweis von Satz 6.4 folgt daraus für alle $\tau \in (0,t_n)$

$$\|u_n(\tau)\|_H^2 + \int_0^\tau \|u_n(t)\|_V^2 dt \le C\Big(\|u_0\|_H^2 + \|f_n\|^2_{L^2((0,T);V')}\Big). \tag{6-15}$$

Die rechte Seite hängt nicht von τ ab. Da $\mathcal{M}$ positiv definit ist, gilt

$$|c_n(\tau)|^2 \le C c_n(\tau)^\top \mathcal{M} c_n(\tau) = C\sum_{i,j=1}^n c_{in}(\tau)c_{jn}(\tau)\langle v_i,v_j\rangle_H = C\|u_n(\tau)\|_H^2.$$

Also ist $|c_n(\tau)|$ durch eine von τ unabhängige Größe beschränkt. Damit folgt $t_n > T$ und damit $u_n \in C^1([0,T],V)$.

Wegen (6-15) sind $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2((0,T);V)$ und $(u_n(T))_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ beschränkt. Da nach Voraussetzung $\mathcal{A}$ ein beschränkter Operator ist, ist auch $(\mathcal{A}u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2((0,T);V')$ beschränkt. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt also

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ in } L^2((0,T);V),\\ u_n(T) &\rightharpoonup u_1 \text{ in } H,\\ \mathcal{A}u_n &\rightharpoonup w \text{ in } L^2((0,T);V'). \end{aligned}$$

(iv) Der schwache Grenzwert ist eine Lösung der Gleichung:

Analog zum Beweis von Satz 6.5, Teil (iii), betrachtet man $\varphi \in \mathcal{D}((0,T))$ und $v \in V_N$ und erhält für $n \ge N$

$$\begin{aligned} -\int_0^T \varphi'(t)\langle u_n(t),v\rangle_{V'\times V}dt - \int_0^T \varphi(t)\langle A(t,u_n(t)),v\rangle_{V'\times V}dt&\\ = \int_0^T \varphi(t)\langle f_n(t),v\rangle_{V'\times V}dt.& \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ erhält man aufgrund der obigen schwachen Konvergenzen und der Konvergenz $f_n \to f$ in $L^2((0,T);V')$

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u(t),v\rangle_{V'\times V}dt - \int_0^T \varphi(t)\langle w(t),v\rangle_{V'\times V}dt = \int_0^T \langle f(t),v\rangle_{V'\times V}dt.$$

Dies zeigt $\partial_t u = w + f \in L^2((0,T);V')$ sowie $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1((0,T);V')$ und damit $u_n(T) \rightharpoonup u(T)$ in H. Genauso wie im Beweis von Satz 6.5 sieht man $u(0) = u_0$.

Zu zeigen ist noch $w = \mathcal{A}u$. Integriert man (6-14) über $(0,T)$, so erhält man

$$-\int_0^T \langle A(t,u_n(t)), u_n(t)\rangle_{V'\times V} dt = \frac{1}{2}\|u_n(0)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_n(T)\|_H^2 + \int_0^T \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V'\times V} dt.$$

Es gilt $u_n(0) \to u(0)$ in H, $u_n(T) \rightharpoonup u(T)$ in H und damit $\liminf_{n\to\infty} \|u_n(T)\| \geq \|u(T)\|$ (siehe Lemma D.4 c)). Mit Lemma D.4 d) folgt

$$\int_0^T \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V'\times V} dt \to \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V} dt \quad (n \to \infty).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \Big(-\int_0^T \langle A(t,u_n(t)), u_n(t)\rangle_{V'\times V} dt\Big) \\
&\leq \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V} dt \\
&= -\int_0^T \langle w(t), u(t)\rangle_{V'\times V} dt.
\end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Gleichheit wegen $w = \partial_t u - f$. Der Operator $-\mathcal{A}$ ist nach (i) monoton und hemistetig, und die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 6.12 b) (ii). Nach diesem Satz gilt $\mathcal{A}u = w$, d.h. u ist eine Lösung der Gleichung.

(v) Eindeutigkeit: Seien u_1, u_2 Lösungen von (6-11). Dann folgt

$$\partial_t \|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 = \langle A(t,u_1(t)) - A(t,u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle_{V'\times V} \leq 0 \quad (t \in (0,T))$$

sowie $u_1(0) = u_2(0)$ und damit $u_1 = u_2$. □

7. Maximale Regularität

7.1 Worum geht's? Bei der Behandlung nichtlinearer Gleichungen stellt die Methode der maximalen Regularität eine Alternative zur Theorie monotoner Operatoren dar. Hier geht es vor allem um semilineare und quasilineare Gleichungen. Die Idee ist es, Funktionenräume in Ort und Zeit zu definieren, in welchen durch die Gleichung ein Isomorphismus induziert wird. Dieses Konzept war in den letzten Jahrzehnten sehr erfolgreich und wird heute vor allem in Hölder- und Sobolevräumen (bzgl. der Zeitvariablen) angewendet. Wir diskutieren hier insbesondere die Sobolevraumtheorie.

a) Der Begriff der maximalen Regularität und die Lösung quasilinearer Gleichungen

Im Folgenden werden wir semilineare und quasilineare Gleichungen betrachten, welche abstrakt geschrieben werden können in der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u - A(u)u &= F(u) \quad \text{ in } (0,T_0), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{7-1}$$

Dabei ist $T_0 \in (0,\infty]$. Wir fixieren folgende Situation: Es sei $p \in (1,\infty)$, X_0 und X_1 seien Banachräume mit $X_1 \subset X_0$, d.h. die Identität auf X_1 ist stetig. Weiter sei X_1 dicht in X_0. Für festes $T \in (0,T_0]$ wählen wir als Grundraum

$$\mathbb{F} := \mathbb{F}_T(X_0) := L^p((0,T);X_0).$$

Der passende Raum für die Lösung wird dann

$$\mathbb{E} := \mathbb{E}_T(X_1,X_0) := L^p((0,T);X_1) \cap W_p^1((0,T);X_0).$$

7.2 Definition. Wir definieren den Spurraum $\gamma_0\mathbb{E} := \{\gamma_0 u : u \in \mathbb{E}\}$, wobei $\gamma_0 \colon u \mapsto u(0)$ die Zeitspur von u an der Stelle 0 bezeichne. Der Raum $\gamma_0\mathbb{E} = \gamma_0\mathbb{E}(X_1,X_0)$ wird mit der kanonischen Norm

$$\|u_0\|_{\gamma_0\mathbb{E}} := \inf\{\|u\|_{\mathbb{E}} : u \in \mathbb{E},\, u(0) = u_0\}$$

versehen. Wir setzen noch

$${}_0\mathbb{E} := {}_0\mathbb{E}_T(X_1,X_0) := \{u \in \mathbb{E}_T(X_1,X_0) : \gamma_0 u = 0\},$$

das ist der Raum aller Lösungen, welche an der Stelle $t = 0$ den Wert 0 annehmen.

7.3 Lemma. *a) Der Spurraum ist gleich dem reellen Interpolationsraum mit Parametern* $1-\frac{1}{p}$ *und* p*, d.h. es gilt* $\gamma_0\mathbb{E} = (X_0, X_1)_{1-1/p,p}$*. Es gilt die stetige Inklusion* $\mathbb{E} \subset BUC([0,T];\gamma_0\mathbb{E})$*. Insbesondere ist die Spur* $\gamma_0\colon \mathbb{E} \to \gamma_0\mathbb{E}$*,* $u \mapsto u(0)$ *wohldefiniert, und* $\gamma_0\mathbb{E}$ *ist unabhängig von* T*.*

b) Die Norm der stetigen Einbettung $\mathbb{E} \subset BUC([0,T];\gamma_0\mathbb{E})$ *hängt von* T *ab, sie wird im Allgemeinen größer für kleinere Zeitintervalle. Auf dem Teilraum* ${}_0\mathbb{E}$ *kann diese Norm jedoch unabhängig von* $T>0$ *abgeschätzt werden, d.h. es existiert eine von* $T>0$ *unabhängige Konstante* C_1 *mit*

$$\|u(0)\|_{C([0,T];\gamma_0\mathbb{E})} \le C_1 \|u\|_{\mathbb{E}_T(X_1,X_0)} \quad (u \in {}_0\mathbb{E}_T(X_1,X_0)).$$

Dies sieht man, indem man u *durch* 0 *auf das Intervall* $t \in (-1,0)$ *fortsetzt und damit mindestens die Intervalllänge* 1 *erzielt.*

b) Der Spurraum ist ein Banachraum mit $X_1 \subset \gamma_0\mathbb{E} \subset X_0$ *(jeweils stetige Inklusion).*

Beweis. Diese Aussage ist Teil der Interpolationstheorie von Banachräumen. □

Für den zentralen Begriff der maximalen Regularität betrachten wir eine lineare Version von (7-1):

$$\begin{aligned} \partial_t u - Bu &= f \quad \text{in } (0,T),\\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{7-2}$$

Dabei sei $B \in L^\infty((0,T);L(X_1,X_0))$. Wir identifizieren die Funktion $B\colon (0,T) \to L(X_1,X_0)$ mit einer Funktion auf $\mathbb{E}$ vermöge der Definition

$$(Bu)(t) := B(t)u(t) \quad (t \in (0,T),\ u \in \mathbb{E}).$$

Wir werden diese beiden Interpretationen von B nicht in der Notation unterscheiden.

7.4 Definition. a) Seien $f \in \mathcal{F}$ und $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$. Dann heißt eine Funktion $u\colon (0,T) \to X_0$ eine starke (L^p)-Lösung von (7-2), falls $u \in \mathbb{E}$ gilt und falls (7-2) für fast alle $t \in (0,T)$ als Gleichheit in $L^p((0,T);X_0)$ gilt.

b) Die Abbildung $B \in L^\infty((0,T);L(X_1,X_0))$ besitzt maximale (L^p-)Regularität auf $(0,T)$, falls für alle $f \in \mathcal{F}$ und $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$ genau eine starke Lösung $u \in \mathbb{E}$ von (7-2) existiert. Man definiert $\mathrm{MR}_T(X_1,X_0)$ als die Menge aller $B \in L^\infty((0,T);L(X_1,X_0))$, welche maximale Regularität in $(0,T)$ besitzen. Der Raum $\mathrm{MR}_T(X_1,X_0)$ wird mit der Spurtopologie von $L^\infty((0,T);L(X_1,X_0))$ versehen.

c) Man definiert $\mathrm{MR}(X_1,X_0)$ als die Menge aller Operatoren $C \in L(X_1,X_0)$, für welche die konstante Abbildung $(0,T) \to L(X_1,X_0)$, $t \mapsto C$ maximale Regularität besitzt. Der Raum $\mathrm{MR}(X_1,X_0)$ wird wieder mit der Spurtopologie, d.h. mit der Norm auf $L(X_1,X_0)$ versehen.

7.5 Bemerkung. Sei $T < \infty$, und sei $H(X_1, X_0)$ die Menge aller abgeschlossener Operatoren $B\colon X_0 \supset D(B) = X_1 \to X_0$, welche eine holomorphe C_0-Halbgruppe in X_0 erzeugen.

Falls $B \in H(X_1, X_0)$ und $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$, dann ist $u(t) := e^{-tB}u_0$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - Bu(t) &= 0 \quad (t \in (0,T)),\\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Es gilt $u \in \mathbb{E}$.

7.6 Lemma. *Sei $T < \infty$, und es gelte $H(X_1, X_0) \neq \emptyset$. Für $B \in L^\infty((0,T); L(X_1, X_0))$ sind äquivalent:*

(i) $B \in \mathrm{MR}_T(X_1, X_0)$,

(ii) $\partial_t - B \in L_{\mathrm{Isom}}({}_0\mathbb{E}, \mathcal{F})$,

(iii) $(\partial_t - B, \gamma_0) \in L_{\mathrm{Isom}}(\mathbb{E}, \mathcal{F} \times \gamma_0\mathbb{E})$.

Beweis. (i)⇒(ii). Nach Definition von $\mathrm{MR}_T(X_1, X_0)$ ist die Abbildung $\partial_t - B\colon {}_0\mathbb{E} \to \mathcal{F}$ eine Bijektion von Banachräumen. Da $B \in L^\infty((0,T); L(X_1, X_0))$ und $\partial_t \in L({}_0\mathbb{E}, \mathcal{F})$, ist diese Abbildung stetig. Nach dem Satz vom stetigen Inversen ist $(\partial_t + B)^{-1}$ ebenfalls stetig, d.h. $\partial_t - B$ ist ein Isomorphismus von Banachräumen.

(ii)⇒(iii). Sei $(f, u_0) \in \mathcal{F} \times \gamma_0\mathbb{E}$. Wir wählen einen festen Operator $B_0 \in H(X_1, X_0)$ und setzen $v := e^{-tB_0}u_0$. Dann gilt $v \in \mathbb{E}$ und damit $(\partial_t - B)v \in \mathcal{F}$. Eine Funktion $u \in \mathbb{E}$ ist genau dann eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} (\partial_t - B(t))u(t) &= f(t) \quad (t \in (0,T)),\\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

wenn $w := u - v$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} (\partial_t - B(t))w(t) &= f(t) - (\partial_t - B(t))v(t) \quad (t \in (0,T)),\\ w(0) &= 0 \end{aligned}$$

ist. Nach (ii) existiert aber eine eindeutige Lösung $w \in \mathbb{E}$ dieser Gleichung. Also ist auch die Abbildung

$$(\partial_t - B, \gamma_0)\colon \mathbb{E} \to \mathcal{F} \times \gamma_0\mathbb{E}$$

eine stetige Bijektion von Banachräumen und damit wie oben ein Isomorphismus von Banachräumen.

(iii)⇒(i). Diese Richtung ist trivial. □

Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen. Im Folgenden sei stets $T \in (0, \infty)$, d.h. wir betrachten nur ein endliches Zeitintervall.

7.7 Satz. *Sei $B \in C([0,T], L(X_1, X_0))$. Dann gilt $B \in \mathrm{MR}_T(X_1, X_0)$ genau dann, wenn $B(t) \in \mathrm{MR}(X_1, X_0)$ für alle $t \in [0,T]$ gilt.*

Ein Beweis findet sich z.B. in [3], Theorem 7.1. Hier werden insbesondere Störungsargumente für Erzeuger holomorpher Halbgruppen verwendet.

In Abschnitt 6 a) haben wir bereits ein Beispiel maximaler Regularität kennengelernt, wobei der Lösungsraum dort $\mathbb{E} = L^2((0,T); V) \cap H^1((0,T), V')$ war.

Wir wollen nun mit der Methode der maximalen Regularität quasilineare Evolutionsgleichungen behandeln. Wir betrachten Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(t, u(t))u(t) &= F(t, u(t)) \quad (t \in (0, T_0)), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{7-3}$$

Dabei sei $T_0 \in (0, \infty)$, $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$. An die Nichtlinearitäten A und F wird folgendes vorausgesetzt:

(A1) Es gilt $A \in C([0,T_0] \times \gamma_0\mathbb{E}, L(X_1, X_0))$, und für alle $R > 0$ existiert eine Lipschitz-Konstante $L(R) > 0$ mit

$$\|A(t,u)v - A(t,\overline{u})v\|_{X_0} \le L(R)\|u - \overline{u}\|_{\gamma_0\mathbb{E}}\|v\|_{X_1}$$

für alle $t \in [0, T_0]$, $v \in X_1$ und alle $u, \overline{u} \in \gamma_0\mathbb{E}$ mit $\|u\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \le R$ und $\|\overline{u}\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \le R$.

(A2) Für die Abbildung $F\colon [0,T_0] \times \gamma_0\mathbb{E} \to X_0$ gilt:

- (i) $F(\cdot, u)$ ist messbar für jedes $u \in \gamma_0\mathbb{E}$,
- (ii) $F(t, \cdot) \in C(\gamma_0\mathbb{E}, X_0)$ für fast jedes $t \in [0, T_0]$,
- (iii) $f(\cdot) := F(\cdot, 0) \in L^p((0,T_0); X_0)$,
- (iv) für jedes $R > 0$ existiert ein $\varphi_R \in L^p((0,T_0))$ mit

$$\|F(t,u) - F(t,\overline{u})\|_{X_0} \le \varphi_R(t)\|u - \overline{u}\|_{\gamma_0\mathbb{E}}$$

für fast alle $t \in [0,T_0]$ und alle $u, \overline{u} \in \gamma_0\mathbb{E}$ mit $\|u\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \le R$, $\|\overline{u}\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \le R$.

Bis auf kanonische Messbarkeits- und Stetigkeitsbedingungen, die die Wohldefiniertheit der Terme in der Gleichung sicherstellen, bedeuten diese Bedingungen im Wesentlichen, dass die Funktionen $F(t, \cdot)$ und $F(t, \cdot)$ auf beschränkten Teilmengen von $\gamma_0\mathbb{E}$ Lipschitz-stetig sind.

7.8 Satz. *Es gelte (A1) und (A2) sowie $A_0 := A(0, u_0) \in \mathrm{MR}(X_1, X_0)$. Dann existiert ein $T \in (0, T_0]$ so, dass (7-3) im Intervall $(0,T)$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathbb{E}_T(X_1, X_0)$ besitzt.*

Beweis. **(i)** Im Zeitintervall $(0,T)$ mit $T \le T_0$ verwenden wir die maximale Regularität von $A_0 := A(0,u_0)$, um Lösungen der linearisierten Gleichung abzuschätzen. Dabei betrachten wir zum einen die Gleichung mit Anfangswert 0,

$$\begin{aligned} \partial_t w(t) - A_0 w(t) &= g(t) \quad (t \in (0,T)), \\ w(0) &= 0. \end{aligned} \tag{7-4}$$

Wir setzen wieder $\mathbb{E} := \mathbb{E}_T(X_1, X_0)$ und $\mathcal{F} := \mathcal{F}_T(X_0)$.

Da $A_0 \in \mathrm{MR}(X_1, X_0)$, existiert zu jedem $g \in \mathcal{F}$ genau eine Lösung $w \in \mathbb{E}$, und es existiert ein von T und w unabhängiges $C_0 > 0$ mit

$$\|w\|_{\mathbb{E}} \le C_0 \|g\|_{\mathcal{F}}$$

(Lemma 7.6). Nach Lemma 7.3 b) existiert eine ebenfalls von $T > 0$ und w unabhängige Konstante $C_1 > 0$ mit

$$\|w\|_{C([0,T],\gamma_0\mathbb{E})} \le C_1 \|w\|_{\mathbb{E}}$$

(beachte, dass $w(0) = 0$ gilt).

Zum anderen definiert man die Referenzlösung $u^* \in \mathbb{E}$ als eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t w(t) - A_0 w(t) &= f(t) \quad (t \in (0,T)), \\ w(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{7-5}$$

Dabei ist $f := F(\cdot, 0) \in \mathcal{F}$ nach Bedingung (A2) (iii).

(ii) Zu $r \in (0,1]$ setze

$$B_r := \{v \in \mathbb{E} : v - u^* \in {}_0\mathbb{E},\ \|v - u^*\|_{\mathbb{E}} \le r\}.$$

Zu $v \in B_r$ sei $\Phi(v) := u$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A_0 u(t) &= F(t, v(t)) - \big(A(0,u_0) - A(t, v(t))\big) v(t) \quad (t \in (0,T)), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{7-6}$$

Wir werden zeigen, dass $\Phi(B_r) \subset B_r$ gilt und Φ in B_r eine Kontraktion ist, falls sowohl T als auch r hinreichend klein sind.

(iii) Wir zeigen $\Phi(B_r) \subset B_r$ für hinreichend kleines T und r. Dazu schreiben wir

$$\|\Phi(v) - u^*\|_{\mathbb{E}} = \|u - u^*\|_{\mathbb{E}} \le C_0 \Big(\|F(\cdot, v) - f(\cdot)\|_{\mathcal{F}} + \|(A(0,u_0) - A(\cdot, v))v\|_{\mathcal{F}} \Big). \tag{7-7}$$

Wir setzen $\gamma_T := \sup_{t\in[0,T]} \|A(0,u_0) - A(t,u_0)\|_{L(X_1,X_0)}$ und erhalten mit Voraussetzung (A1) für festes $R := C_1 + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})}$

$$\|A(0,u_0)v - A(\cdot,v)v\|_{\mathcal{F}} = \|A(0,u_0)v - A(\cdot,v)v\|_{L^p((0,T);X_0)}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \|A(0,u_0) - A(\cdot,v)\|_{L^\infty((0,T);L(X_1,X_0))} \|v\|_{L^p((0,T);X_1)} \\
&\le \Big(\|A(0,u_0) - A(\cdot,u_0)\|_{L^\infty((0,T);L(X_1,X_0))} \\
&\qquad + \|A(\cdot,u_0) - A(\cdot,v(\cdot))\|_{L^\infty((0,T);L(X_1,X_0))} \Big) \|v\|_{\mathbb{E}} \\
&\le \Big(\gamma_T + L(R)\|v-u_0\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})} \Big) \|v\|_{\mathbb{E}} \\
&\le \Big(\gamma_T + L(R) C_1 \|v-u_0\|_{\mathbb{E}} \Big) \|v\|_{\mathbb{E}}.
\end{aligned}
$$

Wir verwenden für $r \le 1$ die Abschätzungen

$$
\|v-u_0\|_{\mathbb{E}} \le \|v-u^*\|_{\mathbb{E}} + \|u^*-u_0\|_{\mathbb{E}} \le r + \|u^*-u_0\|_{\mathbb{E}}
$$

und

$$
\|v\|_{\mathbb{E}} \le \|v-u^*\|_{\mathbb{E}} + \|u^*\|_{\mathbb{E}} \le r + \|u^*\|_{\mathbb{E}}.
$$

Damit erhält man

$$
\|A(0,u_0)v - A(\cdot,v)v\|_{\mathcal{F}} \le \Big(\gamma_T + L(R)C_1(r + \|u^*-u_0\|_{\mathbb{E}}) \Big)(r + \|u^*\|_{\mathbb{E}}).
$$

Ähnlich folgt mit (A2)

$$
\begin{aligned}
\|F(\cdot,v) - f\|_{\mathcal{F}} &\le \|F(\cdot,v) - F(\cdot,u^*)\|_{\mathcal{F}} + \|F(\cdot,u^*) - F(\cdot,0)\|_{\mathcal{F}} \\
&\le \|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} \Big(\|v-u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})} + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})} \Big) \\
&\le \|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} \Big(C_1\|v-u^*\|_{\mathbb{E}} + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})} \Big) \\
&\le \|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} C_1 \big(r + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})} \big).
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in (7-7) erhält man

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(v) - u^*\|_{\mathbb{E}} &\le C_0 \Big[\|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} \big(C_1 r + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})} \big) \\
&\qquad + \big(\gamma_T + L(R)C_1(r + \|u^*-u_0\|_{\mathbb{E}}) \big)(r + \|u^*\|_{\mathbb{E}}) \Big] \\
&\le C_0 (C_1 + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})}) \|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} \\
&\qquad + C_0 (r + \|u^*\|_{\mathbb{E}}) \big(\gamma_T + L(R)C_1 r + L(R)C_1\|u^*-u_0\|_{\mathbb{E}} \big).
\end{aligned}
\tag{7-8}
$$

Für $T \to 0$ gilt

- $\gamma_T \to 0$, da $A(\cdot,u_0)$ stetig ist,
- $\|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} \to 0$, da $\varphi_R \in L^p((0,T_0))$,
- $\|u^* - u_0\|_{\mathbb{E}} \to 0$, da $u^* - u_0 \in \mathbb{E}_{T_0}(X_1,X_0)$,
- $\|u^*\|_{\mathbb{E}} \to 0$, da $u^* \in \mathbb{E}_{T_0}(X_1,X_0)$.

Man wählt zunächst $r > 0$ so klein, dass

$$C_0 L(R) C_1 r < \tfrac{1}{8}$$

gilt. Danach wählt man $T > 0$ so klein, dass die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} \|u^*\|_{\mathbb{E}} &< r \\ C_0(C_1 + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})})\|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} &< \tfrac{r}{2}, \\ C_0\big(\gamma_T + L(R)C_1\|u^* - u_0\|_{\mathbb{E}}\big) &< \tfrac{1}{8}. \end{aligned}$$

Dies in (7-8) eingesetzt, ergibt

$$\|\Phi(v) - u^*\|_{\mathbb{E}} \le \tfrac{r}{2} + (r + r)(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}) = r,$$

d.h. $\Phi(B_r) \subset B_r$.

(iv) Genauso wie in (iii) zeigt man, dass für hinreichend kleines $r > 0$ und $T > 0$ die Abschätzung

$$\|\Phi(v) - \Phi(\overline{v})\|_{\mathbb{E}} \le \tfrac{1}{2}\|v - \overline{v}\|_{\mathbb{E}}$$

für alle $v, \overline{v} \in B_r$ gilt. Damit ist $\Phi\colon B_r \to B_r$ eine Kontraktion, und nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau ein Fixpunkt u von Φ. Nach Definition von Φ sind die Fixpunkte von Φ genau die Lösungen der nichtlinearen Gleichung (7-3), woraus die Behauptung folgt. □

7.9 Satz. *Es gelte (A1) und (A2), und $A(t, v) \in \mathrm{MR}(X_1, X_0)$ für alle $t \in [0, T_0)$ mit $T_0 \in (0, \infty]$. Dann existiert zu jedem $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$ genau eine maximale Lösung von (7-3) mit dem maximalen Existenzintervall $[0, T^+(u_0)) \subset [0, T_0)$. Falls $T^+(u_0) < T_0$, d.h. falls keine globale Lösung existiert, so ist $T^+(u_0)$ charakterisiert durch eine der beiden äquivalenten Bedingungen*

(i) $\lim_{t \nearrow T^+(u_0)} u(t)$ *existiert nicht in* $\gamma_0\mathbb{E}$,

(ii) $\int_0^{T^+(u_0)} \big(\|u(t)\|_{X_1}^p + \|\partial_t u(t)\|_{X_0}^p\big) dt = \infty$.

Beweis. Falls $u \in \mathbb{E}_T(X_1, X_0)$ eine lokale Lösung auf dem Intervall $(0, T)$ ist, so gilt $u \in BUC([0, T]; \gamma_0\mathbb{E})$. Daher kann man Satz E.2 anwenden im Intervall (T, T_0) mit der Anfangsbedingung $u_1 = u(T) \in \gamma_0\mathbb{E}$. Dies zeigt die Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösung.

Falls $\lim_{t \nearrow T^+(u_0)} u(t) \in \gamma_0\mathbb{E}$ existiert, kann man dies als Anfangswert nehmen und wie oben u für ein kleines Zeitintervall $(T^+(u_0), T^+(u_0) + \varepsilon)$ fortsetzen, was der Maximalität von $T^+(u_0)$ widerspricht. Also ist $T^+(u_0)$ durch die Bedingung (i) charakterisiert.

Zu $T < T^+(u_0)$ gilt nach Definition einer Lösung $\int_0^T (\|u(t)\|_{X_1}^p + \|\partial_t u(t)\|_{X_0}^p) dt < \infty$. Falls dies auch noch für $T = T^+(u_0)$ gelten würde, wäre wieder $u \in \mathbb{E}_{T^+(u_0)}(X_1, X_0) \subset BUC([0, T^+(u_0)]; \gamma_0 \mathbb{E})$, d.h. $\lim_{t \nearrow T^+(u_0)} u(t)$ existiert in $\gamma_0\mathbb{E}$ im Widerspruch zu (i). □

Als Anwendung der obigen Sätze erhalten wir ein Resultat über Störungen niedrigerer Ordnung (die Abbildung B im nachfolgenden Lemma).

7.10 Lemma. *Sei $A \in C([0,T], L(X_1, X_0))$ mit $A(t) \in MR(X_1, X_0)$ $(t \in [0,T])$, und sei $B \in L^p((0,T); L(\gamma_0\mathbb{E}, X_0))$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(t)u(t) &= B(t)u(t) + f(t) \quad (t \in [0,T]), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

für jedes $f \in \mathcal{F}$ und $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$ genau eine Lösung $u \in \mathbb{E}$.

Beweis. Hier ist $A(t, u(t)) = A(t)$ und $F(t, u(t)) = B(t)u(t) + f(t)$. Offensichtlich sind die Bedingungen (A1), (A2) erfüllt mit $\varphi_R(t) := \|B(t)\|_{L(\gamma_0\mathbb{E}, X_0)}$. Der Beweis von Satz E.2 zeigt, dass die Länge des Existenzintervalls nur von u_0 und den Konstanten $L(R)$, C_0, C_1 und γ_T abhängt. Da $A \in C([0,T], L(X_1, X_0))$ und $A \mapsto \|(\partial_t + A)^{-1}\|_{L(\mathcal{F}, \mathbb{E})} = C_0(A)$ stetig ist, können alle Konstanten global im Intervall $[0,T]$ gewählt werden, d.h. die Lösung existiert global. □

b) Höhere Regularität

Wir betrachten dieselbe Situation wie im letzten Abschnitt und untersuchen die autonome quasilineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(u(t))u(t) &= F(u(t)) \quad (t \in (0,T)), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{7-9}$$

Dabei sei $T \in (0, \infty)$, $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}(X_1, X_0)$, $A \colon \gamma_0\mathbb{E} \to L(X_1, X_0)$ sowie $F \colon \gamma_0\mathbb{E} \to \mathcal{F}$.

Parabolische Gleichungen sind „glättend“, wobei in vielen Anwendungen auch reell analytische Funktionen auftreten. Dazu zunächst eine Definition.

7.11 Definition. Seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ offen und $T \colon U \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt T reell analytisch, falls für alle $u_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert mit $B(u_0, r) \subset U$ und

$$T(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k T(u_0)}{k!} \underbrace{(u - u_0, \dots, u - u_0)}_{k-\text{mal}} \quad (u \in B(u_0, r)).$$

Dabei ist $D^kT(u_0) \in L(X \times \ldots \times X, F)$ die k-fache Fréchetableitung von T and der Stelle u_0. In diesem Fall schreibt man $T \in C^\omega(U,Y)$.

Eine wesentliche Zutat im Beweis der Glättungseigenschaft ist der Satz über implizite Funktionen, der analog zum endlich-dimensionalen Fall bewiesen werden kann.

7.12 Satz (Satz über implizite Funktionen)**.** *Seien X,Y,Z Banachräume, $U \subset X \times Y$ offen und $T \in C^1(U,Z)$. Sei ferner $(x_0,y_0) \in U$ mit $T(x_0,y_0) = 0$ und $D_yT((x_0,y_0)) \in L_{\text{Isom}}(Y,Z)$, wobei D_yT die Fréchet-Ableitung nach der zweiten Komponente bezeichnet. Dann existieren Umgebungen U_X von x_0 und U_Y von y_0 mit $U_X \times U_Y \subset U$ und eine eindeutige Abbildung $\psi \in C^1(U_X,U_Y)$ so, dass*

$$T(x,\psi(x)) = 0 \quad (x \in U_X)$$

und $\psi(x_0) = y_0$ gilt. Somit ist die Gleichung $T(x,y) = 0$ lokal nach y auflösbar. Dabei hat die Funktion ψ die gleiche Regularität wie T, d.h. gilt $T \in C^k(U,Z)$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, so gilt auch $\psi \in C^k(U_X,U_Y)$.

Damit können wir folgende Glättungseigenschaft bezüglich der Zeit beweisen:

7.13 Satz. *Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty,\omega\}$, und seien $A \in C^k(\gamma_0\mathbb{E}; L(X_1,X_0))$ und $F \in C^k(\gamma_0\mathbb{E}, X_0)$. Sei $u \in \mathbb{E}_T(X_1,X_0)$ eine Lösung von (7-9), und es gelte $A(u(t)) \in \mathrm{MR}(X_1,X_0)$ für alle $t \in [0,T]$. Dann gilt*

$$t \mapsto t^j \partial_t^j u(t) \in W_p^1(J;X_0) \cap L^p(J;X_1)$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \le k$. Insbesondere folgt

$$u \in W_p^{k+1}((\varepsilon,T);X_0) \cap W_p^k((\varepsilon,T);X_1)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ sowie

$$u \in C^k((0,T);\gamma_0\mathbb{E}) \cap C^{k+1-1/p}((0,T);X_0) \cap C^{k-1/p}((0,T);X_1).$$

Hier bezeichnet $C^{k+1-1/p}$ und $C^{k-1/p}$ den entsprechenden Hölderraum. Falls $k=\infty$, so ist $u \in C^\infty((0,T);X_1)$, und falls $k=\omega$, so ist $u \in C^\omega((0,T);X_1)$.

Beweis. Wir fixieren $\varepsilon \in (0,1)$ und setzen $T(\varepsilon) := \frac{T}{1+\varepsilon}$. Zu $\lambda \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ betrachten wir die Funktion $u_\lambda\colon [0,T(\varepsilon)] \to \gamma_0\mathbb{E}$, definiert durch $u_\lambda(t) := u(\lambda t)$ $(t \in [0,T(\varepsilon)])$. Dann gilt $\partial_t u_\lambda(t) = \lambda(\partial_t u)(\lambda t)$ und damit

$$\begin{aligned} \partial_t u_\lambda(t) - \lambda A(u_\lambda(t))u_\lambda(t) = \lambda F(u_\lambda(t)) \quad (t \in (0,T(\varepsilon))), \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{aligned}$$

Man definiert sich die Abbildung

$$H\colon (1-\varepsilon,1+\varepsilon) \times \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0) \to \mathcal{F}_{T(\varepsilon)}(X_0) \times \gamma_0\mathbb{E}(X_1,X_0)$$

durch

$$H(\lambda, w)(t) := \begin{pmatrix} \partial_t w(t) - \lambda A(w(t))w(t) - \lambda F(w(t)) \\ w(0) - u_0 \end{pmatrix} \quad (t \in (0, T(\varepsilon)))$$

für $\lambda \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ und $w \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1, X_0)$. Da A und F von Klasse C^k sind, gilt dies auch für H. Weiter gilt $H(1, u) = 0$ und

$$\begin{aligned} D_\lambda H(\lambda, w) &= \begin{pmatrix} -A(w)w - F(w) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ D_w H(\lambda, w)h &= \begin{pmatrix} \partial_t h - \lambda A(w)h - \lambda A'(w)hw - \lambda F'(w)h \\ h(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $h \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1, X_0)$. Dabei ist $A'(u)$ die Fréchet-Ableitung von A an der Stelle u. Insbesondere erhalten wir für $\lambda = 1$ und $w = u$

$$D_w H(1, u)h = \begin{pmatrix} \partial_t h + A(u)h + A'(u)hu - F'(u)h \\ h(0) \end{pmatrix}.$$

Für $t \in [0, T(\varepsilon)]$ und $v \in \gamma_0\mathbb{E}$ definieren wir $B(t)v := -A'(u(t))vu(t) - F'(u(t))v$. Da $A \in C^1(\gamma_0\mathbb{E}, L(X_1, X_0))$ und $F \in C^1(\gamma_0\mathbb{E}, X_0)$, folgt $B \in L^p((0,T); L(\gamma_0\mathbb{E}, X_0))$. Wir sind daher in der Situation von Lemma E.4 (wobei hier $A(t)$ durch $A(u(t))$ zu ersetzen ist). Man beachte, dass $t \mapsto A(u(t)) \in C([0,T], L(X_1, X_0))$ gilt, da $t \mapsto u(t) \in C([0, T(\varepsilon)]; \gamma_0\mathbb{E})$. Nach Voraussetzung gilt $A(u(t)) \in \mathrm{MR}(X_1, X_0)$ für jedes $t \in [0,T]$, und damit gilt $t \mapsto A(u(t)) \in \mathrm{MR}_T(X_1, X_0)$ nach Satz E.1. Wir wenden Lemma E.4 an und sehen, dass $t \mapsto A(u(t)) + B(t) \in \mathrm{MR}_{T(\varepsilon)}(X_1, X_0)$ gilt. Somit ist

$$D_w H(1, u) \in L_{\mathrm{Isom}}(\mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1, X_0), \mathcal{F}_{T(\varepsilon)}(X_0) \times \gamma_0\mathbb{E}(X_1, X_0)).$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen, Satz 7.12, existiert ein $\delta > 0$ und eine C^k-Abbildung $\psi\colon (1-\delta, 1+\delta) \to \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1, X_0)$ mit $H(\lambda, \psi(\lambda)) = 0$ $(\lambda \in (1-\delta, 1+\delta))$ und $\psi(1) = u$.

Nach Definition von H und wegen der Eindeutigkeit der Lösung gilt $\psi(\lambda) = u_\lambda$, d.h. $\lambda \mapsto u_\lambda \in C^k((1-\delta, 1+\delta), \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1, X_0))$. Wegen $\mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1, X_0) \subset C([0, T(\varepsilon)], \gamma_0\mathbb{E})$ ist $\lambda \mapsto u_\lambda(t) = u(\lambda t) \in C^k((1-\delta, 1+\delta), \gamma_0\mathbb{E})$. Dies heißt aber $u \in C^k((0, T(\varepsilon)), \gamma_0\mathbb{E})$.

Wir verwenden nun $\frac{\partial}{\partial\lambda} u_\lambda(t)|_{\lambda=1} = t\partial_t u(t)$ $(t \in (0, T(\varepsilon))$. Wegen $\psi \in C^k((1-\delta, 1+\delta), \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1, X_0)$ ist $t \mapsto t\partial_t u(t) \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1, X_0)$. Iterativ sieht man $t \mapsto t^k \partial_t^k u(t) \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1, X_0)$ und damit

$$u \in W_p^{k+1}((\delta, T(\varepsilon)); X_0) \cap W_p^k((\delta, T(\varepsilon)); X_1)$$

für jedes $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$. Unter Verwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes $W_p^k((\delta, T(\varepsilon)) \subset C^{k-1/p}([\delta, T(\varepsilon)])$ erhält man, da $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ beliebig sind,

$$u \in C^{k+1-1/p}((0,T); X_0) \cap C^{k-1/p}((0,T); X_1).$$

Im Fall $k = \infty$ erhält man $u \in C^\infty((0,T);X_1)$. Falls $k = \omega$, ist die Funktion ψ reell analytisch. Da die oben genannten Einbettungen als lineare Abbildungen ebenfalls reell analytisch sind, ist auch $u \in C^\omega((0,T),X_1)$. □

7.14 Bemerkung. Diese Beweismethode ist als „Parametertrick" oder auch „Methode von Angenent" bekannt. Man beachte die beiden wesentlichen Zutaten dieses Beweises, der in ähnlicher Form bei vielen nichtlinearen Differentialgleichungen verwendet werden kann: Zum einen der Satz über implizite Funktionen in Banachräumen, zum anderen (um diesen Satz anwenden zu können) die Tatsache, dass $D_w H(1,u)$ ein Isomorphismus ist. Dies ist aber gerade die maximale Regularität dieser Linearisierung.

Als Beispiel betrachten wir die quasilineare autonome Gleichung zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) - \operatorname{tr}\big(a(u(t,x),\nabla u(t,x))\nabla^2 u(t,x)\big) &= f(u(t,x),\nabla u(t,x)) \\ &\qquad ((t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n), \quad \text{(7-10)} \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

Für die Behandlung des nichtlinearen Problems verwenden wir folgendes Resultat aus der linearen Theorie:

7.15 Lemma. *Sei $b \in BUC(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}})$ mit $b(x) \ge cI_n$ für eine Konstante $c > 0$. Definiere den Operator B durch $D(B) := W_p^2(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$(Bu)(x) := -\operatorname{tr}\big(b(x)\nabla^2 u(x)\big) = -\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) \quad (x\in\mathbb{R}^n,\ u\in D(B)).$$

Dann gilt $B \in \mathrm{MR}(W_p^2(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))$.

Wir erhalten folgenden Satz.

7.16 Satz. *Seien $p \in (n+2,\infty)$ und $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty,\omega\}$. Es gelte $a \in C^k(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}})$, $f \in C^k(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$. Für alle $(r,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ sei die Matrix $a(r,p)$ positiv definit. Dann besitzt die Gleichung (7-10) für alle $u_0 \in W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n)$ eine eindeutige maximale Lösung $u \in L^p((0,T^+);W_p^2(\mathbb{R}^n_+)) \cap W_p^1((0,T^+);L^p(\mathbb{R}^n))$ im Intervall $J = (0,T^+)$ mit $T^+ = T^+(u_0) > 0$. Weiter gilt*

$$u \in C^k(J;W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n)) \cap C^{k+1-1/p}(J;L^p(\mathbb{R}^n)) \cap C^{k-1/p}(J;W_p^2(\mathbb{R}^n)).$$

Beweis. Für $X_0 := L^p(\mathbb{R}^n)$ und $X_1 := W_p^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\gamma_0\mathbb{E}(X_0,X_1) = (X_0,X_1)_{1-1/p,p} = W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n)$. Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz gilt

$$\gamma_0\mathbb{E} = W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n) \subset C_0^1(\mathbb{R}^n) := \Big\{u\in C^1(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty}|\partial^\alpha u(x)| = 0\ (|\alpha|\le 1)\Big\}.$$

Wir definieren die Abbildungen $A\colon \gamma_0\mathbb{E} \to L(X_0, X_1)$ und $F\colon \gamma_0\mathbb{E} \to X_0$ durch

$$\begin{aligned}(A(v)w)(x) &:= -\operatorname{tr}\big(a(v(x), \nabla v(x))\nabla^2 w(x)\big),\\ (F(v))(x) &:= f(v(x), \nabla v(x))\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \gamma_0\mathbb{E}$, $w \in W_p^2(\mathbb{R}^n)$.

Sei $v \in \gamma_0\mathbb{E}$. Wegen $v \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge $\{(v(x), \nabla v(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ beschränkt. Da a nach Voraussetzung stetig ist, ist

$$b_v := a(v(\cdot), \nabla v(\cdot)) \in BUC(\mathbb{R}^n)$$

sowie $b_v(x) \geq c_v I_n$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ mit $c_v > 0$. Nach Lemma 7.15 folgt $A(v) \in \mathrm{MR}(X_1, X_0)$ für alle $v \in \gamma_0\mathbb{E}$.

Um die Voraussetzungen (A1) und (A2) nachzuweisen, verwenden wir, dass a als C^1-Funktion auf beschränkten Mengen Lipschitz ist. Wir erhalten für $v, \overline{v} \in \gamma_0\mathbb{E}$ und $w \in X_1$ mit $\|v\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \leq R$, $\|\overline{v}\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \leq R$

$$\begin{aligned}\|A(v)w - A(\overline{v})w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \big\|\operatorname{tr}\big(a(v, \nabla v)w - a(\overline{v}, \nabla\overline{v})w\big)\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq C\big\|a(v, \nabla v) - a(\overline{v}, \nabla\overline{v})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n})}\|\nabla^2 w\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n})}\\ &\leq CL(R)\|v - \overline{v}\|_{C^1(\mathbb{R}^n)}\|w\|_{X_1}\\ &\leq CL(R)\|v - \overline{v}\|_{\gamma_0\mathbb{E}}\|w\|_{X_1}.\end{aligned}$$

Dies zeigt Voraussetzung (A1), insbesondere auch die Stetigkeit von $A\colon \gamma_0\mathbb{E} \to L(X_0, X_1)$. Ähnlich zeigt man Voraussetzung (A2), wobei die Stetigkeit von $F\colon \gamma_0\mathbb{E} \to X_0$ verwendet wird, dass F eine Variante eines sogenannten Nemyckii–Operators ist, d.h.

$$F\colon W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n),\ F(v) := f(v(\cdot), \nabla v(\cdot)) \quad (v \in W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n)).$$

Hier wird auch $f(0) = 0$ verwendet. Die Theorie von Nemyckii-Operatoren zeigt auch $A \in C^k(\gamma_0\mathbb{E}, L(X_1, X_0))$ und $F \in C^k(\gamma_0\mathbb{E}, X_0)$. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 7.13 erfüllt, und wir erhalten die höhere Regularität der Lösung u. □

A. Grundlagen der Operatortheorie

In diesem Abschnitt fassen wir einige Begriffe und wichtige Aussagen aus der Operatortheorie zusammen.

Seien X, Y Banachräume. Im Folgenden verwenden wir die Standardbezeichnung $L(X,Y)$ für die Menge der stetigen linearen Operatoren von X nach Y. Versehen mit der Operatornorm, wird $L(X,Y)$ selbst wieder zu einem Banachraum. Wir setzen $L(X) := L(X,X)$ und $X' := L(X,\mathbb{C})$ (topologischer Dualraum von X, Raum der stetigen linearen Funktionale auf X).

A.1 Definition (Konvergenz und Stetigkeit von Operatoren)**.** Seien X, Y Banachräume, $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$.

a) Die Folge T_k konvergiert gegen T gleichmäßig oder in der Operatornorm, falls $\|T_k - T\|_{L(X,Y)} \to 0$ $(k\to\infty)$.

Die Folge T_k konvergiert gegen T in der starken Operatortopologie oder stark, falls für alle $x\in X$ gilt: $\|T_kx - Tx\|_Y \to 0$. Man schreibt $T_k \xrightarrow{s} T_k$.

Die Folge T_k konvergiert gegen T in der schwachen Operatortopologie oder schwach, falls für alle $x \in X$ und für alle $f\in Y'$ gilt: $f(T_kx - Tx)\to 0$. Man schreibt $T_k \xrightarrow{w} T_k$.

b) Eine operatorwertige Abbildung $T\colon [0,\infty)\to L(X,Y)$ heißt gleichmäßig stetig, falls $T\in C([0,\infty), L(X,Y))$, wobei $L(X,Y)$ mit der Operatornorm versehen wird. Die Abbildung heißt stark stetig, falls für alle $x\in X$ gilt: $t\mapsto T(t)x \in C([0,\infty),Y)$. Sie heißt schwach stetig, falls für alle $x\in X$ und alle $f\in Y'$ gilt: $t\mapsto f(T(t)x)\in C([0,\infty))$.

A.2 Bemerkung. a) Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt starke Konvergenz und aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz. Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht. Analoge Aussagen gelten für die Stetigkeit.

b) Seien X,Y Banachräume, $D\subset X$ dicht, und seien $A,B\in L(X,Y)$ mit $Ax = Bx$ für alle $x\in D$. Dann gilt $A = B$ als Gleichheit in $L(X,Y)$.

c) Seien X,Y Banachräume, $D\subset X$ dichter Untervektorraum und $B\colon D\to Y$ eine lineare und beschränkte Abbildung (d.h. es existiert ein $C>0$ mit $\|Bx\|_Y \le C\|x\|_X$ $(x\in D)$. Dann existiert genau eine Fortsetzung $\widetilde{B}\in L(X,Y)$ von B. Es gilt $\|\widetilde{B}\|_{L(X,Y)}\le C$.

A.3 Lemma. *Seien X,Y Banachräume und $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset L(X,Y)$ beschränkt (bzgl. Operatornorm). Es gebe eine dichte Teilmenge $D\subset X$ so, dass für alle $x\in D$ die Folge $(T_kx)_{k\in\mathbb{N}}\subset Y$ eine Cauchyfolge ist. Dann existiert genau ein $T\in L(X,Y)$*

mit $T_k \xrightarrow{s} T$. *Es gilt* $\|T\|_{L(X,Y)} \le \liminf_{k\to\infty} \|T_k\|_{L(X,Y)}$.

Beweis. Übung. □

Für die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen ist die Klasse der stetigen Operatoren auf einem Banachraum X zu klein. Eine für viele Zwecke hinreichend große Klasse ist die der abgeschlossenen Operatoren.

A.4 Definition. Seien X, Y Banachräume. Ein linearer Operator A von X nach Y ist eine lineare Abbildung $A\colon D(A) \to Y$, dessen Definitionsbereich $D(A) \subset X$ ein Untervektorraum von X ist. Man schreibt $A\colon X \supset D(A) \to Y$ oder auch nur $A\colon X \to Y$. Ein linearer Operator heißt dicht definiert, falls sein Definitionsbereich eine dichte Teilmenge von X ist. Wir setzen $\ker A := \{x \in D(A) : Ax = 0\}$.

Ein linearer Operator $A\colon X \supset D(A) \to Y$ heißt abgeschlossen, falls der Graph $G(T) = \big\{(x, Tx) : x \in D(T)\big\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ ist. Dies ist gleichbedeutend zu: Gilt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \to x$ in X und $Ax_k \to y$ in Y, dann folgt $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

A.5 Satz (Wichtige Sätze aus der Operatortheorie)**.**

a) **(Satz vom abgeschlossenen Graphen)** *Seien* X, Y *Banachräume,* $T : X = D(A) \to Y$ *ein abgeschlossener linearer Operator. Dann ist* T *stetig.*

b) **(Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit)** *Sei* $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$. *Es existiere für jedes* $x \in X$ *ein* $C_x > 0$, *so dass* $\|Tx\|_Y \le C_x$ *für all* $T \in \mathcal{T}$. *Dann gilt bereits* $\|T\|_{L(X,Y)} \le C$ *für alle* $T \in \mathcal{T}$ *mit einer universellen Konstante* $C > 0$.

c) **(Satz von der stetigen Inversen)** *Seien* X, Y *Banachräume,* $T : X \supset D(A) \to Y$ *linear, abgeschlossen und bijektiv. Dann ist* $T^{-1} : Y \to X$ *stetig.*

d) **(Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach)** *Sei* X *ein Banachraum und* $x \in X \setminus \{0\}$. *Dann existiert ein* $f \in X'$ *mit* $\|f\|_{X'} = 1$ *und* $f(x) = \|x\|_X$.

A.6 Definition. Sei X Banachraum und $A : X \to X$ linearer Operator, dann heißt

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ bijektiv und } (A-\lambda)^{-1} \in L(X)\}$$

die Resolventenmenge von A und

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

das Spektrum von A. Für $\lambda \in \rho(A)$ heißt $R_\lambda(A) := (A-\lambda)^{-1}$ die Resolvente von A. Die Menge $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A-\lambda) \ne \{0\}\}$ heißt das Punktspektrum von A oder die Menge aller Eigenwerte von A, die Menge $\sigma_c(A) := \{\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A) :$

$\overline{R(A-\lambda)} = X\}$ heißt das kontinuierliche Spektrum von A und $\sigma_r(A) := \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A))$ heißt das Restspektrum von A.

A.7 Bemerkung. Falls A abgeschlossen ist, folgt die Bedingung $R_\lambda(A) \in L(X)$ bereits aus der Bijektivität von $\lambda - A$. Es gilt die Resolventengleichung

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

für $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

A.8 Definition. Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $A\colon H \supset D(A) \to H$ ein dicht definierter linearer Operator. Dann wird der adjungierte Operator A^* definiert durch $D(A^*) := \{y \in H : \exists\, y^* \in H\, \forall\, x \in D(A) : \langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle\}$ und $A^*y := y^*$ $(y \in D(A^*))$. Man beachte, dass A^* in diesem Fall wohldefiniert ist, da $D(A)$ dicht in H ist und daher y^* eindeutig bestimmt ist.

Ein dicht definierter Operator A heißt symmetrisch, falls $A \subset A^*$ gilt (d.h. falls $D(A) \subset D(A^*)$ und $A^*|_{D(A)} = A$ gilt), und selbstadjungiert, falls $A = A^*$ gilt (inklusive Gleichheit der Definitionsbereiche).

A.9 Lemma. *Sei H ein Hilbertraum und $A\colon H \supset D(A) \to H$ ein symmetrischer Operator. Falls ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ existiert mit $R(A - \lambda) = R(A - \overline{\lambda}) = H$, so ist A selbstadjungiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $A \subset A^*$, d.h. es ist nur noch $D(A^*) \subset D(A)$ zu zeigen. Sei $x \in D(A^*)$. Da $A - \lambda$ surjektiv ist, existiert ein $y \in D(A)$ mit $(A - \lambda)y = (A^* - \lambda)x$. Wegen $A \subset A^*$ folgt $x - y \in \ker(A^* - \lambda)$. Nach Definition von A^* bedeutet dies, dass $\langle (A - \overline{\lambda})z, x - y\rangle = 0$ für alle $x \in D(A)$ gilt. Also ist $x - y \in (R(A - \overline{\lambda}))^\perp = H^\perp = \{0\}$ und damit $x = y \in D(A)$. $\square$

Im Folgenden sei H wieder ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\|\cdot\|$ und $A\colon H \supset D(A) \to H$ ein selbstadjungierter Operator. Mit $\mathscr{B}(\sigma(A))$ wird die Borel-σ-Algebra auf $\sigma(A)$ bezeichnet.

A.10 Satz (Spektralsatz)**.** *a) Zu A existiert genau ein PV-Maß (Spektralmaß) $E\colon \mathscr{B}(\sigma(A)) \to L(H)$ mit*

$$Ax = \int_{\sigma(A)} \lambda dE(\lambda)x \quad (x \in D(A)).$$

Es gilt

$$D(A) = \Big\{x \in X : \int_{\sigma(A)} |\lambda|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 < \infty\Big\}.$$

b) Zu jeder messbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *wird durch*

$$D(f(A)) := \Big\{x \in X : \int_{\sigma(A)} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 < \infty\Big\},$$
$$f(A)x := \int_{\sigma(A)} f(\lambda) dE(\lambda)x \quad (x \in D(f(A)))$$

ein normaler Operator definiert.

c) Die Abbildung $f \mapsto f(A)$ *(ein sogenannter Funktionalkalkül) besitzt folgende Eigenschaften:*

(i) *Für Polynome* f *stimmt* $f(A)$ *mit der üblichen Definition überein.*

(ii) *Falls* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *messbar und beschränkt ist, so ist* $f(A) \in L(H)$ *und* $\|f(A)\|_{L(H)} = \|f\|_\infty$.

(iii) *Sei* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *messbar und beschränkt und* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *messbar. Dann gilt* $(g(A))^* = \overline{g}(A)$, $f(A) + g(A) = (f+g)(A)$ *und* $f(A)g(A) = (fg)(A)$.

(iv) *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge messbarer Funktionen mit* $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ *und* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$. *Dann gilt* $f_n(T)x \to f(T)x$ $(x \in H)$.

(v) *Sei* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eine messbare Funktion mit* $f|_{\sigma(A)} = 0$. *Dann ist* $f(A) = 0$.

B. Das Bochner-Integral

Im Folgenden sei X ein komplexer Banachraum, versehen mit der Borel-σ-Algebra, und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein (o.E. vollständiger) Maßraum.

B.1 Definition. Eine Stufenfunktion (Treppenfunktion) ist eine Funktion $s\colon \Omega \to X$ der Form $s = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} a_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}$, und $a_i \in X \quad (i = 1, \dots, n)$. Falls $\mu(A_i) < \infty$ $(i = 1, \dots, n)$ gilt, heißt s integrierbare Stufenfunktion. In diesem Fall ist das Bochner-Integral von s definiert durch

$$\int_\Omega s d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) a_i \in X.$$

Ein metrischer Raum heißt separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Man kann folgende Äquivalenzen zeigen:

B.2 Satz. *Für eine Abbildung $f\colon \Omega \to X$ sind äquivalent:*

(i) *Es existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $f_n\colon \Omega \to X$ mit $f_n(z) \to f(z)$ (in X) für alle $z \in \Omega$.*

(ii) *f ist messbar und $f(\Omega)$ ist separabel.*

B.3 Satz. *Sei $f\colon \Omega \to X$ messbar und $f(\Omega)$ separabel. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren Stufenfunktionen $f_n\colon \Omega \to X$ mit $f_n(z) \to f(z) \quad (z \in \Omega)$ und*

$$\int \|f_n - f\| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(ii) $\int \|f\| d\mu < \infty$.

Bei stetigen Funktionen ist die Bedingung der Separabilität automatisch erfüllt, wie das folgende Lemma zeigt.

B.4 Lemma. *Sei Ω ein separabler topologischer Raum und sei $f\colon \Omega \to X$ stetig. Dann ist $f(\Omega)$ separabel.*

Beweis. Sei $\Omega_0 \subset \Omega$ abzählbar und dicht. Dann ist $X_0 := f(\Omega_0)$ abzählbar, und es gilt

$$A := f^{-1}(\overline{X_0}) \supset f^{-1}(X_0) \supset \Omega_0.$$

Da f stetig ist, ist A abgeschlossen, und es folgt $\Omega = \overline{\Omega_0} \subset \overline{A} = A$, also

$$f(\Omega) = f(A) = f(f^{-1}(\overline{X_0})) \subset \overline{X_0}$$

und damit $f(\Omega) = \overline{X_0}$. Also ist $f(\Omega)$ separabel. $\square$

B.5 Definition. a) Eine Funktion $f\colon \Omega \to X$ heißt stark messbar (oder μ-messbar), falls eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert so, dass $f|_{\Omega\setminus N}$ messbar ist und $f(\Omega \setminus N)$ separabel ist.

b) Eine stark messbare Funktion $f\colon \Omega \to X$ heißt (μ-)integrierbar, falls $\int \|f\| d\mu < \infty$. In diesem Fall wähle eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren Treppenfunktionen mit $f_n \to f$ μ-fast überall und $\int \|f_n - f\| d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$ und definiert das Bochner-Integral von f über Ω bzgl. μ durch

$$\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Wie üblich sei

$$\int_A f d\mu := \int (\chi_A \cdot f) d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Man setzt $\mathscr{L}^1(\mu, X) := \{f\colon \Omega \to X \mid f \text{ ist integrierbar}\}$ und $\mathscr{L}^1(\mu) := \mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{K})$.

Die vektorwertigen L^p-Räume $L^p(\mu; X)$ werden wie üblich definiert als Quotientenraum $L^p(\mu; X) := \mathscr{L}^p(\mu; X)/N$. Hierbei ist $\mathscr{L}^p(\mu; X)$ die Menge aller stark messbaren f, für welche $\|f\|_{L^p(\mu;X)} := (\int \|f\|^p d\mu)^{1/p}$ endlich ist, und N die Menge aller $f \in \mathscr{L}^1(\mu; X)$ mit $\|f\|_{L^1(\mu;X)} = 0$. Für $p = \infty$ hat man die üblichen Modifikationen.

Falls $\Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und μ das Lebesgue-Maß ist, so schreibt man üblicherweise $L^1(\Omega; X) := L^1(\mu; X)$.

Für Bochner-Integrale gelten die aus der skalaren Lebesgue-Theorie bekannten Konvergenzsätze.

B.6 Satz. a) **(Satz von der majorisierten Konvergenz).** *Seien $f_n\colon \Omega \to X$ stark messbar mit $f_n \to f$ μ-fast überall. Sei $g\colon \Omega \to [0, \infty]$ messbar mit $\int g d\mu < \infty$ und $\|f_n(z)\| \le g(z)$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\|f(z)\| \le g(z)$ μ-fast überall.*

Dann ist $f_n \in L^1(\mu; X)$, $f \in L^1(\mu; X)$ und

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \text{ in } X \quad (n \to \infty).$$

b) Sei $f_n\colon \Omega \to X$ stark messbar mit $\sum_{n=1}^\infty \int \|f_n\| d\mu < \infty$. Dann ist $f_n \in L^1(\mu; X)$ und $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ konvergiert in X für μ-fast alle $z \in \Omega$.

Die Funktion

$$z \mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty f_n(z), & \text{falls } \sum_n f_n(z) \text{ konvergiert,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \int f_n d\mu = \int \sum_{n=1}^\infty f_n d\mu.$$

c) Sei $f \in L^1(\mu; X)$ *und* $A = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *(d.h. disjunkte Vereinigung) mit* $A_n \in \mathcal{A}$*. Dann ist*

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

d) Für $f \in L^1(\mu; X)$ *gilt* $\| \int f d\mu \|_X \leq \int \|f\|_X d\mu$.

C. Elemente der Sobolevraumtheorie

C.1 Worum geht's? In diesem Anhang sollen einige Ergebnisse aus der Theorie der Sobolevräume zitiert werden. Dabei wird nicht in jedem Fall Wert darauf gelegt, die Glattheitsbedingungen an das Gebiet minimal zu wählen.

Im Folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zu $m \in \mathbb{N}$ ist $C^m(\overline{G})$ definiert als die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon G \to \mathbb{C}$, welche eine Fortsetzung $\widetilde{f} \in C^m(U)$ mit einer offenen Teilmenge $U \supset \overline{G}$ besitzen. Die Konstanten C, C_1, C_2 in den folgenden Aussagen sind wieder generische Konstanten.

Zunächst zitieren wir noch eine Variante der Hölderschen Ungleichung.

C.2 Satz (Hölder-Ungleichung)**.** *Seien $1 \le p, q, r \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Dann ist für $f \in L^p(G)$ und $g \in L^q(G)$ das Produkt $fg \in L^r(G)$ und*

$$\|fg\|_{L^r(G)} \le \|f\|_{L^p(G)} \|g\|_{L^q(G)}.$$

C.3 Definition. Sei $1 \le p \le \infty$ und $m \in N$. Dann ist der Sobolevraum $W_p^m(G)$ definiert als die Menge aller Distributionen $u \in \mathscr{D}'(G)$ mit $D^\alpha u \in L^p(G)$ $(|\alpha| \le m)$. Die Norm auf $W_p^m(G)$ ist gegeben durch

$$\|u\|_{m,p,G} := \|u\|_{W_p^m(G)} := \Big(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(G)}^p \Big)^{1/p}.$$

Man definiert auch noch die Seminorm

$$|u|_{m,p,G} := |u|_{W_p^m(G)} := \Big(\sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(G)}^p \Big)^{1/p}.$$

Im Fall $p = \infty$ modifiziert man wie üblich. Man beachte, dass $\|\cdot\|_{0,p,G} = \|\cdot\|_{L^p(G)}$.

Wir definieren $W_{p,0}^m(G)$ als den Abschluss von $C_0^\infty(G)$ in $W_p^m(G)$.

C.4 Satz. *a) Der Sobolevraum $W_p^m(G)$ ist ein Banachraum.*

b) Die Menge $\{u \in C^m(\overline{G}) : \|u\|_{m,p,G} < \infty\}$ liegt dicht in $W_p^m(G)$.

c) Falls ∂G die Segmentbedingung erfüllt, so ist die Menge $\{u|_G : u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\}$ dicht in $W_p^m(G)$.

Im folgenden Satz bezeichne $BUC^j(G)$ die Menge aller j-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf G, deren Ableitungen bis zur Ordnung j beschränkt und gleichmäßig stetig sind. Mit $C^{j,\gamma}(G)$ für $j \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma \in (0,1)$ wird der Raum der j-fach stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet, deren j-fache Ableitungen Hölderstetig mit Koeffizient γ sind.

C.5 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz). *a) Falls G der Kegelbedingung genügt, so gilt für $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$ mit $mp > n$ und $j \in \mathbb{N}_0$ die Einbettung*

$$W_p^{m+j}(G) \hookrightarrow BUC^j(G),$$

d.h. jedes $u \in W_p^{m+j}(G)$ ist nach Änderung auf einer Nullmenge eine Funktion in $BUC^j(G)$, und die Abbildung $u \mapsto u$, $W_p^{m+j}(G) \hookrightarrow BUC^j(G)$ ist stetig.

b) Falls G die starke lokale Lipschitzbedingung erfüllt (z.B. falls G ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist), so gilt sogar $W_p^{j+m}(G) \hookrightarrow C^{j,\gamma}(G)$ für alle $\lambda \in (0, 1)$ mit $\lambda \le m - \frac{n}{p}$.

Beim folgenden Satz beachte man, dass ein Operator $T \in L(X, Y)$ kompakt heißt, falls für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, für welche $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ konvergiert.

C.6 Satz (Satz von Rellich-Kondrachov). *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und seien $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$ mit $mp > n$ und $j \in \mathbb{N}_0$.*

a) Falls G die Kegelbedingung erfüllt, dann sind die Einbettungen

$$\begin{aligned} &W_p^{m+j}(G) \hookrightarrow BUC^j(G), \\ &W_p^{m+j}(G) \hookrightarrow W_q^j(G) \end{aligned}$$

kompakt.

b) Falls G ein Lipschitz-Gebiet ist, so ist die Einbettung

$$W_p^{j+m}(G) \hookrightarrow C^{j,\gamma}(G)$$

für alle $\lambda \in (0, 1)$ mit $\lambda \le m - \frac{n}{p}$ kompakt.

c) Ohne Zusatzbedingung an G (außer der Beschränktheit) sind die Einbettungen in a) und b) kompakt, wenn man $W_p^{m+j}(G)$ durch $W_{p,0}^{m+j}(G)$ ersetzt.

C.7 Satz (Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung). *Sei G ein Lipschitz-Gebiet, und seien $m \in \mathbb{N}$ und $p, p_1 \in (1, \infty)$ gegeben mit*

$$0 < \tau := \frac{n}{m}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\Big) < 1.$$

Dann gilt $W_p^m(G) \hookrightarrow L_{p_1}(G)$ und

$$\|u\|_{0,p_1,G} \le C\|u\|_{m,p,G}^{\tau} \|u\|_{0,p,G}^{1-\tau} \quad (u \in W_p^m(G)).$$

C.8 Satz (Interpolations-Ungleichung)**.** *Sei $1 \leq p < \infty$, sei G ein Gebiet, welches die Kegelbedingung erfüllt, und seien $m, k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < m$. Dann gilt mit $\tau := \frac{k}{m}$ die Abschätzung*

$$|u|_{k,p,G} \leq C\|u\|_{m,p,G}^{\tau}\|u\|_{0,p,G}^{1-\tau} \quad (u \in W_p^m(G)).$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $C(\varepsilon) > 0$ mit

$$\begin{aligned} |u|_{k,p,G} &\leq \varepsilon|u|_{m,p,G} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,p,G}, \\ \|u\|_{k,p,G} &\leq \varepsilon\|u\|_{m,p,G} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,p,G} \end{aligned}$$

Beweis. Siehe z.B. [1], Theorem 5.2. □

C.9 Satz (Dritte Poincaré-Ungleichung)**.** *Für $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ gilt $(x \mapsto \frac{u(x)}{|x|}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und*

$$\Big\|(x \mapsto \frac{u(x)}{|x|})\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Beweis. Siehe z.B. [7], Lemma 3.16. □

D. Anmerkungen zur schwachen Konvergenz

D.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden einige Aussagen über schwache Konvergenz in Banachräumen wiederholt und zusammengefasst.

Im Folgenden sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Für $x \in X$ und $\varphi \in X'$ schreibt man $\langle \varphi, x\rangle_{X'\times X} := \varphi(x)$.

D.2 Definition. a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt schwach konvergent gegen $x \in X$, falls $\langle \varphi, x_n\rangle_{X'\times X} \to \langle \varphi, x\rangle_{X'\times X}$ $(\varphi \in X')$ gilt. Man schreibt $x_n \rightharpoonup x$.

b) Eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ heißt schwach-*-konvergent gegen $\varphi \in X'$, falls für alle $x \in X$ gilt: $\langle \varphi_n, x\rangle_{X'\times X} \to \langle \varphi, x\rangle_{X'\times X}$. Man schreibt $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$.

D.3 Bemerkung. Aus Normkonvergenz folgt schwache Konvergenz in X, aus schwacher Konvergenz folgt schwach-*-Konvergenz in X'. In endlich-dimensionalen Räumen stimmen die Normtopologie und die schwache Topologie überein, und eine Folge konvergiert genau dann in der Norm, wenn sie schwach konvergiert.

D.4 Lemma. *a) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt.*

b) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X und $x_n \rightharpoonup y$ in X, so gilt $x = y$.

c) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X, so gilt $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

d) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X und $\varphi_n \to \varphi$ in X', so gilt $\langle \varphi_n, x_n\rangle_{X'\times X} \to \langle \varphi, x\rangle_{X'\times X}$.

e) Falls $x_n \to x$ in X und $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ in X', so gilt $\langle \varphi_n, x_n\rangle_{X'\times X} \to \langle \varphi, x\rangle_{X'\times X}$.

Beweis. Siehe z.B. [9], Abschnitt 15.2. □

D.5 Satz. *Sei X reflexiv. Dann ist die Menge $\overline{B(0,1)} := \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ schwach folgenkompakt. Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine beschränkte Folge ist , dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in X$ mit $x_{n_k} \rightharpoonup x$ $(k \to \infty)$.*

Beweis. Siehe [9], Satz 15.26. □

D.6 Lemma. *Sei X reflexiv und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt. Falls alle schwach konvergenten Teilfolgen von $(x_n)_n$ schwach gegen denselben Grenzwert x konvergieren, so konvergiert die gesamte Folge $(x_n)_n$ schwach gegen x.*

Beweis. Falls x_n nicht schwach gegen x konvergiert, dann existiert ein $\varphi \in X'$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|\langle \varphi, x_{n_k} - x\rangle_{X'\times X}| \geq \varepsilon$ $(k \in \mathbb{N})$. Nach Satz D.5 besitzt aber $(x_{n_k})_k$ wieder eine schwach konvergente Teilfolge, welche nach Voraussetzung schwach gegen x konvergiert, im Widerspruch zur obigen Ungleichung. □

D.7 Lemma. *Seien X und Y Banachräume und $F \in L(X,Y)$. Dann ist F auch schwach stetig, d.h. aus $x_n \rightharpoonup x$ in X folgt auch $Fx_n \rightharpoonup Fx$ in Y.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der Stetigkeit des adjungierten Operators $F' \in L(X', Y')$, da damit für alle $\varphi \in Y'$ wegen $F'\varphi \in X'$ gilt:

$$\langle \varphi, Fx_n - Fx\rangle_{Y'\times Y} = \langle \varphi \circ F, x_n - x\rangle_{X'\times X} = \langle F'f, x_n - x\rangle_{X'\times X} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

E. Ergänzungen zum holomorphen Funktionalkalkül

Im Folgenden sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum.

E.1 Definition (Riesz-Projektion). Sei $A \in L(X)$ und $\sigma \subset \sigma(A)$ eine isolierte Teilmenge von $\sigma(A)$, d.h. eine in der Relativtopologie von $\sigma(A)$ offene und abgeschlossene Teilmenge. Sei γ eine geschlossene Kurve mit Werten in $\rho(A)$, welche σ umschließt. Dann heißt

$$P_\sigma := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

die zu σ gehörige Riesz-Projektion von A.

E.2 Lemma. *Der Operator P_σ ist eine Projektion, d.h. es gilt $P_\sigma = P_\sigma^2$.*

Beweis. Seien γ_1, γ_2 zwei geschlossene Kurven, welche σ umschließen und σ von $\tau := \sigma(A) \setminus \sigma$ trennen. Dabei sei der Wertebereich $\mathcal{R}(\gamma_1)$ im Inneren von γ_2. Dann folgt

$$\begin{aligned} P_\sigma^2 &= \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda\Big)\Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} (\lambda - A)^{-1} d\lambda\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} (\lambda - A)^{-1} (\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda \end{aligned}$$

Mit der Resolventengleichung (Bemerkung A.7) können wir den letzten Ausdruck in der Form $Q - R$ schreiben, wobei

$$\begin{aligned} Q &:= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{1}{\mu - \lambda} (\lambda - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - A)^{-1} \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{\mu - \lambda} \operatorname{id}_X d\mu\Big) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda = P_\sigma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R &:= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{1}{\mu - \lambda} (\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} (\mu - A)^{-1} \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{\mu - \lambda} \operatorname{id}_X d\lambda\Big) d\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Beachte hier, dass $\mathcal{R}(\gamma_1)$ im Inneren von γ_2 liegt, so dass $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z) = 0$ für $z \in \mathcal{R}(\gamma_2)$ und $\operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1$ für $z \in \mathcal{R}(\gamma_1)$ gilt. □

E.3 Lemma. *a) Sei σ ein isolierter Teil von $\sigma(A)$. Dann sind Wertebereich $R(P_\sigma)$ und Kern $N(P_\sigma)$ beide abgeschlossen, und es gilt die Zerlegung*

$$X = R(P_\sigma) \oplus N(P_\sigma).$$

Beide Räume sind invariant unter A, und es gilt

$$\sigma(A|_{R(P_\sigma)}) = \sigma,\ \sigma(A|_{N(P_\sigma)}) = \sigma(A) \setminus \sigma.$$

b) Es gilt $P_{\sigma(A)} = \mathrm{id}_X$.

Beweis. a) Die Abgeschlossenheit von $N(P_\sigma)$ ist klar, da P_σ stetig ist. Die Abgeschlossenheit von $R(P_\sigma)$ folgt aus $R(P_\sigma) = N(1-P_\sigma)$. Aus $A(\lambda-A)^{-1} = (\lambda-A)^{-1}A$ für $\lambda \in \rho(A)$ folgt durch Integration $AP_\sigma = P_\sigma A$ und damit $AP_\sigma = P_\sigma AP_\sigma$. Somit ist $AR(P_\sigma) \subset R(P_\sigma)$, d.h. $R(P_\sigma)$ ist A-invariant. Dieselbe Überlegung mit $1 - P_\sigma$ zeigt, dass auch $N(P_\sigma)$ invariant unter A ist. Wegen $x = P_\sigma x + (1 - P_\sigma)x$ $(x \in X)$ und $P_\sigma(1 - P_\sigma) = 0$ erhält man die direkte Zerlegung in a).

Sei γ eine geschlossene Kurve, welche σ von $\tau := \sigma(A) \setminus \sigma$ trennt. Für $\mu \notin R(\gamma)$ definiere

$$S(\mu) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\mu - \lambda}\, (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Da P_σ mit A und somit mit $(\lambda - A)^{-1}$ vertauscht, gilt auch $S(\mu)P_\sigma = P_\sigma S(\mu)$, und die Räume $R(P_\sigma)$ und $N(P_\sigma)$ sind $S(\mu)$-invariant. Wir erhalten

$$\begin{aligned} S(\mu)(\mu - A) &= (\mu - A)S(\mu) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\mu - \lambda}\, (\mu - A)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\mu - \lambda}\, \mathrm{id}_X\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \begin{cases} -1 + P_\sigma, & \text{falls } \mu \text{ im Inneren von } \mathcal{R}(\gamma) \text{ liegt,} \\ P_\sigma, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Sei nun $\mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma$ und o.E. sei μ außerhalb von $\mathcal{R}(\gamma)$. Dann folgt $(\mu - A)S(\mu)x = S(\mu)(\mu - A)x = x$ für $x \in R(P_\sigma)$, d.h. $(\mu - A)|_{R(P_\sigma)}$ ist invertierbar. Damit erhalten wir $\sigma(A|_{R(P_\sigma)}) \subset \sigma$. Analog folgt $\sigma(A|_{N(P_\sigma)}) \subset \tau$. Falls andererseits $\mu \in \rho(A|_{R(P_\sigma)}) \cap \rho(A|_{N(P_\sigma)})$, so ist $\mu - A$ auf jedem der beiden Teilräume $N(P_\sigma)$ und $R(P_\sigma)$ eine Bijektion und somit auf ganz X bijektiv, d.h. $\mu \in \rho(A)$. Insgesamt erhalten wir

$$\sigma(A) \subset \sigma(A|_{N(P_\sigma)}) \cup \sigma(A|_{R(P_\sigma)}) \subset \sigma \cup \tau = \sigma(A).$$

Also muss überall Gleichheit stehen.

b) Wir wenden Teil a) auf $\sigma := \sigma(A)$ an und erhalten $\sigma(A|_{N(P_\sigma)}) = \sigma(A) \setminus \sigma = \emptyset$. Dies ist aber nur möglich, falls $N(P_\sigma) = \{0\}$, d.h. für $P_\sigma = \mathrm{id}_X$. □

E.4 Lemma. *Sei $A \in L(X)$ und γ eine geschlossene Kurve, für welche $\sigma(A)$ im Inneren von γ liegt. Dann gilt für jedes komplexe Polynom p die Gleichheit*

$$p(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma p(\lambda)(\lambda - A)^{-1}d\lambda.$$

Beweis. Es genügt, die Gleichheit für $p(z) = z^n$ nachzuweisen. Dazu verwende die Identität

$$A^n(\lambda - A)^{-1} = \lambda^n(\lambda - A)^{-1} - \sum_{j=0}^{n-1}\lambda^{n-1-j}A^j.$$

Sei γ eine geschlossene Kurve, welche $\sigma(A)$ einschließt. Dann ist das Integral über die obige Summe gleich Null, da der Integrand holomorph von λ abhängt. Unter Verwendung von Lemma E.3 b) erhält man daher

$$\begin{aligned} A^n &= A^n\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\lambda - A)^{-1}d\lambda\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma A^n(\lambda - A)^{-1}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda^n(\lambda - A)^{-1}d\lambda, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Literatur

[1] Adams, R. A., Fournier, J.: *Sobolev spaces.* 2nd edition, Academic Press, Amsterdam etc., 2003.

[2] Amann, H.: *Linear and quasilinear parabolic problems I.* Birkhäuser, Basel etc., 1995.

[3] Amann, H.: Maximal regularity for nonautonomous evolution equations. *Adv. Nonlinear Stud.*, 4(4):417–430, 2004.

[4] Amann, H., Escher, J.: *Analysis III.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[5] Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M., Neubrander, F.: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[6] Davies, E. B.: *One-parameter semigroups.* Academic Press London etc., 1980.

[7] Denk, R.: Skript zur Vorlesung Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Wintersemester 2011/12, Universität Konstanz.

[8] Denk, R., Hieber, M., Prüss, J.: R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. *Mem. Amer. Math. Soc.* **788** (2003), 114 pp.

[9] Denk, R., Racke, R.: Kompendium der Analysis, Band 2. Springer Spektrum, Wiesbaden 2012.

[10] Engel, K.-J., Nagel, R.: *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Springer, New York etc., 2000.

[11] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: *Classes of linear operators. I.* Birkhäuser, Basel etc., 1990.

[12] Hörmander, L.: *The analysis of linear partial differential operators*, I-IV. Springer-Verlag Berlin 1976.

[13] Lunardi, A.: *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, Basel, 1995.

[14] Pazy, A.: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, New York etc., 1992.

[15] Prüss, J., Wilke, M.: Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme. Birkhäuser, Basel etc., 2010.

[16] Renardy, M., Rogers, R.C.: *An introduction to partial differential equations.* Text Appl. Math. **13**. Springer-Verlag, New York, 1993.

[17] Růžička, M.: Nichtlineare Funktionalanalysis. Springer-Verlag, Berlin etc., 2004.

[18] Tanabe, H.: *Equations of evolution.* Pitman, London etc., 1979.

[19] Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner-Verlag Stuttgart 1982.

Index