Skript zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2007

Robert Denk und Jürgen Saal

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 12. 3. 2010

Inhaltsverzeichnis

1. Motivation und funktionalanalytische Grundlagen

1.1 Worum geht's? Evolutionsgleichungen und der operatortheoretische Zugang zu ihrer Lösung stehen im Mittelpunkt dieser Vorlesung. Daher werden in diesem einleitenden Abschnitt einige wichtige partielle Differentialgleichungen als abstrakte Evolutionsgleichungen geschrieben, d.h. als Cauchy-Probleme. Dabei handelt es sich um parabolische wie auch hyperbolische Gleichungen. Weiter werden hier einige wichtige Begriffe und Grundlagen aus der Operatortheorie zitiert, welche in den folgenden Abschnitten verwendet werden. Schreibt man eine partielle Differentialgleichung als abstraktes Cauchyproblem, tauchen in natürlicher Weise Integrale und Ableitungen Banachraum-wertiger Funktionen auf. Der zugehörige (Lebesguesche) Integralbegriff ist der des Bochner-Integrals, welches ebenfalls kurz vorgestellt wird.

a) Partielle Differentialgleichungen als Cauchyprobleme

Was verstehen wir unter Evolutionsgleichungen? Prinzipiell sind dies Gleichungen, die zeitabhängige Prozesse beschreiben. Wir starten mit einigen einführenden Beispielen aus verschiedenen Bereichen.

1.2 Beispiele. Im folgenden werden einige parabolische Gleichungen vorgestellt bzw. wiederholt, welche zum Teil bereits im ersten Teil der Vorlesung ausführlich behandelt wurden.

a) Die **Wärmeleitungsgleichung** aus der allgemeineren Klasse der Diffusionsgleichungen lautet

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0\ , \\ u|_{t=0} &= u_0\ . \end{aligned}$$

Die Zielfunktion $u(t,x)$ beschreibt eine Temperaturverteilung. Auch die Black-Scholes-Gleichung, welche etwa den Wert einer Option beschreibt, lässt sich auf die Wärmeleitungsgleichung zurückführen.

b) Die **Populationsgleichung** (Lotka-Volterra Räuber-Beute-Modell) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{B} &= a_1 B - a_2 R, \\ \dot{R} &= -a_3 R + a_4 B \\ (B\ ,\ R)|_{t=0} &= (B_0, R_0). \end{aligned}$$

Im allgemeinen sind die Koeffizienten Funktionen von B und R, also $a_j = a_j(B,R)$. Dadurch wird das System nichtlinear.

c) Die **Navier-Stokes-Gleichung** aus der Strömungsmechanik lautet

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ u\Big|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Wenn wir durch Vernachlässigung des $(u \cdot \nabla)u$ - Terms linearisieren, dann spricht man von der Stokesgleichung. Der Vektor $u(t,x)$ steht für das Geschwindigkeitsfeld, $p(t,x)$ für die Druckverteilung eines Fluids.

Die Navier-Stokes-Gleichung ist Gegenstand eines der Millennium-Probleme, deren Lösung mit jeweils einer Million Dollar dotiert sind. Folgendes ist bekannt:

- Falls $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, so existiert eine global schwache Lösung v der Navier-Stokes-Gleichung.
- Falls $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, so existiert eine (zeitlich) lokale klassische Lösung w zur Navier-Stokes-Gleichung.

Es bleiben zwei Fragen, die unmittelbar zusammenhängen, seit über 70 Jahren unbeantwortet:

- Ist v eindeutig?
- Existiert w global?

1.3 Beispiel. Die **Wellengleichung** ist der typische Vertreter hyperbolischer Gleichungen. Sie lautet

$$\begin{aligned} v_{tt} - \Delta v &= 0, \\ v|_{t=0} &= v_0, \\ v_t|_{t=0} &= v_1. \end{aligned}$$

Hier beschreibt $v(t,x)$ etwa die Auslenkung der Welle.

1.4 Beispiel. Die **Schrödingergleichung** spielt eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik. Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u_t - i\Delta u &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Dabei gibt $|u|^2(t,x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte an, ein Teilchen zur Zeit t bei x anzutreffen.

Es gibt viele weitere Beispiele von Evolutionsgleichungen, darunter

- Maxwell - Gleichungen,
- Einstein'sche Feldgleichungen,
- freie Randwertprobleme, wie z.B. das Stefanproblem, welches ein Modell für einen im Wasser schwimmenden, schmelzenden Eisblock darstellt.

1.5 Bemerkung. Bei der Behandlung von partiellen Differentialgleichungen interessieren uns folgende Fragen:

(i) Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen,

(ii) die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten,

(iii) das qualitative Lösungsverhalten: Existiert die Lösung global; hat man Stabilität, d.h. konvergiert $u(t)$ für $t \to \infty$ oder bleibt u zumindest beschränkt?

Der klassische Zugang zu den obigen Gleichungen besteht in der Standardtheorie partieller Differentialgleichungen, jedoch ist meist eine separate Theorie für jede Gleichung notwendig. Ein alternativer Zugang, der die gemeinsame Struktur der Gleichungen ausnutzt, ist die Identifikation der obigen Beispiele als *Cauchy-Problem*, d.h. ein abstraktes Anfangswertproblem der Form

$$\begin{aligned} \dot{u} - Au &= 0\ , \qquad t > 0, \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

In den obigen Beispielen entspricht der Operator A bzw. die Zielfunktion u folgenden Größen:

- Wärmeleitungsgleichung: $A = \Delta$;
- Populationsgleichung: $u = (B, R)$ und $A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_3 & -a_4 \end{pmatrix}$;
- Navier - Stokes - Gleichung: $A = \mathbb{P}\Delta$ mit Projektionsopertor $\mathbb{P}$, der Gradientenfelder auf 0 abbildet, sprich $\mathbb{P}\nabla p = 0$;
- Wellengleichung: $u = (v, \dot{v})$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$;
- Schrödingergleichung: $A = i\Delta$;

Hier sei an die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen erinnert: Sind $u_0 \in \mathbb{C}^n$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dann ist die Lösung des oben gestellten Cauchy - Problems gegeben durch $u(t) = \exp(tA)u_0$. Wir können $T : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$ mit $T(t) = \exp(tA)$ als Lösungsoperator auffassen.

Die Idee, die hier diskutiert werden soll, ist eine Erweiterung dieses Lösungsansatzes auf 'allgemeinere lineare Operatoren', wie z.B. $A = \Delta$ in der Wärmeleitungsgleichung. Die formale Lösung wäre dann gegeben durch $u(t) = \exp(t\Delta)u_0$. Hierbei ist u_0 Element eines normierten Funktionenraums X wie z.B. $X = L^2$, C, H^1, C^α, BUC. Dann ist $T(t) = \exp(t\Delta)$ eine Familie von beschränkten Operatoren auf X, d.h. eine Abbildung

$$T : [0,\infty) \longrightarrow L(X) := \{B : X \to X \mid B \text{ linear und stetig}\}.$$

Beachte jedoch, dass Δ i.a. ein unbeschränkter Operator auf X ist!

Unser Ziel wird sein, $\exp(t\Delta)$ oder allgemeiner $\exp(tA)$ einen Sinn für eine möglichst große Klasse von unbeschränkten Operatoren A zu geben. Der Vorteil dieses Zugangs liegt in einer allgemeineren Theorie, die sich auf eine große Klasse von partiellen DGL anwenden lässt, und in der Tatsache, dass man es beim Cauchy - Problem mit einer gewöhnliche Differentialgleichung zu tun hat. Das hat jedoch den Preis, dass diese gewöhnliche Differentialgleichung in einem Banachraum lebt, d.h., dass die Funktionen X-wertig zu betrachten sind und dass vorhandene Randbedingungen in den Definitionsbereich $D(A)$ von A verarbeitet werden müssen.

b) Grundlagen der Operatortheorie

1.6 Bezeichnung (Wichtige Funktionenräume). a) Sei $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ die σ-Algebra der Borelmengen in $\mathbb{R}^n$. Für eine Menge $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und $1 < p < \infty$ setzen wir $L^p(A) := L^p(\lambda|_A; \mathbb{C})$ mit dem n-dimensionalen Lebesgue-Maß λ. Wir schreiben häufig $\int f(y)dy$ statt $\int f d\lambda$. In der Literatur ist auch die Schreibweise $L_p(A)$ üblich. Für $p = \infty$ definiert man

$$L^\infty(A) := \Big\{u\colon A \to \mathbb{C} \mid u \text{ messbar}, \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x)| < \infty\Big\}.$$

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
B(U) &:= \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \text{ messbar und beschränkt}\},\\
C(U) &:= \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \text{ stetig}\},\\
BC(U) &:= C_b(U) := \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \text{ stetig und beschränkt}\},\\
BUC(U) &:= \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \text{ gleichmäßig stetig und beschränkt}\},\\
C_c(U) &:= \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \text{ stetig mit kompaktem Träger}\},\\
C^k(U) &:= \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \;\; k\text{-mal stetig differenzierbar}\} \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}),
\end{aligned}$$

$$C_c^k(U) := C^k(U) \cap C_c(U),$$
$$C_0(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} | f \text{ stetig }, \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\},$$

c) Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man $C^k(\overline{U})$ als die Menge aller Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$, welche eine Fortsetzung $g : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ auf eine offene Menge $\widetilde{U} \supset \overline{U}$ besitzen mit $g \in C^k(\widetilde{U})$.

d) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $\mathscr{D}(U) := C_c^\infty(U)$ auch der Raum der Testfunktionen auf U. Auf $\mathscr{D}(U)$ kann eine lokalkonvexe Topologie definiert werden, welche $\mathscr{D}(U)$ zu einem vollständigen (aber nicht metrisierbaren) topologischen Vektorraum macht. In dieser Topologie konvergiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(U)$ von Testfunktionen genau dann gegen 0, falls ein Kompaktum $K \subset U$ existiert mit $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K \quad (n \in \mathbb{N})$ und für die Halbnormen

$$p_{K,N}(\varphi) := \sup_{x\in K} \sup_{|\alpha|\le N} |D^\alpha \varphi(x)| \quad (\varphi \in \mathscr{D}(U))$$

gilt: $p_{K,N}(\varphi_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$.

e) Der Schwartz-Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als die Menge aller Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für welche gilt:

$$p_N(f) := \sup\{(1 + |x|)^N |D^\alpha f(x)| : |\alpha| \le N,\ x \in \mathbb{R}^n\} < \infty \quad (N \in \mathbb{N}).$$

Durch die Familie $L := \{p_N : N \in \mathbb{N}\}$ von Normen auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ wird eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt, durch welche $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ zu einem Fréchetraum (d.h. einem vollständigen metrisierbaren topologischen Vektorraum) wird. Der Schwartz-Raum heißt auch der Raum der schnell fallenden Funktionen.

1.7 Definition (Räume von Distributionen)**.** Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ besteht der Raum $\mathscr{D}'(U)$ aller Distributionen auf U aus allen stetigen linearen Abbildungen $u : \mathscr{D}(U) \to \mathbb{C}$. Der Raum aller temperierten Distributionen $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathbb{R}^n$ besteht aus allen linearen stetigen Abbildungen $u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. In beiden Fällen ist die Topologie auf $\mathscr{D}(U)$ bzw. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ durch die oben angegebene lokalkonvexe Topologie definiert.

Seien X, Y Banachräume. Im folgenden verwenden wir die Standardbezeichnung $L(X, Y)$ für die Menge der stetigen linearen Operatoren von X nach Y. Versehen mit der Operatornorm, wird $L(X, Y)$ selbst wieder zu einem Banachraum. Wir setzen $L(X) := L(X, X)$ und $X' := L(X, \mathbb{C})$ (topologischer Dualraum von X, Raum der stetigen linearen Funktionale auf X).

1.8 Definition (Konvergenz und Stetigkeit von Operatoren)**.** Seien X, Y Banachräume, $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L(X, Y)$.

a) Die Folge T_k konvergiert gegen T gleichmäßig oder in der Operatornorm, falls $\|T_k - T\|_{L(X,Y)} \to 0$ $(k \to \infty)$.

Die Folge T_k konvergiert gegen T in der starken Operatortopologie oder stark, falls für alle $x \in X$ gilt: $\|T_k x - Tx\|_Y \to 0$. Man schreibt $T_k \xrightarrow{s} T_k$.

Die Folge T_k konvergiert gegen T in der schwachen Operatortopologie oder schwach, falls für alle $x \in X$ und für alle $f \in Y'$ gilt: $f(T_k x - Tx) \to 0$. Man schreibt $T_k \xrightarrow{w} T_k$.

b) Eine operatorwertige Abbildung $T\colon [0,\infty) \to L(X,Y)$ heißt gleichmäßig stetig, falls $T \in C([0,\infty), L(X,Y))$, wobei $L(X,Y)$ mit der Operatornorm versehen wird. Die Abbildung heißt stark stetig, falls für alle $x \in X$ gilt: $t \mapsto T(t)x \in C([0,\infty), Y)$. Sie heißt schwach stetig, falls für alle $x \in X$ und alle $f \in Y'$ gilt: $t \mapsto f(T(t)x) \in C([0,\infty))$.

1.9 Bemerkung. a) Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt starke Konvergenz und aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz. Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht. Analoge Aussagen gelten für die Stetigkeit.

b) Seien X, Y Banachräume, $D \subset X$ dicht, und seien $A, B \in L(X,Y)$ mit $Ax = Bx$ für alle $x \in D$. Dann gilt $A = B$ als Gleichheit in $L(X,Y)$.

c) Seien X, Y Banachräume, $D \subset X$ dichter Untervektorraum und $B\colon D \to Y$ eine lineare und beschränkte Abbildung (d.h. es existiert ein $C > 0$ mit $\|Bx\|_Y \le C\|x\|_X$ $(x \in D)$. Dann existiert genau eine Fortsetzung $\widetilde{B} \in L(X,Y)$ von B. Es gilt $\|\widetilde{B}\|_{L(X,Y)} \le C$.

1.10 Lemma. *Seien X, Y Banachräume und $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ beschränkt (bzgl. Operatornorm). Es gebe eine dichte Teilmenge $D \subset X$ so, dass für alle $x \in D$ die Folge $(T_k x)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchyfolge ist. Dann existiert genau ein $T \in L(X,Y)$ mit $T_k \xrightarrow{s} T$. Es gilt $\|T\|_{L(X,Y)} \le \liminf_{k\to\infty} \|T_k\|_{L(X,Y)}$.*

Beweis. Übung. □

Für die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen ist die Klasse der stetigen Operatoren auf einem Banachraum X zu klein. Eine für viele Zwecke hinreichend große Klasse ist die der abgeschlossenen Operatoren.

1.11 Definition. Seien X, Y Banachräume. Ein linearer Operator A von X nach Y ist eine lineare Abbildung $A\colon D(A) \to Y$, dessen Definitionsbereich $D(A) \subset X$ ein Untervektorraum von X ist. Man schreibt $A\colon X \supset D(A) \to Y$ oder auch nur $A\colon X \to Y$. Ein linearer Operator heißt dicht definiert, falls sein Definitionsbereich eine dichte Teilmenge von X ist.

Ein linearer Operator $A\colon X \supset D(A) \to Y$ heißt abgeschlossen, falls der Graph

$G(T) = \big\{(x, Tx) : x \in D(T)\big\}$ abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ ist. Dies ist gleichbedeutend zu: Gilt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \to x$ in X und $Ax_k \to y$ in Y, dann folgt $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

1.12 Beispiele. a) Der Differentialoperator $\frac{d}{dx}$ in $C\big([0,1]\big)$ besitzt den (dichten) Definitionsbereich $D\left(\frac{d}{dx}\right) = C^1\big([0,1]\big)$, d.h.

$$\frac{d}{dx} : C^1\big([0,1]\big) \to C\big([0,1]\big).$$

Wie man am Beispiel der C^1 - Funktionen $f(x) = x^n$ mit Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ in $C^1\big([0,1]\big)$ bzw. $C\big([0,1]\big)$ sieht, ist $\frac{d}{dx}$ unbeschränkt. Anhand der Definition prüft man leicht nach, dass $\frac{d}{dx}$ abgeschlossen ist.

b) Der Laplaceoperator Δ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $D(\Delta) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$ ist abgeschlossen und dicht definiert, d.h. $D(\Delta) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{R}^n)$.

1.13 Satz (Wichtige Sätze aus der Operatortheorie)**.**

a) **(Satz vom abgeschlossenen Graphen)** *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann ist T stetig.*

b) **(Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit)** *Sei $\mathcal{T} \subset L(X, Y)$. Es existiere für jedes $x \in X$ ein $C_x > 0$, so dass $\|Tx\|_Y \le C_x$ für all $T \in \mathcal{T}$. Dann gilt bereits $\|T\|_{L(X,Y)} \le C$ für alle $T \in \mathcal{T}$ mit einer universellen Konstante $C > 0$.*

c) **(Satz von der stetigen Inversen)** *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear, stetig und bijektiv. Dann ist $T^{-1} : Y \to X$ stetig.*

d) **(Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach)** *Sei X ein Banachraum und $x \in X \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $f \in X'$ mit $\|f\|_{X'} = 1$ und $f(x) = \|x\|_X$.*

1.14 Definition. Sei X Banachraum und $A : X \to X$ linearer Operator, dann heißt

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ bijektiv und } (\lambda - A)^{-1} \in L(X)\}$$

die Resolventenmenge von A und

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

das Spektrum von A. Für $\lambda \in \rho(A)$ heißt $R_\lambda(A) := (\lambda - A)^{-1}$ die Resolvente von A.

1.15 Bemerkung. Falls A abgeschlossen ist, folgt die Bedingung $R_\lambda(A) \in L(X)$ bereits aus der Bijektivität von $\lambda - A$. Es gilt die Resolventengleichung

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

für $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

c) Das Bochner-Integral

Im folgenden sei X ein komplexer Banachraum, versehen mit der Borel-σ-Algebra, und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein (o.E. vollständiger) Maßraum.

1.16 Definition. Sei $s = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} a_i$ eine Stufenfunktion mit $A_i \in \mathcal{A}$, $\mu(A_i) < \infty$ und $a_i \in X \quad (i = 1, \dots, n)$. Definiere das (Bochner-)Integral

$$\int s d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) a_i \in X.$$

Die Menge aller Stufenfunktionen $s \colon \Omega \to X$ mit $\mu(s^{-1}(\{x\})) < \infty$ für alle $x \in X \setminus \{0\}$ wird als $T(\mu; X)$ bezeichnet. Eine Stufenfunktion s heißt integrierbar, falls $s \in T(\mu; X)$ gilt.

1.17 Bemerkung. a) Offensichtlich ist $T(\mu; X)$ ein linearer Vektorraum. Falls $s \in T(\mu; X)$, so ist $\|s(\cdot)\|_X \in T(\mu; \mathbb{R})$.

b) Es gilt

$$\Big\| \int s d\mu \Big\|_X \le \int \|s\|_X d\mu \quad (s \in T(\mu; X)).$$

c) Durch $\|s\|_{T(\mu;X)} := \int \|s\|_X d\mu$ wird eine Seminorm auf $T(\mu; X)$ definiert.

Ein metrischer Raum heißt separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Im folgenden werden wir öfter Folgen und Reihen von Funktionen mit endlichem oder separablem Wertebereich betrachten. Um zu sehen, dass die Separabilität des Wertebereichs erhalten bleibt, verwenden wir folgende Aussage.

1.18 Lemma. *a) Sei (Y, d) ein separabler metrischer Raum und $\Omega \subset Y$. Dann ist $(X, d|_X)$ separabel.*

b) Sei X ein Banachraum, Ω eine Menge, $f_n \colon \Omega \to X$ mit $f_n(\Omega)$ separabel. Die Reihe $f(z) := \sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ konvergiere für alle $z \in \Omega$. Dann ist $f(\Omega)$ separabel.

c) Sei Ω ein topologischer Raum, welcher als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen darstellbar ist, und $f \in C(\Omega; X)$. Dann ist $f(\Omega)$ separabel. Insbesondere gilt dies für $\Omega = [0, \infty)$ oder $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

Beweis. a) Sei $Y = \overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Definiere

$$U := \{U_{r,n} := B(y_n, r) \cap \Omega : r > 0,\ r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\},$$

wobei $B(y_0, r) := \{y \in Y : d(y, y_0) < r\}$. Zu jedem $U_{r,n} \neq \emptyset$ wähle ein $x_{r,n} \in U_{r,n}$. Dann ist $A := \{x_{r,n} : r, n\}$ abzählbar.

Sei $z \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $r \in \mathbb{Q}, r < \varepsilon$ und y_n mit $d(z, y_n) < \frac{r}{2}$. Wegen $z \in B(y_n, r/2)$ ist $\Omega \cap B(y_n, r/2) \neq \emptyset$, d.h. es existiert ein $z_0 \in A$ mit $z_0 \in \Omega \cap B(y_n, r/2)$. Es folgt $d(z, z_0) \leq d(z, y_n) + d(y_n, z_0) < r < \varepsilon$.

b) Sei $f_n(\Omega) = \overline{\{y_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}}$ und

$$Z := \Big\{ \sum_{i=1}^{N} y_{n_i,k_i} : n_i, k_i \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Dann ist Z abzählbar. Sei $z \in \Omega$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle ein k_n mit $\|f_n(z) - y_{n,k_n}\| < \varepsilon \cdot 2^{-n}$. Dann ist für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n(z) - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} y_{n,k_n}}_{\in Z} \Big\| < \varepsilon,$$

d.h. $\sum_{n=1}^{N} f_n(z) \in \overline{Z}$. Da die Partialsummen gegen $f(z)$ konvergieren, ist auch $f(z) \in \overline{Z}$.

Also gilt $f(\Omega) \subset \overline{Z}$, und nach Teil a) ist $f(\Omega)$ separabel.

c) Falls Ω selbst kompakt ist, so ist $f(\Omega)$ kompakt und metrisierbar und damit separabel. Falls $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ mit $A_k \subset \Omega$ kompakt, so existiert eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_{n,k} : n \in \mathbb{N}\}$ von $f(A_k)$. Die Vereinigung all dieser Teilmengen ist eine abzählbare dichte Teilmenge von $f(\Omega)$. □

1.19 Satz. *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ Messraum, $f\colon \Omega \to X$ Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) Es existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $f_n\colon \Omega \to X$ mit $f_n(z) \to f(z)$ (in X) für alle $z \in \Omega$.

(ii) f ist messbar und $f(\Omega)$ ist separabel.

Man kann in (i) $\|f_n(z)\| \leq 2\|f(z)\| \quad (n \in \mathbb{N}, z \in \Omega)$ wählen.

Beweis. (i)$\Rightarrow$ (ii) Wie im Beweis von Lemma 1.18 sieht man, dass $f(\Omega)$ separabel ist. Wir zeigen, dass f als punktweiser Limes messbarer Funktionen messbar ist. Sei $U \subset X$ offen. Definiere

$$U_n := \Big\{ y \in U : \operatorname{dist}(y, X \setminus U) > \frac{1}{n} \Big\}.$$

Dann ist U_n offen mit $\overline{U}_n \subset U$. Wegen $f_n \to f$ punktweise gilt $f(z) \in U$ genau dann, wenn $n, m \in \mathbb{N}$ existieren mit $f_j(z) \in U_n \quad (j \geq m)$. Also ist $f^{-1}(U) = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq m} f_j^{-1}(U_n)$ offen, und f ist messbar.

(ii)⇒(i). Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset f(\Omega)$ dicht. Ohne Einschränkung seien alle x_n verschieden von 0. Setze für $n, N \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{A}_n^N := \Big\{ z \in \Omega : \|f(z)\| \geq \frac{1}{N},\ \|f(z) - x_n\| < \frac{1}{N} \Big\}.$$

Dann gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{A}_n^N = \Big\{ z \in \Omega : \|f(z)\| \geq \frac{1}{N} \Big\},$$

da $\{x_n\}_n$ dicht ist. Sei

$$A_n^N := \widetilde{A}_n^N \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \widetilde{A}_k^N \quad (n \in \mathbb{N})$$

(disjunkte Version), und für $N \in \mathbb{N}$ und $M = 1, \ldots, N$ definiere

$$g_{N,M}(z) := \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n^M}(z) x_n.$$

Dann ist $g_{N,M}$ Stufenfunktion und es gilt $\|g_{N,M}(z)\| \leq 2\|f(z)\|$ $(z \in \Omega)$ wegen

$$\|g_{N,M}(z)\| = \|x_n\| \leq \frac{1}{M} + \|f(z)\| \leq 2\|f(z)\| \quad (z \in A_n^M).$$

Für $N \in \mathbb{N}$ setze nun $f_N(z) := 0$, falls $g_{N,M}(z) = 0$ $(M = 1, \ldots, N)$ und $f_N(z) := g_{N,M}(z)$ sonst, wobei

$$M := \max\{k = 1, \ldots, N : g_{N,k}(z) \neq 0\}.$$

Dann ist auch f_N Stufenfunktion, und $\|f_N(z)\| \leq 2\|f(z)\|$ $(z \in \Omega)$. Aufgrund der Definition von $g_{N,M}$ und f_N gilt außerdem für $N \in \mathbb{N}$:

(*) Falls $z \in \bigcup_{M=1}^N \bigcup_{n=1}^N A_n^M$, so ist $f_N(z) \neq 0$ und

$$\|f_N(z) - f(z)\| \leq \frac{1}{M_0^N}$$

mit $M_0^N := \max\{M = 1, \ldots, N : z \in \bigcup_{n=1}^N A_n^M\}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $z \in \Omega$. Falls $f(z) = 0$, so folgt $\chi_{A_n^M}(z) = 0$ für alle $M, n \in \mathbb{N}$ und damit $f_N(z) = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Sei also $f(z) \neq 0$. Wähle $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N_0} < \min\{\|f(z)\|, \varepsilon\}$. Dann existiert genau ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $z \in A_{n_0}^{N_0}$. Für $N \geq \max\{N_0, n_0\}$ folgt $z \in \bigcup_{M=1}^N \bigcup_{n=1}^N A_n^M$ und $M_0^N \geq N_0$. Nach (*) erhalten wir

$$\|f_N(z) - f(z)\| < \frac{1}{M_0^N} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon \quad (N \geq \max\{N_0, n_0\}).$$

Somit konvergiert $f_N(z)$ gegen $f(z)$. □

1.20 Satz. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f\colon \Omega \to X$ messbar und $f(\Omega)$ separabel. Dann sind äquivalent:*

(i) Es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $f_n\colon \Omega \to X$ mit f_n integrierbar, $f_n(z) \to f(z) \quad (z \in \Omega)$, und

$$\int \|f_n - f\| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(ii) $\int \|f\| d\mu < \infty$.

Beweis. (i)⇒(ii). Es gilt

$$\int \|f\| d\mu \le \int \|f_n - f\| d\mu + \int \|f_n\| d\mu < \infty$$

mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

(ii)⇒(i). Wähle eine Folge $(f_n)_n$ von Stufenfunktionen wie in Satz 1.19, wobei $\|f_n(z)\| \le 2\|f(z)\| \quad (z \in \Omega)$. Insbesondere ist f_n integrierbar. Damit gilt

$$g_n(z) := \|f_n(z) - f(z)\| \to 0,\ n \to \infty \quad (z \in \Omega)$$

und $g_n(z) \le 3\|f(z)\| \quad (z \in \Omega)$, d.h. $g_n \to 0$ punktweise, und nach dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$\int g_n d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

1.21 Lemma. *Sei f messbar, $f(\Omega)$ separabel, $\int \|f\| d\mu < \infty$. Seien $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ Folgen wie in Satz 1.20 (i). Falls X Banachraum ist, so existieren $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \in X$ und $\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \in X$, und beide Limiten sind gleich.*

Beweis. Es gilt mit Bemerkung 1.17

$$\begin{aligned}\Big\| \int f_n d\mu - \int g_n d\mu \Big\| &= \Big\| \int (f_n - g_n) d\mu \Big\| \\ &\le \int \|f_n - g_n\| d\mu \\ &\le \int \big(\|f_n - f\| + \|f - g_n\|\big) d\mu \\ &\to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung mit f_n, f_m statt f_n, g_n zeigt, dass $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchyfolge und damit konvergent ist. □

1.22 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein Banachraum. Dann heißt $f\colon \Omega \to X$ integrierbar, falls f messbar ist, $f(\Omega)$ separabel ist und $\int \|f\| d\mu < \infty$. In diesem Fall heißt

$$\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu,$$

mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Satz 1.20, das Bochner-Integral von f über Ω bzgl. μ. Wie üblich setzt man

$$\int_A f d\mu := \int (\chi_A \cdot f) d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Die vektorwertigen L^p-Räume $L^p(\mu; X)$ werden wie üblich definiert als Quotientenraum $L^p(\mu; X) := \mathcal{L}^p(\mu; X)/N$. Hierbei ist $\mathcal{L}^p(\mu; X)$ die Menge aller messbaren f mit separablem Wertebereich ist, für welche $\|f\|_{L^p(\mu;X)} := (\int \|f\|^p d\mu)^{1/p}$ endlich ist, und N die Menge aller $f \in \mathcal{L}^1(\mu; X)$ mit $\|f\|_{L^1(\mu;X)} = 0$. Für $p = \infty$ hat man die üblichen Modifikationen.

Falls $\Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und μ das Lebesgue-Maß ist, so schreibt man üblicherweise $L^1(\Omega; X) := L^1(\mu; X)$.

Für Bochner-Integrale gelten die aus der skalaren Lebesgue-Theorie bekannten Konvergenzsätze.

1.23 Satz. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, X Banachraum.*

a) **(Satz von der majorisierten Konvergenz).** *Seien $f_n\colon \Omega \to X$ messbar, $f_n(\Omega)$ separabel, $f_n \to f$ μ-fast überall. Sei $g\colon \Omega \to [0, \infty]$ messbar mit $\int g d\mu < \infty$ und $\|f_n(z)\| \le g(z)$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\|f(z)\| \le g(z)$ μ-fast überall.*

Dann ist $f_n \in L^1(\mu; X)$, $f \in L^1(\mu; X)$ und

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \text{ in } X \quad (n \to \infty).$$

b) Sei $f_n\colon \Omega \to X$ messbar, $f_n(\Omega)$ separabel, $\sum_{n=1}^\infty \int \|f_n\| d\mu < \infty$. Dann ist $f_n \in L^1(\mu; X)$ und $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ konvergiert in X für μ-fast alle $z \in \Omega$.

Die Funktion

$$z \mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty f_n(z), & \text{falls } \sum_n f_n(z) \text{ konvergiert,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \int f_n d\mu = \int \sum_{n=1}^\infty f_n d\mu.$$

c) Sei $f \in L^1(\mu; X)$ und $A = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (d.h. disjunkte Vereinigung) mit $A_n \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

d) Für $f \in L^1(\mu; X)$ gilt $\| \int f d\mu \|_X \leq \int \|f\|_X d\mu$.

Im Zusammenhang mit Halbgruppen werden wir insbesondere über reelle Intervalle integrieren. Man beachte, dass nach Lemma 1.18 stetige Funktionen darauf separablen Wertebereich besitzen und integrierbar sind.

1.24 Lemma. *Sei X ein Banachraum, der lineare Operator $A : D(A) \subset X \to X$ abgeschlossen und $f \in C\big([0,\infty), X\big)$ mit $f(t) \in D(A)$ für $t \geq 0$ und $Af \in C\big([0,\infty), X\big)$. Dann gilt $\int_0^t f(s)ds \in D(A)$ und*

$$A \int_0^t f(s)ds = \int_0^t Af(s)ds \quad (t \geq 0).$$

Beweis. Für alle Stufenfunktionen s gilt die Behauptung aufgrund der Linearität von A und nach Definition des Integrals. Als stetige Funktionen sind f und Af auf jedem kompakten Intervall integrierbar. Da das Integral nach Definition der Grenzwert (in X) von Integralen von Stufenfunktionen sind, folgt die Behauptung aus der Abgeschlossenheit von A. □

1.25 Definition. Sei X ein Banachraum. Eine Funktion $f \in C\big([0,\infty), X\big)$ heißt differenzierbar in $t_0 \in [0,\infty)$ genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} =: f'(t_0)$$

in X existiert. Man schreibt $f \in C^k\big([0,\infty), X\big)$, falls f k-mal stetig differenzierbar ist.

1.26 Bemerkung. a) Sei X Banachraum und $f \in C([0,\infty), X)$. Dann gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(s)ds = f(0).$$

b) Falls X Banachraum ist und $f \in C^1([0,\infty), X)$, so gilt

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds \quad (t \in [0,\infty)).$$

2. Operatorhalbgruppen: Erste Eigenschaften

2.1 Worum geht's? Der Begriff der Operatorhalbgruppe fasst die wesentlichen Eigenschaften zusammen, welche etwa die im endlich-dimensionalen Fall bekannte Fundamentalmatrix $\exp(tA)$ zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = Ay$ mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ besitzt. Dabei werden die Halbgruppen, welche im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen auftreten, nicht normstetig sein, sondern nur stark stetig.

Es stellt sich heraus, dass das Cauchyproblem

$$\dot{u} = Au, \; u(0) = x$$

genau dann wohlgestellt ist, wenn der Operator A eine C_0-Halbgruppe erzeugt. Damit wird die Lösbarkeit von Gleichungen zurückgeführt auf Eigenschaften des in der Gleichung auftretenden Operators. In Anwendungen, in welchen etwa A ein Differentialoperator (im Ort) ist, sind diese Eigenschaften oft leichter nachzurechnen als die Lösbarkeit selbst.

2.2 Beispiel. Bevor wir die allgemeine Definition für Operatorhalbgruppen einführen, wollen wir zur Motivation den endlich-dimensionalen Fall betrachten: Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und $T(t) := \exp(tA)$. Es gilt

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ $(t, s \geq 0)$ (Halbgruppeneigenschaft),

(iii) $T \in C([0,\infty), L(\mathbb{C}^n))$.

Ferner sieht man schnell, dass $A = \dot{T}(0)$ gilt. Diese Formulierung der Eigenschaften von $\exp(tA)$ macht auch in einem allgemeineren Rahmen Sinn. Aus Gründen der Konsistenz zum endlichdimensionalen Fall stellt sich deshalb die Frage, ob aus (i), (ii) und (iii) bereits $T(t) = \exp(tA)$ gefolgert werden kann.

2.3 Satz. *Sei $T : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^{n\times n})$, so dass (i), (ii) und (iii) erfüllt sind. Dann gilt $T(t) = \exp(tA)$ mit $A = \dot{T}(0)$. Insbesondere gilt $T \in C^\infty\big((0,\infty), L(\mathbb{C}^n)\big)$.*

Beweis. Setze

$$V(t) := \int_0^t T(s)ds,$$

dann ist V wegen (iii) differenzierbar und $\dot{V}(t) = T(t)$ für $t \geq 0$. Damit gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{V(t)}{t} = \dot{V}(0) = T(0) \overset{(i)}{=} I.$$

Mit dieser Ableitung muß $V(t)$ für kleine $t > 0$ bereits invertierbar sein, d.h. es gibt ein $t_0 > 0$, so dass $V(t_0)$ invertierbar ist. Damit erhält man

$$\begin{aligned} T(t) = V^{-1}(t_0)V(t_0)T(t) &\overset{(ii)}{=} V^{-1}(t_0)\int_0^{t_0} T(t+s)ds \\ &= V^{-1}(t_0)\int_t^{t+t_0} T(s)ds = V^{-1}(t_0)\big(V(t+t_0) - V(t)\big), \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)-I}{t} = V^{-1}(t_0)\lim_{t\to 0}\frac{V(t+t_0)-V(t)-V(t_0)}{t} = V^{-1}(t_0)\big(\dot V(t_0) - \dot V(0)\big).$$

Aus der Differenzierbarkeit von $T(t)$ an der Stelle $t = 0$ folgt jene für alle $t \geq 0$, denn $T(t+s) - T(s) = T(s)\big(T(t) - I\big)$, also

$$\frac{d}{dt}T(t) = \lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)-T(t)}{h} = T(t)\dot T(0).$$

Damit löst $T(t)x$ die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot u - Au &= 0, \\ u(0) &= x, \end{aligned}$$

mit $A = \dot T(0)$, deren eindeutige Lösung wir in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen als

$$T(t)x = \exp(tA)x$$

kennengelernt haben. □

Die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) genügen somit, um eine Halbgruppe mit *Generator* A zu definieren. Dies motiviert

2.4 Definition. Eine Familie $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ von linearen, beschränkten Operatoren auf einem Banachraum X wird C_0*-Halbgruppe* oder *stark stetige Halbgruppe* genannt, falls

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$,

(iii) T ist stark stetig, d.h. für alle $x \in X$ ist $[0,\infty) \to X,\ t \mapsto T(t)x$ stetig.

Für eine C_0-Halbgruppe setzen wir

$$D := \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{existiert} \right\}.$$

Im allgemeinen ist $D \neq X$. Wir werden später sehen, dass D immer eine dichte Teilmenge von X ist.

2.5 Definition. Der lineare, eindeutig bestimmte Operator $A\colon D \to X$ definiert durch

$$Ax := \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

heißt *Generator* oder *Erzeuger* von T, und $D(A) := D$ heißt Definitionsbereich von A.

2.6 Beispiel. $\big(\exp(tA)\big)_{t\geq 0}$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist C_0-Halbgruppe auf $\mathbb{C}^n$.

2.7 Lemma (Translationshalbgruppe)**.** *Definiere* $\big(T(t)f\big)(x) := f(x+t)$, $t \geq 0$. *Dann ist* $(T(t))_{t\geq 0}$ *eine* C_0 *- Halbgruppe auf* $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, *mit Generator*

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \frac{d}{dx} f \in L^p(\mathbb{R}) \right\} = W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Beweis. Zunächst ist $T(t)$ beschränkt wegen

$$\|T(t)f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t+x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p \quad \Longrightarrow \quad \|T(t)\|_{L(L^p(\mathbb{R}))} \leq 1.$$

Bekannt ist, dass $C_c(\mathbb{R}) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{R})$. Für $f \in C_c(\mathbb{R})$ gilt

$$\|T(t)f - f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t+x) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < |K|^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_{x\in K} |f(x+t) - f(x)| \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

für kompakte Intervalle $K := \{x + y : x \in \operatorname{supp}(f), y \in [-1, +1]\}$. Aus Bemerkung 1.9 b) und Lemma 1.10 folgt die starke Stetigkeit, d.h. Eigenschaft (iii). Eigenschaften (i) und (ii) sind trivial. Damit ist T eine C_0-Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$. Sei B der Generator von T. Aus der Gleichheit

$$\frac{T(t)f - f}{t} = \frac{f(\cdot + t) - f(\cdot)}{t}$$

für $f \in L^p(\mathbb{R})$ ergibt sich

$$D(B) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f - f}{t} \text{existiert} \right\} = W^{1,p}(\mathbb{R}) = D(A),$$

$$Bf = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f - f}{t} = \frac{d}{dx} f = Af.$$

Also gilt $A = B$, d.h. A erzeugt T. □

2.8 Beispiele. a) Betrachte den *Gaußkern*

$$G_t(x) := \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t} \right).$$

Dann definiert $T(t) := G_t * f$ eine C_0 - Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Generator $A = \Delta$ und $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Dies sieht man unter Verwendung der Fouriertransformation und des Satzes von Plancherel.

b) Sei $A \in L(X)$ und X ein Banachraum. Dann ist

$$T(t) = \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A. Außerdem ist T gleichmäßig stetig wegen

$$\|T(t) - I\|_{L(X)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(t\|A\|\big)^k}{k!} = \exp\big(t\|A\|\big) - 1 \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

2.9 Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung zu Beispiel 2.8 b): Sei $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe mit Generator $A : D(A) \to X$, so dass

$$\|T(t) - I\|_{L(X)} \to 0.$$

Dann gilt $A \in L(X)$. Dies sieht man, indem man den Beweis zu Satz 2.3 kopiert.

2.10 Lemma. *Sei T eine C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X mit Generator $A : D(A) \to X$.*

a) Es gilt $T(t)x \in D(A)$ für alle $x \in D(A)$ und

$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

b) Es gilt $\int\limits_0^t T(s)xds \in D(A)$ für alle $x \in X$, und

$$T(t)x - x = A \int_0^t T(s)xds \quad (x \in X) \tag{2-1}$$

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds \quad (x \in D(A)) \tag{2-2}$$

Beweis. a) Sei $x \in D(A)$ und $h \geq 0$. Dann ergibt sich

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} T(t)Ax \quad (t \geq 0).$$

Damit existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} = AT(t)x$$

und stimmt mit dem obigen überein. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt die Abschätzung $\|T(s)\|_{L(X)} \leq M_t$, $s \in [0,t]$, für beliebiges $t > 0$. Damit folgt für $t > 0$ und $h \leq t$

$$\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = -T(t-h)\frac{x - T(h)x}{h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} T(t)Ax,$$

d.h. auch die linksseitige Ableitung existiert und stimmt mit der rechtsseitigen überein. Somit ist Aussage a) gezeigt.

b) Sei $x \in X$ und $t \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big(T(h)\int_0^t T(s)xds - \int_0^t T(s)xds\Big) &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds \\
&\overset{h\to 0}{\longrightarrow} T(t)x - x
\end{aligned}$$

nach Bemerkung 1.26 a). Also gilt $\int_0^t T(s)ds \in D(A)$ und die Gleichheit (2-1). Mit der Abschätzung $\|T(s)\|_{L(X)} \leq M$, $s \in [0,t]$, folgt für $x \in D(A)$

$$T(s)\,\frac{T(h)x - x}{h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} T(s)Ax \ \text{ gleichmäßig für } s \in [0,t],$$

was schließlich

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)-1}{h}\int_0^t T(s)xds = \lim_{h\to 0}\int_0^t T(s)\frac{T(h)x - x}{h}ds = \int_0^t T(s)Axds$$

impliziert. □

2.11 Lemma. *Sei T eine C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X. Dann existieren $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ so, dass gilt*

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M\exp(\omega t) \quad (t \geq 0). \tag{2-3}$$

Hierzu zunächst

2.12 Definition. Sei T eine C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X.

a) Die Zahl

$$\omega(T) := \inf\Big\{\omega \in \mathbb{R} : \text{ Es existiert ein } M_\omega \geq 1 \text{ so, dass(2-3) gilt}\Big\}$$

heißt die *Wachstumsschranke* von T.

b) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega = 0$ gilt, so heißt T beschränkt.

c) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega = 0$ und $M = 1$ gilt, so heißt T eine *Kontraktionshalbgruppe.*

d) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega < 0$ gilt, so heißt T *exponentiell stabil.*

Beweis von Lemma 2.11. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M$ für $t \in [0,1]$, setze $\omega = \log M$. Für $t \in [0,\infty)$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $t \leq m \leq t+1$ gilt

$$\|T(t)\|_{L(X)} = \left\|T\Big(\frac{t}{m}\Big)^m\right\| \leq \left\|T\Big(\frac{t}{m}\Big)\right\|^m \leq M^m \leq M^{t+1} = M\exp(\omega t).$$

□

2.13 Satz. *Sei X ein Banachraum. Dann ist der Generator $A : D(A) \to X$ einer C_0 - Halbgruppe T auf X ein abgeschlossener, dicht definierter Operator, der die C_0-Halbgruppe T eindeutig bestimmt.*

Beweis. Abgeschlossenheit: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \to x$ und $Ax_k \to y$ in X. Nach Bemerkung 1.26 b) gilt

$$T(t)x_k - x_k = \int_0^t T(s)Ax_k ds,$$

wobei $T'(s)x = T(s)Ax$ (Lemma 2.10 a) verwendet wurde. Die gleichmäßige Konvergenz von $T(s)Ax_k$ in $[0,t]$ impliziert

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds.$$

Damit erhält man

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds \longrightarrow y \in X \text{ für } t \to 0.$$

Daher existiert der Grenzwert links, d.h $x \in D(A)$ und $Ax = y$.
Dichtheit von $D(A)$: Nach Bemerkung 1.26 a) gilt für $x \in X$,

$$D(A) \ni \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds \xrightarrow{t\to 0} x.$$

Eindeutigkeit von T: Sei S eine weitere von A erzeugte Halbgruppe auf X, $x \in D(A)$, und $t > 0$. Setze

$$u(s) := T(s)S(t-s)x\ , \qquad 0 \le s \le t.$$

Dann folgt

$$\frac{du(s)}{ds} = AT(s)S(t-s)x + T(s)(-A)S(t-s)x = 0.$$

Nach Bemerkung 1.26 b) ist u konstant auf $[0,t]$, also

$$T(t)x = u(t) = u(0) = S(t)x \quad (t > 0, x \in D(A)),$$

d.h. es gilt $T = S$. □

Im letzten Teil dieses Abschnitts wollen wir zurückkommen zum Cauchyproblem im Banachraum X, was ja die ursprüngliche Motivation für die Einführung von Halbgruppen war. Die Frage ist nun, ob die bereitgestellte Theorie die Ausgangsfragen zur Lösung solcher Probleme in zufriedenstellender Weise beantwortet. Hierzu zunächst folgende

2.14 Definition. Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ abgeschlossen mit $\overline{D(A)} = X$. Das Cauchyproblem

$$\text{(CP)} \quad \begin{cases} \partial_t u - Au &= 0, \quad t > 0, \\ u(0) &= x, \end{cases}$$

heißt *(klassisch) wohlgestellt* in X, falls

(i) eine eindeutige klassische Lösung existiert, d.h. für alle $x \in D(A)$ existiert genau eine Lösung $u \in C^1\big([0,\infty), X\big)$ von (CP) mit $u(t) \in D(A)$ $(t \ge 0)$.

(ii) u stetig von den Daten abhängt, d.h. für alle $t > 0$ existiert eine Konstante $C_t > 0$ mit $\|u(t)\| \le C_t\|x\|$ $(x \in D(A))$.

2.15 Satz. *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ abgeschlossen mit $\overline{D(A)} = X$. Das Cauchyproblem (CP) ist genau dann wohlgestellt, wenn A Generator einer C_0-Halbgruppe T auf X ist.*

Beweis. (i) Sei A Generator der C_0-Halbgruppe T, und sei $x \in D(A)$. Wir setzen $u(t) := T(t)x$. Nach Lemma 2.10 a) ist $u \in C^1\big([0,\infty), X\big)$ Lösung von (CP), $u(t) \in D(A); (t \geq 0)$ und $u(t) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} x \in X$. Außerdem stellt Lemma 2.11 für $t > 0$ sicher, dass

$$\|u(t)\| = \|T(t)x\| \leq M \exp(\omega t)\|x\|,$$

d.h. u hängt stetig von den Daten ab.

Zur Eindeutigkeit: Sei v eine weitere klassische Lösung von (CP), $x \in D(A)$, und $t \geq 0$. Wir setzen

$$w(s) := T(s)v(t-s) \quad (0 \leq s \leq t).$$

Wie im Beweis von Satz 2.13 folgt $\frac{dw(s)}{ds} = 0$ und daher $w = \text{const}$. Dies impliziert

$$T(t)x = w(t) = w(0) = v(t) \quad (t > 0, x \in D(A)).$$

(ii) Sei (CP) wohlgestellt und sei $x \in D(A)$. Diesmal setzen wir $T(t)x := u(t,x)$, wobei $u(\cdot,x)$ die eindeutige Lösung von (CP) zum Anfangswert x sei. Aus (ii) folgt $T(t) \in L(X)$, $t \geq 0$. Klar sind die Eigenschaften $T(0) = I$ sowie $T(t)x \overset{t\to 0}{\longrightarrow} x$, d.h. T ist stark stetig. Zum Nachweis der Halbgruppeneigenschaft seien $s,t \geq 0$. Man beachte, dass $u(t+s,x)$ und $u\big(t,u(s,x)\big)$ beides Lösungen von (CP) zum Anfangswert $u(s,x)$ sind. Aus der Eindeutigkeit folgt

$$u(t+s,x) = u\big(t,u(s,x)\big),$$

was zeigt, dass

$$T(t+s)x = u(t+s,x) = u\big(t,u(s,x)\big) = T(t)u(s,x) = T(t)T(s)x.$$

Damit ist T eine C_0 - Halbgruppe. Sei B der Generator von T. Für $x \in D(A)$ erhält man

$$Au(t,x) = \dot u(t,x) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} y := \dot u(0,x) \in X$$

nach Voraussetzung. Aus der Abgeschlossenheit von A folgt somit

$$Ax = y = \dot u(0,x) = \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} T(t)x.$$

Da der rechte Limes bei Existenz mit Bx übereinstimmt folgt also $x \in D(B)$ und $Ax = Bx$ für $x \in D(A)$. Sei umgekehrt $x \in D(B)$, d.h. $\lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} T(t)x$ existiert. Wegen $\overline{D(A)} = X$ können wir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ wählen mit $x_k \to x$. Nach Lemma 1.24 gilt $\int_0^t T(s)x_k ds \in D(A)$. Mit Lemma 2.10 b) folgt weiter

$$A\int_0^t T(s)x_k ds = B\int_0^t T(s)x_k ds = T(t)x_k - x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} Tx - x$$

und wegen Abgeschlossenheit von A, dass

$$A\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x ds = \frac{T(t)x - x}{t}\,, \qquad t > 0.$$

Da die rechte Seite für $t \to 0$ gegen Bx konvergiert, sehen wir unter erneuter Ausnutzung der Abgeschlossenheit von A, dass $x \in D(A)$. Somit haben wir $D(A) = D(B)$ und deshalb $A = B$. $\square$

Mit Satz 2.15 reduziert sich das Lösen von linearen Cauchyproblemen auf den Nachweis, dass A ein Generator ist. Doch auch nichtlineare Probleme können mit Hilfe eines Generatorresultates angegangen werden. Wie das funktioniert wollen wir hier nur kurz skizzieren. Wir werden später bei der Anwendung auf konkrete Beispiele sehen, wie diese Methode im Einzelnen durchzuführen ist.

Wir betrachten das inhomogene Cauchyproblem

$$\text{(ICP)} \quad \left\{ \begin{array}{rcll} \dot{u} - Au & = & f, & t > 0, \\ u(0) & = & x. & \end{array} \right.$$

Dann ergibt *Variation der Konstanten* die formale Lösung

$$u(t) = \exp(tA)x + \int_0^t \exp\big((t-s)A\big) f(s) ds.$$

Falls (ICP) nichtlinear ist, d.h. $f = f(s, u)$ wie z.B. in der Navier - Stokes - Gleichung $f(u) = (u \cdot \nabla)u$, kann versucht werden ein Fixpunktargument (z.B. den *Banachschen Fixpunktsatz*) auf die Integralformel anzuwenden. Bei erfolgreicher Anwendung zieht diese Methode i.d.R. die Existenz einer lokalen Lösung nach sich, d.h. es existiert ein $T > 0$ und ein $u : [0, T) \to X$, die (ICP) im sogenannten milden Sinne löst. Wir möchten an dieser Stelle anmerken, dass im Allgemeinen keine Existenz einer globalen Lösung erwartet werden kann. Z.B. ist zur Gleichung

$$u_t - \Delta u = |u|^\alpha$$

bekannt, dass i.A. keine globale (milde) Lösung in $L^p(\Omega)$ für gewisse Werte von p und α existiert.

3. Generatoren von Halbgruppen

3.1 Worum geht's? Satz 2.15 motiviert die Suche nach hinreichenden oder äquivalenten Bedingungen, so dass A eine C_0 - Halbgruppe erzeugt. Die bisherige Diskussion zeigt, dass eine C_0 - Halbgruppe T mit Generator A als etwas wie $\exp(tA)$ aufgefaßt werden kann. Die Idee, um zu einem abgeschlossenen Operator A eine Halbgruppe zu gewinnen, ist, eine Approximation der Exponentialfunktion zu benutzen. Wir kennen bereits die klassischen Methoden

(i) $\quad \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!},$

(ii) $\quad \exp(tA) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n}A\right)^n,$

die den entscheidenden Nachteil haben, dass wir beliebig hohe Potenzen von unbeschränkten Operatoren erhalten. Hier gibt es keinen Weg Konvergenz sicherzustellen. Verheißungsvollere Ansätze sind:

(iii) $\quad \exp(tA) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}A\right)^{-n}$ („Idee von Hille“),

(iv) $\quad \exp(tA) = \lim_{n\to\infty} \exp(tA_k)$ mit A_k beschränkt („Idee von Yosida“).

Diese Ansätze sollen im folgenden diskutiert werden.

a) Der Satz von Hille-Yosida

Im nächsten Abschnitt werden wir uns der Konstruktion von Halbgruppen widmen, die auf (iv), d.h. auf der Idee von Yosida, beruht.

Hier wollen wir das Theorem von Hille und Yosida beweisen, welches die Grundlage für alle folgenden Diskussionen sein wird.

3.2 Bemerkung. Sei X ein Banachraum und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A und $\omega(T) = \omega_0$.

(ii) $\big(\exp(-\lambda t)T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist C_0-Halbgruppe auf X mit Generator $A - \lambda I$ und $\omega\big(\exp(-\lambda)T\big) = \omega_0 - \lambda$.

3.3 Satz (Hille-Yosida '48; Kontraktionshalbgruppen-Fall)**.** *Für einen linearen Operator $A : D(A) \to X$ auf dem Banachraum X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) A ist der Generator einer C_0 - Kontraktionshalbgruppe T auf X.

(ii) Es gilt $\overline{D(A)} = X$, $(0, \infty) \in \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq 1$ für $\lambda > 0$.

In diesem Fall gilt

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)ds \quad (\lambda > 0).$$

3.4 Bemerkung. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist die Laplacetransformation von e^{tA} gegeben durch

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{tA}dt = (\lambda - A)^{-1},$$

wobei $\lambda \in \rho(A)$ Bedingung für die Existenz ist. Die Laplacetransformation knüpft also eine Verbindung zwischen Halbgruppe und Resolvente. Wir werden im Beweis von Theorem 3.3 sehen, dass dies auch X-wertig der Fall ist.

Beweis von Satz 3.3, (i) $\Rightarrow$ (ii) . Nach Bemerkung 3.2 generiert $A - \lambda I$ die C_0 - Halbgruppe $\big(\exp(-\lambda t)T(t)\big)_{t\geq 0}$ für festes $\lambda > 0$. Aus Lemma 2.10 b) folgt

$$\exp(-\lambda t)T(t)x - x = (A - \lambda)\int_0^t \exp(-\lambda s)T(s)xds, \quad \text{falls} \quad x \in X \tag{3-1}$$

und

$$\exp(-\lambda t)T(t)x - x = \int_0^t \exp(-\lambda s)T(s)(A - \lambda)xds, \quad \text{falls} \quad x \in D(A) \tag{3-2}$$

Es gilt

$$\int_0^\infty \|\exp(-\lambda s)T(s)x\|\, ds \leq \int_0^\infty \exp(-\lambda s)ds\|x\| \leq \frac{\|x\|}{\lambda}. \tag{3-3}$$

Somit existiert das Integral $\int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)ds$. Weiterhin erhält man

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)xds - \int_0^t \exp(-\lambda s)T(s)xds\Big\| \\
&= \int_0^\infty \chi_{(t,\infty)}(s)\exp(-\lambda s)\big\|T(s)x\big\|ds \\
&\leq \int_0^\infty \chi_{(t,\infty)}(s)\exp(-\lambda s)ds\|x\| \quad \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Satz von Lebesgue angewendet wurde. Die Abgeschlossenheit von A und $t \to \infty$ liefern dann in (3-1) bzw. (3-2),

$$x = (\lambda - A)\int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)xds =: (\lambda - A)R(\lambda)x \quad (x \in X),$$

$$x = R(\lambda)(\lambda - A)x, \quad (x \in D(A)).$$

Folglich ist $(\lambda - A) : D(A) \to X$ beschränkt und bijektiv. Nach dem Satz der stetigen Inversen gilt $\lambda \in \rho(A)$ und

$$(\lambda - A)^{-1} = R(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda s) T(s) ds,$$

und schließlich impliziert (3-3)

$$\left\| \lambda(\lambda - A)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq 1 \quad (\lambda > 0).$$

□

Um der Idee von Yosida zu folgen benötigen wir eine Folge von beschränkten Operatoren die in einem gewissen Sinne gegen A konvergiert. Hierzu hilft das

3.5 Lemma. *Sei $A\colon D(A) \to X$ mit $\overline{D(A)} = X$ gegeben, und seien $\omega \in \mathbb{R}, M > 0$ so, dass $[\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq M, \lambda \geq \omega$. Dann gilt*

(i) $\lambda(\lambda - A)^{-1}x \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} x \quad (x \in X)$,

(ii) $\lambda A(\lambda - A)^{-1}x = \lambda(\lambda - A)^{-1}Ax \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} Ax \quad (x \in D(A))$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beweis von Satz 3.3 (ii) ⇒ (i). Lemma 3.5 (ii) motiviert die Approximation von $\exp(tA)$ durch

$$\left(\exp(tA_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}, \qquad A_k = kA(k - A)^{-1} = k^2(k - A)^{-1} - kI.$$

Dann gilt $A_k \in L(X), k \in \mathbb{N}$ und $A_k x \to Ax$ in X für $x \in D(A)$. Nach Beispiel 2.8 b) ist

$$T_k(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(tA_k)^n}{n!}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ eine C_0-Halbgruppe auf X. Weiterhin gilt $A_k A_m = A_m A_k$, womit $T_k T_m = T_m T_k$ folgt.

1. Schritt: Definition der Halbgruppe. Obiges T_k ist kontraktiv für alle $k \in \mathbb{N}$, denn

$$T_k(t) = \exp(tA_k) = \exp(-kt)\exp\bigl(tk^2(k - A)^{-1}\bigr),$$

also

$$\|\exp(tA_k)\|_{L(X)} \leq \exp(-tk)\exp\bigl(tk\|k(k - A)^{-1}\|\bigr) \leq 1.$$

Für $x \in D(A)$ gilt nun $T_k(\cdot)x \in C^1\big([0,\infty),X\big)$. Mit Bemerkung 1.26 b) folgt

$$\begin{aligned} T_k(t)x - T_m(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds}\big(T_m(t-s)T_k(s)x\big)ds \\ &= \int_0^t T_m(t-s)T_k(s)(A_k - A_m)x ds, \end{aligned}$$

d.h.

$$\big\|T_k(t)x - T_m(t)x\big\| \le t\big\|(A_k - A_m)x\big\|, \quad t \ge 0, \tag{3-4}$$

was bedeutet, dass $T_k(t)x$ eine Cauchyfolge ist. Deshalb können wir T definieren als

$$T(t)x := \lim_{k\to\infty} T_k(t)x\ , \qquad x \in D(A), t \ge 0. \tag{3-5}$$

2. Schritt: T ist C_0-Kontraktionshalbgruppe. Wegen $\|T_k\|_{L(X)} \le 1$ und (3-3) sind die Voraussetzungen von Bemerkung 1.9 erfüllt, d.h. (3-5) gilt nicht nur für $x \in D(A)$, sondern für alle $x \in X$ und man hat $\|T(t)\|_{L(X)} \le 1$. Klar ist $T(0) = I$. Als nächstes ist

$$\begin{aligned} T(t+s)x &= \lim_{k\to\infty} T_k(t+s)x \\ &= \lim_{k\to\infty} T_k(t)T_k(s)x = T(t)T(s)x, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gilt wegen

$$\begin{aligned} \|T_k(t)T_k(s)x - T(t)T(s)x\| &= \|T_k(t)T_k(s)x - T_k(t)T(s)x + T_k(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \\ &\le \|T_k(t)T_k(s)x - T_k(t)T(s)x\| \\ &\quad + \|T_k(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \\ &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Was die starke Stetigkeit angeht, nehme $x \in D(A)$. Dann gilt unter erneuter Benutzung von Lemma 2.10

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{k\to\infty}\big(T_k(t)x - x\big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_0^t T_k(s)A_k x ds = \int_0^t T(s)Ax ds. \end{aligned} \tag{3-6}$$

Also folgt $T(t)x \to x$ für alle $x \in D(A)$, was sich nach Bemerkung 1.9 wegen $\|T(t)\| \le 1$ überträgt auf $T(t)x \to x$ für alle $x \in X$.

3. Schritt: A generiert T. Sei B der Generator von T. Dividiert man (3-6) durch t, dann erhält man durch den Grenzübergang $t \to 0$, dass

$$D(A) \subset D(B) \quad \text{ und } Ax = Bx \quad (x \in D(A)).$$

Nach Voraussetzung ist $1 \in \rho(A)$, die Richtung $(i) \Rightarrow (ii)$ des Beweises besagt aber, dass auch $1 \in \rho(B)$ gilt. Damit folgt $A = B$ (siehe Übungsaufgabe). $\square$

Wir wollen als nächstes demonstrieren, wie sich dieses Resultat auf zwei konkrete Beispiele anwenden lässt. Da wir die Fouriertransformation anwenden wollen, zuvor noch eine Bemerkung.

3.6 Beispiele. (a) Schrödinger - Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Betrachte das zur Schrödingergleichung gehörige Resolventenproblem

$$(\lambda - i\Delta)u(x) = f(x) \ , \qquad x \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{3-7}$$

Da die Fourier-Transformation ein Isomorphismus im Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen ist, ist die obige Gleichung äquivalent zur Gleichung

$$\big(\lambda + i|\xi|^2\big)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \ , \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \ , \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{3-8}$$

Als Lösungsansatz für u wähle

$$u = \mathscr{F}^{-1}\hat{u} = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda + i|\xi|^2}\right]\hat{f} \ , \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Man benutzt die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\lambda + i|\xi|^2}\right| &< \frac{1}{\big|\mathrm{Re}\{\lambda + i|\xi|^2\}\big|} = \frac{1}{\lambda} \ , \qquad \lambda > 0,\\
\left|\frac{i|\xi|^2}{\lambda + i|\xi|^2}\right| &< \frac{|\xi|^2}{\big|\mathrm{Im}\{\lambda + i|\xi|^2\}\big|} \le 1 \ , \qquad \lambda > 0,
\end{aligned}$$

und die Plancherelsche Formel, um

$$\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2 \le \frac{\|\hat{f}\|_2}{\lambda} = \frac{\|f\|_2}{\lambda}, \quad \lambda > 0, \tag{3-9}$$

$$\|i\Delta u\|_2 = \big\|{-i}|\cdot|^2\hat{u}\big\|_2 \le \|f\|_2, \quad \lambda > 0, \tag{3-10}$$

zu erhalten. Klar ist, dass $\hat{u}$ eindeutige Lösung von (3-8) in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, d.h. wegen der Unitarität von $\mathscr{F}$ ist also u eindeutige Lösung von (3-7) in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Als $L^2(\mathbb{R}^n)$ - Realisierung des Schrödingeroperators definiere $A_s u := i\Delta u$ mit

$$\begin{aligned}
D(A_s) &= \Big\{v \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathscr{F}^{-1}|\xi|^2\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)\Big\}\\
&= \Big\{v \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta v \in L^2(\mathbb{R}^n)\Big\}\\
&= H^2(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

$S(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^n)$ und $S(\mathbb{R}^n) \subset D(A_s)$ implizieren $D(A_s) \overset{d}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^n)$, also ist A_s dicht definiert.

Weiterhin setzen wir $R(\lambda)f := u_f$, wobei u_f die Lösung zu (3-7) mit rechter Seite f bezeichnet. Aus (3-10) folgt für $\lambda > 0$, dass $R(\lambda) : L^2(\mathbb{R}^n) \to D(A_s)$ und wir erhalten

$$(\lambda - i\Delta)R(\lambda)f = (\lambda - i\Delta)u_f = f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

sowie

$$R(\lambda)(\lambda - i\Delta)v = u_{(\lambda - i\Delta)v} = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda + i|\xi|^2}\right]\mathscr{F}(\lambda - i\Delta)v = v.$$

$$\Longrightarrow R(\lambda) = (\lambda - A_s)^{-1}\ , \qquad \lambda > 0.$$

Mit (3-9) folgt ferner $(0, \infty) \subset \rho(A_s)$, sowie

$$\|\lambda(\lambda - A_s)^{-1}f\|_2 = \|\lambda R(\lambda)f\|_2 = \|\lambda u_f\|_2 \leq \|f\|_2\ , \qquad \lambda > 0, f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Nach Theorem 3.3 generiert A_s also eine C_0 - Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Diese ist gegeben durch

$$\exp(tA_s) = \mathscr{F}^{-1}\exp\big(i|\xi|^2t\big)\mathscr{F}\ , \qquad t \geq 0.$$

b) Wärmeleitungs - Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Das zugehörige Resolventenproblem lautet

$$(\lambda - \Delta)u(x) = f(x)\ , \qquad x \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

$$\overset{FT}{\Longleftrightarrow} (\lambda + |\xi|^2)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\ , \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Setze $u := \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda+|\xi|^2}\right]f$. Analog zu (a) folgt, dass Δ eine C_0 - Kontraktionshalbgruppe $\big(\exp(t\Delta)\big)_{t\geq 0}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ generiert, die gegeben ist durch

$$\exp(t\Delta) = \mathscr{F}^{-1}\exp\big(-t|\xi|^2\big)\mathscr{F}.$$

3.7 Bemerkung. Wegen $\left|\frac{1}{\lambda+i|\xi|^2}\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, gilt für den Schrödingeroperator $A_s = i\Delta$ die Ungleichung

$$\|\lambda(\lambda - A_s)^{-1}\|_{L(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq 1 \quad (\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}),$$

d.h. auch $-A_s$ erzeugt eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Man spricht insgesamt von der *Schrödingergruppe*

$$(\exp(i\Delta t))_{t\geq 0} \subset L\big(L^2(\mathbb{R}^n)\big).$$

Diese ist stark stetig auf $\mathbb{R}$, und es gilt $\exp\big(i\Delta(t+s)\big) = \exp(i\Delta t)\exp(i\Delta s)$ $(s, t \in \mathbb{R})$.

Bemerkung (3.7) motiviert die folgende allgemeine Definition.

3.8 Definition. Sei X Banachraum. Eine Familie $\big(T(t)\big)_{t\in\mathbb{R}} \subset L(X)$ von stark stetigen Operatoren mit

(i) $T(0) = I$,
(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\qquad t, s \in \mathbb{R}$,

heißt C_0-*Gruppe* auf X.

3.9 Satz (Hille-Yosida für Kontraktionsgruppen)**.** *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein linearer Operator. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) A generiert eine C_0-Kontraktionsgruppe auf X,

*(ii) A und $-A$ generieren C_0-Kontraktions**halb**gruppen auf X,*

(iii) $\overline{D(A)} = X$, $\mathbb{R}\setminus\{0\} \subset \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \le 1$, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Beweis. Klar sind $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ nach Theorem 3.3 sowie $(i) \Rightarrow (ii)$ nach Definition 3.8. Es bleibt $(ii) \Rightarrow (i)$ zu zeigen. Definiere dazu

$$T(t) := \begin{cases} T_+(t) & : t \ge 0, \\ T_-(-t) & : t < 0, \end{cases}$$

wobei $T_\pm$ von $\pm A$ generiert werden. Sind $(T_+)_k$ und $(T_-)_k$ die Yosida - Approximationen aus Theorem 3.3, dann gilt $A_k(-A)_m = (-A)_m A_k$ und somit auch $(T_+)_k(T_-)_m = (T_-)_m(T_+)_k$. Setze nun

$$S(t) := T_+(t)T_-(t) , \qquad t \ge 0.$$

Dann gilt $S(0) = I$ und $\big(S(t)\big)_{t\ge 0} \subset L(X)$. Für die Ableitung ergibt sich

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AT_+(t)T_-(t)x - AT_+(t)T_-(t)x = 0 \quad (x \in D(A)).$$

Aus Bemerkung 1.26 b) folgt $S(t)x = S(0)x = x$ $(t \ge 0, x \in D(A))$ und nach Bemerkung 1.9 b) weiter $S = I$. Damit existiert $T_+(t)^{-1}$ und ist gegeben durch $T_-(t)$.

Seien $t, s \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, $s < 0$ und o.B.d.A. $t + s \ge 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(t+s)T(t)^{-1}T(s)^{-1} &= T_+(t+s)T_+(t)^{-1}T_-(-s)^{-1} \\ &= T_+(t+s)T_+(-s)T_+(t)^{-1} = I \end{aligned}$$

und damit

$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad (t, s \in \mathbb{R}).$$

Weiterhin ist in $t_0 > 0$ die Halbgruppe T stark stetig. Dies pflanzt sich wegen der Halbgruppeneigenschaft auf $\mathbb{R}$ fort. Klar ist, dass A die Gruppe T erzeugt. $\square$

3.10 Bemerkung. Da $\frac{1}{\lambda+|\xi|^2}$ singulär ist für $\lambda < 0$, generiert Δ keine C_0-Gruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Aus Bemerkung 3.2 sieht man, dass nicht alle Halbgruppen kontraktiv sind. Umgekehrt erhält man durch Verschieben i.a. bestenfalls eine beschränkte C_0 - Halbgruppe. Deshalb ist die folgende Verallgemeinerung wichtig.

3.11 Satz (Hille - Yosida, allgemeine Form)**.** *Sei X Banachraum, $A : D(A) \to X$ linear, $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist Generator einer C_0 - Halbgruppe T auf X mit $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M\exp(\omega t)$, $t \geq 0$,*

(ii) $\overline{D(A)} = X$, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ *und* $\|(\lambda-\omega)^k(\lambda-A)^k\|_{L(X)} \leq M, \lambda > \omega, k \in \mathbb{N}$.

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $\omega = 0$ voraus. Das ist nach Bemerkung 3.2 möglich.

„$(i) \Longrightarrow (ii)$“: Nach Voraussetzung gilt $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M \forall t \geq 0$. Wir definieren uns eine neue Norm durch

$$|||x||| := \sup_{s\geq 0} \|T(s)x\| \;, \qquad x \in X.$$

Für diese gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\| \;, \qquad & x \in X, \\ |||T(t)x||| = \sup_{s\geq 0}\|T(t+s)x\| \leq |||x||| \;, \qquad & x \in X, t \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist T kontraktiv auf $(X, |||\cdot|||)$. Nach Theorem 3.3 folgt schließlich

$$\begin{aligned} &|||\lambda(\lambda-A)^{-1}x||| \leq |||x||| \;, \qquad x \in X, \lambda > 0, \\ \Longrightarrow\ &|||\lambda^k(\lambda-A)^{-k}x||| \leq |||x||| \;, \qquad x \in X, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}, \\ \Longrightarrow\ &\|\lambda^k(\lambda-A)^{-k}x\| \leq M\|x\| \;, \qquad x \in X, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

„$(ii) \Longrightarrow (i)$“: Voraussetzung ist $\|\lambda^k(\lambda-A)^{-k}\|_{L(X)} \leq M, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}$. Auch hier definiert man sich für $\mu > 0$,

$$\|x\|_\mu := \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mu^k(\mu-A)^{-k}x\| \;, \qquad x \in X.$$

Es gilt das *Umnormierungslemma*:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|, \quad x \in X, \\ &(2) \quad \|\mu(\mu-A)^{-1}x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad x \in X, \\ &(3) \quad \|\lambda(\lambda-A)^{-1}x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad x \in X, 0 < \lambda \leq \mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(4) \quad \|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}x\| \le \|x\|_\mu, \quad x \in X, 0 < \lambda \le \mu, \\ &(5) \quad \|x\|_\lambda \le \|x\|_\mu, \quad x \in X, 0 < \lambda \le \mu. \end{aligned}$$

Wir wollen an dieser Stelle lediglich (3) beweisen, der Rest ist eine einfache Übungsaufgabe.

Aus der Resolventengleichung

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

folgt für $x \in X$,

$$(\lambda - A)^{-1}x = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}x + (\mu - A)^{-1}x.$$

Damit erhält man

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \le \frac{\mu - \lambda}{\mu}\|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu + \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu$$

und somit

$$\underbrace{\left(1 - \frac{\mu - \lambda}{\mu}\right)}_{=\lambda/\mu}\|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \le \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu \quad \Longrightarrow \quad (3).$$

Mit diesem Umnormierungslemma kann man eine weitere Norm auf X definieren:

$$|||x||| := \sup_{\mu > 0} \|x\|_\mu, \quad x \in X.$$

Es ist einfach einzusehen, dass

$$\|x\| \le |||x||| \le M\|x\|, \quad x \in X.$$

und man erhält

$$\begin{aligned} |||\lambda(\lambda - A)^{-1}x||| &= \sup_{\mu > 0} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \\ &= \max\Big\{ \sup_{0<\lambda\le\mu} \underbrace{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu}_{\le\|x\|_\mu \le |||x|||}, \sup_{\mu<\lambda} \underbrace{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu}_{\le\|\lambda(\lambda-A)^{-1}x\|_\lambda \le \|x\|_\lambda \le |||x|||} \Big\} \\ &\le |||x|||, \quad x \in X, \lambda > 0. \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung des $0 < \lambda \le \mu$ - Supremums wurde (3), und für $\mu < \lambda$ erst (5) dann (2) ausgenutzt. Nach Theorem 3.3 generiert A eine C_0 - Kontraktionshalbgruppe auf $(X, |||\cdot|||)$, damit auch eine C_0 - Halbgruppe auf $(X, \|\cdot\|)$ und man hat

$$\|\exp(tA)x\| \le |||\exp(tA)x||| \le |||x||| \le M\|x\| \;, \qquad x \in X, t \ge 0.$$

□

3.12 Bemerkung. Entsprechend zu Satz 3.9 gilt ein allgemeines Resultat wie Satz 3.11 auch für C_0 - Gruppen.

b) Dissipative Operatoren und der Satz von Lumer-Phillips

3.13 Definition. Sei X ein Banachraum. Für $x \in X$ ist das *Subdifferential* $J(x)$ definiert durch

$$J(x) := \Big\{\varphi \in X' : \|\varphi\|_{X'}^2 = \|x\|_X^2 = \langle x, \varphi\rangle\Big\}.$$

3.14 Definition. Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ linear. A heißt *dissipativ*, falls für jedes $x \in D(A)$ ein $j(x) \in J(x)$ existiert mit

$$\operatorname{Re}\langle Ax, j(x)\rangle \le 0.$$

3.15 Bemerkung. a) Nach dem Satz von Hahn-Banach ist $J(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$.

b) Sei $\big(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)\big)$ ein Hilbertraum, $x \in \mathcal{H}$, $j(x) \in J(x)$. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt

$$\exists^1 y_{j(x)} \in \mathcal{H} : \|x\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle x, j(x)\rangle = (x, y_{j(x)}) = \|y_{j(x)}\|_{\mathcal{H}}^2$$

und damit $y_{j(x)} = x$, d.h. $J(x) = \{x\}$. Somit ist in diesem Fall A genau dann dissipativ, wenn

$$\operatorname{Re}(Ax, x) \le 0 \quad (x \in D(A)).$$

c) Für $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, setze

$$\varphi_f(x) := \begin{cases} \|f\|_p^{2-p}\overline{f(x)}|f(x)|^{p-2} & : f(x) \neq 0 \\ 0 & : f(x) = 0 \end{cases},$$

dann gilt $J(x) = \{\varphi_f\}$. Der Beweis ist Übungsaufgabe. D.h. hier ist A genau dann dissipativ, wenn

$$\operatorname{Re}(Af, \varphi_f) \le 0\ , \qquad f \in D(A).$$

d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Für $f \in L^1(\Omega)$ oder $f \in C_0(\Omega)$ enthält $J(x)$ i.a. mehr als ein Element. Auch dieser Beweis ist dem geneigten Leser als Übungsaufgabe überlassen.

3.16 Lemma. *Sei X Banachraum, $A : D(A) \to X$ dissipativ. Dann gilt*

(i) $\|(\lambda - A)x\| \ge \lambda\|x\|\ , \qquad x \in D(A), \lambda > 0,$

(ii) *A ist abschließbar, d.h. es existiert eine eindeutige abgeschlossene Erweiterung $\overline{A}$ mit $D(A) \subset D(\overline{A})$ und $\overline{A}x = Ax$ $(x \in D(A))$.*

Beweis. (i): Sei $x \in D(A)$ mit $\|x\| = 1$ und $j(x) \in J(x)$ mit $\mathrm{Re}\langle Ax, j(x)\rangle \le 0$. Dann gilt $\langle x, j(x)\rangle = \|j(x)\|^2 = 1$ und

$$\begin{aligned}\|(\lambda - A)x\| &= \sup_{x' \in X', \|x'\|=1} \big|\langle(\lambda - A)x, x'\rangle\big| \ge \big|\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle\big| \\ &\ge \mathrm{Re}\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle \ge \lambda - \mathrm{Re}\langle Ax, j(x)\rangle \ge \lambda\end{aligned}$$

für $\lambda > 0$.

(ii): Abschließbarkeit von A ist gleichbedeutend mit: Für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \to 0$ und $Ax_k \to y$ ist zwingend $y = 0$. Seien (x_k), y wie oben, $\lambda > 0$ und $w \in D(A)$. Dann

$$\|\lambda(\lambda - A)x_k + (\lambda - A)w \overset{(i)}{\ge} \lambda\|\lambda x_k - w\|, .\|$$

Für $k \to \infty$ erhält man

$$\left\| -y + \left(1 - \frac{A}{\lambda}\right) w \right\| \ge \|w\|,$$

und für $\lambda \to \infty$ ergibt sich

$$\| - y + w\| \ge \|w\| \ , \qquad w \in D(A).$$

Wegen $\overline{D(A)} = X$ wähle $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $w_k \to y$. Damit ist

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|y - w_k\| \ge \lim_{k\to\infty} \|w_k\| = \|y\|,$$

also $y = 0$. □

3.17 Satz (Lumer-Phillips 1961)**.** *Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ linear.*

a) Es sei A dissipativ mit $\overline{D(A)} = X$. Weiter existiere ein $\lambda_0 > 0$ mit $\overline{R(A - \lambda_0)} = X$. Dann ist $\overline{A}$ Erzeuger einer C_0-Kontraktionshalbgruppe auf X.

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) *A ist dissipativ mit $\overline{D(A)} = X$, und es existiert ein $\lambda_0 > 0$ mit $R(A - \lambda_0) = X$.*

(ii) *A ist Erzeuger einer C_0-Kontraktionshalbgruppe*

Beweis. a) Sei $\overline{A}$ der Abschluss von A (Existenz durch Lemma 3.16 sichergestellt).

- **1. Schritt:** $\lambda_0 \in \rho(\overline{A})$

  Sei $x \in D(\overline{A})$, dann $\exists$ Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \to x$ und $Ax_k \to \overline{A}x$,

  $$\Longrightarrow \|(\lambda_0 - \overline{A})x\| = \lim_{k\to\infty} \|(\lambda_0 - A)x_k\| \geq \lim_{k\to\infty} \lambda_0\|x_k\| = \lambda_0\|x\|$$

  nach Lemma 3.16(i). Also ist $(\lambda_0 - \overline{A})$ injektiv.

  Sei $x \in X$ und $y_k \in D(A)$ mit $(\lambda_0 - A)y_k \to x$. Wegen der Dissipativität von A gilt

  $$\lambda_0\|y_k - y_l\| \leq \|(\lambda_0 - A)(y_k - y_l)\| \overset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  damit ist y_k Cauchyfolge in X. Sei $y = \lim_{k\to\infty} y_k$. Aus der Abgeschlossenheit von $\overline{A}$ folgt $y \in D(\overline{A})$ und $(\lambda_0 - \overline{A})y = x$, d.h. der Operator $(\lambda_0 - \overline{A})$ ist auch surjektiv. Nach dem Satz von der stetigen Inversen gilt somit $\lambda_0 \in \rho(\overline{A})$.

- **2. Schritt:** $(0,\infty) \subset \rho(\overline{A})$

  Klar ist, dass $\emptyset \neq (0,\infty)\cap\rho(\overline{A})$ offen in $(0,\infty)$ liegt. Sei $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)\cap\rho(\overline{A})$ mit $\lambda_k \to \lambda > 0$. Wegen

  $$\sigma\big((\mu - \overline{A})^{-1}\big) \setminus \{0\} = \left\{\frac{1}{\mu - \lambda}, \lambda \in \sigma(\overline{A})\right\}, \qquad \mu \in \rho(\overline{A}),$$

  folgt für den Spektralradius $r\big((\lambda_0 - \overline{A})^{-1}\big) := \max\big\{|\lambda| : \lambda \in \sigma\big((\lambda_0 - \overline{A})^{-1}\big)\big\}$, dass

  $$r\big((\lambda_0 - \overline{A})^{-1}\big) = \frac{1}{\operatorname{dist}\big(\lambda_0, \sigma(\overline{A})\big)}.$$

  Somit gilt

  $$\begin{aligned}\operatorname{dist}\big(\lambda_k, \sigma(\overline{A})\big) &= \frac{1}{r\big((\lambda_k - \overline{A})^{-1}\big)} \geq \|(\lambda_k - \overline{A})^{-1}\|_{L(X)}^{-1} \\ &\geq \lambda_k \geq C > 0 \quad (k \geq k_0).\end{aligned}$$

  Dies bedeutet $\lambda \in \rho(\overline{A})$. Damit ist die Menge $(0,\infty)\cap\rho(\overline{A})$ auch abgeschlossen. Da $(0,\infty)$ zusammenhängend ist, erhalten wir $(0,\infty) \subset \rho(\overline{A})$.

- **3. Schritt: Hille-Yosida anwenden**

  Wegen der Dissipativität von $\overline{A}$ gilt

  $$\|\lambda(\lambda - \overline{A})^{-1}\|_{L(X)} \leq \|x\|, \qquad x \in X, \lambda > 0,$$

  aus dem Theorem 3.3 von Hille - Yosida folgt die Behauptung.

b), (i) $\Longrightarrow$ (ii): Nach a) erzeugt $\overline{A}$ eine C_0-Halbgruppe. Für $\lambda_0 > 0$ ist $(\lambda_0 - A)\colon D(A) \to X$ surjektiv und $(\lambda_0 - \overline{A})\colon D(\overline{A}) \to X$ injektiv. Dann folgt aber auch schon $D(A) = D(\overline{A})$ und damit $A = \overline{A}$.

b), (ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $x \in D(A)$, $j(x) \in J(x)$. Mit Lemma 3.5 (i) erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\big\{\langle Ax, j(x)\rangle\big\} &= \lim_{\lambda\to\infty} \operatorname{Re}\lambda \cdot \langle A(\lambda - A)^{-1}x, j(x)\rangle \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \operatorname{Re}\lambda \cdot \big(\langle \lambda(\lambda - A)^{-1}x, j(x)\rangle - \underbrace{\langle x, j(x)\rangle}_{\|x\|^2}\big) \\
&\leq \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda\big(\underbrace{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|}_{\leq\|x\|} \cdot \|j(x)\| - \|x\|^2\big) \leq 0,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wiederum Theorem 3.3 ausgenutzt wurde. $\square$

4. Holomorphe Halbgruppen und holomorpher Funktionalkalkül

4.1 Worum geht's? In einer Reihe von Beispielen, insbesondere in der parabolischen Theorie, hat man nicht nur eine C_0-Halbgruppe, sondern sogar eine holomorphe Halbgruppe. Dabei handelt es sich um die Holomorphie einer Banachraum-wertigen Abbildung (nämlich in den Banachraum der beschränkten linearen Operatoren). Beschränkte holomorphe Halbgruppen sind durch Abschätzungen der Resolvente charakterisiert.

Holomorphe Halbgruppen besitzen eine Glättungseigenschaft. Für derartige Probleme lässt sich die klassische Lösbarkeit beweisen, wobei für inhomogene Probleme die Variation der Konstanten verwendet wird, welche schon aus dem endlichdimensionalen Fall bekannt ist.

Zunächst müssen in diesem Abschnitt einige Grundlagen über holomorphe Banachraum-wertige Funktionen bereitgestellt werden. Insbesondere wird der Dunford-Kalkül diskutiert, welcher etwa auch für die Spektraltheorie in Banachräumen wesentlich ist.

a) Vektorwertige Funktionentheorie und Dunfordkalkül

Im folgenden sei stets X ein komplexer Banachraum.

4.2 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f\colon G \to X$ heißt komplex differenzierbar an der Stelle $z_0 \in G$, falls der Limes

$$f'(z_0) := \lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \in X$$

existiert. Die Funktion f heißt holomorph in G, falls sie an jeder Stelle $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist. Wir schreiben $\mathscr{H}(G;X)$ für die Menge aller in G holomorphen X-wertigen Funktionen und $\mathscr{H}(G) := \mathscr{H}(G;\mathbb{C})$.

4.3 Bemerkung. Sei X ein Banachraum, $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to L(X)$. Äquivalent sind

(i) $f : G \to L(X)$ ist holomorph,

(ii) für jedes $x \in X$ ist $f(\cdot)x : G \to X$ holomorph,

(iii) für jedes $x \in X$ und jedes $x' \in X'$ ist $\langle f(\cdot)x, x'\rangle : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

Dies sieht man unter Verwendung der Cauchy-Integralformel und des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit.

4.4 Definition. Eine C_0-Halbgruppe T auf dem Banachraum X heißt *beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe auf X vom Winkel* $\varphi \in (0, \pi/2]$, falls $T\colon [0,\infty) \to L(X)$ eine holomorphe Fortsetzung auf

$$\Sigma_\varphi := \Big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \varphi \Big\}$$

besitzt, so dass für alle $\widetilde{\varphi} \in (0, \varphi)$ ein $M_{\widetilde{\varphi}}$ existiert mit

$$\|T(z)\|_{L(X)} \le M_{\widetilde{\varphi}}\,, \qquad z \in \Sigma_{\widetilde{\varphi}}.$$

4.5 Lemma. *Sei T beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe auf X vom Winkel φ.*

(i) *Es gilt* $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2) \quad (z_1, z_2 \in \Sigma_\varphi)$.

(ii) *Es gilt für alle $\widetilde{\varphi} < \varphi$ die Gleichheit* $\lim\limits_{\Sigma_{\widetilde{\varphi}} \ni z \to 0} T(z)x = x \quad (x \in X)$.

(iii) *Für $\widetilde{\varphi} < \varphi$ existiert der Limes*

$$\lim_{\Sigma_{\widetilde{\varphi}} \ni h \to 0} \frac{T(h)x - x}{h}$$

genau dann, wenn $x \in D(A)$. In diesem Fall stimmt dieser Limes mit Ax überein.

Beweis. Übung. □

Für holomorphe Banachraumwertige Funktionen gelten die bekannten Sätze der Funktionentheorie. So gilt zum Beispiel der Cauchy-Integralsatz und die Cauchy-Integralformel.

4.6 Satz (Cauchy-Integralformel). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathscr{H}(G; X)$. Falls γ ein nullhomologer Zyklus in G ist, so gilt*

$$f(z)\,\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z}\, f(w)dw \quad (z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)).$$

Beweis. Für jedes $x' \in X'$ ist $x' \circ f$ eine holomorphe komplexwertige Funktion, also gilt die skalare Cauchy-Integralformel

$$x'(f(z))\,\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z}\, x'(f(w))dw \quad (z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)).$$

Sei $z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)$. Definiere

$$y := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, f(w)dw.$$

Nach Definition des Integrals als Grenzwert in X von Integralen von Stufenfunktionen gilt für jedes $x' \in X'$ die Gleichheit

$$x'(y) = x'\Big(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, f(w)dw\Big) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, x'(f(w))dw.$$

Also erhalten wir $x'(y) = x'(f(z))$ für jedes $x' \in X'$. Nach dem Korollar zum Satz von Hahn-Banach (Satz 1.13 d)) folgt $y = f(z)$, was zu zeigen war. □

4.7 Definition (Riesz-Projektion)**.** Sei $A \in L(X)$ und $\sigma \subset \sigma(A)$ eine isolierte Teilmenge von $\sigma(A)$, d.h. eine in der Relativtopologie von $\sigma(A)$ offene und abgeschlossene Teilmenge. Sei γ eine geschlossene Kurve mit Werten in $\rho(A)$, welche σ umschließt. Dann heißt

$$P_\sigma := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

die zu σ gehörige Riesz-Projektion von A.

4.8 Lemma. *Der Operator P_σ ist eine Projektion, d.h. es gilt $P_\sigma = P_\sigma^2$.*

Beweis. Seien γ_1, γ_2 zwei geschlossene Kurven, welche σ umschließen und σ von $\tau := \sigma(A) \setminus \sigma$ trennen. Dabei sei der Wertebereich $\mathcal{R}(\gamma_1)$ im Inneren von γ_2. Dann folgt

$$\begin{aligned} P_\sigma^2 &= \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda\Big)\Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} (\lambda - A)^{-1} d\lambda\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} (\lambda - A)^{-1} (\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda \end{aligned}$$

Mit der Resolventengleichung (Bemerkung 1.15) können wir den letzten Ausdruck in der Form $Q - R$ schreiben, wobei

$$\begin{aligned} Q &:= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{1}{\mu - \lambda}\, (\lambda - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - A)^{-1} \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{\mu - \lambda}\, \mathrm{id}_X\, d\mu\Big) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda = P_\sigma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R &:= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{1}{\mu-\lambda}\,(\mu-A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} (\mu-A)^{-1}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{1}{\mu-\lambda}\ \mathrm{id}_X\, d\lambda\Big) d\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Beachte hier, dass $\mathcal{R}(\gamma_1)$ im Inneren von γ_2 liegt, so dass $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z) = 0$ für $z \in \mathcal{R}(\gamma_2)$ und $\operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1$ für $z \in \mathcal{R}(\gamma_1)$ gilt. □

4.9 Lemma. *a) Sei σ ein isolierter Teil von $\sigma(A)$. Dann sind Wertebereich $R(P_\sigma)$ und Kern $N(P_\sigma)$ beide abgeschlossen, und es gilt die Zerlegung*

$$X = R(P_\sigma) \oplus N(P_\sigma).$$

Beide Räume sind invariant unter A, und es gilt

$$\sigma(A|_{R(P_\sigma)}) = \sigma,\ \sigma(A|_{N(P_\sigma)}) = \sigma(A) \setminus \sigma.$$

b) Es gilt $P_{\sigma(A)} = \mathrm{id}_X$.

Beweis. a) Die Abgeschlossenheit von $N(P_\sigma)$ ist klar, da P_σ stetig ist. Die Abgeschlossenheit von $R(P_\sigma)$ folgt aus $R(P_\sigma) = N(1-P_\sigma)$. Aus $A(\lambda-A)^{-1} = (\lambda-A)^{-1}A$ für $\lambda \in \rho(A)$ folgt durch Integration $AP_\sigma = P_\sigma A$ und damit $AP_\sigma = P_\sigma A P_\sigma$. Somit ist $AR(P_\sigma) \subset R(P_\sigma)$, d.h. $R(P_\sigma)$ ist A-invariant. Dieselbe Überlegung mit $1 - P_\sigma$ zeigt, dass auch $N(P_\sigma)$ invariant unter A ist. Wegen $x = P_\sigma x + (1-P_\sigma)x$ $(x \in X)$ und $P_\sigma(1-P_\sigma) = 0$ erhält man die direkte Zerlegung in a).

Sei γ eine geschlossene Kurve, welche σ von $\tau := \sigma(A) \setminus \sigma$ trennt. Für $\mu \notin R(\gamma)$ definiere

$$S(\mu) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\mu-\lambda}\,(\lambda-A)^{-1} d\lambda.$$

Da P_σ mit A und somit mit $(\lambda-A)^{-1}$ vertauscht, gilt auch $S(\mu)P_\sigma = P_\sigma S(\mu)$, und die Räume $R(P_\sigma)$ und $N(P_\sigma)$ sind $S(\mu)$-invariant. Wir erhalten

$$\begin{aligned} S(\mu)(\mu-A) &= (\mu-A)S(\mu) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\mu-\lambda}\,(\mu-A)(\lambda-A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\mu-\lambda}\ \mathrm{id}_X\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda-A)^{-1} d\lambda \\ &= \begin{cases} -1 + P_\sigma, & \text{falls } \mu \text{ im Inneren von } \mathcal{R}(\gamma) \text{ liegt,} \\ P_\sigma, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Sei nun $\mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma$ und o.E. sei μ außerhalb von $\mathcal{R}(\gamma)$. Dann folgt $(\mu - A)S(\mu)x = S(\mu)(\mu - A)x = x$ für $x \in R(P_\sigma)$, d.h. $(\mu - A)|_{R(P_\sigma)}$ ist invertierbar. Damit erhalten wir $\sigma(A|_{R(P_\sigma)}) \subset \sigma$. Analog folgt $\sigma(A|_{N(P_\sigma)}) \subset \tau$. Falls andererseits $\mu \in \rho(A|_{R(P_\sigma)}) \cap \rho(A|_{N(P_\sigma)})$, so ist $\mu - A$ auf jedem der beiden Teilräume $N(P_\sigma)$ und $R(P_\sigma)$ eine Bijektion und somit auf ganz X bijektiv, d.h. $\mu \in \rho(A)$. Insgesamt erhalten wir

$$\sigma(A) \subset \sigma(A|_{N(P_\sigma)}) \cup \sigma(A|_{R(P_\sigma)}) \subset \sigma \cup \tau = \sigma(A).$$

Also muss überall Gleichheit stehen.

b) Wir wenden Teil a) auf $\sigma := \sigma(A)$ an und erhalten $\sigma(A|_{N(P_\sigma)}) = \sigma(A) \setminus \sigma = \emptyset$. Dies ist aber nur möglich, falls $N(P_\sigma) = \{0\}$, d.h. für $P_\sigma = \mathrm{id}_X$. □

4.10 Lemma. *Sei $A \in L(X)$ und γ eine geschlossene Kurve, für welche $\sigma(A)$ im Inneren von γ liegt. Dann gilt für jedes komplexe Polynom p die Gleichheit*

$$p(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma p(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Beweis. Es genügt, die Gleichheit für $p(z) = z^n$ nachzuweisen. Dazu verwende die Identität

$$A^n(\lambda - A)^{-1} = \lambda^n(\lambda - A)^{-1} - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{n-1-j} A^j.$$

Sei γ eine geschlossene Kurve, welche $\sigma(A)$ einschließt. Dann ist das Integral über die obige Summe gleich Null, da der Integrant holomorph von λ abhängt. Unter Verwendung von Lemma 4.9 b) erhält man daher

$$\begin{aligned} A^n &= A^n\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma A^n(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda^n(\lambda - A)^{-1} d\lambda, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

4.11 Definition (beschränkter Dunford-Kalkül)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $A \in L(X)$ mit $\sigma(A) \subset \Omega$. Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ mit Wertebereich $\mathcal{R}(\gamma) \subset \rho(A)$, welche $\sigma(A)$ einschließt. Zu $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ definiere

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

4.12 Satz. *In der Situation von Definition 4.11 ist $f \mapsto f(A)$, $\mathscr{H}(\Omega) \to L(X)$ ein Algebren-Homomorphismus, d.h. eine lineare Abbildung mit*

$$(fg)(A) = f(A)g(A) \quad (f, g \in \mathscr{H}(\Omega)).$$

Beweis. Wegen $\sup_{\lambda \in \mathcal{R}(\gamma)} |f(\lambda)| < \infty$ ist $f(A) \in L(X)$ wohldefiniert. Die Linearität von $f \mapsto f(A)$ ist klar.

Seien $f, g \in \mathscr{H}(\Omega)$ und seien γ_1, γ_2 zwei Kurven in Ω, welche $\sigma(A)$ einschließen, so dass $\mathcal{R}(\gamma_1)$ im Inneren von γ_2 liegt. Dann gilt unter Verwendung der Resolventengleichung

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \Big(\int_{\gamma_1} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda\Big)\Big(\int_{\gamma_2} g(\mu)(\mu - A)^{-1} d\mu\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} f(\lambda g(\mu)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda}\big[(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1}\big] d\mu d\lambda \\ &=: T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} T_1 &:= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda} (\lambda - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu\Big) f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} g(\lambda)f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= (f \cdot g)(A), \end{aligned}$$

da $\operatorname{ind}_{\gamma_2}(\lambda) = 1$ für $\lambda \in \mathcal{R}(\gamma_1)$ gilt. Mit $\operatorname{ind}_{\gamma_1}(\mu) = 0$ für $\mu \in \mathcal{R}(\gamma_2)$ folgt analog

$$T_2 := \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda} (\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda = 0.$$

□

b) Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren

Nun ist es das Ziel, auch für unbeschränkte Operatoren einen Funktionalkalkül zu entwickeln. Dabei werden sektorielle Operatoren betrachtet.

4.13 Definition. Sei $A\colon D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\sup_{\lambda \in \Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty.$$

Falls A ein sektorieller Operator ist, so heißt

$$\varphi_A := \sup\{\varphi : \ \rho(A) \supset \Sigma_\varphi, \ \sup_{\lambda \in \Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty\}$$

der spektrale Winkel von A.

4.14 Lemma. *Sei A ein sektorieller Operator in X mit spektralem Winkel φ_A. Zu $\varepsilon > 0$ definiere*

$$A_\varepsilon := (A - \varepsilon)(1 - \varepsilon A)^{-1}.$$

a) Es gilt $A_\varepsilon \in L(X)$, und A_ε ist invertierbar mit $A_\varepsilon^{-1} = A_{1/\varepsilon}$.

b) Es gilt $\rho(A_\varepsilon) \supset \Sigma_{\varphi_A}$, und für $\lambda \in \Sigma_{\varphi_A}$ ist

$$(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} = \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon\lambda)^2} \Big(\frac{\lambda + \varepsilon}{1 + \varepsilon\lambda} - A \Big)^{-1} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\lambda} \, .$$

c) Für alle $\varphi \in (0, \varphi_A)$ existiert eine Konstante $C = C(\varphi)$, welche nicht von ε abhängt, mit

$$\|\lambda(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}\| \le C \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi, \, \varepsilon > 0).$$

d) Für $\varepsilon \to 0$ erhält man $(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} \to (\lambda - A)^{-1}$ in $L(X)$ und $A_\varepsilon x \to Ax \quad (x \in D(A))$.

Beweis. a) und b) folgen durch direktes Nachrechnen.

c) Sei $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \le M \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi)$. Dann folgt unter Verwendung der Darstellung in b) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}\| &\le M \Big| \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon\lambda)^2} \cdot \frac{1 + \varepsilon\lambda}{\lambda + \varepsilon} \Big| + \Big| \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\lambda} \Big| \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \Bigg[\frac{M(1 - \varepsilon^2)}{|1 + \varepsilon\lambda| \cdot |1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}|} + \frac{1}{|1 + \frac{1}{\varepsilon\lambda}|} \Bigg]. \end{aligned}$$

Da $\varphi < \pi$, existiert eine Konstante K_φ so, dass für alle $\mu \in \Sigma_\varphi$ die Abschätzung $|1 + \mu| \ge K_\varphi$ gilt. Angewendet auf $\mu = \varepsilon\lambda$, $\mu = \frac{\varepsilon}{\lambda} \in \Sigma_\varphi$ bzw. $\mu = \frac{1}{\lambda\varepsilon} \in \Sigma_\varphi$ erhält man

$$\|(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}\| \le \frac{1}{|\lambda|} \Big[\frac{M}{K_\varphi^2} + \frac{1}{K_\varphi} \Big] = \frac{C}{|\lambda|}.$$

d) Die Konvergenz der Resolventen sieht man an der Darstellung in b). Für die Konvergenz von $A_\varepsilon x$ verwende

$$A_\varepsilon x - Ax = -\varepsilon(1-\varepsilon A)^{-1}x \quad (x \in D(A)).$$

Wegen $\|\varepsilon(1-\varepsilon A)^{-1}\| = \|(\frac{1}{\varepsilon} - A)^{-1}\| \le C\varepsilon$ folgt $A_\varepsilon x \to A_x \quad (x \in D(A))$. □

Wir wollen zu einem sektoriellen Operator A die Funktion $f(A)$ durch einen Dunford-Kalkül definieren. Da nun über einen unendlich langen Weg integriert werden muss, muss man die Menge der Funktionen einschränken. Beachte in folgender Definition, dass $\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg \lambda| > \varphi\} = -\Sigma_{\pi-\varphi}$.

4.15 Definition. Sei $\varphi \in (0, \pi]$. Zu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})$ definiere

$$\|f\|^\varphi_{\alpha,\beta} := \sup\{|\lambda^\alpha f(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}, |\lambda| \le 1\} + \sup\{|\lambda^{-\beta} f(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}, |\lambda| \ge 1\}.$$

Man setzt

$$\mathscr{H}_{\alpha,\beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}) := \{f \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}) : \|f\|^\varphi_{\alpha,\beta} < \infty\}$$

und

$$\mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}) := \bigcup_{\alpha,\beta<0} H_{\alpha,\beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}).$$

4.16 Satz (Ein Dunford-Kalkül für sektorielle Operatoren). *Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel φ_A, und sei $\varphi < \varphi_A$. Fixiere $\psi \in (\varphi, \varphi_A)$ und betrachte die Kurve*

$$\gamma_\psi := \{re^{-i\psi} : \infty > r \ge 0\} \cup \{re^{i\psi} : 0 \le r < \infty\}.$$

Dann definiert

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (f \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}))$$

einen Algebren-Homomorphismus $\Phi_A \colon f \mapsto f(A)$, $\mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi}) \to L(X)$. Die Abbildung Φ_A ist stetig im Sinn, dass für alle $\alpha, \beta < 0$ ein $C_{\alpha,\beta} > 0$ existiert mit

$$\|f(A)\|_{L(X)} \le C_{\alpha,\beta} \|f\|^\varphi_{\alpha,\beta} \quad (f \in \mathscr{H}_{\alpha,\beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})).$$

Falls A sektoriell, beschränkt und invertierbar ist, stimmt die obige Definition mit dem Dunford-Kalkül aus Definition 4.11 *überein.*

Für $f \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\varphi})$ gilt ferner $f(A_\varepsilon) \to f(A)$ in $L(X)$ für $\varepsilon \to 0$, und die Menge $\{f(A_\varepsilon) : \varepsilon > 0\} \subset L(X)$ ist beschränkt.

Beweis. **(i)** Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Wegen $\psi < \varphi_A$ existiert ein $M_A > 0$ mit

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \frac{M_A}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \mathcal{R}(\gamma_\psi)). \tag{4-1}$$

Nach Lemma 4.14 c) gilt diese Abschätzung (nach eventueller Vergrößerung von M_A) auch für A_ε anstelle von A.

Sei $f \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi})$, d.h. es existieren $\alpha, \beta < 0$ mit $f \in \mathscr{H}_{\alpha,\beta}(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi})$. Für $\lambda \in \mathcal{R}(\gamma_\psi)$ gilt dann

$$|f(\lambda)|\,\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \begin{cases} M_A\|f\|^{\varphi}_{\alpha,\beta}|\lambda|^{-1-\alpha}, & |\lambda| \le 1, \\ M_A\|f\|^{\varphi}_{\alpha,\beta}|\lambda|^{-1+\beta}, & |\lambda| \ge 1. \end{cases}$$

Somit ist

$$h_f(\lambda) := M_A\|f\|^{\varphi}_{\alpha,\beta}\big(|\lambda|^{-1-\alpha}\chi_{\{|\lambda|\le 1\}}(\lambda) + |\lambda|^{-1+\beta}\chi_{\{|\lambda|\ge 1\}}(\lambda)\big)$$

eine integrierbare Majorante von $f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}$ auf γ_ψ. Da A_ε ebenfalls der Abschätzung (4-1) genügt, ist φ_f auch eine simultane Majorante von $f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}$ für alle $\varepsilon > 0$.

(ii) Sei zunächst A sektoriell, beschränkt und invertierbar. Dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{C}\setminus\Sigma_\varphi$ kompakt. Wegen $0 \notin \sigma(A)$ existieren $r > 0$ und $R > 0$ so, dass $\sigma(A)$ von der Kurve $\gamma_{\psi,r,R}$ eingeschlossen wird, wobei $\gamma_{\psi,r,R} := re^{i[-\psi,\psi]} \cup [r,R]e^{i\psi} \cup Re^{i[\psi,-\psi]} \cup [R,r]e^{-i\psi}$. Dies gilt z.B. für $R > \|A\|$ und $r < \|A^{-1}\|^{-1}$.

Für $f \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi})$ gilt nach dem beschränkten Dunford-Kalkül

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,r,R}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}d\lambda.$$

Nach dem Cauchy-Integralsatz hängt der Wert des Integrals nicht von r und R ab, falls r hinreichend klein und R hinreichend groß ist. Nach Teil (i) des Beweises ist $f(\cdot)(\cdot - A)^{-1}$ auf γ_ψ integrierbar, und wir erhalten im Limes $r \to 0$ und $R \to \infty$ die Darstellung

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}d\lambda.$$

(iii) Sei nun A unbeschränkt. Wir wenden Teil (ii) auf die Approximationen A_ε an und erhalten

$$f(A_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}d\lambda.$$

Nach Lemma 4.14 d) gilt $(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} \to (\lambda - A)^{-1}$ in $L(X)$ für $\varepsilon > 0$. Nach Teil (i) des Beweises existiert eine integrierbare Majorante h_f, d.h. das Integral $f(A) \in L(X)$ ist wohldefiniert, und mit majorisierter Konvergenz folgt $f(A_\varepsilon) \to f(A)$ $(\varepsilon \to 0)$ in $L(X)$. Die Definition von h_f zeigt außerdem, dass $\|f(A)\| \le C_{\alpha,\beta}\|f\|^{\varphi}_{\alpha,\beta}$ wie auch $\|f(A_\varepsilon)\| \le C_{\alpha,\beta}\|f\|^{\varphi}_{\alpha,\beta}$ gilt. Insbesondere ist Φ_A stetig und die Familie $\{f(A_\varepsilon) : \varepsilon > 0\} \subset L(X)$ beschränkt.

Schließlich gilt $(fg)(A_\varepsilon) = f(A_\varepsilon)g(A_\varepsilon)$ nach Satz 4.12, und für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir $(fg)(A) = f(A)g(A)$, d.h. Φ_A ist ein Algebren-Homomorphismus. □

4.17 Definition und Satz. *Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel φ_A, und sei $\varphi < \varphi_A$. Sei*

$$\mathscr{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi) := \Big\{ f \in \bigcup_{\beta<0} \mathscr{H}_{0,\beta}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi) : f \text{ holomorph an der Stelle 0 fortsetzbar} \Big\}.$$

Zu $f \in \mathscr{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$ definiere

$$f_0(\lambda) := f(\lambda) - \frac{f(0)}{1-\lambda}.$$

Dann gilt $f_0 \in \mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$. Definiere

$$f(A) := f_0(A) + f(0)(1-A)^{-1}.$$

Beweis. Wie etwa der Mittelwertsatz der Differentialrechnung zeigt, ist eine Funktion $f \in \mathscr{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$ genau dann in $\mathscr{H}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)$, wenn $f(0) = 0$ ist. Dies ist für f_0 der Fall, also ist $f_0(A)$ nach Satz 4.16 definiert. □

4.18 Satz. *Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel φ_A, und sei $\varphi < \varphi_A$. Betrachte für $\psi \in (\varphi, \varphi_A)$ und $\delta > 0$ die Kurve*

$$\gamma_{\psi,\delta} := (\infty, \delta]e^{-i\psi} \cup \delta e^{[-\psi,\psi]} \cup [\delta, \infty)e^{i\psi}$$

(„Schlüssellochweg“). Dann gilt für hinreichend kleines $\delta > 0$ die Gleichheit

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (f \in \mathscr{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi)).$$

Die Abbildung $\Phi\colon \mathscr{H}_a(\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma}_\varphi) \to L(X),\ f \mapsto f(A)$ ist wohldefiniert und ein Algebra-Homomorphismus. Die Konvergenzaussagen von Satz 4.16 gelten analog.

Beweis. Wir approximieren wieder den Operator A durch A_ε. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\begin{aligned} f(A_\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} f(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} f_0(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} f(0)(1-\lambda)^{-1}(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi}} f_0(\lambda)(\lambda - A_\varepsilon)^{-1}d\lambda + f(0)(1-A_\varepsilon)^{-1} \\
&= f_0(A_\varepsilon) + f(0)(1-A_\varepsilon)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Falls δ so klein ist, dass f in $B(0,\delta)$ holomorph (fortsetzbar) ist, so folgt durch Grenzwert $\varepsilon \to 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}d\lambda = f_0(A) + f(0)(1-A)^{-1} = f(A).$$

Beachte hierbei, dass $f(\cdot)(\cdot - A)^{-1}$ auf $\gamma_{\psi,\delta}$ integrierbar ist. Wie im Beweis von Satz 4.16 folgen die Konvergenzaussagen von $f(A_\varepsilon)$ gegen $f(A)$ und damit die Multiplikativität von Φ aus der Gleichheit $(fg)(A_\varepsilon) = f(A_\varepsilon)g(A_\varepsilon)$. $\square$

4.19 Korollar. *a) Sei A sektorieller Operator mit Winkel $\varphi_A > 0$. Für $\mu \in \Sigma_{\varphi_A}$ gilt*

$$(\mu - A)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{1}{\lambda-\mu}(\lambda - A)^{-1}d\lambda.$$

b) Sei A sektorieller Operator mit Winkel $\varphi_A \in (\frac{\pi}{2},\pi]$, und sei $\vartheta \in (0, \varphi_A - \frac{\pi}{2})$. Dann ist für $z \in \Sigma_\vartheta$ der Operator

$$\exp(zA) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{z\lambda}(\lambda - A)^{-1}d\lambda \in L(X)$$

wohldefiniert. Es gilt

$$\exp(z_1 A)\exp(z_2 A) = \exp((z_1+z_2)A) \quad (z_1, z_2 \in \Sigma_\varphi).$$

Die Abbildung $z \mapsto \exp(zA)$, $\Sigma_\vartheta \to L(X)$ ist holomorph.

Beweis. a) Die Funktion $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda-\mu}$ gehört zu $\mathscr{H}_a(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi})$, wobei $\varphi < \varphi_A$ so groß gewählt wird, dass $\mu \in \Sigma_\varphi$ gilt. Damit folgt die Aussage aus Satz 4.18 (beachte, dass $(\mu - A_\varepsilon)^{-1} \to (\mu - A)^{-1}$ für $\varepsilon \to 0$).

b) Wähle $\varphi \in (\vartheta + \frac{\pi}{2}, \varphi_A)$. Für $z \in \Sigma_\vartheta$ gilt dann $\lambda \mapsto e^{\lambda z} \in \mathscr{H}_a(\mathbb{C}\setminus\overline{\Sigma_\varphi})$, und die Wohldefiniertheit und die Multiplikativität folgen aus Satz 4.18. Zum Nachweis der Holomorphie beachte man, dass $\lambda \mapsto \lambda e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1}$ über $\gamma_{\psi,\delta}$ integrierbar ist. Nach dem Satz über parameterabhängige Integrale existiert also die komplexe Ableitung $\frac{d}{dz}\exp(zA) \in L(X)$ für alle $z \in \Sigma_\vartheta$, d.h. $\exp(\cdot A)$ ist holomorph. $\square$

c) Generatoren holomorpher Halbgruppen

4.20 Bemerkung. (i) Für holomorphe Halbgruppen gilt $AT(t) = \frac{d}{dt}T(t) \in L(X)$ für alle $t > 0$. Dies impliziert

$$T(t)x \in D(A)\,, \qquad x \in X, t > 0. \tag{4-2}$$

Damit folgt bereits $T(t)x \in D(A^k)$ für alle $x \in X, t > 0, k \in \mathbb{N}$, wegen

$$A^k T(t)x = A^k \left[T\left(\frac{t}{k}\right)\right]^k x = \left[AT\left(\frac{t}{k}\right)\right]^k x.$$

(ii) Halbgruppen T mit der Eigenschaft (4-2) nennt man differenzierbar. Es gilt T holomorph $\Rightarrow T$ differenzierbar, i.a. jedoch nicht die Umkehrung. Differenzierbare (und insbesondere holomorphe) Halbgruppen haben i.d.R. glättende Eigenschaften, wie sie z.B. bei der Wärmeleitungsgleichung auftreten.

Man erhält folgende Charakterisierung für holomorphe Halbgruppen.

4.21 Satz. *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ linear. Äquivalent sind:*

(i) *A erzeugt eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe T auf X vom Winkel $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.*

(ii) *A ist sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.*

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Sei $\widetilde{\vartheta} \in (0, \vartheta)$. Für $\alpha \in (-\widetilde{\vartheta}, \widetilde{\vartheta})$ definiere $S(t) := T\big(\exp(i\alpha)t\big)$ $(t \geq 0)$. Nach Lemma 4.5 (i) und (ii) ist S eine C_0-Halbgruppe ist. Sei B ihr Erzeuger, dann gilt $x \in D(B)$ genau dann, wenn $\lim_{t\to 0} \frac{S(t)x-x}{t}$ existiert. Dies ist aber äquivalent dazu, dass $\lim_{t\to 0} \frac{T(\exp(i\alpha)t)x-x}{\exp(i\alpha)t}$ existiert. Nach Lemma 4.5 (iii) ist dies genau dann der Fall, wenn $x \in D(A)$. Also ist $D(A) = D(B)$ und $B = \exp(i\alpha)A$.

Aus Theorem 3.3 folgt $(0, \infty) \subset \rho\big(\exp(i\alpha)A\big)$ und

$$(\lambda - e^{i\alpha}A)^{-1} = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) T(e^{i\alpha}t)dt \quad (\lambda > 0). \tag{4-3}$$

Nach Voraussetzung existiert eine Konstante $M = M(\widetilde{\vartheta})$ mit

$$\|T(z)\|_{L(X)} \leq M \quad (z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}).$$

Wegen

$$\int_0^\infty |\exp(-\lambda t)|\; \|T(e^{i\alpha}t)\| dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda} \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0) \tag{4-4}$$

ist das Integral auf der rechten Seite von (4-3) sogar für alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$ konvergent und dort eine holomorphe Funktion von λ. Damit erhalten wir $\rho(e^{i\alpha}A) \supset \Sigma_{\pi/2}$ (Übungsaufgabe).

Insgesamt haben wir $e^{-i\alpha}\lambda \in \rho(A)$ für alle $|\alpha| < \widetilde{\vartheta}$ und alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$, d.h. $\Sigma_{\widetilde{\vartheta}+\pi/2} \supset \rho(A)$. Für alle $\lambda \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}+\pi/2}$ folgt wegen $\operatorname{Re}\lambda \geq C|\lambda|$ und (4-4) die Abschätzung

$$\sup\{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| : \lambda \in \Sigma_\psi\} < \infty \quad (\psi \in (0, \widetilde{\vartheta} + \frac{\pi}{2})).$$

Da $\widetilde{\vartheta} < \vartheta$ beliebig war, ist A sektoriell mit Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Sei $z \in \Sigma_\vartheta$. Wähle φ, ψ mit $\frac{\pi}{2} + |\arg z| < \varphi < \psi < \varphi_A$ und definiere

$$T(z) := \exp(zA) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Da $\lambda \mapsto e^{\lambda z}$ in ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, kann man hier $\delta > 0$ beliebig wählen. Nach Korollar 4.19 ist $T\colon \Sigma_\vartheta \to L(X)$ holomorph und erfüllt die Funktionalgleichung. Da $\lambda \mapsto Ce^{\lambda z} \max\{|\lambda|^{-1}, 1\}$ mit einer Konstanten $C > 0$ ein integrierbare Majorante von $e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1}$ auf $\gamma_{\psi,\delta}$ ist, folgt

$$\sup\{\|T(z)\| : z \in \Sigma_\psi\} < \infty \quad (\psi \in (0, \vartheta)).$$

Wir zeigen nun, dass T stark stetig ist. Seien $x \in D(A)$ und $z > 0$. Es gilt $\lambda(\lambda - A)^{-1} = I + A(\lambda - A)^{-1}$, also

$$\begin{aligned} T(z)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda - 0} x d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \\ &= x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda. \end{aligned}$$

Wir schätzen das letzte Integral auf jeder Wegstrecke ab, wobei wir $\delta := \frac{1}{z}$ wählen. Mit der Parametrisierung $\lambda = re^{i\psi}$, $\psi \in [\delta, \infty)$, erhalten wir

$$\Big\| \int_{[z^{-1},\infty)e^{i\psi}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \Big\| \leq \int_{z^{-1}}^\infty \frac{|\exp(rze^{i\psi})|}{r} \|(re^{i\psi} - A)^{-1} Ax\| dr.$$

Wegen $\psi > \frac{\pi}{2}$ existiert eine positive Konstante c mit $\operatorname{Re}(\lambda z) \leq -c|\lambda| z$ ($\arg\lambda = \psi$). Damit erhalten wir $|\exp(rze^{i\psi})| \leq \exp(-crz)$ ($r > 0$). Eingesetzt erhalten wir unter Verwendung der Resolventenabschätzung $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq M|\lambda|^{-1}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{z^{-1}}^\infty \frac{|\exp(rze^{i\psi})|}{r} \|(re^{i\psi} - A)^{-1} Ax\| dr &\leq \int_{z^{-1}}^\infty \frac{e^{-czr}}{r} \|(re^{i\psi} - A)^{-1} Ax\| dr \\ &\leq M \int_{z^{-1}}^\infty \frac{e^{-czr}}{r^2} \|Ax\| dr \end{aligned}$$

$$= Mz \int_1^\infty \frac{e^{-cs}}{s^2}\, ds\, \|Ax\| \to 0 \quad (z \to 0).$$

Bei der letzten Gleichheit wurde $s = zr$ substituiert. Analog erhalten wir

$$\int_{(\infty,\delta]e^{-i\psi}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}(\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \to 0 \quad (z \to 0).$$

Für den Bogen $z^{-1}e^{[-i\psi,i\psi]}$ wählen wir die Parametrisierung $\lambda = z^{-1}e^{i\alpha},\ \alpha \in [-\psi,\psi]$. Damit ist

$$\Big\| \int_{z^{-1}e^{[-i\psi,i\psi]}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}(\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \Big\| \le \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(z^{-1}e^{i\alpha}z)|\, \|(z^{-1}e^{i\alpha} - A)^{-1}Ax\| d\alpha$$
$$\le Mz \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(e^{i\alpha})| d\alpha\, \|Ax\| \to 0 \quad (z \to 0).$$

Insgesamt erhalten wir $T(z)x - x \to 0$ $(z \to 0)$ für alle $x \in D(A)$. Da $D(A)$ dicht in X ist, ist T stark stetig.

Nach dem bisher Bewiesenen ist T eine C_0-Halbgruppe. Es bleibt noch zu zeigen, dass T von A erzeugt wird. Mit majorisierter Konvergenz erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}T(z)x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z}\lambda(\lambda - A)^{-1}x d\lambda \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z} x d\lambda}_{=0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z} A(\lambda - A)^{-1} x d\lambda\end{aligned}$$

ergibt. Sei nun B der Generator von T. Ist $x \in D(A)$, so folgt

$$\frac{d}{dz}T(z)x = T(z)Ax \xrightarrow{|z|\to 0} Ax.$$

Daher gilt $D(A) \subset D(B)$ und $Ax = Bx$ für alle $x \in D(A)$. Wegen $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$ ist deshalb $A = B$. □

4.22 Beispiele. a) Der Laplaceoperator in $L^2(\mathbb{R}^n)$ hat nach Beispiel 3.6 die Resolvente

$$(\lambda - \Delta)^{-1} = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda + |\xi|^2}\right]\mathscr{F}.$$

Für Winkel $\varphi \in (0,\pi)$ können wir abschätzen

$$\frac{1}{|\lambda + |\xi|^2|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\operatorname{Re}\lambda + |\xi|^2\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\lambda\right)^2}} \le \frac{C_\varphi}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Aus dem Satz von Plancherel (Unitarität von $\mathscr{F}$) folgt

$$\|\lambda(\lambda - \Delta)^{-1}\|_{L(X)} \le C_\varphi \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi),$$

also ist Δ der Generator einer beschränkten holomorphen C_0-Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ vom Winkel $\frac{\pi}{2}$.

b) Der Schrödingeroperator $i\Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ erzeugt nach Bemerkung 3.7 eine C_0-Gruppe, insbesondere sind alle $T(t)$ invertierbar mit Inversem $T(-t)$. Daher kann es nicht sein, dass

$$T(t)u \in D(A) \quad (u \in L^2(\mathbb{R}^n), t > 0).$$

Das bedeutet T ist weder differenzierbar noch holomorph. Das kann man sich auch daran klarmachen, dass das Spektrum $\sigma(i\Delta)$ gerade durch Rotation um $i = \exp(i\pi/2)$ aus $\sigma(\Delta) = \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$ hervorgeht. Man findet keine in die linke Halbebene (negativer Realteile) hineinreichende Sektoren, die in $\rho(i\Delta)$ liegen.

Wir wollen auch noch die folgende, für Anwendungen wichtige, reelle Carakterisierung holomorpher Halbgruppen zeigen.

4.23 Satz. *Sei A der Generator einer beschränkten C_0-Halbgruppe T auf dem Banachraum X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) T ist beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe,

(ii) T ist differenzierbar und $\sup_{t>0} \|tAT(t)\|_{L(X)} < \infty$.

Beweis. **(i) $\Longrightarrow$ (ii).** Nach Bemerkung 4.20 ist T differenzierbar mit $T'(t) = AT(t) \in L(X)$. Wie im Beweis von Satz 4.21 wählen wir φ, ψ mit $\frac{\pi}{2} < \varphi < \psi < \varphi_A$. Für festes $t > 0$ gilt dann $f(\lambda) := \lambda e^{\lambda t} \in \mathscr{H}_a(\mathbb{C}\backslash\overline{\Sigma}_\varphi)$, und wegen $f(A_\varepsilon) \to f(A)$ $(\varepsilon \to 0)$ folgt

$$AT(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \lambda e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Wieder können wir $\delta > 0$ beliebig wählen, da der Integrand eine ganze Funktion ist. Wir setzen $\delta := t^{-1}$ und erhalten mit einer Konstanten $c > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|AT(t)\|_{L(X)} &\le C\Big(\int_{t^{-1}}^\infty e^{-ctr} dr + \frac{1}{t}\int_{-\psi}^{\psi} |\exp(e^{i\alpha})| d\alpha\Big)\\ &\le C\left(\frac{1}{t} + \frac{2\psi\exp(1)}{t}\right) = \frac{C}{t}.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\sup_{t>0} \|tAT(t)\|_{L(X)} < \infty$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Wie in Bemerkung 4.20 sieht man $T(t)X \subset D(A^k)$ $(t > 0, k \in \mathbb{N})$. Wegen $T'' = (AT)' = AT' = A^2T \in L(X)$ existiert die Ableitung $\frac{d^k}{dt^k}T(t)$ in $L(X)$, und es gilt
$$\frac{d^k}{dt^k}T(t) = A^kT(t) \quad (t > 0, k \in \mathbb{N}).$$
Die Taylor-Formel mit Integraldarstellung des Restgliedes R_N liefert für $t > 0$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < t$
$$T(t+h) = \sum_{k=0}^{N} \frac{h^k}{k!}T^{(k)}(t) + \frac{1}{N!}\int_t^{t+h} (t+h-s)^N T^{(N+1)}(s)ds.$$
Mit der Voraussetzung $\|tAT(t)\|_{L(X)} \leq M$ und der Stirlingschen Formel $n^n \leq \exp(n)n!$ folgt
$$\begin{aligned}\|T^{(k)}(t)\|_{L(X)} &= \|A^kT(t)\|_{L(X)} = \left(\frac{k}{t}\right)^k \left\|\left[\frac{t}{k}AT\left(\frac{t}{k}\right)\right]^k\right\|_{L(X)} \\ &\leq \left(\frac{Mk}{t}\right)^k \leq \left(\frac{Me}{t}\right)^k k!.\end{aligned}$$
In obiges Integral eingesetzt erhält man
$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{N!}\int_t^{t+h} (t+h-s)^N T^{(N+1)}(s)ds\right\| \\ &\qquad \leq \frac{1}{N!}\int_t^{t+h} |t+h-s|^N \left(\frac{Me}{s}\right)^{N+1} (N+1)!\, ds \\ &\qquad \leq (N+1)\left(|h|\,\frac{Me}{t-|h|}\right)^{N+1}.\end{aligned}$$
Sei nun $q < 1$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \frac{qt}{Me+1}$. Dann gilt
$$|h|\,\frac{Me}{t-|h|} \leq \frac{qtMe}{(Me+1)(t-\frac{qt}{Me+1})} = \frac{qtMe}{Met+t-qt} \leq q,$$
und somit konvergiert das Restglied der Taylorreihe gegen 0. Für solche h existiert daher die Taylorreihe und es gilt
$$T(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}T^{(k)}(t).$$
Wegen $\|T^{(k)}(t)\| \leq \left(\frac{Me}{t}\right)^k k!$ konvergiert die Reihe aber auch für $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| \leq \frac{qt}{Me+1}$. Daher besitzt T eine analytische Fortsetzung auf den Sektor Σ_φ mit $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{Me+1}\right)$. Sei nun $\widetilde{\varphi} \in (0, \varphi)$. Für $z \in \Sigma_{\widetilde{\varphi}}$ gilt (mit einem $q \in (0,1)$),
$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \leq \tan\widetilde{\varphi} = q \cdot \tan\varphi = \frac{q}{Me+1}.$$

und damit
$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}(Me+1) \le q < 1 \quad (z \in \Sigma_{\tilde{\varphi}}).$$
Wir schreiben $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = t + ih$ und erhalten
$$\|T(z)\|_{L(X)} = \Big\|T\big(t+ih\big)\Big\| \le \sum_{k=0}^{\infty} h^k \Big(\frac{Me}{t}\Big)^k \le \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (z = t+ih \in \Sigma_{\tilde{\varphi}}).$$
Also ist $T : \Sigma_\varphi \to L(X)$ beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe. □

d) Das inhomogene Cauchy-Problem

Sei nun A der Generator einer beschränkten C_0-Halbgruppe $(\exp(tA))_{t\ge 0}$ auf dem Banachraum X. Betrachte das inhomogene Cauchy - Problem
$$(\mathrm{ICP})_{f,x} \begin{cases} \dot{u}(t) - Au(t) &= f(t)\,, \qquad t \in (0,T), \\ u(0) &= x \in X, \end{cases}$$
Zunächst wollen wir geeignete Lösungsbegriffe einführen.

4.24 Definition. Sei $T > 0$, $x \in X$ und $f \in C\big((0,T),X\big)$. Eine Funktion $u : [0,T) \to X$ heißt *klassische Lösung von (ICP)$_{f,x}$*, falls

(i) $u \in C\big([0,T),X\big) \cap C^1\big((0,T),X\big) \cap C\big((0,T),D(A)\big)$,

(ii) u löst $(\mathrm{ICP})_{f,x}$.

4.25 Bemerkung. Gilt $f = 0$, dann folgt aus der Holomorphie von $\big(\exp(tA)\big)_{t\ge 0}$ sofort (i) für $u(t) = \exp(tA)x$. Weiterhin gilt $\exp(tA)x \to x$ für $t \to 0$, und nach Bemerkung 4.20 gilt $AT(t) = T'(t) \in L(X)$ für $t > 0$, d.h. u ist eine klassische Lösung zu $(ICP)_{0,x}$.

4.26 Satz (Variation der Konstanten-Formel)**.** *Sei $x \in X$, $T > 0$ und $f \in L^1\big((0,T),X\big) \cap C\big((0,T),X\big)$. Ist u eine klassische Lösung zu $(ICP)_{f,x}$, dann gilt*
$$u(t) = \exp(tA)x + \int_0^t \exp\big((t-s)A\big)f(s)ds\,, \qquad t \in (0,T). \tag{4-5}$$

Beweis. Betrachte die Hilfsfunktion
$$v(s) := \exp\big((t-s)A\big)u(s)\,, \qquad 0 \le s \le t.$$

Dann gilt $v \in C\big([0,T),X\big) \cap C^1\big((0,T),X\big) \cap C\big((0,T),D(A)\big)$ und

$$\begin{aligned}\dot v(s) &= -A\exp\big((t-s)A\big)u(s) + A\exp\big((t-s)A\big)u(s) + \exp\big((t-s)A\big)f(s)\\ &= \exp\big((t-s)A\big)f(s).\end{aligned}$$

Außerdem, $v(0) = \exp(tA)x$ und $u(t) = v(t)$. Für $\varepsilon > 0$ egibt sich

$$u(t) = v(t) = v(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t \underbrace{\exp\big((t-s)A\big)f(s)}_{\in L^1\big((0,T),X\big)}\,ds$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung. □

4.27 Bemerkung. Ist f gegeben wie in Satz 4.26, impliziert dieser Satz auch die Eindeutigkeit von klassischen Lösungen.

4.28 Definition. Sei X ein Banachraum, $f \in L^1\big((0,T),X\big)$, $x \in X$. Dann heißt u eine *milde Lösung* zu $(ICP)_{f,x}$, falls u (4-5) erfüllt.

Für milde Lösungen gilt offensichtlich $u \in C\big([0,T),X\big)$, jedoch müssen milde Lösungen i.a. keine klassischen Lösungen sein.

4.29 Satz. *Sei X ein Banachraum, $x \in X$, $f \in C\big([0,T),X\big)$ und u eine milde Lösung zu $(ICP)_{f,x}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *u ist klassische Lösung.*
(ii) *$u \in C\big((0,T),D(A)\big)$.*
(iii) *$u \in C^1\big((0,T),X\big)$.*

Beweis. Klar sind (i) $\Rightarrow$ (ii) sowie (i) $\Rightarrow$ (iii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Sei u eine milde Lösung. Man erhält

$$\begin{aligned}\int_0^t u(s)ds &= \int_0^t \exp(sA)xds + \int_0^t\int_0^s \exp\big((s-r)A\big)f(r)drds\\ &= \int_0^t \exp(sA)xds + \int_0^t\int_r^t \exp\big((s-r)A\big)f(r)dsdr\\ &= \int_0^t \exp(sA)xds + \int_0^t\int_0^{t-r} \exp(\sigma A)f(r)d\sigma dr\end{aligned}$$

Wegen Lemma 2.10 (ii) gilt

$$A\int_0^{t-r} \exp\big(\sigma A\big)f(r)d\sigma = \exp\big((t-r)A\big)f(r) - f(r) \in C\big([0,t],X\big),$$

letzteres bezüglich r. Nach Lemma 1.24 läßt sich der abgeschlossene Operator A ins Integral ziehen, d.h. man hat

$$A\int_0^t\int_0^{t-r}\exp(\sigma A)f(r)d\sigma dr=\int_0^t\exp\big((t-r)A\big)f(r)dr-\int_0^t f(r)dr$$

Aus der obigen Formel ergibt sich somit $\int_0^t u(s)ds\in D(A)$ und

$$A\int_0^t u(s)ds=-x+\exp(tA)x+\int_0^t\exp\big((t-r)A\big)f(r)dr-\int_0^t f(r)dr,$$

d.h. insgesamt

$$u(t)=x+A\int_0^t u(s)ds+\int_0^t f(r)dr\ ,\qquad 0\le t\le T.$$

Ist nun $u\in C\big((0,T),D(A)\big)$, dann folgt aus Lemma 1.24, dass

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h}=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}Au(s)ds+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(r)dr\xrightarrow{h\to 0}Au(t)+f(t). \tag{4-6}$$

Also existiert $\dot u(t)$ und es gilt $\dot u(t)=Au(t)+f(t)$ für $t\in[0,T)$, d.h. u ist klassische Lösung.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Gilt $u\in C^1\big((0,T),X\big)$, dann existiert die linke Seite von (4-6) und somit konvergiert $A\frac{1}{h}\int_t^{t+h}u(s)ds$ für $h\to 0$ in X. Wiederum aus der Abgeschlossenheit von A folgt schließlich auch hier $Au(t)=\dot u(t)-f(t)$ für $t\in(0,T)$. □

4.30 Korollar. *Seien $x\in X$ und $f\in C\big((0,T),X\big)$. Gilt zusätzlich $f\in C\big([0,T),D(A)\big)$, dann ist*

$$u(t)=\exp(tA)x+\int_0^t\exp\big((t-s)A\big)f(s)ds$$

die eindeutige klassische Lösung zu $(ICP)_{f,x}$.

Beweis. Es gilt

$$\Big(s\mapsto\exp\big((t-s)A\big)f(s)\Big)\in C\big([0,t],D(A)\big).$$

Mit Lemma 1.24 erhält man

$$A\int_0^t\exp\big((t-s)A\big)f(s)ds=\int_0^{t/2}A\exp\big((t-s)A\big)f(s)ds+\int_{t/2}^t\exp\big((t-s)A\big)Af(s)ds.$$

Daraus ergibt sich

$$A\int_0^t\exp\big((t-s)A\big)f(s)ds\in C((0,T),X)$$

und somit $u\in C\big((0,T);D(A)\big)$, d.h. u ist nach Satz 4.29 klassische Lösung. □

Auch die Voraussetzung $f \in C([0,T];X)$ reicht i.a. nicht um die Existenz einer klassischen Lösung zu garantieren. Es genügt allerdings, wenn man z.B. minimal stärkere Regularitätsvoraussetzungen in der Zeit annimmt. Der Vollständigkeit halber wollen zum Abschluss dieses Kapitels noch ein solches Resultat zitieren. Da wir dies im folgenden nicht benötigen, verzichten wir hier auf den Beweis.

4.31 Satz. *Sei X Banachraum, $x \in X$, $\alpha \in (0,1)$ und $f \in C^\alpha\big((0,T),X\big)$. Dann ist die durch* (4-5) *definierte Funktion u die eindeutige klassische Lösung zu $(ICP)_{f,x}$.*

Ein Beweis findet sich z.B. in [4].

5. Anwendungen auf lineare Gleichungen im Hilbertraum

5.1 Worum geht's? Inzwischen kennen wir wichtige Charakterisierungen für Generatoren von C_0-Halbgruppen. Da ein Operator genau dann eine C_0-Halbgruppe erzeugt, wenn das zugehörige Cauchy-Problem klassisch wohlgestellt ist, sind die Eigenschaften konkreter Operatoren wesentlich für das Lösen partieller Differentialgleichungen. In diesem Abschnitt werden einige Beispiele partieller Differentialgleichungen aus der Sichtweise der Halbgruppentheorie diskutiert.

a) Adjungierte Operatoren und der Satz von Stone

Bevor wir zu konkreten Gleichungen kommen, lohnt es sich einige Resultate aus der Hilbertraumtheorie bereitzustellen.

5.2 Bemerkung (adjungierte Operatoren)**.** a) Wir wiederholen hier die Begriffe des adjungierten Operators. Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ linear mit $\overline{D(A)} = X$. Die Banachraum-Adjungierte $A'\colon D(A') \to X'$ ist definiert durch

$$D(A') := \Big\{x' \in X' : \exists\, y' \in X' \;\forall\, x \in D(A) : x'(Ax) = y'(x)\Big\}, \quad A'x' := y'.$$

Man beachte, dass durch die Dichtheit von $D(A)$ der Wert von $A'x'$ wohldefiniert ist.

Falls H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist, liefert der Satz von Riesz einen isometrischen, konjugiert linearen Isomorphismus $H \to H'$. Damit definiert man die Hilbertraum-Adjungierte $A^*\colon H \supset D(A^*) \to H$ eines dicht definierten Operators A durch

$$D(A^*) := \Big\{x^* \in H : \exists\, y^* \in X \;\forall\, x \in D(A) : \langle Ax, x^*\rangle = \langle x, y^*\rangle\Big\}, \quad A^*x^* := y^*.$$

b) Ein dicht definierter Operator A in einem Hilbertraum H heißt

- selbstadjungiert, falls $A = A^*$,
- symmetrisch, falls $A \subset A^*$,
- schief-selbstadjungiert, falls $A^* = -A$.

Man beachte, dass die Gleichheit von Operatoren insbesondere die Gleichheit der Definitionsbereiche voraussetzt. Man sieht sofort, dass ein Operator A genau dann schief-selbstadjungiert ist, falls iA selbstadjungiert ist.

c) Ein beschränkter Operator $B \in L(H)$ in einem Hilbertraum H heißt unitär, falls B invertierbar ist und $B^* = B^{-1}$ gilt. Eine C_0-Gruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ heißt unitäre Gruppe, falls $T(t)$ für jedes $t \geq 0$ unitär ist. In diesem Fall gilt $T(t)^* = T(t)^{-1} = T(-t)$, wobei die letzte Gleichheit aus der Gruppeneigenschaft folgt. Im Beweis von Satz 3.8 haben wir gesehen, dass die C_0-Halbgruppe $(T(-t))_{t\geq 0}$ von $-A$ erzeugt wird.

5.3 Beispiel. Sei A gegeben durch $A = \frac{d}{dx}$ in $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, $D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R})$. Dann ist der adjungierte Operator A' gegeben durch $A' = -A$ in $L^{p'}(\mathbb{R})$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $D(A') = W^{1,p'}(\mathbb{R})$.

5.4 Beispiel. a) $A = \Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$ ist selbstadjungiert (Übungsaufgabe).

b) Der Schrödingeroperator $A_s = i\Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $D(A_s) = H^2(\mathbb{R}^n)$ ist schief - selbstadjungiert. Wegen

$$\exp(i\Delta t)^* = \big(\mathcal{F}^{-1}\exp(i|\xi|^2 t)\mathcal{F}\big)^* = \mathcal{F}^{-1}\exp(-i|\xi|^2 t)\mathcal{F} = \exp(-i\Delta t) = \exp(i\Delta t)^{-1}$$

erzeugt A_s eine unitäre Gruppe.

Das letzte Beispiel lässt sich abstrakt verallgemeinern. Dazu brauchen wir noch einige Aussagen über den adjungierten Operator.

5.5 Bemerkung. a) Falls X reflexiv ist und A ein dicht definierter und abgeschlossener linearer Operator ist, so ist A' ebenfalls dicht definiert.

b) Sei A der Generator einer C_0-Halbgruppe T auf dem Banachraum X.

(i) Die Familie $(T'(t))_{t\geq 0} \subset L(X')$, definiert durch $T'(t) := (T(t))'$ $(t \geq 0)$, erfüllt die Halbgruppen-Eigenschaften bis auf die starke Stetigkeit.

(ii) Ist die Familie T' stark stetig, dann wird sie durch A' generiert.

5.6 Satz (Stone '32)**.** *Sei H ein Hilbertraum und $A : D(A) \to H$ linear mit $\overline{D(A)} = H$. Dann ist A genau dann Generator einer unitären Gruppe, wenn A schief-selbstadjungiert ist.*

Beweis. **(i)** Sei A Generator einer unitären Gruppe. Es gilt

$$\frac{T(-t)x - x}{t} = \frac{T^*(t)x - x}{t},$$

also existiert für $t \to 0$ der linke Grenzwert genau dann, wenn der rechte existiert. Nach Bemerkung 5.2 wird $(T(-t))_{t\geq 0}$ von $-A$ erzeugt. Wegen $T^*(t) = T(-t)$ ist T^*

ebenfalls stark stetig, und nach Bemerkung 5.5 (ii) wird T^* von A^* erzeugt. Damit ergibt sich $D(A) = D(A^*)$ und $-Ax = A^*x \quad (x \in D(A))$.

(ii) Sei nun $A = -A^*$. Dann folgt für alle $x = D(A)$ die Gleichheit $\langle Ax, x\rangle = -\langle x, Ax\rangle = -\overline{\langle Ax, x\rangle}$ und damit

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle = -\operatorname{Re}\langle A^*x, x\rangle = 0 \quad (x \in D(A) = D(A^*)),$$

d.h. A und $-A = A^*$ sind beide dissipativ. Nach Lemma 3.16 (i) gilt $\|(I-A)x\| \geq \|x\|$ $(x \in D(A))$, analog für A^*. Daher ist $I - A$ injektiv und $R(I-A)$ ist abgeschlossen (vgl. Beweis von Satz 3.16). Wegen $R(I-A) = N(I-A^*)^\perp$ folgt $1 \in \rho(A)$ und analog $1 \in \rho(A^*)$. Damit erzeugen nach dem Satz von Lumer-Phillips sowohl A als auch $-A = A^*$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe, d.h. A erzeugt eine C_0-Gruppe T auf H.

Es bleibt noch $T^*(t) = T(-t)$ zu zeigen. Sei $T_k(t) = \exp(tA_k)$ mit Yosida-Approximand $A_k = A\left(1 - \frac{1}{k}A\right)^{-1}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle T^*(t)x, y\rangle &= \langle x, T(t)y\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle x, T_k(t)y\rangle = \lim_{k\to\infty}\sum_{l=0}^\infty \frac{t^l}{l!}\langle x, A_k^l y\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{l=0}^\infty \frac{t^l}{l!}\langle (A_k^*)^l x, y\rangle = \lim_{k\to\infty}\Big\langle \Big(\sum_{l=0}^\infty \frac{t^l}{l!}A_k^l\Big)^* x, y\Big\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty}\langle T^*(t)x, y\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle T_k(-t)x, y\rangle = \langle T(-t)x, y\rangle \quad (x, y \in H).
\end{aligned}$$

□

5.7 Bemerkung. a) Man könnte im Beweis des letzten Satzes, Teil (ii), auch versuchen zu zeigen, dass T^* stark stetig ist. Dann folgt $T^*(t) = T(-t)$ nach Satz 2.13 und Bemerkung 5.5 (ii).

b) Eine äquivalente Formulierung des Satzes von Stone lautet: Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine unitäre starkstetige Gruppe in einem Hilbertraum H. Dann existiert ein selbstadjungierter Operator A in H mit $T(t) = \exp(itA)$ $(t \in \mathbb{R})$.

Ein nützliches Mittel, um die Range-Bedingung im Theorem von Lumer und Phillips nachzurechnen, ist folgende Satz.

5.8 Satz (Lax und Milgram)**.** *Sei H ein separabler Hilbertraum und $a : H \times H \to \mathbb{C}$ eine hermitesche Sesquilinearform. Weiterhin sei a beschränkt und* streng koerzitiv, *d.h. es gelte*

(i) *Es existiert ein $C > 0$ mit $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ $(u, v \in H)$.*

(ii) *Es existiert ein $\delta > 0$ mit $a(u,u) \geq \delta\|u\|^2$ $(u \in H)$.*

Dann existiert für alle $f \in H$ ein eindeutiges $u_f \in H$ mit $a(u_f, v) = \langle f, v\rangle \quad (v \in H)$.

b) Die Wärmeleitungsgleichung in $L^2(\Omega, \mathbb{C})$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen auf Ω:

$$\text{(WLG)} \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega, u_0 \in L^2(\Omega, \mathbb{C}). \end{cases}$$

Dabei ist $u_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{C})$ gegeben. Die L^2 - Realisierung des Laplaceoperators mit Dirichlet-Randbedingungen ist gegeben durch

$$\Delta_D := \Delta \, , \qquad D(\Delta_D) := \Big\{ u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \Big\}.$$

5.9 Satz. *Der Operator Δ_D erzeugt eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\Omega)$. Insbesondere ist (WLG) wohlgestellt, und somit existiert zu jedem $u_0 \in D(\Delta_D)$ genau eine klassische Lösung u.*

Beweis. Wegen $\mathscr{D}(\Omega) \subset D(\Delta_D)$ ist Δ_D dicht definiert. Ferner gilt

$$\langle \Delta_D u, u \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (\Delta u)\overline{u} dx = -\int_\Omega \nabla u \overline{\nabla u} dx = -\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad (u \in D(\Delta_D)),$$

und somit ist Δ_D dissipativ. Die zu $1 - \Delta_D$ assoziierte Sesquilinearform $a \colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$a(u, v) = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{H^1}.$$

Zu $f \in L^2(\Omega)$ betrachte die Abbildung

$$F_f \colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}, \; u \mapsto \langle u, f \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Wegen

$$\big| \langle u, f \rangle_{L^2(\Omega)} \big| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

ist $F_f \in (H_0^1(\Omega))'$. Nach dem Satz von Lax und Milgram (oder dem Satz von Riesz über den Dualraum von Hilberträumen) folgt, dass zu jedem $f \in H_0^1(\Omega)$ genau ein $u_f \in H_0^1(\Omega)$ existiert mit

$$a(u_f, v) = \langle f, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad (v \in H_0^1(\Omega)).$$

Wählt man hier speziell $v \in \mathscr{D}(\Omega)$, so gilt nach Definition der distributionellen Ableitung

$$(1 - \Delta) u_f = f \quad \text{in } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Wegen $u, f \in L^2(\Omega)$ folgt $\Delta u_f \in L^2(\Omega)$ und damit $u_f \in D(\Delta_D)$. Da $f \in L^2(\Omega)$ beliebig war, ist $1 - \Delta_D$ surjektiv. Nach dem Theorem von Lumer und Phillips erzeugt Δ_D somit eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\Omega)$. Damit ist (WLG) klassisch wohlgestellt. $\square$

5.10 Bemerkung. a) Wir werden dieses Ergebnis später noch deutlich verbessern.

b) Falls Falls $\partial\Omega$ genügend glatt ist (z.B. Lipschitz), dann gilt

$$D(\Delta_D) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

5.11 Bemerkung. a) Das analoge Resultat gilt, wenn Δ durch $A := \operatorname{div}(a\nabla)$ ersetzt wird, wobei $a \in C\big(\overline{\mathbb{R}}_+, C^1(\Omega)\big)$ mit $a(t,x) > \delta \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times \Omega)$. Dies zeigt man unter Verwendung des Satzes von Lax-Milgram.

b) Mit Verallgemeinerungen des Satzes von Lax und Milgram kann ein entsprechendes Resultat für gewisse nicht-symmetrische A erhalten werden.

c) Auch für Neumann-Randbedingungen, d.h. für den Operator $\Delta_N = \Delta$ mit $D(\Delta_N) := \Big\{u \in H^2(\Omega) : \partial_\nu u\Big|_{\partial\Omega} = 0\Big\}$, wobei $\partial\Omega$ glatt und ν äußeres Normalenfeld, kann ein entsprechendes Resultat gezeigt werden. Hierbei ist $\partial_\nu u\Big|_{\partial\Omega} = 0$ zu verstehen im Sinne von

$$\langle \Delta u, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle \quad (\varphi \in H^1(\Omega)).$$

c) Die Schrödingergleichung in $L^2(\Omega, \mathbb{C})$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten

$$\text{(SG)} \left\{ \begin{aligned} u_t - i\Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega,\\ u &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega,\\ u|_{t=0} &= u_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \right.$$

Die L^2-Realisierung des Schrödingeroperators ist gegeben durch

$$A_s := i\Delta, \quad D(A_s) = D(\Delta_D).$$

5.12 Satz. *Der Schrödinger-Operator A_s erzeugt in $L^2(\mathbb{R}^n)$ eine starkstetige unitäre Gruppe. Insbesondere ist* (SG) *wohlgestellt.*

Beweis. Wegen $\langle \Delta_D u, v\rangle = \langle u, \Delta_D v\rangle$ für $u, v \in D(\Delta_D)$ ist Δ_D symmetrisch. Aus der Surjektivität von $1 - \Delta_D$ folgt die Injektivität von $I - \Delta_D^* = (I - \Delta_D)^*$. Wir wissen bereits, dass $1 - \Delta_D$ surjektiv ist. Wegen $N((1-\Delta_D)^*) = [R(1-\Delta_D)]^\perp$ folgt die Injektivität von $1 - \Delta_D^*$.

Wir haben somit $1 - \Delta_D^* \supset 1 - \Delta_D$, der Operator $1 - \Delta_D^*$ ist injektiv und $1 - \Delta_D$ surjektiv. Daraus folgt $D(\Delta_D) = D(\Delta_D^*)$, d.h. Δ_D ist selbstadjungiert. Somit ist A_s schief-selbstadjungiert, und die Behauptung folgt aus dem Satz von Stone. $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass überraschenderweise der Schrödinger-Operator in $L^p(\mathbb{R}^n)$ *keine* C_0-Halbgruppe erzeugt.

5.13 Satz (Hörmander '60). *Sei* $1 < p < \infty$. *Dann erzeugt der Schrödingeroperator* A_s *genau dann eine* C_0*-Halbgruppe auf* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *wenn* $p = 2$. *Insbesondere ist* (SG) *in* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *für* $p \neq 2$ *nicht wohlgestellt.*

Ein Beweis findet sich z.B. in [4].

d) Die Wellengleichung: L^2-Theorie

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten zunächst die um 1 verschobene Wellengleichung

$$\text{(WG)}\left\{\begin{aligned} w_{tt} - (\Delta - 1)w &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega,\\ w &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega,\\ w|_{t=0} &= w_0 && \text{in } \Omega,\\ w_t|_{t=0} &= w_1 && \text{in } \Omega. \end{aligned}\right.$$

Dabei sei $w_0 \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $w_1 \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$. Man transformiert (WG) auf ein System erster Ordnung in der Zeit durch die Definitionen $u_1 := w$ und $u_2 := w_t$. Das zugehörige System erster Ordnung lautet somit

$$u_t = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_t \\ w_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_t \\ (\Delta - 1)w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - 1 & 0 \end{pmatrix} u.$$

Dies gibt Anlass zur Definition des Operators

$$Au := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

im Hilbertraum $H := H_0^1(\Omega; \mathbb{R}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_H := \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega;\mathbb{R})} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R})},$$

wobei der Definitionsbereich durch $D(A) := D(\Delta_D) \times H_0^1(\Omega; \mathbb{R}) \subset H$ gegeben ist.

5.14 Satz. *Der oben definierte Operator* A *erzeugt eine* C_0*-Kontraktionshalbgruppe auf* $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}) \times L^2(\Omega; \mathbb{R})$. *Insbesondere besitzt* (WG) *für jedes* $\binom{w_0}{w_1} \in D(A)$ *eine eindeutige klassische Lösung.*

Beweis. Es gilt

$$\langle Au, u \rangle_H = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H$$

$$= \langle u_2, u_1\rangle_{H^1} + \langle (\Delta - 1)u_1, u_2\rangle_{L^2}$$
$$= \langle u_2, u_1\rangle_{L^2} + \langle \nabla u_2, \nabla u_1\rangle_{L^2} - \langle \nabla u_1, \nabla u_2\rangle_{L^2} - \langle u_1, u_2\rangle_{L^2} = 0.$$

Daher ist A ist dissipativ. Wir rechnen nach, dass $1-A$ surjektiv ist. Dazu sei $f \in H$ gegeben. Wir suchen u mit

$$(1-A)u = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 - (\Delta - 1)u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist äquivalent zu den Bedingungen

$$u_2 = u_1 - f_1, \quad 2u_1 - \Delta u_1 = f_1 + f_2.$$

Da Δ_D Generator einer C_0 - Kontraktionshalbgruppe ist (Satz 5.9), folgt $2 \in \rho(\Delta_D)$. Daher existiert genau ein $u_1 \in D(\Delta_D)$ mit $2u_1 - \Delta u_1 = f_1 + f_2$. Mit $u_2 := u_1 - f_1 \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R})$ gilt $(1-A)u = f$, d.h. $1-A$ ist surjektiv. Nach dem Satz von Lumer-Phillips erzeugt A eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Also ist die erste Komponente des Vektors $\exp(tA)\binom{w_0}{w_1}$ die eindeutige Lösung zu (WG). □

5.15 Bemerkung. a) Der Operator $-A$ ist ebenfalls dissipativ und $-A-1$ ist surjektiv. Daher erzeugt nach dem Satz von Lumer-Phillips auch $-A$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe. Somit generiert A eine C_0-Kontraktionsgruppe auf $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

b) Die eigentliche Wellengleichung führt zum Operator $\widetilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$. Dieser erzeugt eine C_0-Gruppe, die allerdings nicht kontraktiv ist. Hierauf werden wir später im Kapitel über Störungstheorie zurückkommen.

e) Die Stokesgleichung in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die Stokesgleichung ist gegeben durch das System

$$\text{(SG)} \begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla p = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Unbekannt ist hier nicht nur das Geschwindigkeitsfeld $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, sondern auch der Druck $p : \Omega \to \mathbb{R}$. Um Resultate der Halbgruppentheorie anwenden zu können, muss zunächst (SG) ein Grundraum sowie ein geeigneter Operator zugeordnet werden. Unter der Annahme, dass eine genügend glatte Lösung existiert, ergibt sich

$$0 = (\operatorname{div} u)|_{t=0} = \operatorname{div}(u|_{t=0}) = \operatorname{div} u_0.$$

Um die Wohlgestelltheit zu garantieren, muss also a priori schon $\operatorname{div} u_0 = 0$ vorausgesetzt werden. Diese Bedingung nimmt man daher schon in die Definition des Grundraums auf. Dies ist die Motivation der folgenden Definition.

5.16 Definition. a) Sei $\mathscr{H}^1(\Omega;\mathbb{R}) := \{v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R}) : \nabla v \in L^2(\Omega;\mathbb{R})\}$. Definiere auf $\mathscr{H}^1(\Omega;\mathbb{R})$ die Äquivalenzrelation $u \sim v :\Leftrightarrow u - v = \text{const}$. Dann heißt die Menge der Äquivalenzklassen $\dot{H}^1(\Omega;\mathbb{R}) := \mathscr{H}^1(\Omega;\mathbb{R})/\sim$ der homogene L^2-Sobolevraum der Ordnung 1. Auf $\dot{H}^1(\Omega)$ wird das Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{\dot{H}^1(\Omega;\mathbb{R})} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \quad (u, v \in \dot{H}^1(\Omega;\mathbb{R}))$$

erklärt.

b) Die Menge

$$L^2_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n) : \langle u, \nabla\varphi\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} = 0 \quad (\varphi \in \dot{H}^1(\Omega;\mathbb{R}))\}$$

heißt der Unterraum der divergenzfreien L^2-Vektorfelder auf Ω.

5.17 Bemerkung. Der Raum $\dot{H}^1(\Omega;\mathbb{R})$ ist ein Hilbertraum. Dies wird hier nicht bewiesen.

5.18 Lemma. *a) Die Teilräume $L^2_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^n)$ und $G_2(\Omega;\mathbb{R}^n) := \{\nabla q : q \in \dot{H}^1(\Omega;\mathbb{R})\}$ sind beide abgeschlossen in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$.*

b) Für $u \in L^2_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^n)$ gilt $\operatorname{div} u = 0$ in $\mathscr{D}'(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

c) Sei Ω ein C^1-Gebiet und $\nu\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenvektorfeld. Dann gilt für $u \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n) \cap L^2_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^n)$ die Gleichheit $u \cdot \nu = 0$ auf $\partial\Omega$.

Beweis. a) Die Abbildung $T\colon \dot{H}^1(\Omega;\mathbb{R}) \to L^2(\Omega;\mathbb{R}^n),\ q \mapsto \nabla q$ ist nach Definition der Normen eine Isometrie zwischen zwei Hilberträumen. Daher ist $G_2(\Omega;\mathbb{R}^n) = R(T)$ abgeschlossen. Wegen $L^2_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^n) = (G_2(\Omega;\mathbb{R}^n))^\perp$ ist auch $L^2_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen.

b) Wegen $\mathscr{D}(\Omega;\mathbb{R}) \subset \mathscr{H}^1(\Omega)$ folgt für $u \in L^2_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^n)$ insbesondere $\langle u, \nabla\varphi\rangle = 0$ ($\varphi \in D(\Omega;\mathbb{R})$), d.h. $\operatorname{div} u = 0$ in $\mathscr{D}'(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

c) Nach dem Satz von Gauß gilt für $u \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n) \cap L^2_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega;\mathbb{R})$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \varphi(u\cdot\nu) dS(x) &= \int_{\partial\Omega} (\varphi u)\cdot\nu) dS(x)\\ &= \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi u) dx = \int_\Omega \varphi \operatorname{div} u\, dx + \int_\Omega u\nabla\varphi\, dx = 0,\end{aligned}$$

d.h. $u \cdot \nu = 0$ auf $\partial\Omega$. □

Allgemein erfüllen die Funktionen in $L^2_\sigma(\Omega)$ die Bedingung aus Teil c) des vorigen Lemmas in einem schwachen Sinne. Dies kann rigoros definiert werden, auf was wir hier allerdings nicht weiter eingehen wollen. Beachte, dass die plausible physikalische Interpretation dieser Bedingung darin besteht, dass in Normalenrichtung keine Flüssigkeit durch den festen Rand treten kann.

5.19 Definition (Helmholtz-Zerlegung)**.** Die orthogonale Zerlegung

$$L^2(\Omega;\mathbb{R}^n) = L^2_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^n) \oplus G_2(\Omega;\mathbb{R}^n) \tag{5-1}$$

heißt die Helmholtz-Zerlegung von $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Die zu (5-1) gehörende orthogonale Projektion $P_\Omega : L^2(\Omega;\mathbb{R}^n) \to L^2_\sigma(\Omega;\mathbb{R}^n)$ mit $N(P_\Omega) = G_2(\Omega)$ heißt *Helmholtz-Projektion*.

5.20 Bemerkung. (5-1) ist die aus der Physik bekannte Tatsache, dass gewisse Vektorfelder f eine eindeutige Zerlegung $f = f_1 + f_2$ besitzen mit $\operatorname{div} f_1 = 0$ und $\operatorname{rot} f_2 = 0$. Beispielsweise gilt (5-1) für $L^q(\Omega)$ für $1 < q < \infty$, wenn Ω beschränkt der Klasse C^1 ist, nicht jedoch z.B. in $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C^k(\Omega)$.

Die Anwendung von P_Ω auf die erste Zeile von (SG) ergibt

$$0 = P_\Omega(\partial_t u - \Delta u + \nabla p) = \partial_t u - P_\Omega \Delta u.$$

Damit reduziert sich (SG) zum Cauchyproblem

$$\begin{cases} \dot u - Au = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

mit $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ und dem Operator

$$A := P_\Omega \Delta \ , \qquad D(A) = \Big\{ u \in H^1_0(\Omega) \cap L^2_\sigma(\Omega) : P_\Omega \Delta u \in L^2_\sigma(\Omega) \Big\}.$$

5.21 Satz. *Der Stokesoperator $A = P_\Omega \Delta$ ist der Generator einer C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $L^2_\sigma(\Omega)$.*

Beweis. Für $u \in D(A)$ gilt unter Verwendung der Orthogonalität von P_Ω

$$\langle Au, u\rangle_{L^2} = \langle P_\Omega \Delta u, u\rangle_{L^2} = \langle \Delta u, P_\Omega u\rangle_{L^2} = \langle \Delta u, u\rangle_{L^2} = -\|\nabla u\|_{L^2} \le 0.$$

Somit ist A ist dissipativ. Um die Voraussetzung des Satzes von Lumer-Phillips nachzuweisen, wendet man den Satz von Lax-Milgram im Raum $H^1_0(\Omega) \cap L^2_\sigma(\Omega)$ an. Dies erfolgt analog zu den vorherigen Abschnitten und sei deshalb dem Leser überlassen. □

6. Störungstheorie und Anwendungen

6.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt soll der Grundgedanke der Störungstheorie am Beispiel von Generatoren von C_0-Halbgruppen diskutiert werden. Die Idee einer „kleinen" Störung ist bereits aus der Neumann-Reihe bekannt, welche verwendet wird, um die Invertierbarkeit einer kleinen Störung eines invertierbaren Operators zu zeigen. Störungsresultate gelten für dissipative Operatoren, für Erzeuger von C_0-Halbgruppen und für Erzeuger von holomorphen Halbgruppen. Als Anwendungsbeispiele werden die Wellengleichung und ein Schrödingeroperator diskutiert.

a) Abstrakte Störungstheorie

Sei A Generator einer C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X und $B : D(B) \to X$ ein linearer Operator. Im folgenden wollen wir uns mit dem Problem befassen, unter welchen Bedingungen an B und A die Summe $A + B$ wieder eine C_0-Halbgruppe auf X generiert. Hierbei wird unterschieden bezüglich C_0-Halbgruppe, C_0-Kontraktionshalbgruppe und holomorphe C_0-Halbgruppe. Der Kern für alle folgenden Störungsresultate ist jedoch die folgende Zutat:

6.2 Lemma. *Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$, $B : D(B) \to X$ lineare Operatoren mit $D(A) \subset D(B)$. Es gelte:*

(i) *Es existieren Konstanten $\varphi \in [0, \pi)$ und $M_\varphi > 0$ mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le M_\varphi \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi).$$

Für $\varphi = 0$ setzen wir $\Sigma_\varphi := (0, \infty)$.

(ii) *Es existieren $\alpha \in [0, 1)$ und $b \ge 0$ mit*

$$\|Bx\| \le \frac{\alpha}{M_\varphi + 1}\|Ax\| + b\|x\| \quad (\ x \in D(A)).$$

Sei $\omega > \frac{bM_\varphi}{1-\alpha}$. Dann ist für $\lambda \in \Sigma_\varphi$ mit $|\lambda| \ge \omega$ der Operator $A + B$ invertierbar, und es gilt

$$\left\|\lambda\big(\lambda - (A + B)\big)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M_\varphi}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \left(\alpha + \frac{bM_\varphi}{\omega}\right)} \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi,\ |\lambda| \ge \omega).$$

Beweis. Wir schreiben

$$\lambda - A - B = \Big(1 - B(\lambda - A)^{-1}\Big)(\lambda - A). \tag{6-1}$$

Der Operator $B(\lambda - A)^{-1}$ ist auf ganz X definiert, und wegen Voraussetzung (ii) erhalten wir

$$\begin{aligned}\|B(\lambda - A)^{-1}\| &\le \frac{\alpha}{M_\varphi + 1}\|\underbrace{A(\lambda - A)^{-1}}_{-I+\lambda(\lambda-A)^{-1}}\| + b\|(\lambda - A)^{-1}\| \\ &\le \frac{\alpha}{M_\varphi + 1}(1 + M_\varphi) + \frac{bM_\varphi}{|\lambda|} \\ &= \alpha + \frac{bM_\varphi}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi).\end{aligned}$$

Für $\omega > \frac{bM_\varphi}{1-\alpha}$ und $\lambda \in \Sigma_\varphi$ mit $\lambda \le \omega$ folgt $\alpha + \frac{bM_\varphi}{|\lambda|} < 1$. Für diese λ ist also $1 - B(\lambda - A)^{-1}$ und damit (6-1) invertierbar, und mit der Neumannschen Reihe folgt

$$\begin{aligned}\left\|\left(\lambda - (A + B)\right)^{-1}\right\| &\le \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \cdot \left\|\sum_{k=0}^\infty \left(B(\lambda - A)^{-1}\right)^k\right\| \\ &\le \frac{M_\varphi}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \left(\alpha + \frac{bM_\varphi}{\omega}\right)} \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi,\ |\lambda| > \omega).\end{aligned}$$

□

Als erste Konsequenz erhalten wir folgendes Störungsresultat für Generatoren von Kontraktionshalbgruppen. Die im folgenden Satz auftauchende Bedingung nennt man (für $a < 1$) die relative Beschränktheit von B bzgl. A.

6.3 Satz. *Sei $A : D(A) \to X$ Generator einer C_0-Kontraktionshalbgruppe auf dem Banachraum X und $B : D(B) \to X$ dissipativ mit $D(A) \subset D(B)$. Falls $a \in [0, \frac{1}{2})$ und $b \ge 0$ existieren mit*

$$\|Bx\| \le a\|Ax\| + b\|x\| \quad (x \in D(A)), \tag{6-2}$$

so ist $A + B$ Generator einer C_0-Kontraktionshalbgruppe auf X.

Beweis. Im Beweis des Satzes von Lumer-Phillips haben wir gezeigt, dass $\mathrm{Re}\langle Ax\,,\ y\rangle \le 0$ für alle $x \in X$ und $y \in J(x)$ gilt. Sei nun $x \in X$ und $j(x) \in J(x)$ mit $\mathrm{Re}\langle Bx, j(x)\rangle \le 0$. Dann folgt

$$\mathrm{Re}\langle (A + B)x, j(x)\rangle = \mathrm{Re}\langle Ax, j(x)\rangle + \mathrm{Re}\langle Bx, j(x)\rangle \le 0.$$

Also ist auch $(A + B)$ ein dissipativer Operator.

Wegen $\|\lambda(\lambda-A)^{-1}\| \le 1$ ist die Bedingung (i) von Lemma 6.2 mit $\varphi = 0$ und $M_\varphi = 1$ erfüllt. Setzt man nun $\alpha := 2a < 1$ in Lemma 6.2, so erhält man $\lambda \in \rho(A + B)$ für $\lambda > \frac{b}{1-2a}$. Aus dem Satz von Lumer und Phillips folgt die Behauptung. □

6.4 Korollar. *Sei H ein Hilbertraum und $A : D(A) \to H$ schief-selbstadjungiert mit $\overline{D(A)} = H$. Weiterhin sei $B : D(B) \to H$ schiefsymmetrisch mit $D(A) \subset D(B)$, und es gelte* (6-2)*. Dann ist $A+B$ schief-selbstadjungiert. Insbesondere erzeugt $A+B$ nach dem Satz von Stone eine unitäre C_0-Gruppe auf H.*

Beweis. Nach dem Satz von Stone erzeugt A eine C_0-Kontraktionshalbgruppe. Nach Satz 6.3 erzeugt auch $A+B$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe, also ist $\rho(A+B) \neq \emptyset$. Wie im Beweis des Satzes von Stone kann man nun zeigen, daß $A+B$ schief-selbstadjungiert ist. □

6.5 Satz. *Sei A Generator einer C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X und $B \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist $A+B$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe auf X.*

Beweis. Wegen $A+B = (A - I\omega) + (B + I\omega)$ kann $\big(\exp(tA)\big)_{t\geq 0}$ als beschränkt vorausgesetzt werden. Auf $(X, \|\!|\cdot|\!\|)$ mit $\|\!|x|\!\| := \sup_{t\geq 0}\big\|\exp(tA)x\big\|$ $(x \in X)$ erzeugt A eine C_0-Kontraktionshalbgruppe. Weiter sei $x \in (X, \|\!|\cdot|\!\|)$ und $j(x) \in J(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle (B - \|\!|B|\!\|_{\mathcal{L}(X)} I)x\ ,\ j(x)\rangle = {} & \operatorname{Re}\langle Bx\ ,\ j(x)\rangle - \|\!|B|\!\|_{\mathcal{L}(X)}\langle x\ ,\ j(x)\rangle \\ \leq {} & \|\!|B|\!\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|\!|x|\!\| \cdot \|\!|j(x)|\!\| - \|\!|B|\!\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|\!|x|\!\|^2 \quad = \quad 0.\end{aligned}$$

Demnach ist $B - \|\!|B|\!\|_{\mathcal{L}(X)} I$ dissipativ. Außerdem gilt

$$\|\!|(B - \|\!|B|\!\|_{\mathcal{L}(X)} I)x|\!\| \leq 2\|\!|B|\!\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|\!|x|\!\| \quad (x \in D(A)).$$

Somit ist die Voraussetzung von Satz 6.3 erfüllt mit $a = 0$ und $b = 2\|\!|B|\!\|$, und $A + B - \|\!|B|\!\|_{\mathcal{L}(X)} I$ erzeugt eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $(X, \|\!|\cdot|\!\|)$. Daher erzeugt $A+B - \|\!|B|\!\|_{\mathcal{L}(X)} I$ eine beschränkte C_0-Halbgruppe auf $(X, \|\cdot\|)$, und $A+B$ erzeugt eine C_0-Halbgruppe auf $(X, \|\cdot\|)$. □

Für Erzeuger von holomorphen C_0-Halbgruppen erhalten wir

6.6 Satz. *Sei A Generator einer holomorphen C_0-Halbgruppe auf X vom Winkel $\varphi \in (0, \pi/2]$ und $B : D(B) \to X$ ein linearer Operator mit $D(A) \subset D(B)$. Es gelte*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\| \quad (x \in D(A))$$

für ein $a \in [0,1)$ und ein $b \geq 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass $A+B$ Generator einer holomorphen C_0-Halbgruppe auf X vom Winkel φ ist, falls $a < \delta$.

Beweis. Wir wählen $\omega_1 \in \mathbb{R}$ so, dass $A_{\omega_1} := A - \omega_1$ eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt. Für $\widetilde{\varphi} \in (0, \varphi)$ folgt

$$\|\lambda(\lambda - A_{\omega_1})^{-1}\| \leq M_{\widetilde{\varphi}} \quad (\lambda \in \Sigma_{\widetilde{\varphi}+\frac{\pi}{2}}).$$

Setze $\delta := \frac{1}{M_{\widetilde{\varphi}}+1}$ und $\alpha := a/\delta \in [0,1)$. Wegen $a = \frac{\alpha}{M_{\widetilde{\varphi}}+1}$ sind somit die Voraussetzungen von Lemma 6.2 erfüllt für $M_{\widetilde{\varphi}}, a, \alpha, b$. Damit folgt

$$\left\| \big(\lambda - (A_{\omega_1} + B)\big)^{-1} \right\| \leq \frac{CM_{\widetilde{\varphi}}}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \Sigma_{\widetilde{\varphi}+\frac{\pi}{2}},\ |\lambda| \geq \omega_2),$$

wobei

$$C = \left[1 - \left(\frac{a}{\delta} + \frac{bM_{\widetilde{\varphi}}}{\omega_2}\right)\right]^{-1}, \qquad \omega_2 > \frac{bM_{\widetilde{\varphi}}}{1-\frac{a}{\delta}}.$$

Wir wählen nun ein $\omega_3 > 0$ mit $\{\lambda - \omega_3 : \lambda \in \Sigma_{\widetilde{\varphi}+\frac{\pi}{2}},\ |\lambda| \geq \omega_2\} \supset \Sigma_{\widetilde{\varphi}+\frac{\pi}{2}}$. Dann existiert ein $K_{\widetilde{\varphi}} > 0$ mit $|\lambda| = |\mu + \omega_3| \geq K_{\widetilde{\varphi}}|\mu|$ für alle $\mu \in \Sigma_{\widetilde{\varphi}+\pi/2}$. Dies ergibt

$$\left\| \big(\mu - (A_{\omega_1} + B - \omega_3)\big)^{-1} \right\| \leq \frac{\widetilde{C}_{\widetilde{\varphi}}}{|\mu + \omega_3|} \leq \frac{C_{\widetilde{\varphi}}}{|\mu|} \quad (\mu \in \Sigma_{\widetilde{\varphi}+\frac{\pi}{2}}).$$

Nach Theorem 4.21 erzeugt $A + B - \omega_1 - \omega_3$ eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe vom Winkel φ erzeugt, d.h. $A+B$ erzeugt eine holomorphe C_0-Halbgruppe vom Winkel φ. □

b) Anwendungen

6.7 Korollar (Wellengleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Der Operator $\widetilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ mit Definitionsbereich $D(\widetilde{A}) := D(\Delta_D) \times H_0^1(\Omega)$ erzeugt eine C_0-Halbgruppe auf $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Insbesondere ist die Wellengleichung*

$$\text{(WG)} \begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ w|_{t=0} = w_0 & \text{in } \Omega, \\ w_t|_{t=0} = w_1 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

wohlgestellt.

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus Satz 5.14 gilt $\widetilde{A} = A + B$ mit

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in L\big(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\big).$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 6.5. □

Im folgenden werden wir die Schrödingergleichung mit Potential betrachten. Dazu ein kleiner Ausflug in die Physik: Im klassischen Bild ist die Gesamtenergie eines Punktteilchens durch die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + V$$

gegeben. Dabei ist $\hbar$ das *Plancksche Wirkungsquantum*, $\frac{p^2}{2m}$ die kinetische Energie des Teilchens, wobei p der Impuls und m die Masse ist, und V die potentielle Energie. Nach den Postulaten der Quantenmechanik sind den physikalischen Messgrößen (Observablen) des klassischen Bildes selbstadjungierte Operatoren zugeordnet, $p = -i\hbar\nabla$ und $V = V(t,x)$, wobei V als Multiplikationsoperator zu verstehen ist. Die rechte Seite

$$H := -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$$

ist der Hamiltonoperator eines nichtrelativistischen, spinlosen Teilchens, das sich im Gebiet Ω unter dem Einfluss des Potentials V bewegt.

Nach den Axiomen der Quantenmechanik ist die zeitliche Entwicklung eines Zustands ψ_0 gegeben durch die unitäre C_0-Gruppe $U(t) := \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)$, d.h. wenn ψ_0 der Zustand des Systems zur Zeit $t = 0$ ist, so ist $U(t)\psi_0$ der Zustand zur Zeit t. Wir erhalten somit die Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t u \quad = \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + Vu\ .$$

Durch Skalierung können die Konstanten $\hbar$ und $2m$ gleich 1 gesetzt werden, wir betrachten also fortan das Problem

$$\begin{cases} \partial_t u - i(\Delta - V)u &= \quad 0 \ \text{ in } (0,\infty)\times\Omega, \\ u|_{t=0} &= \quad u_0 \ \text{ in } \Omega \end{cases}$$

mit $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Für gewisse Potentiale V kann $i(\Delta - V)$ als Störung von $i\Delta =: A_s$ aufgefasst werden.

6.8 Definition. Sei X ein Banachraum und seien A, B lineare Operatoren in X. Dann heißt B *Kato-Störung* von A auf X, falls $D(A) \subset D(B)$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $C(\varepsilon) > 0$ existiert mit

$$\|Bx\| \quad \le \quad \varepsilon\|Ax\| + C(\varepsilon)\|x\| \quad (x \in D(A)).$$

6.9 Lemma. *Sei $p \in (n/2, \infty]$ mit $p \ge 2$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit beschränktem $C^{1,1}$-Rand oder $\Omega = \mathbb{R}^n$ oder $\Omega = \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Sei ferner $A_s = i\Delta$ der Schrödingeroperator in $L^2(\Omega)$ und $V \in L^p(\Omega)$. Definiere den Operator $B\colon L^2(\Omega) \supset D(B) \to L^2(\Omega)$ durch*

$$Bu := iVu,\ D(B) := L^q(\Omega) \cap L^2(\Omega),$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. Dann ist B eine Kato-Störung von A_s auf $L^2(\Omega)$.

Beweis. Man beachte, dass nach der Hölderschen Ungleichung (Satz A.2)

$$\|Bu\|_{L^2(\Omega)} \le \|V\|_{L^p(\Omega)}\|u\|_{L^q(\Omega)} < \infty \quad (u \in D(B))$$

gilt, d.h. B ist wohldefiniert. Für Gebiete wie im Satz gilt $D(A_s) := \{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\} = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, und die Normen $\|\cdot\|_{A_s}$ und $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ sind äquivalent auf $D(A_s)$. Wir zeigen, dass $D(A_s) \subset D(B)$ gilt. Wegen $p > \frac{2}{n}$ gilt $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q} < \frac{2}{n}$, d.h.

$$a := \frac{n}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big) \in (0,1).$$

Für $u \in D(A_s)$ gilt somit nach der Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung (Satz A.6)

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le \|u\|^a_{H^2(\Omega)}\|u\|^{1-a}_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

Somit ist $D(A) \subset D(B)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt mit obiger Abschätzung

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\Omega)} &\le C\big(\|A_s u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\big)^a \cdot \|u\|^{1-a}_{L^2(\Omega)}\\ &\le C\big(\|A_s u\|^a_{L^2(\Omega)}\|u\|^{1-a}_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\big).\end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Ungleichung

$$\alpha^a\beta^{1-a} \le a\alpha + (1-a)\beta \quad (\alpha, \beta > 0,\ a \in (0,1))$$

mit

$$\alpha\beta \le \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q \quad (\alpha, \beta > 0)$$

mit $\alpha := \delta\|A_s u\|_{L^2(\Omega)}$ und $\beta := \delta^{-a/1-a}\|u\|_{L^2(\Omega)}$, wobei $\delta > 0$ noch frei wählbar ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\Omega)} &\le C\left(a\delta\|A_s u\|_{L^2(\Omega)} + C_2(\delta)\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\le C_1\delta\|A_s u\|_{L^2(\Omega)} + C_2(\delta)\|u\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Wählt man $\delta := \frac{\varepsilon}{C_1\|V\|_{L^p(\Omega)}}$, so folgt wegen $\|Bu\|_{L^2(\Omega)} \le \|V\|_{L^p(\Omega)}\|u\|_{L^q(\Omega)}$ die Behauptung. □

6.10 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ wie in Lemma 6.9, und seien $p_j \in (n/2, \infty]$ mit $p_j \ge 2$ und $V_j \in L^{p_j}(\Omega;\mathbb{R})$ für $j = 1, ..., m$. Dann ist der Operator*

$$A_s + i\sum_{j=1}^m V_j \colon L^2(\Omega) \supset D(A_s) \to L^2(\Omega)$$

schief-selbstadjungiert und erzeugt somit eine unitäre C_0-Kontraktionsgruppe auf $L^2(\Omega)$.

Beweis. Klar ist die Schiefsymmetrie von $i\sum_{j=1}^m V_j$. Nach Lemma 6.9 ist jeder Summand V_j eine Kato-Störung von A_s, somit gilt dies auch für die Summe. Aus Korollar 6.4 folgt dann die Behauptung. $\square$

6.11 Beispiel (Coulomb-Potential)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ wie in Lemma 6.9 und e die elektrische Elementarladung, dann wird die Anziehung zwischen einem Proton am Ort x_0 und einem Elektron bei x beschrieben durch das *Coulomb-Potential*

$$V(x) \quad = \quad -\frac{e^2}{|x-x_0|}\ .$$

Wir spalten V auf in

$$V(x) \quad = \quad -\chi_{B(x_0,1)}(x)\frac{e^2}{|x-x_0|} - \chi_{\Omega\setminus B(x_0,1)}(x)\frac{-e^2}{|x-x_0|} =: V_1(x) + V_2(x).$$

Dann gilt $V_1 \in L^2(\Omega;\mathbb{R})$ und $V_2 \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$. Nach Satz 6.10 ist demnach $A_s + iV$ der Generator einer C_0-Kontraktionsgruppe auf $L^2(\Omega)$. Man beachte, dass hier keine zusätzlichen Symmetriebedingungen an das Gebiet gestellt werden und sich das Ergebnis sofort auf Mehrteilchensysteme überträgt.

7. Parameterelliptische Randwertprobleme

7.1 Worum geht's? Wir kennen bereits äquivalente Kriterien dafür, dass ein Operator etwa eine holomorphe Halbgruppe erzeugt. Dieses Kriterium verlangt es, die Resolvente des zugehörigen Operators genauer zu studieren, insbesondere die Resolventenabschätzung (a priori-Abschätzung) zu beweisen. Hier soll nun gezeigt werden, wie man dies für eine große Klasse von Differentialoperatoren im $\mathbb{R}^n$ oder in Gebieten nachweisen kann. Dabei handelt es sich um parameterelliptische oder parabolische Operatoren.

Der „Königsweg", um nichtselbstadjungierte Differentialoperatoren zu untersuchen, liegt in der Fouriertransformation. Während in L^2 der Satz von Plancherel verwendet werden kann, gibt es in L^p den Satz von Michlin, der Bedingungen an das Symbol des Operators stellt.

a) Fouriermultiplikatoren und der Satz von Michlin

Im folgenden sei stets $D := -i(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$. Mit C, C_1, C_2 bezeichnen wir generische Konstanten, d.h. Konstanten, welche bei jedem Auftreten einen anderen Wert besitzen können, aber nicht von den in der Gleichung auftretenden Größen abhängt.

7.2 Bemerkung. Wir betrachten den Laplace-Operator im $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit maximalem Definitionsbereich $D(\Delta) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. Offensichtlich ist $D(\Delta) \supset W_p^2(\mathbb{R}^n)$. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich Gleichheit gilt. Sei dazu $u \in D(\Delta)$ und $f := u - \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sei $|\alpha| \le 2$. Dann gilt

$$D^\alpha u = \mathscr{F}^{-1}\xi^\alpha \mathscr{F} u = -\mathscr{F}^{-1}\frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}\mathscr{F} f$$

als Gleichheit in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Um $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen, muss also $\mathscr{F}^{-1}m_\alpha(\xi)\mathscr{F} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gelten, wobei $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$. Die Frage lautet also: Wird durch

$$f \mapsto \mathscr{F}^{-1}m_\alpha(\xi)\mathscr{F} f$$

ein stetiger linearer Operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ definiert? Die (positive) Antwort liefert der Satz von Michlin.

7.3 Definition. Sei $1 \le p \le \infty$. Eine messbare Funktion $m \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ heißt Fouriermultiplikator in L^p, falls $f \mapsto \mathscr{F}^{-1}m\mathscr{F} f$ einen stetigen linearen Operator $M \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$ definiert. Genauer ist m Fouriermultiplikator, wenn $m\psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ für alle $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und für die Abbildung $\widetilde{M}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto \mathscr{F}^{-1}m\mathscr{F}\varphi$ gilt $R(\widetilde{M}) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\widetilde{M}\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)),$$

d.h. wenn $\widetilde{M}$ eine eindeutige Fortsetzung $M \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$ besitzt. Die Funktion m heißt in diesem Fall das Symbol des Operators M. Wir schreiben $\operatorname{op}(m) := \mathscr{F} m \mathscr{F}^{-1}$ und $\operatorname{symb}(M) := m$.

7.4 Bemerkung. Für $p = 2$ gilt nach dem Satz von Plancherel genau dann $\operatorname{op}(m) \in L(L^2(\mathbb{R}^n))$, falls der Multiplikationsoperator $g \mapsto mg$ stetig in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt. Denn falls $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so folgt $\|mg\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Falls andererseits $m \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so existiert eine Folge messbarer Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $0 \leq c_k \to \infty$, mit $0 < \lambda(A_k) < \infty$ und $|m| \geq c_k$ auf A_n. Für $g_k := \chi_{A_k}$ gilt dann $g_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|mg_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int |m(\xi)g_k(\xi)|^2 d\xi \geq c_k^2 \lambda(A_k) = c_k^2 \|g_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $\operatorname{op}(m)$ ist kein beschränkter Operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Der folgende Satz ist fundamental für die L^p-Theorie von Differentialoperatoren. Der Beweis ist für diese Vorlesung zu aufwändig. Hier bezeichnet $[\frac{n}{2}]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich $\frac{n}{2}$. Wir geben den Satz in zwei Varianten an.

7.5 Satz (Michlin)**.** *Sei $1 < p < \infty$ und $m\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Falls eine der beiden Bedingungen*

(i) $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *und*

$$|\xi|^{|\beta|} |D^\beta m(\xi)| \leq C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ |\beta| \leq [\tfrac{n}{2}] + 1),$$

(ii) $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *und*

$$\left|\xi^\beta D^\beta m(\xi)\right| \leq C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \beta \in \{0,1\}^n)$$

mit einer Konstanten $C_M > 0$ gilt, so ist m ein L^p-Fouriermultiplikator mit

$$\|\operatorname{op}(m)\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq c(n,p) C_M,$$

wobei die Konstante $c(n,p)$ nur von n und p abhängt.

7.6 Bemerkung. a) Die Bedingung (i) in obigem Satz wird häufig als die Michlin-Bedingung (aus dem Jahr 1957) bezeichnet, während Bedingung (ii) auf Lizorkin (1963) zurückgeht.

b) Sei die Funktion $m\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ homogen in ξ vom Grad $d \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$m(r\xi) = \rho^d m(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \rho > 0).$$

Falls $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, so ist $D^\beta m(\xi)$ homogen in ξ vom Grad $d - |\beta|$ für alle $|\beta| \leq k$.

Denn z.B. für $\beta = (1, 0, \ldots, 0)$ gilt

$$\begin{aligned}(\partial_{\xi_1} m)(\rho\xi) &= \lim_{h\to 0} \frac{m(\rho\xi + he_1) - m(\rho\xi)}{h} = \lim_{h\to 0} \rho^d \frac{m(\xi + \frac{h}{\rho}e_1) - m(\xi)}{\rho\frac{h}{\rho}} \\ &= \rho^{d-1}\partial_{\xi_1} m(\xi).\end{aligned}$$

Für beliebige β folgt die Aussage dann iterativ.

c) Sei $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogen vom Grad 0. Dann erfüllt m die Michlin-Bedingung. Denn für $|\beta| \le [\frac{n}{2}] + 1$ ist $m_\beta(\xi) := |\xi|^{|\beta|} D_\beta m(\xi)$ homogen vom Grad 0 nach Teil a). Damit folgt

$$|m_\beta(\xi)| = \Big| m_\beta\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big) \le \max_{|\eta|=1} |m_\beta(\eta)| < \infty \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Als erste Anwendung des Satzes von Michlin wird die Frage aus Bemerkung 7.2 beantwortet.

7.7 Korollar. *Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt $\{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} = W_p^2(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Betrachte wie in Bemerkung 7.2 die Funktion $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$ für $|\alpha| \le 2$. Sei $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Für $|\xi| \le 1$ ist $D^\beta m_\alpha$ als stetige Funktion beschränkt, für $|\xi| \ge 1$ können wir bei Berechnung von $D^\beta m_\alpha$ den Nenner $1 + |\xi|^2$ durch $|\xi|^2$ abschätzen und erhalten eine homogene Funktion vom Grad $-|\beta|$, welche auf $|\xi| \ge 1$ ebenfalls beschränkt ist. Somit erfüllt m_α die Michlin-Bedingung. □

b) Parameterelliptische Differentialoperatoren

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

7.8 Definition (elliptische und parabolische Differentialoperatoren)**.** Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A = A(x, D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten $a_\alpha \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$.

a) Der Operator $A_0(x, D) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha$ heißt der Hauptteil des Operators $A(x, D)$.

b) Die Abbildung $a \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $a(x, \xi) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ heißt das Symbol von $A(x, D)$. Wir schreiben $a = \operatorname{symb}(A)$ bzw. $A = \operatorname{op}(a)$. Das Symbol $a_0 := \operatorname{symb}(A_0)$ heißt das Hauptsymbol von $A(x, D)$.

c) Der Operator A heißt elliptisch in $\overline{\Omega}$, falls

$$a_0(x, \xi) \ne 0 \quad (x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Analog definiert man elliptisch in einer Menge $M \subset \overline{\Omega}$, z.B. elliptisch an der Stelle $x \in \overline{\Omega}$.

d) Sei $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ ein geschlossener Sektor in $\mathbb{C}$ mit Spitze in 0. Dann heißt der Operator $A(x, D)$ parameterelliptisch im Sektor $\mathscr{L}$, falls

$$a_0(x, \xi) - \lambda \neq 0 \quad (x \in \overline{\Omega},\ (\xi, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathscr{L}) \setminus \{(0, 0)\}).$$

e) Der Operator $\partial_t - A(x, D)$ heißt parabolisch, falls $A(x, D) - \lambda$ parameterelliptisch im Sektor $\overline{\Sigma_{\pi/2}}$ ist.

7.9 Beispiele. a) Der Cauchy-Riemann-Operator $A := \partial_{x_1} + i\partial_{x_2}$ ist elliptisch in $\mathbb{R}^2$.

b) Der Laplace-Operator $A := \Delta$ ist elliptisch, parameterelliptisch in jedem Sektor, der den negativen Halbstrahl $(-\infty, 0)$ nicht enthält, und insbesondere parabolisch.

c) Der Operator $A(x, D) := \partial_{x_1} + i\partial_{x_2} + (ix_1 - x_2)\partial_{x_3}$ ist nicht elliptisch in $\mathbb{R}^3$, denn

$$a_0(x, \xi) = i\xi_1 - \xi_2 + i(ix_1 - x_2)\xi_3 = 0 \ \text{ für } \ \xi = (x_2, -x_1, 1).$$

Für diesen Operator existieren C^∞-Funktionen f, für welche $Au = f$ nicht einmal in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ lösbar ist.

Seien $\Omega, \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi\colon \Omega \to \widetilde{\Omega}$ eine Bijektion. Zu einer Funktion $u\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ heißt die Funktion $\Phi^* u := u \circ \Phi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ der *pullback* von u.

7.10 Satz. *Seien $\Omega, \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und $\Phi\colon \Omega \to \widetilde{\Omega}$ ein C^m-Diffeomorphismus. Sei A ein linearer Differentialoperator auf $\widetilde{\Omega}$ der Ordnung m. Definiere den pullback von A durch $B := \Phi^* A := A(\cdot \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi$. Dann ist B linearer Differentialoperator der Ordnung m auf Ω, und für die Hauptsymbole gilt*

$$b_0(x, \xi) = a_0(\Phi(x), [\Phi'(x)]^{-t}\xi) \quad (x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Dabei ist Φ' die Jacobimatrix von Φ und $[\cdot]^{-t} := ([\cdot]^{-1})^t$, wobei $(\cdot)^t$ die transponierte Matrix bezeichnet. Insbesondere ist $\Phi^* A$ elliptisch in Ω, wenn A elliptisch in $\widetilde{\Omega}$ ist.

Beweis. (i) Sei zunächst $(Au)(y) = (D_{i_1} \cdots D_{i_m} u)(y)$ mit $D_j := -i\partial_j$ und $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt

$$\partial_{i_1}(v \circ \Phi^{-1})(y) = \sum_{j_1=1}^{n} (\partial_{j_1} v)(\Phi^{-1}(y)) M_{j_1 i_1}(y),$$

wobei $(M_{jk}(y))_{j,k=1,\ldots,n} := (\Phi^{-1})'(y)$. Somit erhält man mit der Produktregel

$$[\partial_{i_2}\partial_{i_1}(v \circ \Phi^{-1})(y) = \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} (\partial_{j_2}\partial_{j_1} v)(\Phi^{-1}(y)) M_{j_2 i_2}(y) M_{j_1 i_1}(y)$$

$$+\sum_{j_1=1}^{n}(\partial_{j_1}v)(\Phi^{-1}(y))\partial_{i_2}M_{j_1i_1}(y).$$

Die letzte Summe ist ein Operator der Ordnung 1 bzgl. v. Iterativ folgt

$$\partial_{i_1}\dots\partial_{i_m}(v\circ\Phi^{-1})(y)=\sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n}(\partial_{j_1}\dots\partial_{j_m}v)(\Phi^{-1}(y))M_{j_1i_1}(y)\cdot\ldots\cdot M_{j_mi_m}(y)+Rv,$$

wobei R ein linearer Differentialoperator der Ordnung nicht größer als $m-1$ ist. Der Hauptteil des Operators B ist also gegeben durch

$$(B_0v)(x)=\sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n}(\partial_{j_1}\dots\partial_{j_m}v)(x)M_{j_1i_1}(\Phi(x))\cdot\ldots\cdot M_{j_mi_m}(\Phi(x)).$$

Das Hauptsymbol von A ist $a_0(y,\eta)=\eta_{i_1}\cdot\ldots\cdot\eta_{i_m}$, das Hauptsymbol von B ist

$$b_0(x,\xi)=\sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n}\xi_{j_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{j_m}M_{j_1i_1}(\Phi(x))\cdot\ldots\cdot M_{j_mi_m}(\Phi(x))=\prod_{k=1}^{n}\eta_{i_k}$$

mit

$$\eta_{i_k}:=\sum_{j_k=1}^{n}\xi_{j_k}M_{j_ki_k}(\Phi(x)),$$

d.h.

$$\eta^t=\xi^tM(\Phi(x))=\xi^t(\Phi^{-1})'(\Phi(x))=\xi^t(\Phi'(x))^{-1}.$$

Somit gilt

$$b_0(x,\xi)=a_0(\Phi(x),(\Phi'(x))^{-t}\xi)\quad(x\in\Omega,\xi\in\mathbb{R}^n).$$

(ii) Sei nun A allgemeiner linearer Differentialoperator der Ordnung m auf $\widetilde{\Omega}$. Schreibe A_0 in der Form

$$(A_0u)(y)=\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n}a_{i_1\dots i_m}(y)(D_{i_1}\dots D_{i_m}u)(y).$$

Nach Teil (i) ist B linearer Differentialoperator mit Hauptsymbol

$$b_0(x,\xi)=\sum_{i_1,\dots,i_m}^{n}a_{i_1\dots i_m}(\Phi(x))\eta_{i_1}\cdot\ldots\cdot\eta_{i_m}=a_0(\Phi(x),\eta)=a_0(\Phi(x),(\Phi'(x))^{-t}\xi).$$

$\square$

7.11 Definition. Sei $n \geq 2$ und $A(x, D)$ ein elliptischer Differentialoperator in Ω. Dann heißt $A(x, D)$ proper elliptisch in Ω, falls das Polynom $P := A_0(x, \xi', \cdot)$ für jedes $x \in \Omega$ und jedes $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ genauso viele Nullstellen in der oberen komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ wie in der unteren komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ besitzt.

7.12 Bemerkung. a) Man beachte in obiger Definition, dass P keine reelle Nullstelle besitzt, da $A(x, D)$ elliptisch ist.

b) Das Hauptsymbol eines Operators A der Ordnung m ist homogen vom Grad m in ξ. Falls A elliptisch ist, enthält $A_0(x, \xi)$ einen Term der Form $a(x)\xi_n^m$, denn sonst wäre $A_0(x, \xi) = 0$ für $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = 0$ und $\xi_n = 1$. Somit ist P ein Polynom vom Grad m, und falls A proper elliptisch ist, ist m eine gerade Zahl.

c) Falls a_α für $|\alpha| = m$ reellwertige Koeffizienten sind und $A(x, D)$ elliptisch ist, so ist A auch proper elliptisch. Denn dann ist P ein Polynom mit reellen Koeffizienten ohne reelle Nullstelle.

7.13 Satz. *Sei $A(x, D)$ elliptisch in Ω und $n \geq 3$. Dann ist A proper elliptisch. Insbesondere ist die Ordnung von A eine gerade Zahl.*

Beweis. Sei $x \in \Omega$ und $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Wegen $n \geq 3$ existiert ein stetiger Weg $\gamma \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(0) = \xi'$ und $\gamma(1) = -\xi'$. Sei $n_+(t)$ die Anzahl der Nullstellen z mit $\operatorname{Im} z > 0$ des Polynoms $p_t := A_0(x, (\gamma(t), \cdot))$. Dann ist $n_+(t)$ unabhängig von t. Denn da die Nullstellen eines Polynoms stetig von den Koeffizienten abhängt, gäbe es sonst ein $t \in (0, 1)$, für welches p_t eine reelle Nullstelle besitzt, was wegen $\gamma(t) \neq 0$ einen Widerspruch zur Elliptizität darstellt.

Daher gilt $n_+(0) = n_+(1)$, d.h. die Polynome $A_0(x, \xi', \cdot)$ und $A_0(x, -\xi', \cdot)$ besitzen dieselbe Anzahl von Nullstellen in $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Wegen

$$A_0(x, -\xi', z) = (-1)^m A_0(x, \xi', -z)$$

ist aber $n_+(1)$ auch die Anzahl der Nullstellen von $A_0(x, \xi', \cdot)$ in $\mathbb{C}_- := -\mathbb{C}_+$, d.h. A ist proper elliptisch. $\square$

7.14 Definition. Sei $A = A(x, D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m in Ω. Dann heißt A gleichmäßig elliptisch in $\overline{\Omega}$, falls

$$|A_0(x, \xi)| \geq C|\xi|^m \quad ((x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n),$$

und gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L}$, falls

$$|A_0(x, \xi) - \lambda| \geq C(|\xi|^{2m} + |\lambda|) \quad (x \in \overline{\Omega}, (\xi, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathscr{L}) \setminus \{0\}).$$

Der Operator A heißt gleichmäßig stark elliptisch in $\overline{\Omega}$, falls

$$\operatorname{Re} A_0(x,\xi) \geq C|\xi|^m \quad ((x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n).$$

7.15 Lemma. *Sei Ω beschränkt und $A = A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} D^\alpha$ mit $a_\alpha \in C(\overline{\Omega})$. Falls A elliptisch in $\overline{\Omega}$ ist, so ist A dort auch gleichmäßig elliptisch.*

Beweis. Für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $x \in \overline{\Omega}$ gilt

$$|A_0(x,\xi)| = |\xi|^m \Big| A\Big(x, \frac{\xi}{|\xi|}\Big)\Big| \geq M|\xi|^m,$$

wobei $M := \min\{|A(x,\xi)| : (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times S^{n-1}\} > 0$. Hier wurde verwendet, dass $A(x,\xi)$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{\Omega} \times S^{n-1}$ ihr Minimum annimmt. □

7.16 Definition. Sei $A(x,D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m und sei $1 < p < \infty$.

a) Sei $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ ein geschlossener Sektor und $s \in [0,m]$. Dann definiert man die parameterabhängigen Normen $\|\!|\cdot|\!\|_{s,p,\Omega}$ durch

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{s,p,\Omega} := \|u\|_{W_p^s(\Omega)} + |\lambda|^{s/(2m)} \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad (\lambda \in \mathscr{L},\ u \in W_p^m(\Omega)).$$

b) Die L^p-Realisierung A_p des Differentialoperators $A(x,D)$ ist gegeben durch $D(A_p) := W_p^m(\Omega)$ und $A_p u := A(x,D)u \quad (u \in D(A_p))$.

7.17 Satz (Modellproblem für parameterelliptische Operatoren)**.** *Seien $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $|\alpha| = 2m$ und $A(D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$ parameterelliptisch im Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$. Dann gilt für die L^p-Realisierung $\rho(A_p) \supset \mathscr{L} \setminus \{0\}$. Zu jedem $\lambda_0 > 0$ existiert ein $C_{\lambda_0} > 0$ mit*

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C_{\lambda_0} \|\lambda - A_p\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\lambda \in \mathscr{L},\ |\lambda| \geq \lambda_0).$$

Insbesondere ist für $\mathscr{L} = \overline{\Sigma}_\varphi$ mit $\varphi \in [0,\pi]$ der Operator $A_p - \lambda_0$ sektoriell mit Winkel φ.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\mathscr{L} = \overline{\Sigma}_\varphi$ mit $\varphi \in [0,2\pi]$ (sonst ersetze $A(D)$ durch $e^{i\alpha}A(D)$ mit einem geeigneten α).

Setze $\lambda = q^{2m}$ mit $q \in \overline{\Sigma}_{\varphi/2m}$ und definiere für festes α mit $|\alpha| \leq 2m$ die Funktion

$$m_\alpha(\xi,q) := \frac{q^{2m-|\alpha|}\xi^\alpha}{A(\xi) - q^{2m}} \quad ((\xi,q) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma}_{\varphi/2m} \setminus \{0\}).$$

Dann ist $m_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma}_{\varphi/2m} \setminus \{0\})$ homogen in (ξ, q) vom Grad 0 und erfüllt nach Bemerkung 7.6 die Michlin-Bedingung bzgl. ξ. Nach dem Satz von Michlin ist $\|\operatorname{op}(m_\alpha(\cdot, q))\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le C_\alpha$.

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $q \in \overline{\Sigma}_{\varphi/2m} \setminus \{0\}$ und $u := \mathscr{F}^{-1}\frac{1}{A(\xi)-q^{2m}}\mathscr{F}f$. Dann gilt

$$q^{2m-|\alpha|}\|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\operatorname{op}(m_\alpha(\cdot, q))f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_\alpha \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{7-1}$$

Insbesondere ist $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n) = D(A_p)$ und $(A_p - \lambda)u = f$, d.h. $A_p - \lambda$ ist surjektiv. Falls andererseits $(A_p - \lambda)u_1 = (A_p - \lambda)u_2 = f$ mit $u_{1,2} \in D(A_p)$ gilt, so folgt $u_1 = \mathscr{F}^{-1}\frac{1}{A(\xi)-\lambda}\mathscr{F}f = u_2$ als Gleichheit in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und damit $u_1 = u_2$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Somit ist $A_p - \lambda$ auch injektiv, d.h. $\rho(A_p) \supset \overline{\Sigma}_\varphi \setminus \{0\}$.

Zu zeigen ist noch die Resolventenabschätzung. Sei $q_0 > 0$. Dann folgt aus (7-1) für $q \in \overline{\Sigma}_{\varphi/2m}$, $|q| \ge q_0$, die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} &= \|u\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + |\lambda|\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C\Big(\sum_{|\alpha|\le 2m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} +^{|} q|^{2m}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big) \\
&\le C_1 \min\{1, q_0\}^{-2m}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2m} C_\alpha\Big)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_{\lambda_0}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

wobei $\lambda_0 = q_0^{2m}$. Insbesondere ist

$$\|\lambda(\lambda - A_p)^{-1}\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le C_{\lambda_0} \quad (\lambda \in \overline{\Sigma}_\varphi,\ |\lambda| \ge \lambda_0),$$

und wegen $\sigma(A_p - \lambda_0) = \sigma(A_p) - \lambda_0$ ist $A_p - \lambda_0$ sektoriell mit Winkel φ. □

7.18 Bemerkung. Im vorigen Beweis wurde die Homogenität von $m_\alpha(\xi, q)$ verwendet, wobei $q = \lambda^{1/2m}$. In diesem Fall sagt man, m_α ist quasi-homogen von (ξ, λ) ab. Im allgemeinen heißt eine Funktion $m = m(\xi, \lambda)$ quasi-homogen vom Grad $r \in \mathbb{R}$ in (ξ, λ), falls ein $r > 0$ existiert mit

$$m(\rho\xi, \rho^r\lambda) = \rho^d m(\xi, \lambda) \quad ((\xi, \lambda) \ne 0,\ \rho > 0).$$

Die Zahl r heißt das relative Gewicht von λ bzgl. ξ. In obigem Beweis hat λ das relative Gewicht $2m$. Neben spektraltheoretischen Betrachtungen wie im obigen Beweis sind parabolische Gleichungen der Grund für das Auftreten quasihomogener Symbole. So hat bei der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t - \Delta$ die Zeitableitung im obigen Sinn relatives Gewicht 2 bzgl. den Ortsableitungen.

7.19 Korollar. *Falls in der Situation von Satz 7.17 der Operator $A(D)$ parabolisch ist, so erzeugt für jedes $\lambda_0 > 0$ die L^p-Realisierung $A_p - \lambda_0$ eine beschränkte holomorphe Halbgruppe in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $A(D)$ parameterelliptisch in $\overline{\Sigma}_{\pi/2}$, d.h. es gilt $A(\xi)-\lambda \neq 0$ für alle $(\xi,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma}_{\pi/2} \setminus \{0\}$. Wegen $A(\rho\xi) = \rho^{2m} A(\xi)$ ist der Wertebereich $R(A) := \{A(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}$ ein Kegel, und da $\{A(\xi) : |\xi| = 1\}$ kompakt ist, ist dieser Kegel abgeschlossen. Damit ist aber die Menge der Winkel $W := \{\alpha \in [0, 2\pi) : e^{i\alpha} \notin R(A)\}$ offen. Da $A(D)$ parabolisch ist, gilt $[-\pi/2, \pi/2] \subset W$, und somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[-\pi/2-\varepsilon, \pi/2+\varepsilon] \subset W$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $\arg\lambda \in [-\pi/2-\varepsilon, \pi/2+\varepsilon]$ folgt damit $\lambda \notin R(A)$, d.h. $A(\xi) - \lambda \neq 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$.

Wir haben gezeigt, dass $A(D)$ parameterelliptisch in einem Sektor $\overline{\Sigma}_{\pi/2+\varepsilon}$ ist. Nach Satz 7.17 ist $A_p - \lambda_0$ sektoriell mit einem Winkel $\varphi > \pi/2$, und nach Satz 4.21 erzeugt $A_p - \lambda_0$ eine holomorphe Halbgruppe. □

7.20 Bemerkung. Wir haben in obigem Beweis gezeigt, dass die Menge aller Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ offen ist, für welche $A(D)$ die Bedingung der Parameterelliptizität auf dem Halbstrahl $\{\rho e^{i\alpha} : \rho \geq 0\}$ erfüllt.

7.21 Lemma. *Sei $1 < p < \infty$ und $A(x, D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten $a_\alpha \in L^\infty(\Omega)$ $(|\alpha| \leq m)$. Dann ist $A_p \in L(W_p^m(\Omega), L^p(\Omega))$ mit*

$$\|A_p\|_{L(W_p^m(\Omega),L^p(\Omega))} \leq C \max_{|\alpha|\leq m} \|a_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Beweis. Das folgt sofort aus $\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W_p^m(\Omega)}$ für $|\alpha| \leq m$ und aus der Tatsache, dass der Multiplikationsoperator $u \mapsto a_\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ die Norm $\|a_\alpha|_{L^\infty(\Omega)}$ besitzt. □

7.22 Satz (Hauptsatz über parameterelliptische Operatoren). *Sei $A = A(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator in $\mathbb{R}^n$ mit Koeffizienten*

$$a_\alpha \in \begin{cases} C(\mathbb{R}^n), & |\alpha| = 2m, \\ L^\infty(\mathbb{R}^n), & |\alpha| < 2m. \end{cases}$$

Ferner existiere $a_\alpha(\infty) := \lim_{|x|\to\infty} a_\alpha(x)$ für alle $|\alpha| = 2m$. Falls A parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ für $x \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ist, so existiert ein $\lambda_0 > 0$ so, dass für die L^p-Realisierung von A die Inklusion $\rho(A_p) \supset \{\lambda \in \mathscr{L} : |\lambda| \geq \lambda_0\}$ gilt. Ferner gilt die a priori-Abschätzung

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C\|(A_p - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\lambda \in \mathscr{L},\, |\lambda| \geq \lambda_0).$$

Falls $\mathscr{L} = \overline{\Sigma}_\varphi$, so ist $A - \lambda_0$ sektoriell mit Winkel φ; falls $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$, so erzeugt $A - \lambda_0$ eine beschränkte holomorphe Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

(i) *Lokalisierung („Freezing the coefficients"):* Wir fixieren die Koeffizienten von A an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ und betrachten nur den Hauptteil, also den Operator $A_0(x_0, D)$. Nach Satz 7.17 ist $A_0(x_0, D) - \lambda$ invertierbar für alle $\lambda \in \mathscr{L} \setminus \{0\}$, und es existiert eine Konstante $C_1 > 0$ mit

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C_1 \|(A_0(x_0, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathscr{L}, |\lambda| \geq 1).$$

Wie man im Beweis von Satz 7.17 sieht, kann die Konstante C_1 unabhängig von x_0 gewählt werden.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $R > 0$ mit

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(\infty)| < \varepsilon \quad (|x| \geq R,\ |\alpha| = 2m).$$

Da $\overline{B(0, R)} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist und die Koeffizienten a_α für $|\alpha| = 2m$ stetig sind, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_N \in \overline{B(0, R)}$ und offene Umgebungen U_i von x_i mit $\overline{B(0, R)} \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ und

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(x_i)| < \varepsilon \quad (x \in U_i,\ |\alpha| = 2m,\ i = 0, \ldots, N) \tag{7-2}$$

Setze hierbei $U_0 := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0, R)}$ und $x_0 := \infty$. Ohne Einschränkung seien dabei die U_i so gewählt, dass eine Konstante $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit folgender Eigenschaft: Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist in höchstens N_0 Umgebungen U_i enthalten. (Dies erreicht man etwa, indem man die Punkte x_i auf einem Gitter wählt und die U_i als Kugeln mit geeignetem Radius.)

(ii) *Beweis der a priori-Abschätzung:* Wir wählen $\varepsilon := \frac{1}{2C_1}$ in (7-2) und zugehörige Umgebungen U_i. Dann gilt für alle $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset U_i$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} &\leq C_1 \|(A_0(x_i, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_1 \|(A_0(x, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_1 \|(A_0(x, D) - A_0(x_i, D))u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_1 \|(A_0(x, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_1 \cdot \frac{1}{2C_1} \|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Ungleichung wurde Lemma 7.22 verwendet. Damit erhalten wir

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq 2C_1 \|(A_0(x, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Wähle nun eine zu U_i gehörige C^∞-Partition der Eins, d.h. $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\sum_{i=0}^N \varphi = 1$ und $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_i$ $(i = 0, \ldots, N)$. Dann gilt für $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq \sum_{i=0}^N \|\varphi_i u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq 2C_1 \sum_{i=0}^N \|(A_0(x, D) - \lambda)\varphi_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Es ist

$$(A_0(x,D)-\lambda)\varphi_i u = \varphi_i(A_0(x,D)-\lambda)u + R_{1,i}u,$$

wobei $R_{1,i}$ ein Differentialoperator mit Ordnung nicht größer als $2m-1$ ist.

Nach Wahl der Umgebungen U_i und wegen $0 \le \varphi \le 1$ gilt für $w \in L^p(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\|\varphi_i w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \sum_{i=0}^N \|\varphi_i w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le N_0 \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\|\!|u|\!\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} &\le 2C_1 \sum_{i=0}^N \big(\|\varphi_i(A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_{1,i}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\big)\\ &\le C_2\big(\|(A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_1 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\big)\end{aligned}$$

mit $C_2 := 2N_0C_1$ und $R_1 := \sum_{i=0}^N R_{1,i}$. Wir schreiben weiter $R_2 := A(x,D) - A_0(x,D)$ und erhalten

$$\|\!|u|\!\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le C_2\big(\|(A(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_1u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_2u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\big).$$

Da R_1, R_2 Differentialoperatoren von Ordnung nicht größer als $2m-1$ sind, gilt $\|R_iu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_3\|u\|_{W_p^{2m-1}(\mathbb{R}^n)}$ mit einer Konstanten $C_3 > 0$. Wir verwenden nun die Interpolationsungleichung (Satz A.7) und erhalten

$$\|u\|_{W_p^{2m-1}(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{4C_2C_3}\|u\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + C_4\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{4C_2C_3}\|\!|u|\!\|_{2m,p,\mathbb{R}^n},$$

falls $|\lambda| \ge \lambda_1 := 4C_2C_3C_4$. Eingesetzt ergibt sich

$$\|\!|u|\!\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le C_2\|(A(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\!|u|\!\|_{2m,p,\mathbb{R}^n},$$

d.h. die a priori-Abschätzung des Satzes gilt mit der Konstante $2C_2$ für alle $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ und alle $\lambda \in \mathscr{L}$ mit $|\lambda| \ge \lambda_1$.

(iii) *Existenz der Resolvente:* Wir wählen $\varepsilon := \frac{1}{8C_1N_0}$ in (i) und zugehörige Umgebungen U_i. Definiere dazu die Partition der Eins $(\varphi_j)_{j=0,\dots,N}$ wie oben und $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \psi_j \le 1$, $\operatorname{supp}\psi_j \subset U_i$ und $\psi_j = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi_j$. Sei $A_{p,j}$ die L^p-Realisierung von $A(x_j, D)$. Wir definieren

$$R(\lambda)f := \sum_{j=0}^N \varphi_j(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f \quad (f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathscr{L},\ |\lambda| \ge \lambda_1).$$

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$(A_p-\lambda)R(\lambda)f = \sum_{j=0}^N (A_p-\lambda)\varphi_j(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \big(\varphi_j(A_p-\lambda)(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f + T_{1,j}(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j\big) f,$$

wobei $T_{1,j}$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq 2m-1$ ist. Wir schreiben weiter

$$\begin{aligned}\varphi_j(A_p-\lambda)(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f &= \varphi_j(A_0(x_j,D)-\lambda)(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f\\ &\quad + \varphi_j\big(A(x,D)-A_0(x_j,D)\big)(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f\\ &= \varphi_j f + T_{2,j} f\end{aligned}$$

mit $T_{2,j}f := \varphi_j\big(A(x,D)-A_0(x_j,D)\big)(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f$. Für $v_j := (A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f$ gilt nach Teil (i) des Beweises

$$\|v_j\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + |\lambda|\,\|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Andererseits gilt nach Wahl der Umgebungen U_i und unter Verwendung der Interpolationsungleichung die Abschätzung

$$\|(A(x,D)-A_0(x_j,D))v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{8C_1N_0}\|v_j\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + C_5\|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

mit einer Konstanten $C_5>0$. Für den Operator $T_2 := \sum_{j=0}^N T_{2,j}$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\|T_2 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \sum_{j=0}^N \|T_{2,j}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \sum_{j=0}^N \|\varphi_j\big(A(x,D)-A_0(x_j,D)\big)v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \sum_{j=0}^N \|\big(A(x,D)-A_0(x_j,D)\big)v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \frac{1}{8C_1N_0}\,C_1\sum_{j=0}^N \|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{C_5\cdot C_1}{|\lambda|}\|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \frac{1}{8}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{C_5\cdot C_1\cdot N_0}{|\lambda|}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \frac{1}{4}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

falls $|\lambda| \geq \lambda_2 := \max\{\lambda_1, C_5\cdot C_1\cdot N_0\}$. Genauso folgt aus der Interpolationsungleichung

$$\sum_{j=0}^N \|T_{1,j}(A_{p,j}-\lambda)^{-1}\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{4}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

falls $\lambda \in \mathscr{L}$, $|\lambda| \geq \lambda_2$ mit geeignetem $\lambda_2 > 0$ ist. Wir setzen $\lambda_0 := \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ und erhalten insgesamt

$$(A_p - \lambda)R(\lambda)f = f + T(\lambda)f \quad (\lambda \in \mathscr{L},\ |\lambda| \geq \lambda_0),$$

wobei $T(\lambda)f := T_2 f + \sum_{j=0}^N T_{1,j}(A_{p,j} - \lambda)^{-1}\psi_j f$ ein beschränkter Operator in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist mit Norm $\|T(\lambda)\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{1}{2}$. Somit gilt

$$(A_p - \lambda)R(\lambda)(1 + T(\lambda))^{-1} = \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $A_p - \lambda$ ist surjektiv. Nach der a priori-Abschätzung aus Teil (ii) des Beweises ist $A_p - \lambda$ auch injektiv, d.h. es gilt

$$\rho(A_p) \supset \{\lambda \in \mathscr{L} : |\lambda| \geq \lambda_0\}.$$

Die a priori-Abschätzung des Satzes wurde bereits in Teil (ii) bewiesen, die restlichen Aussagen folgen wie im Modellproblem. □

c) Die Bedingung von Lopatinskii-Shapiro

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{2m-1,1}$-Rand. Wir betrachten nun ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} (A(x,D) - \lambda)u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ B_j(x,D)u &= g_j \quad (j = 1, \ldots, m) \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{7-3}$$

Hierbei sind $A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$, $B_j(x,D) = \sum_{|\beta|\leq m_j} b_{j\beta}(x)\gamma_0 D^\beta$ $(j = 1, \ldots, m)$ mit $m_j < 2m$. Die Bezeichnung γ_0 steht hier für die sogenannte Spurabbildung $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$, welche zunächst für C^∞-Funktionen definiert ist, sich aber zu einem stetigen linearen Operator

$$\gamma_0 \colon W_p^k(\Omega) \to W_p^{k-1/p}(\partial\Omega) := B_{pp}^{k-1/p}(\partial\Omega)$$

für $k = 1, \ldots, 2m$ fortsetzen lässt. Dabei steht $B_{pp}^{k-1/p}(\partial\Omega)$ für den Besovraum der Ordnung $k - 1/p$ auf dem Rand $\partial\Omega$. Die rechten Seiten von (7-3) sind gegeben und aus den folgenden Sobolevräumen:

$$f \in L^p(\Omega),\ g_j \in W_p^{2m-m_j-1/p}(\partial\Omega)\ (j = 1, \ldots, m).$$

Zur Lösung von (7-3) wird folgende Strategie verwendet:

(i) *Reduktion auf den Fall $f = 0$:* Falls A parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ ist, so existiert nach Satz 7.22 für $\lambda \in \mathscr{L}$, $|\lambda|$ groß, eine Lösung u_1 von

$$(A(x,D) - \lambda)u_1 = \widetilde{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$\widetilde{f} := \begin{cases} f & \text{in } \Omega, \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Für die Lösung u_1 gilt $u_1 \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ und $\|u_1\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le C\|f\|_{L^p(\Omega)}$. Man sucht nun eine Lösung $u_2 \in W_p^{2m}(\Omega)$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} (A(x,D) - \lambda)u_2 &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ B_j(x,D)u_2 &= g_j - B_j(x,D)u_1 \quad (j = 1,\dots,m) \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{7-4}$$

Dann ist $u_1 + u_2$ eine Lösung von (7-3). Somit können wir $f = 0$ annehmen.

(ii) *Einfrieren der Koeffizienten:* Fixiere $x_0 \in \partial\Omega$ und wähle ein zu x_0 gehöriges Koordinatensystem. Dies ist ein Koordinatensystem, bezüglich welchem $x_0 = 0$ gilt und für welches die positive x_n-Richtung in Richtung der inneren Normale an x_0 zeigt, und das aus dem ursprünglichen Koordinatensystem durch Drehung und Verschiebung hervorgeht. In diesem Koordinatensystem sind $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ tangentiale Richtungen. Man ersetzt die Operatoren durch ihren Hauptteil und erhält das sog. Modellproblem im Halbraum $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$:

$$\begin{aligned} (A_0(x_0,D) - \lambda)u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ B_{j0}(x_0,D)u &= g_j \quad (j = 1,\dots,m) \quad \text{auf } \mathbb{R}^{n-1} = \partial\mathbb{R}^n_+. \end{aligned} \tag{7-5}$$

(iii) *Partielle Fouriertransformation:* Sei $\mathscr{F}'\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n-1}) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$ die Fouriertransformation „$x' \mapsto \xi'$“. Angewendet auf (7-5) erhält man

$$\begin{aligned} (A_0(x_0,\xi',D_n) - \lambda)v(x_n) &= 0 \quad (x_n > 0), \\ B_{j0}(x_0,\xi',D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} &= (\mathscr{F}' g_j)(\xi') \quad (j = 1,\dots,m). \end{aligned} \tag{7-6}$$

Hier ist $v(x_n) := (\mathscr{F}'u)(\xi', x_n)$. Die Lösung u erhält man dann durch partielle Fourier-Rücktransformation $(\mathscr{F}')^{-1}$. Man beachte, dass (7-6) eine gewöhnliche Differentialgleichung ist. Somit hat man das ursprüngliche Randwertproblem im Kern zurückgeführt auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung $2m$ mit m Anfangsbedingungen.

Die Lösungen von

$$(A_0(x_0,\xi',D_n) - \lambda)v(x_n) = 0 \quad (x_n > 0)$$

sind gegeben durch Funktionen der Form $ce^{i\tau x_n}$ mit $c \in \mathbb{C}$, wobei τ die algebraische Gleichung $A_0(x_0,\xi',\tau) - \lambda = 0$ erfüllt (mit entsprechenden Modifikationen bei mehrfachen Nullstellen). Falls $\operatorname{Im}\tau > 0$, so ist $\operatorname{Re} i\tau < 0$ und es gilt $v(x_n) \to 0 \quad (x_n \to \infty)$, d.h. die Lösung ist (asymptotisch) stabil. Falls $\operatorname{Im}\tau < 0$, so folgt analog $\operatorname{Re} i\tau > 0$, und es gilt $|v(x_n)| \to \infty \quad (x_n \to \infty)$. Da wir insgesamt (mindestens) an L^p-Lösungen interessiert sind, dürfen wir nur die stabilen Lösungen betrachten.

7.23 Definition. a) Das Randwertproblem (7-3) heißt parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$, falls $A(x, D)$ in diesem Sektor parameterelliptisch ist und folgende Lopatinskii-Shapiro-Bedingung erfüllt ist:

(LS) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Schreibe das Randwertproblem (7-3) und zu x_0 gehörigen Koordinaten. Dann hat die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (A_0(x_0, \xi', D_n) - \lambda)v(x_n) &= 0 \quad (x_n > 0), \\ B_{j0}(x_0, \xi', D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} &= 0 \quad (j = 1, \dots, m), \\ v(x_n) &\to 0 \quad (x_n \to \infty) \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung für alle $(\xi', \lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathscr{L}) \setminus \{0\}$.

b) Das Randwertproblem $(A(x, D), B_1(x, D), \dots, B_m(x, D))$ heißt elliptisch, falls $A(x, D)$ elliptisch ist und die Lopatinskii-Shapiro-Bedingung für $\lambda = 0$ erfüllt ist.

7.24 Lemma. *Sei $A(x, D)$ elliptisch von Ordnung $2m$. Für ein $x_0 \in \partial\Omega$ gelte die Lopatinskii-Shapiro-Bedingung. Sei $\mathscr{M}$ der $2m$-dimensionale Lösungsraum von*

$$(A_0(x_0, \xi', D_n) - \lambda)v(x_n) = 0 \quad (x_n > 0),$$

und sei $\mathscr{M}_{pm}$ der Unterraum der stabilen bzw. instabilen Lösungen. Dann gilt $\dim \mathscr{M}_\pm = m$, und $A(x, D)$ ist proper elliptisch.

Beweis. Sei $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ und $P := A_0(x_0, \xi', \cdot)$. Wir schreiben $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\xi')$. Da P keine reelle Nullstelle besitzt, gilt $\mathscr{M}(\xi') = \mathscr{M}_+(\xi') \oplus \mathscr{M}_-(\xi')$, und $\dim \mathscr{M}_\pm(\xi')$ ist die Anzahl der Nullstellen von P in $\mathbb{C}_\pm$.

Nach (LS) ist die lineare Abbildung

$$\mathscr{M}_+ \to \mathbb{C}^m, \; v \mapsto B_{j0}(x_0, \xi', D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0}$$

injektiv, d.h. es gilt $\dim M_+(\xi') \le m$. Wegen $A_0(x_0, \xi', \tau) = A_0(x_0, -\xi', -\tau)$ gilt $\mathscr{M}_-(\xi') = \mathscr{M}_+(-\xi')$, und (LS) liefert $\dim M_+(-\xi') \le m$. Damit

$$2m = \dim \mathscr{M}_+(\xi') + \dim \mathscr{M}_-(\xi') \le m + m = 2m,$$

und A ist proper elliptisch. □

7.25 Korollar. *Sei $A(x, D)$ parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$. Die folgenden Bedingungen sind jeweils äquivalent zur Lopatinskii-Shapiro-Bedingung.*

(i) Für alle $x_0 \in \partial\Omega$, alle $(\xi', \lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathscr{L}) \setminus \{0\}$ und alle $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{C}$ besitzt

$$(A_0(x_0, \xi', D_n) - \lambda)v(x_n) = 0 \quad (x_n > 0),$$

$$B_{j0}(x_0, \xi', D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} = h_j \quad (j = 1, \dots, m),$$
$$v(x_n) \to 0 \quad (x_n \to \infty)$$

genau eine Lösung.

(ii) Für alle $x_0 \in \partial\Omega$ und alle $(\xi', \lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathscr{L}) \setminus \{0\}$ ist der Operator

$$T(x_0, \xi', \lambda) \colon W_p^{2m}((0, \infty)) \to L^p((0, \infty)) \times \mathbb{C}^m,$$
$$v \mapsto \begin{pmatrix} (A_0(x_0, \xi', D_n) - \lambda)v \\ B_{10}(x_0, \xi', D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} \\ \vdots \\ B_{m0}(x_0, \xi', D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} \end{pmatrix}$$

invertierbar.

Beweis. Die Äquivalenz von (LS) und (i) folgt aus Lemma 7.24 wegen $\dim \mathscr{M}_+ = m$. Zur Äquivalenz von (i) und (ii) definiert man zu $f \in L^p((0, \infty))$ die triviale Fortsetzung $\widetilde{f} := f \cdot \chi_{(0,\infty)}$ auf $\mathbb{R}$ und löst die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(A_0(x_0, \xi', D_n) - \lambda)v_1(x_n) = \widetilde{f}(x_n) \quad (x_n \in \mathbb{R})$$

durch den Fourieransatz

$$v_1 := \mathscr{F}_{x_n}^{-1} \frac{1}{A_0(x_0, \xi', \xi_n) - \lambda} \mathscr{F}_{x_n} \widetilde{f} \in W_p^{2m}(\mathbb{R}).$$

Damit erreicht man wie oben eine Reduktion auf den Fall $f = 0$. Die Aussage von (ii) folgt dann daraus, dass eine stabile Lösung der homogenen Gleichung exponentiell abfällt und damit in $W_p^{2m}((0, \infty))$ liegt. □

7.26 Bemerkung. Man betrachtet in (ii) den Operator für festes ξ' und x_0 als Funktion von λ. Dann ist $T(\lambda) = T(x_0, \xi', \lambda)$ eine sogenannte Operatorschar, welche linear vom Spektralparameter λ abhängt. Das Spektrum einer Operatorschar wird definiert als

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T(\lambda) \text{ nicht bijektiv } \}.$$

Damit kann man die Bedingung (ii) in folgender Form schreiben:

Für alle $x_0 \in \partial\Omega$ und alle $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ ist $\rho(T(x_0, \xi', \cdot)) \supset \mathscr{L}$.

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir noch den Hauptsatz für parameterelliptische Randwertprobleme angeben. Der Beweis verwendet obige Lösungsstrategie, enthält aber noch eine Reihe technisch aufwändiger Details.

In folgendem Satz ist die L^p-Realisierung $A_{B,p}$ des Randwertproblems

$$(A(x, D), B_1(x, D), \dots, B_m(x, D))$$

gegeben durch

$$
\begin{aligned}
D(A_{B,p}) &:= \{u \in W_p^{2m}(\Omega) : B_1 u = \dots = B_m u = 0\},\\
A_{B,p} u &:= A(x,D)u \quad (u \in D(A_{B,p})).
\end{aligned}
$$

7.27 Satz (Hauptsatz für parameterelliptische Randwertprobleme)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet mit* $C^{2m-1,1}$*-Rand. Für die Koeffizienten der Operatoren* $A(x,D)$ *und* $B_j(x,D)$ *gelte* $a_\alpha \in C(\overline{\Omega})$ *falls* $|\alpha| = 2m$*,* $a_\alpha \in L^\infty(\Omega)$ *falls* $|\alpha| < 2m$ *und* $b_{j\beta} \in C^{2m-m_j-1,1}(\partial\Omega)$ $(j = 1,\dots,m,\ |\beta| \le m_j)$*.*

Falls das Randwertproblem $(A(x,D), B_1(x,D),\dots,B_m(x,D))$ *in einem Sektor* $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ *parameterelliptisch ist, so existiert ein* $\lambda_0 > 0$ *so, dass* (7-3) *für alle* $\lambda \in \mathscr{L}$ *mit* $|\lambda| \ge \lambda_0$ *und alle*

$$
f \in L^p(\Omega),\ g_j \in W_p^{2m-m_j-1/p}(\partial\Omega) \quad (j = 1,\dots,m)
$$

eine eindeutige Lösung $u \in W_p^{2m}(\Omega)$ *besitzt, und es gilt die a priori-Abschätzung*

$$
|||u|||_{2m,p,\Omega} \le C\big(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^m |||g_j|||_{2m-m_j-1/p,p,\partial\Omega}\big) \quad (\lambda \in \mathscr{L}, |\lambda| \ge \lambda_0).
$$

Insbesondere ist die L^p*-Realisierung* $A_{B,p} - \lambda_0$ *sektoriell mit Winkel* φ*, falls* $\mathscr{L} = \overline{\Sigma}_\varphi$*. Falls* $\mathscr{L} \supset \overline{\Sigma}_{\pi/2}$*, so erzeugt* $A_{B,p} - \lambda_0$ *eine holomorphe Halbgruppe auf* $L^p(\Omega)$*.*

A. Elemente der Sobolevraumtheorie

A.1 Worum geht's? In diesem Anhang sollen einige Ergebnisse aus der Theorie der Sobolevräume zitiert werden. Dabei wird nicht in jedem Fall Wert darauf gelegt, die Differenzierbarkeitsbedingungen an das Gebiet minimal zu wählen.

Im folgenden sei $D := -i(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zu $m \in \mathbb{N}$ ist $C^m(\overline{\Omega})$ definiert als die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, welche eine Fortsetzung $\widetilde{f} \in C^m(U)$ mit einer offenen Teilmenge $U \supset \overline{\Omega}$ besitzen. Die Konstanten C, C_1, C_2 in den folgenden Aussagen sind wieder generische Konstanten.

Zunächst zitieren wir noch eine Variante der Hölderschen Ungleichung.

A.2 Satz (Hölder-Ungleichung)**.** *Seien $1 \le p, q, r \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Dann ist für $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$ das Produkt $fg \in L^r(\Omega)$ und*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

A.3 Definition. Sei $1 \le p \le \infty$ und $m \in N$. Dann ist der Sobolevraum $W_p^m(\Omega)$ definiert als die Menge aller $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ mit $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ $(|\alpha| \le m)$. Die Norm auf $W_p^m(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\|u\|_{m,p,\Omega} := \|u\|_{W_p^m(\Omega)} := \Big(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \Big)^{1/p}.$$

Man definiert auch noch die Seminorm

$$|u|_{m,p,\Omega} := |u|_{W_p^m(\Omega)} := \Big(\sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \Big)^{1/p}.$$

Im Fall $p = \infty$ modifiziert man wie üblich.

Man beachte, dass $\|\cdot\|_{0,p,\Omega} = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$.

A.4 Satz. *a) Der Sobolevraum $W_p^m(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

b) Sei $H_p^m(\Omega)$ die Vervollständigung von $\{u \in C^m(\overline{\Omega}) : \|u\|_{m,p,\Omega} < \infty\}$. Dann gilt $H_p^m(\Omega) = W_p^m(\Omega)$.

c) Falls $\partial\Omega$ die Segmentbedingung erfüllt, so ist die Menge $\{u|_\Omega : u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\}$ dicht in $W_p^m(\Omega)$.

A.5 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz)**.** *a) Falls Ω der Kegelbedingung genügt, so gilt für $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$ mit $mp > n$ und $j \in \mathbb{N}_0$ die Einbettung*

$$W_p^{m+j}(\Omega) \hookrightarrow C_b^j(\Omega),$$

d.h. jedes $u \in W_p^{m+j}(\Omega)$ *ist nach Änderung auf einer Nullmenge eine Funktion in* $C_b^j(\Omega)$*, und die Abbildung* $u \mapsto u$, $W_p^{m+j}(\Omega) \hookrightarrow C_b^j(\Omega)$ *ist stetig.*

b) Falls Ω *die starke lokale Lipschitzbedingung erfüllt, so kann in a)* $C_b^j(\Omega)$ *durch* $C^j(\overline{\Omega})$ *ersetzt werden, und es gilt sogar* $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\Omega)$ *für alle* $\lambda \in (0,1)$ *mit* $\lambda \leq m - \frac{n}{p}$.

A.6 Satz (Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung)**.** *Sei* Ω *ein Lipschitz-Gebiet, und seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* $p, p_1 \in (1,\infty)$ *gegeben mit*

$$0 < \tau := \frac{n}{m}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\Big) < 1.$$

Dann gilt $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L_{p_1}(\Omega)$ *und*

$$\|u\|_{0,p_1,\Omega} \leq C\|u\|_{m,p,\Omega}^{\tau}\|u\|_{0,p,\Omega}^{1-\tau} \quad (u \in W_p^m(\Omega)).$$

A.7 Satz (Interpolations-Ungleichung)**.** *Sei* Ω *ein Gebiet, welches die Kegelbedingung erfüllt, und seien* $m, k \in \mathbb{N}$ *mit* $0 < k < m$*. Dann gilt mit* $\tau := \frac{k}{m}$ *die Abschätzung*

$$|u|_{k,p,\Omega} \leq C\|u\|_{m,p,\Omega}^{\tau}\|u\|_{0,p,\Omega} \quad (u \in W_p^m(\Omega)).$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ *existiert eine Konstante* $C(\varepsilon) > 0$ *mit*

$$|u|_{k,p,\Omega} \leq \varepsilon|u|_{m,p,\Omega} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,p,\Omega},$$
$$\|u\|_{k,p,\Omega} \leq \varepsilon\|u\|_{m,p,\Omega} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,p,\Omega}$$

Literatur

[1] Adams, R. A., Fournier, J.: *Sobolev spaces.* 2nd edition, Academic Press, Amsterdam etc., 2003.

[2] Amann, H.: *Linear and quasilinear parabolic problems I.* Birkhäuser, Basel etc., 1995.

[3] Amann, H., Escher, J.: *Analysis III.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[4] Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M., Neubrander, F.: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[5] Davies, E. B.: *One-parameter semigroups.* Academic Press London etc., 1980.

[6] Denk, R., Hieber, M., Prüss, J.: R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. *Mem. Amer. Math. Soc.* **788** (2003), 114 pp.

[7] Engel, K.-J., Nagel, R.: *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Springer, New York etc., 2000.

[8] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: *Classes of linear operators. I.* Birkhäuser, Basel etc., 1990.

[9] Hörmander, L.: *The analysis of linear partial differential operators*, I-IV. Springer-Verlag Berlin 1976.

[10] Lunardi, A.: *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, Basel, 1995.

[11] Pazy, A.: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, New York etc., 1992.

[12] Tanabe, H.: *Equations of evolution.* Pitman, London etc., 1979.

[13] Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner-Verlag Stuttgart 1982.