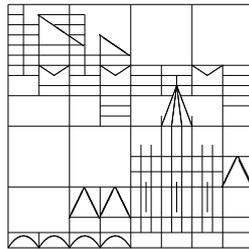


**Skript zur Vorlesung**  
**Mathematik für Physiker III**  
**(Teil 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen)**

**Wintersemester 2007/08**

**Robert Denk**



Universität Konstanz  
Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 26. 11. 2007



## Inhaltsverzeichnis

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Existenz- und Eindeutigkeitssatz . . . . .                             | 4  |
| 2 | Spezielle Lösungsmethoden . . . . .                                    | 16 |
|   | a) Gleichungen mit getrennten Variablen . . . . .                      | 16 |
|   | b) Homogene Differentialgleichungen und Substitution . . . . .         | 18 |
|   | c) Potenzreihenansatz . . . . .  | 20 |
|   | d) Exakte Differentialgleichungen . . . . .                            | 22 |
| 3 | Lineare Differentialgleichungen . . . . .                              | 26 |
|   | a) Homogene lineare Dgl. . . . .                                       | 26 |
|   | b) Inhomogene Gleichungen . . . . .                                    | 28 |
|   | c) Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .                      | 30 |
|   | d) Lineare Dgl. höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . . | 34 |
| 4 | Zur Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . . .             | 39 |
|   | a) Grundbegriffe und explizite Einschrittverfahren . . . . .           | 39 |
|   | b) Mehrschrittverfahren . . . . .                                      | 44 |
|   | c) Steife Differentialgleichungen . . . . .                            | 48 |
| 5 | Stabilität . . . . .   | 50 |
| 6 | Rand- und Eigenwertprobleme . . . . .                                  | 59 |
|   | a) Randwertaufgaben für lineare Dgl.-Systeme . . . . .                 | 60 |
|   | b) Randwertprobleme für lineare Dgl. höherer Ordnung . . . . .         | 63 |
|   | c) Selbstadjungierte Eigenwertaufgaben . . . . .                       | 67 |
|   | Literatur . . . . .  | 73 |

## 1. Existenz- und Eindeigkeitsatz

**1.1 Worum geht's?** In der Modellierung treten häufig Gleichungen der Form  $y' = \alpha y$  oder (bis auf Konstanten)  $y'' + y = 0$  auf. Die erste Gleichung beschreibt z.B. radioaktiven Zerfall (dann ist  $\alpha < 0$ ) oder die Geldmenge bei kontinuierlicher fester Verzinsung  $\alpha$  (in diesem Fall ist  $\alpha > 0$  und wird meist mit  $r$  bezeichnet). Die zweite Gleichung beschreibt etwa die Bewegung eines ungedämpften Pendels.

Was sollen diese Gleichungen bedeuten? Genauer müsste man schreiben:

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (1-1)$$

Man sucht hierbei eine Funktion  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die Gleichung (1-1) an jeder Stelle erfüllt. Derartige Gleichungen nennt man eine (gewöhnliche) Differentialgleichung (Dgl.). Natürlich gibt es hiervon mehrere Varianten:

- Die Funktion  $y$  ist nur auf einem Teilintervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert.
- Die Funktion  $y$  hat Werte in  $\mathbb{R}^n$ . In diesem Fall stehen links und rechts von (1-1) Vektoren der Länge  $n$ .
- Die Funktion  $y$  hat einen komplexen Wertebereich, d.h.  $y : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Diesen Fall werden wir im folgenden nur selten explizit aufschreiben, aber immer im Hinterkopf behalten.

Damit eine Funktion eine Lösung von (1-1) sein kann, muss man zumindest fordern, dass  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar ist. Häufig will man sogar  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ .

Im Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen stellen sich in natürlicher Weise folgende Fragen (und noch viel mehr):

- Gibt es eine Lösung der Differentialgleichung, d.h. eine Funktion  $y$ , welche (1-1) erfüllt?
- Kann man die Lösung explizit angeben?
- Existiert die Lösung vielleicht nur für einen Teilbereich des Intervalls  $I$  (also lokal), oder gibt es eine globale Lösung?
- Wieviele Lösungen gibt es?
- Kann man noch mehr über die Lösung sagen, ohne sie gleich auszurechnen? Ist die Lösung z.B. sogar zweimal differenzierbar oder beschränkt? Kann man die Lösung abschätzen?

- Wie hängt die Lösung von den Daten ab? Ersetzt man z.B. in (1-1) den Parameter  $\alpha$  durch ein  $\tilde{\alpha}$  mit  $|\alpha - \tilde{\alpha}|$  klein, was weiß man dann über die neue Lösung?

In unseren Beispielen kann man mehr sagen:

a) Eine Lösung von (1-1) ist die Funktion  $y(t) = e^{\alpha t}$ . Eine weitere Lösung ist z.B.  $y(t) = 2e^{\alpha t}$ . Falls man aber noch eine *Anfangsbedingung*

$$y(0) = 1$$

an die Lösung stellt, so ist  $y(t) = e^{\alpha t}$  die einzige Lösung. Man spricht hier von einem *Anfangswertproblem* (AWP).

b) Die Dgl.  $y'' + y = 0$  hat z.B. die Lösungen  $y(t) = \sin t$  und  $y(t) = \cos t$ . Jede Lösung dieser Dgl. hat die Form

$$y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

mit reellen Konstanten  $c_1, c_2$ . Die Menge der Lösungen ist also ein zweidimensionaler Untervektorraum von  $C(I; \mathbb{R})$ . Durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

wird die Lösung eindeutig festgelegt, nämlich  $y(t) = \cos t$ .

c) Das AWP

$$y''(t) + \cos t \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

hat eine eindeutige Lösung, die man aber nicht explizit hinschreiben kann. Man kann diese Gleichung recht einfach numerisch lösen; es handelt sich übrigens um die sogenannte Hillsche Differentialgleichung. Dass man die Lösung nicht einfach analytisch ausrechnen und elementar hinschreiben kann, ist bei Dgl. der Normalfall! Man sollte sich also nicht durch die Lösungsmethoden täuschen lassen, die im folgenden in der Vorlesung noch kommen.

d) Das AWP

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

im Intervall  $[0, \infty)$  hat unendlich viele linear unabhängige Lösungen.

In diesem ersten Abschnitt geht es darum zu sehen, unter welchen Bedingungen eine Dgl. eine Lösung besitzt und wann diese eindeutig ist.

**1.2 Definition.** a) Eine (gewöhnliche) Differentialgleichung (Dgl.) ist eine Gleichung der Form

$$f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0 \quad (t \in I). \quad (1-2)$$

Dabei ist  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto y(t)$  eine unbekannte Funktion, wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall ist, und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion mit  $D \subset I \times \mathbb{R}^{(k+1)n}$ . Häufig schreibt man (1-2) in der verkürzten Form

$$f(t, y, \dots, y^{(k)}) = 0.$$

Falls  $f$  von der höchsten Ableitung  $y^{(k)}$  wirklich abhängt, ist (1-2) eine Dgl.  $k$ -ter Ordnung.

Falls  $m > 1$ , spricht man auch von einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Falls sich die Funktion  $f$  in der Form  $f(t, y, \dots, y^{(k)}) = y^{(k)} - \tilde{f}(t, y, \dots, y^{(k-1)})$  schreiben lässt (d.h. man kann die Gleichung nach der höchsten Ableitung auflösen), so spricht man von einer expliziten Dgl.  $k$ -ter Ordnung.

Falls  $f$  nicht explizit von  $t$  abhängt, d.h. es gilt  $f(t, y, \dots, y^{(k)}) = \tilde{f}(y, \dots, y^{(k)})$ , so spricht man von einer autonomen Dgl.

Falls  $f$  linear in  $y, \dots, y^{(k)}$  ist, so heißt (1-2) eine lineare Dgl.

b) Ein Anfangswertproblem (AWP) ist eine Dgl. (1-2), welche zusätzlich mit Anfangsbedingungen der Form  $y(t_0) = y_0$ ,  $y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1}$  versehen ist. Dabei ist  $t_0 \in I$  und  $y_0, \dots, y_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ .

c) Eine Lösung der Dgl. (1-2) ist eine Funktion  $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , für welche gilt:

- $y$  ist  $k$ -mal differenzierbar in  $I$ ,
- $\forall t \in I: (t, y(t), \dots, y^{(k)}(t)) \in D$ ,
- $\forall t \in I: f(t, y(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0$ .

**1.3 Beispiele.**  $y'' + y = 0$ : linear, autonom, explizit, 2. Ordnung.

$y'' + \cos(t) \cdot y = 0$ : linear, nicht autonom, explizit, 2. Ordnung.

$y'' + \sin(y) = 0$ : nichtlinear, autonom, explizit, 2. Ordnung.

$(y')^2 + y^2 = 1$  in  $[-1, 1]$ : nichtlinear, autonom, nicht explizit (implizit), 1. Ordnung.

Bei impliziten Gleichungen beachte man den Satz über implizite Funktionen, der eventuell doch eine (lokale) Auflösbarkeit ergeben kann. Wir werden im folgenden fast ausschließlich explizite Dgl. betrachten.

**1.4 Bemerkung (Rückführung auf Dgl. 1. Ordnung).** Die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators

$$y'' = -cy$$

kann als System erster Ordnung umgeschrieben werden, indem man den Vektor  $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$  definiert. Es gilt dann

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= -cy_0, \end{aligned}$$

oder als Matrix

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Hier ist  $y_0(t) = y(t)$  der Ort und  $y_1(t) = y'(t)$  die Geschwindigkeit des schwingenden Massenpunktes zur Zeit  $t$ . Durch Vorgabe von Startwerten für Ort und Geschwindigkeit zur Zeit  $t = t_0$  wird die Lösung für alle Zeiten eindeutig festgelegt.

Dieses Prinzip der Rückführung auf ein System erster Ordnung funktioniert auch allgemein. Betrachte die (explizite) Dgl.  $k$ -ter Ordnung

$$y^{(k)} = F(t, y, \dots, y^{(k-1)}), \quad y: I \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1-3)$$

Setze für  $t \in I$

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= y(t), \\ x_2(t) &:= y'(t), \\ &\vdots \\ x_k(t) &:= y^{(k-1)}(t). \end{aligned}$$

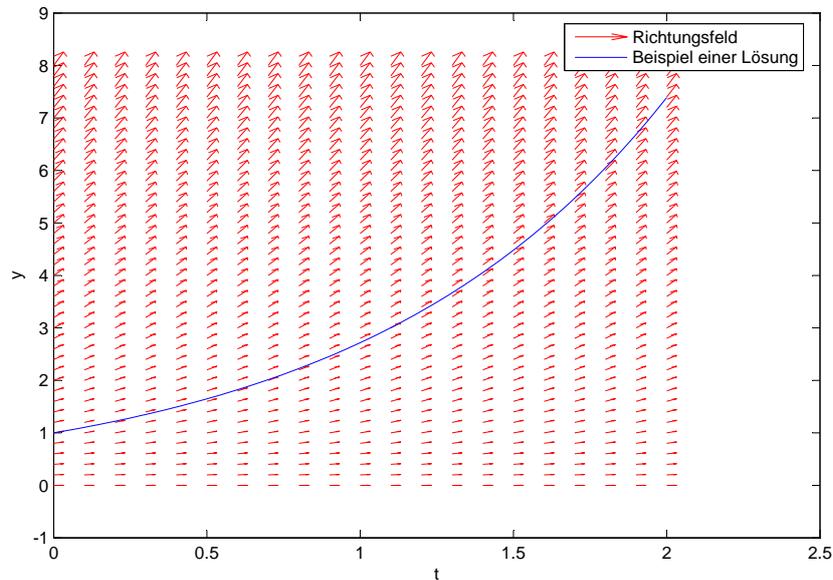
Dann ist  $y$  genau dann eine Lösung von (1-3), falls die Funktion  $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} : I \rightarrow$

$\mathbb{R}^{k \cdot n}$  eine Lösung ist von

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ F(t, x_1(t), \dots, x_k(t)) \end{pmatrix} =: f(t, x(t)).$$

Damit kann man sich bei theoretischen Aussagen etwa über die Lösbarkeit stets auf Systeme erster Ordnung beschränken.

**1.5 Bemerkung (Richtungsfelder).** Betrachte das skalare AWP  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(t_0) = y_0$ . Zu  $t_1 \in I$  gibt dann  $f(t_1, y(t_1))$  die Steigung von  $y$  an der Stelle  $t_1$  an. Auch ohne die Lösung  $y$  zu kennen, kann man daher das Richtungsfeld zeichnen. Die Abbildungen 1–3 zeigen die Richtungsfelder verschiedener Dgl.

Abbildung 1: Das Richtungsfeld der Dgl.  $y'(t) = y(t)$ 

**1.6 Beispiel.** Ein Körper falle aus großer Höhe alleine unter dem Einfluss der Gravitation. Mit  $y(t)$  bezeichnen wir den Abstand des Körpers zum Erdmittelpunkt zum Zeitpunkt  $t$ . Nach dem Gravitationsgesetz gilt für die Beschleunigung  $y''$  die Gleichung

$$y''(t) = -c \frac{1}{y^2(t)}$$

mit einer Konstanten  $c > 0$ . Multipliziere mit  $2y'$ :

$$2y'y'' = 2c \frac{-y'}{y^2},$$

also

$$\frac{d}{dt}(y')^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{2c}{y}\right)$$

und damit

$$(y')^2 = \frac{2c}{y} + \alpha,$$

d.h.

$$y' = \sqrt{\frac{2c}{y} + \alpha}$$

mit einer Integrationskonstante  $\alpha$ . Falls der Körper zur Zeit  $t_0$  in der Höhe  $R$  und in Ruhe ist, gilt  $y(t_0) = R$  und  $y'(t_0) = 0$ , d.h.  $\alpha = -\frac{2c}{R}$ . Damit erhalten wir für  $y$  die Dgl. erster Ordnung

$$y' = -\sqrt{2c} \sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{R}}. \quad (1-4)$$

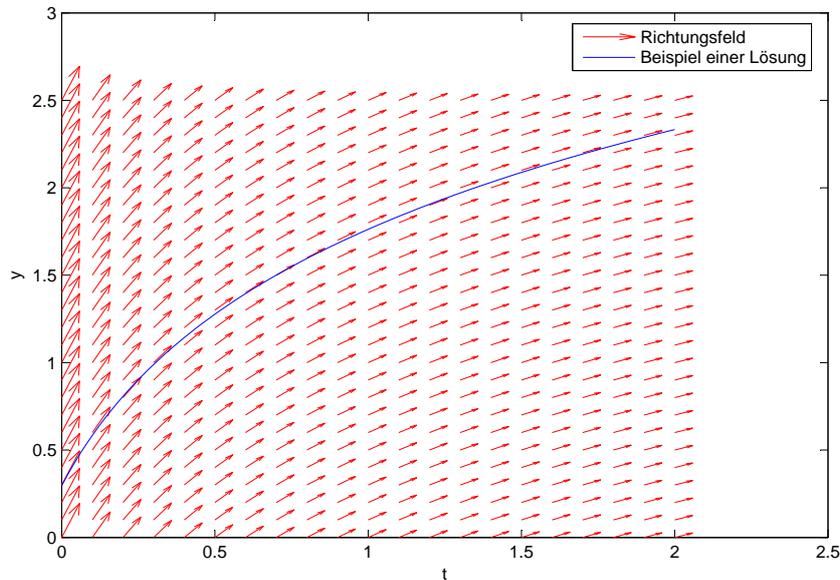


Abbildung 2: Das Richtungsfeld der Dgl.  $y'(t) = (0.3 + t)^{-1}$

Eine Lösung dieser Dgl. ist physikalisch sinnvoll und beschreibt die Bewegung des Körpers. Man sieht aber auch sofort, dass (1-4) die konstante Lösung  $y(t) = R$  ( $t \geq t_0$ ) besitzt. Hier schwebt der Körper unbeweglich in Höhe  $R$ . Aber auch Kombinationen sind Lösungen, etwa wenn der Körper zunächst eine halbe Stunde schwebt und dann zur Erde fällt.

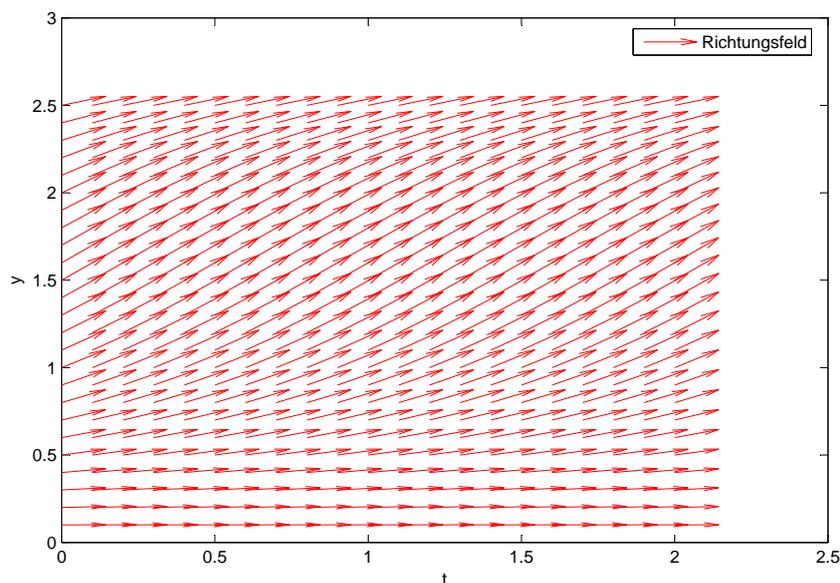
Wir sehen hier, dass Differentialgleichungen nicht immer eine eindeutige Lösung besitzen, und dass die Lösung einer Dgl. nicht immer physikalisch sinnvoll sein muss. Tatsächlich gibt es hier unendlich viele linear unabhängige Lösungen!

Es stellt sich also die Frage, wann eine gewöhnliche Dgl. mit entsprechenden Anfangsbedingungen eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Frage wird im wesentlichen beantwortet durch folgenden Satz. Dieser ist schon einer der Hauptsätze für die Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung. Wir betrachten nur explizite Dgl., und nach Bemerkung 1.4 können wir o.E. von einem System 1. Ordnung ausgehen. Der Beweis enthält zwei wichtige Elemente: Die Transformation in eine Integralgleichung und den Banachschen Fixpunktsatz.

Weil der Banachsche Fixpunktsatz in der Analysis so zentral ist, wird er hier nochmal wiederholt. Zunächst eine Definition:

**1.7 Definition.** Sei  $M$  ein normierter Raum. Eine Abbildung  $\Phi : M \rightarrow M$  heißt *kontrahierend*, falls es ein  $c \in [0, 1)$  gibt mit

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq c \cdot \|x - y\| \quad (x, y \in M).$$

Abbildung 3: Das Richtungsfeld der Dgl.  $y'(t) = \sin^2(y(t))$ 

**1.8 Satz (Banachscher Fixpunktsatz).** Sei  $M$  ein Banachraum und  $\Phi : M \rightarrow M$  kontrahierend. Dann besitzt  $\Phi$  genau einen Fixpunkt  $z \in M$ , d.h.  $\Phi(z) = z$ .

Definiert man zu  $x_0 \in M$  die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset M$  durch  $x_{n+1} := \Phi(x_n)$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ), dann gilt  $x_n \rightarrow z$ ,  $n \rightarrow \infty$ , und  $\|x_n - z\| \leq \frac{c^n}{1-c} \|x_1 - x_0\|$  (a priori-Abschätzung).

**1.9 Satz (von Picard-Lindelöf, globale Version).** Sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Sei ferner  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion, die einer globalen Lipschitz-Bedingung genügt:

$$\exists L \geq 0 \forall t \in I \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|. \quad (1-5)$$

Dann existiert genau eine Lösung  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  des AWP's

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

*Beweis.* (i) Transformation in eine Integralgleichung: Falls  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  eine Lösung ist, so folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds =: (Ty)(t). \quad (1-6)$$

Ist andererseits eine Funktion  $y \in C(I; \mathbb{R}^n)$  eine Lösung von  $Ty = y$ , so folgt  $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  und  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(t_0) = y_0$ , d.h.  $y$  ist eine Lösung.

(ii) Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes: Wir betrachten den Operator  $T: C(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I; \mathbb{R}^n)$ ,  $(Ty)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$ . Dabei versehen wir  $C(I; \mathbb{R}^n)$  mit einer neuen Norm:

$$\|g\|^\sim := \sup_{t \in I} |e^{-(L+1)t} g(t)| \quad (g \in C(I; \mathbb{R}^n)).$$

Wegen

$$e^{-(L+1)b} \leq e^{-(L+1)t} \leq e^{-(L+1)a} \quad (t \in [a, b])$$

ist diese Norm äquivalent zur Supremumsnorm, und  $(C(I; \mathbb{R}^n), \|\cdot\|^\sim)$  ist ein Banachraum. Wir rechnen nach, dass  $T$  eine Kontraktion in diesem Raum ist.

Zu  $x, y \in C(I; \mathbb{R}^n)$  ist

$$\|Tx - Ty\|^\sim = \sup_{t \in I} e^{-(L+1)t} \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds \right|.$$

Für  $t \geq t_0$  ist

$$\begin{aligned} e^{-(L+1)t} \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds \right| &\leq e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)| ds \\ &= L e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^t \underbrace{e^{(L+1)s} |x(s) - y(s)|}_{\leq \|x-y\|^\sim} ds \\ &\leq L \cdot \|x - y\|^\sim \cdot e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^t e^{(L+1)s} ds \\ &= L \cdot \|x - y\|^\sim \cdot e^{-(L+1)t} \left( \frac{e^{(L+1)s}}{L+1} \right) \Big|_{s=t_0}^t \\ &= L \cdot \|x - y\|^\sim \cdot e^{-(L+1)t} \cdot \frac{e^{(L+1)t} - e^{(L+1)t_0}}{L+1} \\ &\leq \frac{L}{L+1} \|x - y\|^\sim. \end{aligned}$$

Genauso sieht man dies für  $t \leq t_0$ . Damit folgt

$$\|Tx - Ty\|^\sim \leq \frac{L}{L+1} \|x - y\|^\sim.$$

Wegen  $\frac{L}{L+1} < 1$  ist die Abbildung  $T: C(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I; \mathbb{R}^n)$  eine Kontraktion. Damit existiert genau ein Element  $y \in C(I; \mathbb{R}^n)$  mit  $Ty = y$  (Gleichheit in  $C(I; \mathbb{R}^n)$ , also insbesondere an jeder Stelle  $t$ ). Dieses  $y$  ist also die eindeutige Lösung des AWP.  $\square$

**1.10 Bemerkung.** a) Wendet man den Satz von Picard-Lindelöf auf explizite Dgl.  $k$ -ter Ordnung

$$y^{(k)} = F(t, y, \dots, y^{(k-1)}), \quad y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

an, so erhält man die eindeutige Lösbarkeit für diese Dgl. mit den Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = y^0, y'(t_0) = y^1, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y^{k-1}$$

mit  $y^j \in \mathbb{R}^n$  für  $j = 0, \dots, k-1$ .

b) Mit dem wörtlichen gleichen Beweis gilt der Satz von Picard-Lindelöf auch für komplexwertige Funktionen, indem man  $\mathbb{R}^n$  durch  $\mathbb{C}^n$  ersetzt.

**1.11 Beispiele.** Die Lipschitz-Stetigkeit besagt anschaulich, dass die Steigung der Sekante zweier Punkte auf dem Graph der Funktion beschränkt bleibt. So ist z.B. die Funktion

$$f(t, y) = t^2 + y^2$$

global Lipschitz-stetig (bzgl.  $y$ !) auf jedem beschränkten Bereich wegen

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| \leq 2 \max_{|y_1, y_2|} |y_1 - y_2|,$$

aber nicht global Lipschitz-stetig in  $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ . Typische Beispiele von Funktionen, die nicht Lipschitz-stetig in beschränkten Bereichen sind, sind durch Wurzeln gegeben. So erfüllt etwa die Dgl.

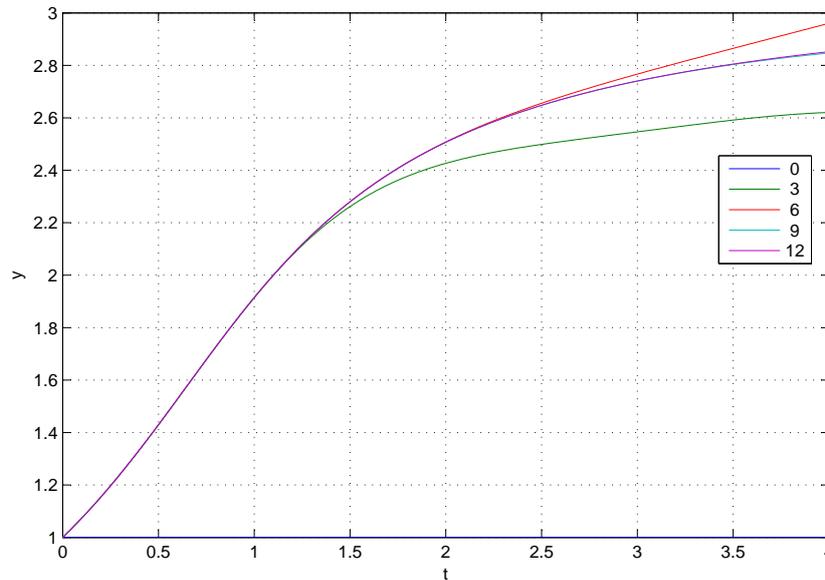
$$y' = -\sqrt{2c} \sqrt{\frac{1}{y} - 1} R$$

aus Beispiel 1.6 nicht die Bedingung des Satzes von Picard-Lindelöf (was auch klar ist, da keine eindeutige Lösung existiert). Auch die Dgl.  $y' = \sqrt{|y|}$  aus Abschnitt 1.1 ist nicht global Lipschitz-stetig.

**1.12 Bemerkung.** Wie wir aus dem Banachschen Fixpunktsatz wissen, konvergiert die Iteration  $x_n := Tx_{n-1}$  für jeden Startwert  $x_0 \in C(I; \mathbb{R}^n)$  gegen den Fixpunkt  $y$ , also die Lösung der Differentialgleichung. Man hat also ein konstruktives Verfahren. Numerisch ist es allerdings weniger geeignet, dafür gibt es wesentlich bessere Verfahren. Wir wissen auch die a priori-Fehlerabschätzung  $d(y, x_n) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$  mit der Konstanten  $c := \frac{L}{L+1}$ . Die Abbildung 4 zeigt das Ergebnis der Picard-Iteration für die Dgl.  $y' = \sin^2 y$  mit Startwert 0. Man sieht, dass die Konvergenz recht langsam ist. In Abbildung 5 wird die Konvergenz der Lösung an der Stelle  $t = 4$  dargestellt.

Die globale Lipschitz-Bedingung von Satz 1.9 ist zu stark, z.B. erfüllt die Funktion  $f(t, x) := t^2 + x^2$  keine globale Lipschitz-Bedingung. Dazu brauchen wir eine lokale Variante.

**1.13 Definition.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $D \subset I \times \mathbb{R}^n$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion. Dann erfüllt  $f$  eine lokale Lipschitz-Bedingung in  $D$ , falls gilt: Für alle

Abbildung 4: Die Picard-Iteration für die Dgl.  $y' = \sin^2 y$ 

$(t_0, x_0) \in D$  existiert eine Umgebung  $U(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und eine (lokale) Lipschitz-Konstante  $L(t_0, x_0) \geq 0$  mit

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in U(t_0, x_0) \cap D : |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(t_0, x_0) \cdot |x_1 - x_2|.$$

**1.14 Bemerkung.** Sei  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig partiell differenzierbar. Dann ist  $f$  in  $D$  lokal Lipschitz-stetig. Denn in einer kompakten Umgebung eines Punktes  $(t_0, x_0) \in D$  sind alle Ableitungen von  $f$  als stetige Funktionen beschränkt. Damit folgt die Lipschitz-Stetigkeit aus dem Mittelwertsatz.

Die lokale Lipschitz-Stetigkeit ist bereits ausreichend, um die Eindeutigkeit und die lokale Existenz der Lösung zu zeigen.

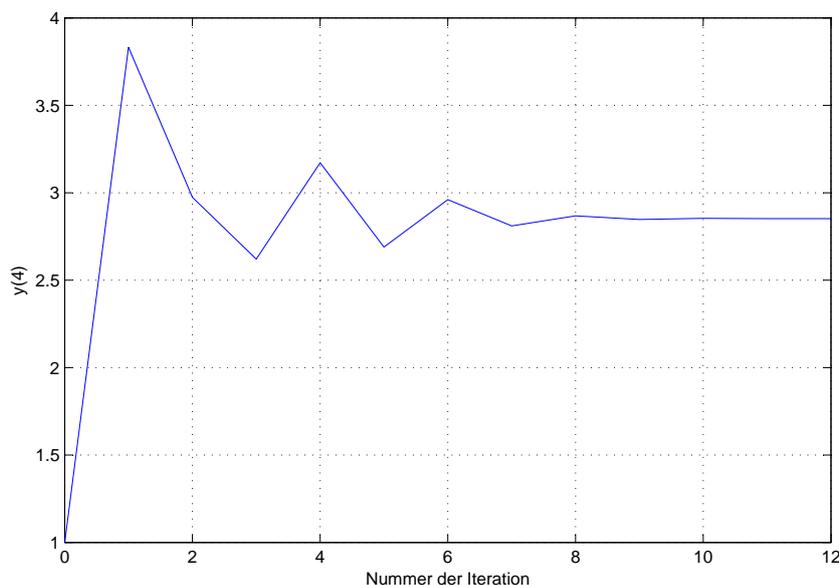
**1.15 Satz.** Sei  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Seien  $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei Lösungen der Dgl.  $y' = f(t, y)$  über einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ . Falls  $y_1(t_0) = y_2(t_0)$  für ein  $t_0 \in I$  gilt, so folgt  $y_1(t) = y_2(t)$  für alle  $t \in I$ .

**1.16 Satz (von Picard-Lindelöf, lokale Version).**

a) Sei  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion, die in  $D$  einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Dann existiert zu jedem  $(t_0, y_0) \in D$  ein  $\delta > 0$  so, dass das AWP

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung  $y: [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  besitzt.

Abbildung 5: Der Wert  $y(4)$  für obige Picard-Iteration

b) Jede solche lokale Lösung des AWP's lässt sich eindeutig fortsetzen zu einer maximalen Lösung auf einem offenen Intervall  $I_{\max}$  mit  $t_0 \in I_{\max}$ , d.h. es gibt keine Lösung auf einem größeren Intervall  $I \supsetneq I_{\max}$ . Das Intervall  $I_{\max}$  heißt maximales Existenzintervall des AWP's.

Die folgenden beiden Aussagen zeigen, dass die Lösung eines AWP's stetig von den Daten  $f$  und  $x_0$  abhängt. Die entscheidende Bedingung ist dabei wieder die Lipschitz-Stetigkeit. In Abbildung 6 wird das Beispiel  $y' = \sqrt{|y|}$  dargestellt, bei welchem die Lipschitz-Stetigkeit verletzt ist. Es wird die numerisch berechnete Lösung (mit einem Runge-Kutta-Verfahren) gezeigt zu den Anfangswerten  $y(0) = 0$  bzw.  $y(0) = 10^{-12}$ . Man sieht, wie die Ungenauigkeit im Anfangswert schon für kleine Werte von  $t$  explodiert. Eine solche berechnete Lösung ist nicht sinnvoll, da man stets Ungenauigkeiten in den Daten hat (z.B. durch Rundungsfehler).

**1.17 Satz.** a) Sei  $f \in C([0, h] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L$ . Seien  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ , und seien  $x$  bzw.  $y$  die Lösungen des AWP  $x' = f(t, x)$ ,  $x(0) = x_0$  bzw.  $y' = f(t, y)$ ,  $y(0) = y_0$ . Dann gilt mit  $c := \frac{L}{L+1}$  die Abschätzung

$$\sup_{t \in [0, h]} |e^{-(L+1)t}(x(t) - y(t))| \leq \frac{|x_0 - y_0|}{1 - c}.$$

b) Seien  $f, g \in C([0, h] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  mit  $\|f - g\|_\infty < \infty$ . Die Funktion  $f$  sei global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L$ . Seien  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $x$  bzw.  $y$  die Lösungen des AWP  $x' = f(t, x)$ ,  $x(0) = x_0$  bzw.  $y' = g(t, y)$ ,  $y(0) = x_0$ . Dann gilt mit  $c := \frac{L}{L+1}$

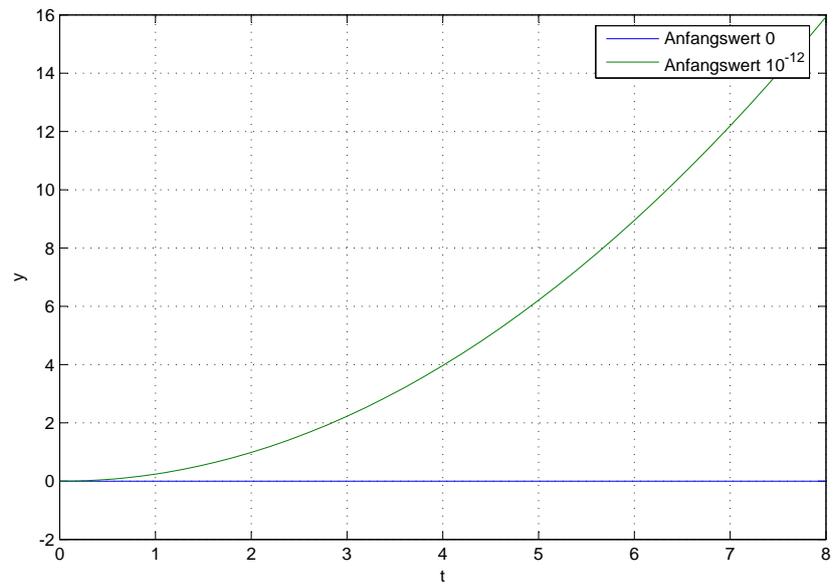


Abbildung 6: Lösungen der Dgl.  $y' = \sqrt{|y|}$  zu verschiedenen Anfangswerten

die Abschätzung

$$\sup_{t \in [0, h]} |e^{-(L+1)t} (x(t) - y(t))| \leq \|f - g\|_{\infty} \frac{h}{1 - c}.$$

## 2. Spezielle Lösungsmethoden

**2.1 Worum geht's?** Jetzt wissen wir zwar schon, wann eine Dgl. zumindest lokal eine eindeutige Lösung besitzt. Es ist aber nochmal was anderes, diese wirklich zu berechnen. Es gibt für bestimmte Typen von Gleichungen bestimmte Methoden, die mehr oder weniger funktionieren, um die Lösung explizit zu bestimmen. Im einzelnen sind dies:

- separable Gleichungen,
- homogene Gleichungen,
- Potenzreihenansatz,
- exakte Differentialgleichungen.

Ein weiterer Typ von Dgl. sind die linearen Dgl., welche im nachfolgenden Abschnitt behandelt werden. Hier werden wir Ansätze zur Lösung oben genannter Dgl. behandeln und auch einige speziellere Gleichungen lösen. Man sollte sich aber nicht verleiten lassen zu glauben, dass alle oder zumindest fast alle Dgl. explizit lösbar seien.

### a) Gleichungen mit getrennten Variablen

Wir behandeln im folgenden nur den eindimensionalen Fall  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Dgl. besitzt getrennte Variablen (separable Gleichung), falls sie von der Form

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \quad (2-1)$$

ist, d.h. in diesem Fall haben wir  $f(t, y(t)) = g(t) \cdot h(y(t))$ .

**2.2 Beispiel.** Betrachte das AWP

$$y'(t) = -2ty^2(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Dies ist eine Gleichung mit getrennten Variablen mit  $g(t) = -2t$  und  $h(z) = z^2$ . Man bringt alle  $y$ -Terme auf die linke Seite:

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = -2t.$$

Integration von  $t_0$  bis  $t$  liefert

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \int_{t_0}^t (-2t) dt.$$

Auf der linken Seite kann man  $z = y(t)$  substituieren und erhält

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{z^2} dz = -\left(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y_0}\right).$$

Insgesamt haben wir also

$$-\left(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y_0}\right) = -t^2 + t_0^2,$$

d.h.

$$y(t) = \frac{1}{t^2 - t_0^2 + \frac{1}{y_0}}.$$

Aber diese Rechnung ist nur korrekt, solange im Intervall von  $t_0$  bis  $t$  im Nenner  $y^2(t)$  keine Nullstelle auftritt.

**2.3 Beispiel.** Betrachte das AWP  $y' = y^2$ ,  $y(0) = 1$ . Die rechte Seite der Dgl. ist lokal Lipschitz-stetig, also gilt lokale Existenz und Eindeutigkeit. Wir schreiben die Aussage von Satz 2.4 etwas einprägsamer in folgender Form:

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \cdot h(y) \quad \implies \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t) dt + \text{const.}$$

In unserem Beispiel haben wir  $g(t) = 1$  und  $h(x) = x^2$ , d.h.

$$G(t) = \int_0^t dt = t,$$

$$H(x) = \int_1^x \frac{dz}{z^2} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Somit gilt

$$1 - \frac{1}{y(t)} = t,$$

d.h.  $y(t) = \frac{1}{1-t}$ . Man sieht an diesem Beispiel, dass das maximale Existenzintervall der Lösung das Intervall  $(-\infty, 1)$  ist.

Die Methode der getrennten Variablen wird allgemein in folgendem Satz formuliert.

**2.4 Satz.** Seien  $I, J \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle und  $g \in C(I; \mathbb{R})$ ,  $h \in C(J; \mathbb{R})$  mit  $h(x) \neq 0$  für alle  $x \in J$ . Sei  $(t_0, x_0) \in I \times J$ . Definiere  $G(t) := \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau$  und  $H(x) := \int_{x_0}^x \frac{dz}{h(z)}$ . Es gelte  $G(I) \subset H(J)$ . Dann existiert genau eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  der Dgl. (2-1) mit  $y(t_0) = x_0$ . Für diese Lösung gilt

$$H(y(t)) = G(t) \quad (t \in I). \quad (2-2)$$

*Beweisidee.* Diese Aussage wird durch den in den Beispielen gezeigten Ansatz verifiziert. Es ist lediglich noch etwas zur Auflösbarkeit der Gleichung (2-2) nach  $y$  zu bemerken: Wegen  $H'(z) = \frac{1}{h(z)} \neq 0$  ist  $H$  streng monoton und damit umkehrbar, d.h. man kann (2-2) eindeutig nach  $y$  auflösen.  $\square$

**2.5 Beispiel.** Die homogene lineare Dgl.

$$y'(t) = a(t)y(t), \quad y(t_0) = y_0$$

besitzt ebenfalls getrennte Variablen. Die Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau\right)y_0.$$

Man beachte, dass für  $y_0 \neq 0$  die Lösung keine Nullstelle besitzt. Diese Gleichung ist ein Spezialfall eines linearen Systems von Dgl., welches später noch ausführlicher behandelt wird.

## b) Homogene Differentialgleichungen und Substitution

In vielen Fällen ist eine Substitution nützlich, um eine Dgl. in eine lösbare Form zu transformieren. Hierzu ein Beispiel:

**2.6 Beispiel.** Betrachte eine Dgl. der Form

$$x'(t) = f(ax(t) + bt + c)$$

mit Konstanten  $a, b, c$ . Substituiert man  $y(t) := ax(t) + bt + c$ , dann erhält man

$$y'(t) = ax'(t) + b = af(y(t)) + b,$$

also eine separable Dgl.

**2.7 Beispiel (homogene Dgl.).** Ein ähnlicher Trick funktioniert bei homogenen Dgl. Diese haben die Form

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right).$$

Substituiert man  $y(t) := \frac{x(t)}{t}$ , so folgt

$$y'(t) = \frac{x'(t)t - x(t)}{t^2} = \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = \frac{1}{t} (f(y(t)) - y(t)).$$

Dies ist wieder eine separable Dgl.

**2.8 Beispiel (Bernoullische Dgl.).** Die Bernoullische Dgl. hat die Form

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \cdot (x(t))^\alpha$$

mit einem reellen Parameter  $\alpha$ . Für  $\alpha = 0$  handelt es sich um eine lineare Dgl., die später behandelt werden, für  $\alpha = 1$  um eine separable Dgl. Für  $\alpha \neq 0, 1$  substituiert man  $y(t) := x(t)^{1-\alpha}$ . Dann ist

$$y'(t) = (1 - \alpha)x(t)^{-\alpha}(a(t)x(t) + b(t)x(t)^\alpha) = (1 - \alpha)(a(t)y(t) + b(t)).$$

Dies ist wieder eine lineare Dgl.

**2.9 Beispiel (Riccatische Dgl.).** Die Riccatische Dgl. ist von der Form

$$x'(t) = k(t)x^2(t) + g(t)x(t) + h(t) \quad (2-3)$$

mit  $k, h, g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Die Anfangsbedingung sei  $x(t_0) = x^0$ . Im Falle  $h = 0$  handelt es sich um die Bernoullische Dgl. mit Exponenten  $\alpha = 2$ . Am Beispiel der Riccati-Gleichung soll gezeigt werden, wie eine Substitution helfen kann, die Gleichung auf eine andere Dgl. zu transformieren, welche von einfacherer Struktur ist.

(i) Transformation zur Bernoullischen Dgl.: Dies ist nur möglich, falls eine Lösung  $p$  mit  $p(t_0) =: p^0 \neq x^0$  der Riccati-Gleichung bereits bekannt ist. In diesem Fall setzt man  $y := x - p$  und erhält den Anfangswert  $y(t_0) = x^0 - p^0$  und

$$\begin{aligned} y' &= x' - p' = kx^2 + gx + h - kp^2 - gp - h \\ &= ky^2 - 2kp^2 + 2kxp + gx - gp \\ &= ky^2 + (2kp + g)y. \end{aligned}$$

Man sieht, dass  $y$  wieder eine Riccati-Dgl. erfüllt. Allerdings besitzt die neue Gleichung für  $y$  keinen  $h$ -Term mehr, und damit handelt es sich um die Bernoullische Gleichung mit  $\alpha = 2$ .

(ii) Ohne das Wissen einer Lösung  $p$  kann man durch eine Substitution die Riccati-Gleichung (2-3) auf eine lineare Dgl. zweiter Ordnung zurückführen. Dazu setzt man

$$u(t) := \exp\left(-\int_{t_0}^t k(s)x(s)ds\right).$$

Damit folgt  $u' = -kxu$  und somit

$$\begin{aligned} u'' &= k^2x^2u - k'xu - kx'u \\ &= k^2x^2u - k'xu - k^2x^2u - kgxu - khu \\ &= -k'xu - kgxu - khu \\ &= \frac{k'}{k}u' + gu' - khu, \end{aligned}$$

wobei  $ux = -\frac{u'}{k}$  benutzt wurde. Damit ist  $u$  eine Lösung des AWP

$$u'' - u' \left( \frac{k'}{k} + g \right) + khu = 0, \quad u(t_0) = 1, \quad u'(t_0) = -k(t_0)x^0.$$

Dies ist wieder eine lineare Dgl.

### c) Potenzreihenansatz

Der Potenzreihenansatz ist in vielen Fällen möglich, um eine Darstellung der Lösung einer Dgl. in Form einer konvergenten Potenzreihe zu erhalten. Wir diskutieren diesen Ansatz nur für lineare Dgl. zweiter Ordnung, Verallgemeinerungen sind leicht möglich.

Betrachte die lineare Dgl.

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = s(t) \quad (2-4)$$

mit den Anfangsbedingungen  $y(t_0) = y^0, y'(t_0) = y^1$ . Die Koeffizienten  $a, b$  und die rechte Seite  $s$  seien in einem offenen Intervall  $J := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  in eine Potenzreihe um  $t_0$  entwickelbar, d.h. in Reihen der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (t - t_0)^k$ , welche mindestens in  $J$  konvergieren. In diesem Fall kann man den Ansatz

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k \quad (2-5)$$

in die Differentialgleichung einsetzen und erhält eine Rekursionsformel für die unbekanntenen Koeffizienten  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ . Es kann leicht gezeigt werden, dass dieser Ansatz gerechtfertigt ist und dass die Lösung die Form (2-5) besitzt. Man beachte dazu, dass eine Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises unendlich oft differenzierbar ist und die Ableitung mit der Summation vertauscht werden kann (siehe Analysis I).

**2.10 Beispiel (Hermiteische Dgl.).** Die Hermiteische Dgl. lautet

$$y''(t) - 2ty'(t) + \lambda y(t) = 0 \quad (2-6)$$

mit einem Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Koeffizienten sind Polynome, also insbesondere in eine überall konvergente Potenzreihe um 0 entwickelbar. Mit dem Ansatz (2-5) mit  $t_0 = 0$  erhält man

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot kt^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}t^k,$$

$$y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}t^k.$$

Eingesetzt in die Hermitesche Dgl. ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2}t^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}t^{k+1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = 0.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen müssen alle Koeffizienten der Potenzreihe auf der linken Seite verschwinden (Koeffizientenvergleich). Also haben wir

$$\begin{aligned} 2c_2 + \lambda c_0 &= 0, \\ (k+2)(k+1)c_{k+2} - 2kc_k + \lambda c_k &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $c_0$  und  $c_1$  sind frei wählbar, die anderen sind dann gegeben durch die Rekursion

$$c_{k+2} = \frac{2k - \lambda}{(k+2)(k+1)} c_k \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Dieses Beispiel zeigt auch noch eine Besonderheit: Falls  $\lambda = 2n_0 \in 2\mathbb{N}$ , so ist  $c_{k+2} = 0$  für alle  $k = n_0, n_0 + 2, \dots$ . In diesem Falle existiert ein Polynom, welches die Hermitesche Dgl. löst. Z.B. kann man für  $\lambda = 4$  die Anfangskoeffizienten  $c_0 := 1$  und  $c_1 := 0$  wählen und erhält  $c_2 = \frac{-4}{2} = -\frac{1}{2}$ ,  $c_4 = c_6 = \dots = 0$  und  $c_3 = c_5 = \dots = 0$ . Also ist  $y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2$  eine Lösung der Hermiteschen Dgl. mit  $\lambda = 4$ . Auf diese Weise erhält man (bis auf Normierung) die Hermite-Polynome  $H_n(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**2.11 Beispiel (Besselsche Dgl.).** Die Besselsche Dgl. tritt z.B. bei Schwingungen einer kreisförmigen Membran auf. Ein Spezialfall der Besselschen Dgl. lautet

$$y''(t) + \frac{1}{t}y'(t) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)y(t) = 0. \quad (2-7)$$

Hierbei ist  $n \in \mathbb{N}_0$ . Setzt man  $\eta(t) := t^{-n}y(t)$ , so erhält man

$$\begin{aligned} y'(t) &= nt^{n-1}\eta(t) + t^n\eta'(t), \\ y''(t) &= n(n-1)t^{n-2}\eta(t) + 2nt^{n-1}\eta'(t) + t^n\eta''(t). \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich

$$t^n\eta''(t) + (2n+1)t^{n-1}\eta'(t) + \underbrace{[n(n-1)t^{n-2} + nt^{n-2} - n^2t^{n-2}]}_{=0}\eta(t) + t^n\eta(t) = 0.$$

Für  $t \neq 0$  erhält man also für  $\eta$  die Dgl.

$$\eta''(t) + (2n+1)t^{-1}\eta'(t) + \eta(t) = 0. \quad (2-8)$$

Wegen des Terms  $t^{-1}$  handelt es sich hier um eine singuläre Dgl. Macht man dennoch den Potenzreihenansatz  $\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ , so erhält man

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)t^{k-2} + (2n+1) \sum_{k=1}^{\infty} c_k k t^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = 0,$$

und damit für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} (2n+1)c_1 &= 0, \\ (k+2)(2n+k+2)c_{k+2} + c_k &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Es folgt  $c_1 = c_3 = \dots = 0$  und für gerade  $k = 2m$  die Rekursion

$$c_{2m+2} = -\frac{1}{(2m+2)(2m+2n+2)} c_{2m}.$$

Für die Wahl  $c_0 = 1$  erhält man

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2m \cdot (2+2n) \cdot \dots \cdot (2m+2n)}.$$

Damit sind die Koeffizienten berechnet, aber man muss noch zeigen, dass die zugehörige Potenzreihe konvergiert. Wegen

$$|c_{2m}| = \frac{1}{4^m (m!) (1+n)(2+n) \cdot \dots \cdot (m+n)} \leq \frac{1}{m!}$$

ist dies der Fall, und für die Besselsche Dgl. erhalten wir die Lösung

$$y(t) = t^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!) (1+n)(2+n) \cdot \dots \cdot (m+n)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}.$$

Jedes Vielfache dieser Lösung ist wieder eine Lösung, die Funktion

$$J_n(t) := \frac{1}{2^n n!} y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n} \quad (t \in \mathbb{R})$$

heißt die *Besselfunktion erster Art der Ordnung  $n$* .

## d) Exakte Differentialgleichungen

Wir verwenden im folgenden den Begriff Gebiet. Dabei ist eine Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, falls  $G$  offen und zusammenhängend ist.

**2.12 Definition.** Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und seien  $f_1, f_2 \in C(G; \mathbb{R})$ . Dann heißt die Dgl.

$$f_1(t, y(t)) + f_2(t, y(t)) \cdot y'(t) = 0 \tag{2-9}$$

exakt, falls eine Stammfunktion  $F \in C^1(G; \mathbb{R})$  existiert mit  $\nabla F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ .

**2.13 Bemerkung.** Definiert man die 1-Form

$$\omega(x, h) := f_1(x)h_1 + f_2(x)h_2 = f_1(x)dx_1(h) + f_2(x)dx_2(h),$$

so ist die Dgl. (2-9) genau dann exakt, wenn  $\omega$  exakt ist. Formal erhält man  $\omega$  durch die Umformung

$$f_1(t, y)dt + f_2(t, y)dy = 0 \quad (2-10)$$

und die Umbenennung  $x_1 := t$ ,  $x_2 := y$ . Die Form (2-10) ist eine „symmetrische“ Version der ursprünglichen Dgl. (2-9).

**2.14 Satz.** a) Sei die Dgl. (2-9) exakt mit Stammfunktion  $F$  und  $y: J \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall  $J \subset \mathbb{R}$ . Es gelte  $(t, y(t)) \in G$  für alle  $t \in J$ . Dann ist  $y$  genau dann eine Lösung von (2-9), wenn es ein  $c \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$F(t, y(t)) = c \quad (t \in J).$$

b) Sei  $G$  sternförmig und  $f_1, f_2 \in C^1(G)$ . Dann ist die Dgl. (2-9) genau dann exakt, falls  $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$ .

*Beweis.* a) folgt aus

$$\frac{d}{dt} F(t, y(t)) = f_1(t, y(t)) + f_2(t, y(t)) \cdot y'(t).$$

b) folgt aus dem bekannten Kriterium für Exaktheit von 1-Formen (Analysis II).  $\square$

Zur Lösung einer exakten Dgl. muss man nach Satz 2.14 eine Stammfunktion  $F$  bestimmen. Wir wiederholen die Vorgehensweise aus der Analysis II: Gegeben sei die exakte Dgl. (2-9) mit der Anfangsbedingung  $y(t_0) = y^0$ . Um eine Stammfunktion  $F: G \rightarrow \mathbb{R}$  zu bestimmen, wählen wir zu  $(t, x) \in G$  eine stückweise glatte Kurve  $\Gamma = [\gamma]$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Anfangspunkt  $\gamma(a) = (t_0, y^0)$  und Endpunkt  $(t, x)$ . Dann ist  $F(t, x)$  durch das (wegunabhängige!) Kurvenintegral

$$F(t, x) = \int_{\Gamma} \omega$$

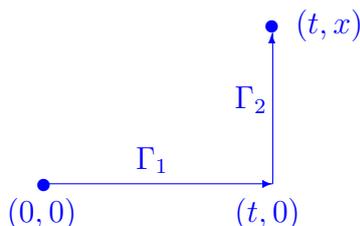
gegeben. Dabei kann die Wegunabhängigkeit ausgenutzt werden, um lokal einen Weg entlang der Koordinatenachsen zu wählen.

**2.15 Beispiel.** Betrachte die Dgl.

$$(3t^2 + 4ty(t)) + (2t^2 + 3y(t)^2) \cdot y'(t) = 0.$$

Hier ist  $f_1(t, x) = 3t^2 + 4tx$ ,  $f_2(t, x) = 2t^2 + 3x^2$ , und wegen  $\partial_2 f_1 = 4t = \partial_1 f_2$  handelt es sich um eine exakte Dgl. Wir wählen zu  $(t_0, y^0) := (0, 0)$  und zu  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  die Wegstücke

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= [\gamma_1], & \gamma_1: [0, t] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & s &\mapsto (s, 0), \\ \Gamma_2 &= [\gamma_2], & \gamma_2: [0, x] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & s &\mapsto (t, s).\end{aligned}$$



Damit ist

$$F(t, x) = \int_0^t (3s^2 + 4s \cdot 0) \cdot 1 ds + \int_0^x (2t^2 + 3s^2) \cdot 1 ds = t^3 + 2t^2x + x^3.$$

Die Lösung der Dgl. erhält man nach Satz 2.14 durch (lokale) Lösung der Gleichung  $F(t, y(t)) = \text{const.}$

**2.16 Beispiel.** Die Dgl.

$$ty'(t) - ty^2(t) - y(t) = 0 \tag{2-11}$$

ist in keiner offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  exakt. Hier ist in den Bezeichnungen von Definition 2.12

$$f_1(t, z) = -tz^2 - z, \quad f_2(t, z) = t$$

und damit  $\partial_2 f_1(t, z) = -2tz - 1$ ,  $\partial_1 f_2(t, z) = 1$ . Es gilt also  $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$  nur für  $tz = -1$ , was in keiner offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  erfüllt ist.

Bei nicht exakten Dgl. kann man versuchen, einen *integrierenden Faktor* zu finden, mit welchem die Dgl. multipliziert wird, so dass die neue Dgl. exakt ist. Setzt man den Faktor von der Form  $\mu(y)$  an, d.h. betrachtet man statt (2-11) die Dgl.

$$\mu(y)ty' - \mu(y)(ty^2 - y) = 0,$$

so erhält man als Bedingung für die Exaktheit

$$\partial_t(t\mu(y)) = \partial_y(-\mu(y)(ty^2 - y)).$$

Für  $\mu$  ergibt sich wiederum eine Dgl. erster Ordnung:

$$\mu(y) = -\mu'(y)(ty^2 - y) - \mu(y)(2ty + 1),$$

also

$$(ty + 1)[y\mu'(y) + 2\mu(y)] = 0.$$

Die resultierende Dgl.

$$y\mu'(y) + 2\mu(y) = 0$$

(eine Dgl. mit getrennten Variablen) hat die Lösung  $\mu(y) = y^{-2}$ . Man erhält die neue Dgl.

$$ty^{-2}(t)y'(t) - t - y^{-1}(t) = 0, \quad (2-12)$$

welche exakt ist. Allerdings haben wir durch die Multiplikation mit  $y(t)^{-2}$  offensichtlich die Lösungsmenge verändert, da jetzt nur noch Lösungen mit  $y(t) \neq 0$  zugelassen sind.

Zur Bestimmung einer Stammfunktion  $F$  muss man

$$\nabla F(t, z) = \begin{pmatrix} \partial_t F(t, z) \\ \partial_z F(t, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t - z^{-1} \\ tz^{-2} \end{pmatrix}$$

lösen. Aus der ersten Zeile folgt  $F(t, z) = -\frac{t^2}{2} - tz^{-1} + a(z)$  mit einer Funktion  $a(z)$ , aus der zweiten Zeile folgt  $F(t, z) = -tz + b(t)$ . Man sieht, dass  $a(z) := 0$  und  $b(t) := -\frac{t^2}{2}$  beide Bedingungen lösen. Die Bedingung aus Satz 2.14 lautet also

$$ty^{-1}(t) + \frac{t^2}{2} = c$$

mit einer Konstanten  $c \in \mathbb{R}$ . Aufgelöst ergibt sich

$$y(t) = \frac{2t}{c - t^2}.$$

Dies ist aber nur zulässig in Intervallen, in denen  $y(t) \neq 0$  ist (und in denen der Nenner nicht verschwindet). Man sieht aber direkt, dass z.B. für  $c = 1$  die Funktion  $y(t) = \frac{2t}{1-t^2}$  eine Lösung im gesamten Intervall  $(-1, 1)$  ist.

## 3. Lineare Differentialgleichungen

**3.1 Worum geht's?** Lineare Dgl. bilden eine besonders wichtige Klasse von Dgl., in welcher die Menge der Lösungen im wesentlichen eine Vektorraumstruktur besitzt. Das ist eine erste wichtige Verbindung zur Linearen Algebra, die im Falle von linearen Dgl. mit konstanten Koeffizienten besonders deutlich zu Tage tritt. Es kann in diesem Abschnitt nicht schaden, nochmal einen Blick in das Skript der Vorlesung Lineare Algebra zu werfen.

Auf den ersten Blick besitzen lineare Dgl. eine deutlich einfachere Struktur als nicht-lineare Gleichungen. Das gilt z.B. schon in Hinblick auf die eindeutige Lösbarkeit, die hier eine direkte Folgerung aus dem Satz von Picard-Lindelöf ist. Dennoch sei hier nochmal deutlich darauf hingewiesen, dass viele lineare Dgl. nicht elementar lösbar sind.

### a) Homogene lineare Dgl.

Lineare Dgl.-Systeme haben die Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad y(t_0) = y^0, \quad (3-1)$$

wobei  $A \in C(J; \mathbb{C}^{n \times n})$ ,  $b \in C(J; \mathbb{C}^n)$ ,  $t_0 \in J$  und  $y^0 \in \mathbb{C}^n$  für ein (beliebiges) Intervall  $J \subset \mathbb{R}$ . Eine Lösung ist eine differenzierbare Funktion  $y: J \rightarrow \mathbb{C}^n$ , welche (3-1) erfüllt. Man beachte, dass dann wegen (3-1) auch  $y \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$  gilt.

Es ist hier günstiger, gleich in  $\mathbb{C}$  zu arbeiten, wie wir später noch sehen werden. In vielen Anwendungsfällen ist man natürlich an reellwertigen Funktionen interessiert. Man beachte, dass auf  $\mathbb{C}^n$  und  $\mathbb{C}^{n \times n}$  nach Analysis II alle Normen äquivalent sind, insbesondere der Begriff der Stetigkeit nicht von der Wahl der Norm abhängt. Meist werden wir die euklidische Norm  $|\cdot|$  oder die  $|\cdot|_\infty$ -Norm auf  $\mathbb{C}^n$  und die zugehörige Operatornorm auf  $\mathbb{C}^{n \times n}$  wählen (meist mit  $\|\cdot\|$  bezeichnet).

**3.2 Definition.** Die euklidische Norm auf dem  $\mathbb{C}^n$  ist definiert durch

$$|z| := \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2} \quad (z = (z_1, \dots, z_n)^t \in \mathbb{C}^n).$$

Man beachte, dass  $|z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1$  für  $z_1 \in \mathbb{C}$ , wobei  $\bar{z}_1$  die konjugiert komplexe Zahl bezeichnet.

Die zugehörige Operatornorm  $\|A\|$  auf dem Raum  $\mathbb{C}^{n \times n}$  aller Matrizen mit komplexen Koeffizienten ist definiert als

$$\|A\| := \sup\{|Az| : z \in \mathbb{C}^n, |z| = 1\}.$$

Mit anderen Worten gilt

$$|Az| \leq \|A\| \cdot |z| \quad (z \in \mathbb{C}^n),$$

und statt  $\|A\|$  kann man keine kleinere Konstante einsetzen.

**3.3 Satz.** *Unter den obigen Voraussetzungen an  $A$  und  $f$  existiert zu jedem  $t_0 \in J$  und  $y^0 \in \mathbb{C}^n$  genau ein  $y \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$ , welches das AWP (3-1) löst.*

*Beweis.* Für kompakte Intervalle folgt das direkt aus dem Satz von Picard-Lindelöf (Satz 1.9): Denn für  $f(t, x) := A(t)x + b(t)$  gilt

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |A(t)(x_1 - x_2)| \leq \sup_{t \in J} \|A(t)\| \cdot |x_1 - x_2|.$$

Nun ist  $A$  als stetig vorausgesetzt, damit ist auch die Abbildung  $t \mapsto \|A(t)\|$  eine stetige Abbildung und besitzt auf einem kompakten Intervall ein Maximum, das dann die Lipschitz-Konstante ist. Bei unendlichen Intervallen kann man das Intervall durch endliche Intervalle ausschöpfen (z.B. Intervalle der Form  $[-N, N]$  mit  $N \rightarrow \infty$ ) und erreicht so jeden Punkt.  $\square$

**3.4 Bemerkung.** Für festes  $t_0 \in J$  ist nach dem obigen Satz die Gleichung  $y' - Ay = 0$  mit der Anfangsbedingung  $y(t_0) = y_0$  für jedes  $y_0 \in \mathbb{C}^n$  eindeutig lösbar. Betrachte die Abbildung  $y \mapsto y(t_0)$ , welche jeder Lösung  $y$  der Dgl.  $y' = Ay$  ihren Wert an der Stelle  $t_0$  zuordnet. Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit ist diese Abbildung bijektiv.

Man sieht außerdem, dass die Abbildung  $y \mapsto y(t_0)$  linear ist, und die Menge der Lösungen  $\mathcal{L}$  der Dgl.  $y' = Ay$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist. Denn mit  $y$  und  $\tilde{y}$  ist auch  $\alpha y + \beta \tilde{y}$  wieder eine Lösung der Differentialgleichung für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Die Abbildung

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}^n, y \mapsto y(t_0)$$

ist also ein *Vektorraum-Isomorphismus*. Damit hat insbesondere der Lösungsraum  $\mathcal{L}$  die Dimension  $n$ .

Diese Aussagen gelten unabhängig von der Wahl des Startwerts  $t_0$ .

Der folgende Satz folgt direkt aus diesen Bemerkungen, ist aber sehr wichtig für lineare Differentialgleichungen.

**3.5 Satz.** *Es existieren genau  $n$  linear unabhängige Lösungen in  $C^1(J; \mathbb{C}^n)$  von  $y'(t) = A(t)y(t)$ . Ein System  $\{z_1, \dots, z_n\}$  von Lösungen ist genau dann eine Basis, falls die Vektoren  $\{z_1(t_0), \dots, z_n(t_0)\}$  eine Basis von  $\mathbb{C}^n$  sind.*

Man beachte hier wieder, dass die lineare Unabhängigkeit von Funktionen zurückgeführt wird auf die lineare Unabhängigkeit von komplexen Vektoren, welche viel einfacher nachzuprüfen ist (z.B. durch Betrachtung der Determinante)!

**3.6 Definition.** a) Sei  $\{z_1, \dots, z_n\}$  ein System von Lösungen von  $y'(t) = A(t)y(t)$ . Dann heißt die aus den Spalten gebildete Matrix  $Z := (z_1 \dots z_n): J \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  die Wronski-Matrix und  $w(t) := \det Z(t)$  die Wronski-Determinante.

b) Eine Basis  $\{z_1, \dots, z_n\}$  des Lösungsraums von  $y'(t) = A(t)y(t)$  heißt ein Fundamentalsystem. Die Wronskimatrix heißt in diesem Fall eine Fundamentalmatrix.

**3.7 Bemerkung.** a) Aus Satz 3.5 sehen wir: Seien  $z_1, \dots, z_n$  Lösungen der Dgl.  $y' = Ay$ . Dann ist  $\{z_1, \dots, z_n\}$  genau dann ein Fundamentalsystem, falls  $w(t) = \det Z(t) \neq 0$  für alle  $t \in J$  ist. Dies ist äquivalent dazu, dass  $w(t_0) \neq 0$  für ein  $t_0 \in J$  ist.

b) Eine Wronski-Matrix  $Z$  löst die Matrix-Dgl.  $Z'(t) = A(t)Z(t)$  (wobei die Ableitung  $Z'(t)$  komponentenweise definiert ist). Falls  $Z$  eine Fundamentalmatrix ist, so ist eine Funktion  $z \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$  genau dann eine Lösung von  $y' = Ay$ , falls ein  $c \in \mathbb{C}^n$  existiert mit  $z(t) = Z(t)c$  ( $t \in J$ ). Denn  $z$  ist genau dann Lösung, falls  $z$  eine Linearkombination der Spalten  $z_1, \dots, z_n$  von  $Z$  ist.

**3.8 Satz (Formel von Liouville).** Die Wronski-Determinante ist differenzierbar mit  $w'(t) = (\operatorname{tr} A(t)) \cdot w(t)$ . Damit gilt

$$w(t) = w(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right).$$

Zum Beweis sei hier nur bemerkt, dass die Dgl. für  $w(t)$  eine Gleichung mit getrennten Variablen ist und daraus die explizite Formel für  $w(t)$  aus der Dgl. folgt.

## b) Inhomogene Gleichungen

Wir betrachten nun den inhomogenen Fall

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \tag{3-2}$$

mit  $A \in C(J; \mathbb{C}^{n \times n})$ ,  $f \in C(J; \mathbb{C}^n)$  wie oben.

**3.9 Lemma.** Sei  $y_p \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$  eine spezielle (partikuläre) Lösung von (3-2) und  $Z \in C^1(J; \mathbb{C}^{n \times n})$  eine Fundamentalmatrix. Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch  $y(t) = y_p(t) + Z(t)c$  mit  $c \in \mathbb{C}^n$ .

*Beweis.* Wegen  $y' = y_p' + (Zc)' = Ay_p + b + A(Zc) = Ay + b$  ist jedes solche  $y$  eine Lösung. Falls andererseits  $y$  eine beliebige Lösung von (3-2) ist, so ist  $\tilde{y} := y - y_p$  eine Lösung von  $\tilde{y}' = Ay + b - Ay_p - b = A\tilde{y}$  und damit  $\tilde{y} = Zc$  mit einem  $c \in \mathbb{C}^n$  nach Bemerkung 3.7 b).  $\square$

**3.10 Satz (Variation der Konstanten).** Sei  $Z: J \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Fundamentalmatrix der homogenen Dgl.  $y' = Ay$ . Dann erhält man eine Lösung der inhomogenen Dgl.  $y' = Ay + b$  durch den Ansatz

$$y_p(t) = Z(t)c(t),$$

wobei  $c \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$  eine Lösung von  $Z(t)c'(t) = b(t)$  ist, d.h.

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t Z(s)^{-1}b(s)ds.$$

*Beweis.* Das folgt aus

$$\begin{aligned} (Z(t)c(t))' &= Z'(t)c(t) + Z(t)c'(t) = A(t)Z(t)c(t) + Z(t)c'(t) \\ &= A(t)y_p(t) + Z(t)c'(t). \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $Z(t)c'(t) = b(t)$  genau dann gilt, falls  $c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t Z(s)^{-1}b(s)ds$ .  $\square$

**3.11 Beispiel.** Gegeben sei das Dgl.-System

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) + t. \end{aligned}$$

In Matrix-Schreibweise:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$Z(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix}.$$

Variation der Konstanten liefert also

$$c(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} s \sin s \\ s \cos s \end{pmatrix} ds + \text{const.}$$

Partielle Integration ergibt

$$c(t) = \begin{pmatrix} -s \cos s + \sin s \\ s \sin s + \cos s \end{pmatrix} \Big|_{s=0}^{s=t},$$

und eine partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_p(t) &= Z(t)c(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \cos t + \sin t \\ t \sin t + \cos t - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t \cos^2 t + \cos t \sin t - t \sin^2 t - \sin t \cos t + \sin t \\ -t \sin t \cos t + \sin^2 t + t \sin t \cos t + \cos^2 t - \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung hat die Form  $y(t) = Z(t)d + y_p(t)$ , wobei  $d \in \mathbb{R}^2$  durch die Anfangsbedingung  $y(t_0) = y_0$  bestimmt wird.

### c) Systeme mit konstanten Koeffizienten

Nun soll es um Dgl. der Form

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3-3)$$

gehen, wobei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine konstante Matrix ist. Man beachte, dass im skalaren Fall  $y' = \alpha y$  die Lösung durch  $y(t) = c \exp(\alpha t)$  mit  $c \in \mathbb{C}$  gegeben ist. Eine Möglichkeit, (3-3) zu lösen, besteht in einer Erweiterung der exp-Funktion für Matrizen.

Sei  $|\cdot|$  die euklidische Norm in  $\mathbb{C}^n$  und  $\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow [0, \infty)$  die zugehörige Operatornorm. Man beachte, dass  $\|\cdot\|$  submultiplikativ ist, d.h. es gilt

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}).$$

**3.12 Definition.** Für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

die exp-Funktion von  $A$ .

**3.13 Satz.** a) Die exp-Reihe ist normkonvergent, d.h. es gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{A^n}{n!}\| < \infty$  und damit konvergent. Es gilt  $\exp(0) = I_n$  ( $n \times n$ -Einheitsmatrix) und  $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$ .

b) Für  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $AB = BA$  gilt  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ .

c) Durch  $Z(t) := \exp(tA)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) ist die eindeutige Lösung der (Matrizen-)Dgl.  $Z'(t) = AZ(t)$  mit  $Z(0) = I_n$  gegeben. Eine Funktion  $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  ist genau dann eine Lösung der Dgl. (3-3), falls ein  $c \in \mathbb{C}^n$  existiert mit  $y(t) = \exp(tA)c$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

Mit diesem Satz ist die Lösung der Dgl. (3-3) zurückgeführt auf die Berechnung der exp-Funktion einer Matrix. Um explizite Lösungen zu erhalten, verwenden wir den Satz über die Jordan-Normalform, der aus der Linearen Algebra bekannt ist:

Zu  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $p \in \mathbb{N}$  sei

$$J_p(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

die Jordan-Elementarmatrix (das Jordan-Kästchen) der Dimension  $p$ . Nach dem Satz von der Jordan-Normalform existiert zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine invertierbare Matrix  $S \in GL(n, \mathbb{C})$  mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J(\lambda_1) & & \\ & & & J(\lambda_2) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & J(\lambda_\ell) \end{pmatrix},$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$  die paarweise verschiedenen Eigenwerte von  $A$  sind und  $J(\lambda_k)$  ein Jordan-Kästchen geeigneter Dimension zum Eigenwert  $\lambda_k$  ist.

Dies ist eine spezielle Darstellung der Form  $S^{-1}AS = D + N$  mit  $DN = ND$ , wobei  $D$  eine Diagonalmatrix und  $N$  nilpotent ist. Dabei hat  $D$  auf der Diagonalen die Eigenwerte entsprechend ihrer (algebraischen) Vielfachheit und  $N$  hat nur auf der ersten Nebendiagonalen die Werte 0 und 1, sonst nur 0. Es folgt  $S^{-1}(tA)S = tD + tN$  und  $S^{-1} \exp(tA)S = \exp(S^{-1}tAS) = \exp(tD + tN) = \exp(tD) \exp(tN)$ , d.h.

$$\exp(tA) = S \exp(tD) \exp(tN) S^{-1}.$$

Zu einem Jordan-Kästchen  $J_p(\lambda_k)$  der Dimension  $p$  zu einem Eigenwert  $\lambda_k$  sind die zugehörigen Hauptvektoren  $h_1, \dots, h_p$  definiert durch

$$(A - \lambda_k I_n)h_j = h_{j-1} \quad (j = 1, \dots, p),$$

wobei  $h_0 := 0$  gesetzt wurde. Dabei ist  $h_1$  ein Eigenvektor und  $h_j$  heißt Hauptvektor der Stufe  $j$ . Die Transformationsmatrix aus dem Satz über die Jordan-Normalform besteht gerade aus allen Hauptvektoren der Matrix  $A$ , denn

$$S^{-1}AS e_j = \lambda e_j + e_{j-1}$$

bedeutet für  $h_j := S e_j$  ( $j$ -te Spalte der Matrix  $S$ ) gerade

$$A h_j = S(\lambda e_j + e_{j-1}) = \lambda h_j + h_{j-1}.$$

**3.14 Satz.** Sei  $h_j$  für  $j = 1, \dots, p$  der Hauptvektor der Stufe  $j$  zum Eigenwert  $\lambda$  der Matrix  $A$ . Dann ist

$$y_j(t) := e^{\lambda t} \left( h_j + th_{j-1} + \frac{t^2}{2} h_{j-2} + \dots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} h_1 \right)$$

eine Lösung der Dgl.  $y' = Ay$ . Das System aller so gebildeten Lösungen (zu allen Jordan-Kästchen) bildet ein Fundamentalsystem der Dgl.

*Beweis.* Wir wissen nach Satz 3.13, dass die Spalten von  $\exp(tA)$  ein Fundamentalsystem bilden. Für jedes  $S \in GL(n, \mathbb{C})$  ist wegen  $\frac{d}{dt}(\exp(tA)S) = A \exp(tA)S$  und  $\det(\exp(tA)S)|_{t=0} = \det(S) \neq 0$  auch  $Y(t) := \exp(tA)S$  ein Fundamentalsystem.

Wir verwenden die Transformationsmatrix  $S$  aus dem Satz über die Jordan-Normalform. Hier ist  $\exp(tA)S = S \exp(tD) \exp(tN)$ . Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir an, dass  $A$  nur ein Jordan-Kästchen  $J_p(\lambda)$  zum Eigenwert  $\lambda$  der Dimension  $p$  besitzt. In diesem Fall ist

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad N^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 1 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^p = 0.$$

Damit ist

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & & \\ & e^{\lambda t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t} I_n$$

und

$$\exp(tN) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k N^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir mit den Hauptvektoren  $S = (h_1, \dots, h_p)$

$$\begin{aligned} S \exp(tD) \exp(tN) &= e^{\lambda t} \left( h_1, \dots, h_p \right) \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda t} \left( h_1, \quad h_2 + th_1, \quad \dots, \quad h_p + th_{p-1} + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} h_1 \right). \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall besitzt  $A$  mehrere Jordan-Kästchen, und die obige Darstellung zu verschiedenen Jordan-Kästchen ergibt die Spalten der Matrix  $Y(t) := \exp(tA)S$  und damit ein Fundamentalsystem.  $\square$

**3.15 Beispiel.** Betrachte  $y' = Ay$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(1 - \lambda)(-\lambda) + 1 \cdot (-1 \cdot 0 - (-1)(1 - \lambda)) \\ &= -(\lambda - 1)^3. \end{aligned}$$

Damit ist  $\lambda = 1$  der einzige Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3. Das lineare Gleichungssystem  $(A - 1 \cdot I_3) = 0$  besitzt nur 2 linear unabhängige Lösungen (Eigenvektoren), etwa

$$h_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin gilt

$$(A - \lambda)h_2^{(1)} = h_1^{(1)} \quad \text{für} \quad h_2^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Transformationsmatrix

$$S := \left( h_1^{(1)}, h_2^{(1)}, h_1^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man daher die Jordan-Normalform

$$S^{-1}AS = J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jede Lösung der Dgl.  $y' = Ay$  hat somit die Form

$$y(t) = c_1 e^t h_1^{(1)} + c_2 e^t (h_2^{(1)} + t h_1^{(1)}) + c_3 e^t h_1^{(2)}$$

mit  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ .

### d) Lineare Dgl. höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Überlegungen des vorherigen Abschnitts lassen sich übertragen auf Dgl. der Form

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \dots + a_k x(t) = 0. \quad (3-4)$$

Wir setzen

$$y(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist (3-4) äquivalent zu  $y'(t) = Ay(t)$ .

**3.16 Satz.** a) Das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  ist gegeben durch

$$\chi_A(\lambda) := \det(\lambda I_k - A) = \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k.$$

b) Sei  $\lambda$  eine  $p$ -fache Nullstelle von  $\chi_A$ . Dann sind

$$x_1(t) := e^{\lambda t}, \quad x_2(t) := t e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad x_p(t) := t^{p-1} e^{\lambda t}$$

linear unabhängige Lösungen der Dgl. (3-4). Betrachtet man diese Lösungen für alle Nullstellen von  $\chi_A$ , so erhält man ein Fundamentalsystem.

*Beweis.* a) wird hier nicht bewiesen (Beweis z.B. möglich durch Induktion).

b) Wir konstruieren explizit eine Kette von Hauptvektoren. Dazu sei

$$c(\mu) := \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \\ \vdots \\ \mu^{k-1} \end{pmatrix}$$

und  $h_j := \frac{1}{(j-1)!} c^{(j-1)}(\lambda)$ . Es gilt

$$Ac(\mu) = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu^{k-1} \\ \mu^k - \chi_A(\mu) \end{pmatrix} = \mu c(\mu) - \chi_A(\mu) e_k.$$

Wir leiten  $j$ -mal nach  $t$  ab:

$$Ac^{(j)}(\mu) = \mu c^{(j)}(\mu) + j c^{(j-1)}(\mu) - \chi_A^{(j)}(\mu) e_k \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Falls nun  $\lambda$  eine  $p$ -fache Nullstelle ist, so gilt  $\chi_A(\lambda) = \dots = \chi_A^{(p-1)}(\lambda) = 0$  und damit

$$(A - \lambda I_k) c^{(j)}(\lambda) = \begin{cases} 0, & j = 0, \\ j c^{(j-1)}(\lambda), & j = 1, \dots, p-1. \end{cases}$$

Für die Vektoren  $h_j$  folgt damit

$$(A - \lambda I_k) h_j = \begin{cases} 0, & j = 1, \\ h_{j-1}, & j = 2, \dots, p. \end{cases}$$

Damit ist  $h_1, \dots, h_p$  eine Kette von Hauptvektoren. Nach Satz 3.14 sind

$$y_j(t) := e^{\lambda t} \left( h_j + t h_{j-1} + \frac{t^2}{2} h_{j-2} + \dots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} h_1 \right) \quad (j = 1, \dots, p)$$

linear unabhängige Lösungen von  $y' = Ay$ . Wir brauchen davon nur die erste Komponente. Da die erste Komponente von  $h_j$  für  $j = 1$  gleich 1 ist und für  $j > 1$  verschwindet, erhalten wir

$$x_j(t) = e^{\lambda t} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \quad (j = 1, \dots, p)$$

für die ersten Komponenten. Wir können auf den Faktor  $\frac{1}{(j-1)!}$  noch verzichten. Die ersten Komponenten sind linear unabhängig, da sonst auch die Vektoren  $y_j$  linear abhängig wären.  $\square$

Bei speziellen Inhomogenitäten kann man eine partikuläre Lösung direkt hinschreiben:

**3.17 Satz.** *Betrachte die Dgl.*

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \dots + a_k x(t) = t^s e^{\lambda t} \quad (3-5)$$

mit  $s \in \mathbb{N}_0$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Sei  $\lambda$  eine  $p$ -fache Nullstelle von  $\chi_A$  mit  $p \in \mathbb{N}_0$ , d.h.  $\chi_A(\mu) = (\mu - \lambda)^p \psi(\mu)$  mit  $\psi(\lambda) \neq 0$ . Dann ist

$$x(t) := \frac{s!}{(p+s)!} \frac{\partial^{p+s}}{\partial \mu^{p+s}} \left( \frac{\exp(\mu t)}{\psi(\mu)} \right) \Big|_{\mu=\lambda}$$

eine partikuläre Lösung von (3-5).

*Beweis.* Betrachte den Differentialoperator

$$L: C^k(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow C(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \quad u \mapsto u^{(k)} + a_1 u^{(k-1)} + \dots + a_k u =: \chi_A(D)u$$

mit

$$\chi_A(D) := D^k + a_1 D^{k-1} + \dots + a_k D^0, \quad D := \frac{d}{dt}.$$

Dann gilt für die Funktion  $f(t) := e^{\mu t}$  mit  $\mu \in \mathbb{C}$  offensichtlich

$$(Lf)(t) = (\chi_A(D)f)(t) = \chi_A(\mu)f(t) = (\mu - \lambda)^p \psi(\mu)f(t).$$

Somit

$$L\left(\frac{1}{\psi(\mu)}f\right)(t) = (\mu - \lambda)^p e^{\mu t}.$$

Wir differenzieren die letzte Gleichung  $(p+s)$ -mal nach  $\mu$  an der Stelle  $\mu = \lambda$ . Auf der rechten Seite verwenden wir

$$\frac{\partial^j}{\partial \mu^j} (\mu - \lambda)^p \Big|_{\mu=\lambda} = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ p!, & j = p. \end{cases}$$

Mit der Produktregel erhält man für die oben definierte Funktion  $x$ :

$$\begin{aligned} (Lx)(t) &= \frac{s!}{(p+s)!} L \left[ \frac{\partial^{p+s}}{\partial \mu^{p+s}} \left( \frac{\exp(\mu t)}{\psi(\mu)} \right) \Big|_{\mu=\lambda} \right] \\ &= \frac{s!}{(p+s)!} \frac{\partial^{p+s}}{\partial \mu^{p+s}} \left[ (\mu - \lambda)^p e^{\mu t} \right] \Big|_{\mu=\lambda} \\ &= \frac{s!}{(p+s)!} \binom{p+s}{p} p! t^s e^{\lambda t} \\ &= t^s e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

□

**3.18 Bemerkung (Leibniz-Formel).** Im letzten Beweis wurde die Produktregel gleich für höhere Ableitungen verwendet, die sogenannte Leibniz-Formel: Seien  $f, g$   $n$ -fach differenzierbar. Dann gilt

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Diese Formel kann man leicht induktiv beweisen.

**3.19 Bemerkung.** Bei Dgl. mit reellen Koeffizienten führen die bisherigen Ansätze auf komplexwertige Lösungen. Falls  $y$  eine Lösung von  $y' = Ay$  ist, so ist auch  $\operatorname{Re} y$  und  $\operatorname{Im} y$  eine Lösung. Wenn die Matrix  $A$  reell ist, treten komplexe Eigenwerte stets in konjugiert komplexen Paaren auf. Wegen

$$e^{\lambda t} = e^{\operatorname{Re} \lambda t} (\cos(\operatorname{Im} \lambda t) + i \sin(\operatorname{Im} \lambda t))$$

treten dann noch  $\cos$ - und  $\sin$ -Terme auf. Diese Überlegungen gelten analog für Dgl. höherer Ordnung.

**3.20 Beispiel.** Betrachte

$$x^{(4)}(t) - 2x''(t) + x(t) = 24 t \sin t. \quad (3-6)$$

(i) Fundamentalsystem der homogenen Dgl.: Es ist

$$\chi_A(\mu) = \mu^4 - 2\mu^2 + 1 = (\mu - 1)^2(\mu + 1)^2.$$

Nach Satz 3.16 ist also

$$e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.

(ii) Übergang zum Komplexen: Wegen  $t \sin t = \operatorname{Im}(te^{it})$  betrachten wir zunächst die rechte Seite  $te^{it}$ .

(iii) Bestimmung einer partikulären Lösung: In der Bezeichnung von Satz 3.17 ist  $s = 1$ ,  $\lambda = i$  und  $p = 0$ . Damit ist  $\psi(t) = \chi_A(t)$ , und der Ansatz für die spezielle Lösung lautet für die Inhomogenität  $t e^{it}$ :

$$x_0(t) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{e^{\mu t}}{\psi(\mu)} \right) \Big|_{\mu=i} = \frac{\psi(\mu)\mu e^{\mu t} - \psi'(\mu)e^{\mu t}}{\psi^2(\mu)} \Big|_{\mu=i} = \dots = \frac{t + 2i}{4} e^{it}.$$

Für die rechte Seite  $24 te^{it}$  erhalten wir damit die komplexwertige spezielle Lösung

$$\begin{aligned} 24x_0(t) &= (6t + 12i)e^{it} = (6t + 12i)(\cos t + i \sin t) \\ &= (6t \cos t - 12 \sin t) + i(6t \sin t + 12 \cos t). \end{aligned}$$

(iv) Rückkehr zur reellen Lösung: Da die ursprüngliche rechte Seite der Imaginärteil der in (iii) betrachteten Inhomogenität war, ist auch der Imaginärteil von  $x_0(t)$  eine partikuläre Lösung der ursprünglichen Gleichung. Somit ist

$$\operatorname{Im} 24x_0(t) = 6t \sin t + 12 \cos t$$

eine spezielle Lösung von (3-6).

(v) Allgemeine Lösung: Die allgemeine Lösung ist somit gegeben durch

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} + 6t \sin t + 12 \cos t$$

mit Konstanten  $c_j \in \mathbb{C}$ .

## 4. Zur Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

**4.1 Worum geht's?** In Anwendungen auftretende Differentialgleichungen können nur selten explizit gelöst werden, daher müssen numerische Verfahren verwendet werden. Hier soll nur ein erster Eindruck in einige einfache Verfahren vermittelt werden; in der Praxis (z.B. in Matlab) verwendete Methoden bauen üblicherweise darauf auf.

### a) Grundbegriffe und explizite Einschrittverfahren

Im folgenden sei stets  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion. Wir betrachten das AWP

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \quad (4-1)$$

Wir setzen dabei voraus, dass  $f$  global Lipschitz-stetig ist, d.h. wir haben die eindeutige Lösbarkeit von (5-1).

Die Idee des expliziten Euler-Verfahrens besteht darin, die Ableitung  $y'(t)$  durch den Differenzenquotienten zu approximieren. Dabei wählt man eine Partition  $t_0 < t_1 < \dots$  des Zeitintervalls und setzt

$$y'(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

Im einfachsten Fall ist  $t_i = t_0 + h \cdot i$  mit einer festen Schrittweite  $h > 0$ . In die Differentialgleichung eingesetzt, erhält man Näherungswerte  $y_i$  als Näherung für die (unbekannte) Lösung  $y(t_i)$ . Wir erhalten mit obiger Näherung die Rekursion

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(t_i, y_i),$$

d.h.

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

mit dem Startwert  $y_0 = y(t_0)$ .

Allgemeiner hat ein explizites Einschrittverfahren die Form

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, h) \quad (i = 0, 1, \dots),$$

wobei  $\Phi(t_i, y_i, h)$  eine Näherung für den Differenzenquotienten  $\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h}$  ist.

**4.2 Definition.** a) Zu  $t_1 \in I$  und  $y_1 \in \mathbb{R}^n$  sei  $y(t)$  die exakte Lösung von  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_1) = y_1$ . Definiere

$$\Delta(t_1, y_1, h) := \begin{cases} \frac{y(t_1+h) - y(t_1)}{h}, & h > 0, \\ f(t_1, y_1), & h = 0. \end{cases}$$

Dann heißt

$$\tau(t_1, y_1, h) := \Delta(t_1, y_1, h) - \Phi(t_1, y_1, h)$$

der lokale Diskretisierungsfehler des Verfahrens  $\Phi$ .

b) Das Verfahren  $\Phi$  heißt konsistent, falls  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t_1, y_1, h) = 0$  für alle genügend glatten rechten Seiten  $f$  gilt.

c) Das Verfahren  $\Phi$  heißt ein Verfahren der Ordnung  $p \geq 1$ , falls  $\tau(t_1, y_1, h) = O(h^p)$  für  $h \rightarrow 0$  gilt.

d) Für  $t = t_0 + ih$  sei  $\tilde{y}(t) = y_i$  die Näherung für die exakte Lösung  $y$  beim Verfahren  $\Phi$ . Dann heißt  $e(t, h) := \tilde{y}(t) - y(t)$  der globale Diskretisierungsfehler von  $\Phi$ . Das Verfahren  $\Phi$  heißt konvergent, falls  $\lim_{h \rightarrow 0} e(t, h) = 0$ . Analog wird die Konvergenzordnung definiert.

In dieser Definition wurde die  $O$ -Schreibweise verwendet: Man schreibt  $f(h) = O(g(h))$  (Sprechweise: „ $f(h)$  ist groß  $O$  von  $g(h)$ “), falls  $|f(h)| \leq C|g(h)|$  für eine Konstante  $C > 0$  gilt. Es gibt auch die  $o$ -Notation: Es ist  $f(h) = o(g(h))$  („klein  $o$ “), falls  $\frac{|f(h)|}{|g(h)|} \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ).

**4.3 Beispiel (Euler-Verfahren).** Hier ist  $\Phi(t_1, y_1, h) = f(t_1, y_1)$ , wie oben bereits diskutiert wurde. Um den Fehler dieses Verfahrens abzuschätzen, entwickelt man die *exakte* Lösung  $y$  in eine Taylorreihe:

$$y(t_1 + h) = y(t_1) + hy'(t_1) + \frac{h^2}{2}y''(\xi), \quad t_1 \leq \xi \leq t_1 + h.$$

Der lokale Diskretisierungsfehler ergibt sich damit als

$$\begin{aligned} \tau(t_1, y_1, h) &= \Delta(t_1, y_1, h) - \Phi(t_1, y_1, h) \\ &= \frac{y(t_1 + h) - y(t_1)}{h} - \underbrace{f(t_1, y_1)}_{=y'(t_1)} \\ &= \frac{h}{2}y''(\xi) \\ &= \frac{h}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t)) \right) \Big|_{t=\xi} \\ &= O(h), \end{aligned}$$

da die ersten Ableitungen von  $f$  für genügend glatte Funktionen (z.B.  $f \in C^1(\mathbb{R})$ ) in der Nähe von  $t_1$  beschränkt sind. Somit besitzt das Euler-Verfahren die Konsistenzordnung 1.

**4.4 Beispiel (Verfahren von Heun).** Hier ist

$$\Phi(t_1, y_1, h) = \frac{1}{2} \left[ f(t_1, y_1) + f(t_1 + h, y_1 + hf(t_1, y_1)) \right].$$

Für den lokalen Diskretisierungsfehler erhält man damit

$$\begin{aligned} \tau(t_1, y_1, h) &= \frac{y(t_1 + h) - y(t_1)}{h} - \Phi(t_1, y_1, h) \\ &= y'(t_1) + \frac{h}{2} y''(t_1) + \frac{h^2}{3!} y^{(3)}(t_1) - \frac{1}{2} f(t_1, y_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ f(t_1, y_1) + h(\partial_1 f(t_1, y_1) + \partial_2 f(t_1, y_1) \cdot f(t_1, y_1)) + O(h^2) \right] \\ &= \frac{h}{2} \left[ y''(t_1) - (\partial_1 f(t_1, y_1) + \partial_2 f(t_1, y_1) \cdot f(t_1, y_1)) \right] + O(h^2). \end{aligned}$$

Da  $y$  die exakte Lösung der Differentialgleichung ist, gilt  $y'(t_1) = f(t_1, y(t_1))$ . Leitet man diese Gleichheit ab, erhält man

$$\begin{aligned} y''(t_1) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t)) \right|_{t=t_1} \\ &= \partial_1 f(t_1, y(t_1)) + \partial_2 f(t_1, y(t_1)) \cdot y'(t_1) \\ &= \partial_1 f(t_1, y(t_1)) + \partial_2 f(t_1, y(t_1)) \cdot y'(t_1). \end{aligned}$$

Damit ist die obige Klammer  $[\cdot]$  gleich Null, und man erhält

$$\tau(t_1, y_1, h) = O(h^2) \quad (h \rightarrow 0).$$

Das Heun-Verfahren hat somit die Konsistenzordnung 2.

**4.5 Beispiel (Runge-Kutta-Verfahren).** Ein Runge-Kutta-Verfahren der Stufe  $s$  mit  $s \in \mathbb{N}$  wird folgendermaßen konstruiert:

$$y_{i+1} := y_i + h\Phi(t_i, y_i, h) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

mit

$$\Phi(t_i, y_i, h) = \sum_{m=1}^s b_m k_m, \quad k_m = f\left(t_i + c_i h, y_i + h \sum_{j=1}^{m-1} a_{mj} k_j\right) \quad (m = 1, \dots, s).$$

Hier sind  $a_{mj} \in \mathbb{R}$  ( $1 \leq m < j \leq s$ ),  $b_m, c_m \in \mathbb{R}$  ( $1 \leq m \leq s$ ) mit  $c_1 = 0$ . Anschaulich bedeutet dies, dass  $\Phi$  eine Linearkombination verschiedener Werte von

$f$  an den Stellen  $t = t_m + c_m \cdot h$  und geeignete Werte von  $y$  ist. Üblicherweise ist  $\sum_{j=1}^{m-1} a_{mj} = c_m$ .

a) Die Wahl  $c_1 = 0, c_2 = 1, a_{21} = 1, b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$  liefert

$$\Phi(t_i, y_i, h) = \frac{1}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i))).$$

Das ist das Verfahren von Heun. Während beim Euler-Verfahren der Differenzenquotient  $\Delta$  durch  $\Phi = f(t_i, y_i) \approx y'(t_i)$  approximiert wird, verwendet das Verfahren von Heun den Mittelwert von  $f(t_i, y_i) \approx y'(t_i)$  und  $f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i)) \approx y'(t_i + h)$ .

Beim Verfahren von Heun wird also für einen Schritt die rechte Seite zweimal ausgewertet, was etwa den doppelten Aufwand bedeutet. Dafür erzielt man eine Konsistenzordnung von 2. Man beachte, dass es sich nach wie vor um ein Einschrittverfahren handelt, da nur der Wert von  $y_i$  für die Berechnung von  $y_{i+1}$  verwendet wird.

Verfahren vom Runge-Kutta-Typ werden manchmal schematisch aufgeschrieben. Beim Heun-Verfahren ist das Schema gegeben durch

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} = \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

b) Das klassische Runge-Kutta-Verfahren besitzt Stufe  $s = 4$  und ist von Konsistenzordnung 4. Das zugehörige Schema ist gegeben durch

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

In expliziter Form erhält man folgendes Verfahren:  $\Phi(t_i, y_i, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$  mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_i + h, y_i + hk_3). \end{aligned}$$

Der lokale Diskretisierungsfehler kann wie in den obigen Beispielen durch Analyse des Verfahrens bestimmt werden (im wesentlichen unter Verwendung der Taylorreihe), während der globale Diskretisierungsfehler für die Anwendung des Verfahrens entscheidend ist. Bei Einschrittverfahren gibt es hier einen einfachen Zusammenhang:

**4.6 Satz (Konvergenz von Einschrittverfahren).** *Falls die Funktion  $\Phi(t, y, h)$  eines Einschrittverfahrens Lipschitz-stetig in der Variablen  $y$  ist, so ist die (lokale) Konsistenzordnung gleich der (globalen) Konvergenzordnung. So ist z.B. das Euler-Verfahren konvergent von Ordnung 1, das Heun-Verfahren von Ordnung 2 und das klassische Runge-Kutta-Verfahren von Ordnung 4.*

**4.7 Bemerkung.** a) Nach Satz 5.6 gilt für ein Verfahren der Ordnung  $p$  für den globalen Diskretisierungsfehler die Abschätzung  $|e(t, h)| \leq Ch^p$ . Die Konstante  $C$  hängt von den Ableitungen der Funktion  $f$  auf der rechten Seite ab, welche in Anwendungen nicht bekannt sind. Damit ist die Abschätzung theoretischer Natur, d.h. man kann die Schrittweite nicht im Voraus so bestimmen, dass der globale Fehler unter einer gegebenen Toleranzschranke liegt.

b) Falls die rechte Seite  $f$  nur stückweise glatt ist, stimmen die obigen Abschätzungen nicht mehr. Daher an diesen Stellen neu starten!

c) Bei Runge-Kutta-Verfahren führt die Bedingung einer Konsistenzordnung auf ein nichtlineares und unterbestimmtes Gleichungssystem für die Koeffizienten des Verfahrens.

**4.8 Bemerkung (Schrittweitensteuerung nach Fehlberg).** Für ein praktikables Verfahren muss man die Schrittweite  $h$  so bestimmen, dass eine gewisse Fehlertoleranz eingehalten wird. Nach einer Idee von Fehlberg verwendet man dazu zwei Verfahren mit gleicher Schrittweite und unterschiedlicher Ordnung: Sei  $\Phi$  ein Verfahren der Ordnung  $p$  und  $\hat{\Phi}$  ein Verfahren der Ordnung  $p+1$ . Man berechnet die Näherungen

$$\begin{aligned}\bar{y}_{i+1} &:= \bar{y}_i + h_i \Phi(t_i, \bar{y}_i, h_i), \\ \hat{y}_{i+1} &:= \bar{y}_i + h_i \hat{\Phi}(t_i, \bar{y}_i, h_i).\end{aligned}$$

Für den lokalen Diskretisierungsfehler gilt dann

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{i+1} &:= \Phi(t_i, \bar{y}_i, h_i) - \Delta(t_i, \bar{y}_i, h_i) = \bar{C}(t_i)h_i^p + O(h_i^{p+1}), \\ \hat{\tau}_{i+1} &:= \hat{\Phi}(t_i, \bar{y}_i, h_i) - \Delta(t_i, \bar{y}_i, h_i) = \hat{C}(t_i)h_i^{p+1} + O(h_i^{p+2}).\end{aligned}$$

Die Konstanten  $\bar{C}(t_i)$  und  $\hat{C}(t_i)$  hängen von  $t_i$  ab, ändern sich aber üblicherweise wenig, d.h. man hat  $\bar{C}(t_i) \approx \bar{C}(t_{i-1})$ . Für kleine  $h_i$  ist der Fehler  $\hat{\tau}_{i+1}$  wesentlich kleiner. Es gilt

$$\frac{\bar{y}_{i+1} - \hat{y}_{i+1}}{h_i^{p+1}} = \frac{|\Phi(t_i, \bar{y}_i, h_i) - \hat{\Phi}(t_i, \bar{y}_i, h_i)|}{h_i^p}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|\bar{\tau}_{i+1} - \hat{\tau}_{i+1}|}{h_i^p} \\
&\approx \frac{|\bar{\tau}_{i+1}|}{h_i^p} = \bar{C}(t_i).
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\frac{|\bar{y}_{i+1} - \hat{y}_{i+1}|}{h_i^{p+1}} \approx \frac{|\bar{y}_i - \hat{y}_i|}{h_{i-1}^{p+1}}.$$

Dies ist eine implizite Bedingung an die neue Schrittweite  $h_i$ .

Eine einfachere Bedingung ergibt sich aus der Forderung  $|\bar{y}_{i+1} - \hat{y}_{i+1}| < \text{TOL}$  für eine gegebene (skalierte!) Toleranz TOL. In obige Approximation eingesetzt, erhält man

$$h_i < h_{i-1} \left( \frac{\text{TOL}}{|\bar{y}_i - \hat{y}_i|} \right)^{1/(p+1)}.$$

Verlangt man dagegen  $|\bar{\tau}_{i+1}| \approx \frac{|\bar{y}_{i+1} - \hat{y}_{i+1}|}{h_i} < \text{TOL}$ , so erhält man

$$h_i < h_{i-1} \left( \frac{h_{i-1} \cdot \text{TOL}}{|\bar{y}_i - \hat{y}_i|} \right)^{1/p}.$$

In der Praxis werden raffiniertere Schrittweitensteuerungen verwendet. Standardverfahren sind RKF (=Runge-Kutta-Fehlberg)-Verfahren der Ordnung 4/5 und 2/3. In Matlab sind diese implementiert in der Funktion `ode45` bzw. `ode23`.

## b) Mehrschrittverfahren

**4.9 Bemerkung.** Sei  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ . Integriert man diese Differentialgleichung über das Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$ , so erhält man

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, y(t)) dt.$$

Hier sieht man, dass die bisher behandelten Einschrittverfahren durch Näherung des Integrals entsteht: Man ersetzt das Integral durch die Näherung  $(t_i - t_{i-1})\Phi(t_{i-1}, y_{i-1}, h_{i-1})$ . Den bisher behandelten Verfahren ist gemeinsam, dass nur der Wert von  $y_{i-1}$  für die Berechnung von  $y_i$  verwendet wird.

Bei Mehrschrittverfahren approximiert man das Integral in

$$y(t_i) - y(t_{i-s}) = \int_{t_{i-s}}^{t_i} f(t, y(t)) dt$$

durch eine Näherung, welche die bereits berechneten Näherungswerte  $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-s}$  verwendet. So kann man etwa den Integranden durch ein Polynom ersetzen, das

durch die Punkte  $(t_k, y_k)$  mit  $k = i - s, \dots, i$  geht. Diese Aufgabe, durch gegebene Punkte ein Polynom zu legen, nennt man Interpolation. Es gilt folgender grundlegender Satz:

**4.10 Satz (Interpolation).** Seien  $t_0, \dots, t_N \in \mathbb{R}$  paarweise verschieden und  $y_0, \dots, y_N \in \mathbb{R}$ . Dann existiert genau ein Polynom  $P$  vom Grad nicht größer als  $N$  mit  $P(t_i) = y_i$  ( $i = 0, \dots, N$ ). Dieses ist gegeben durch

$$P(t) = \sum_{i=0}^N y_i L_i(t)$$

mit den Lagrange-Faktoren

$$L_i(t) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Man beachte, dass für die Lagrange-Faktoren gilt:

$$L_i(t_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Wählt man für Mehrschrittverfahren äquidistante Stützstellen  $t_i = t_0 + ih$  mit Schrittweite  $h$ , so erhält man eine lineare Rekursion für  $y_i$ . Integriert wird dabei über das Intervall  $[t_{i-s}, t_i]$  mit  $s \in \mathbb{N}$ . Das Polynom  $P$  wird so gewählt, dass

$$P(t_j) = y_j \quad (j = k - m, k - m + 1, \dots, k)$$

gilt. Hierbei ist  $k \leq i$  und  $m$  bestimmt den Grad des Polynoms. Je nach Wahl von  $s$ ,  $k$  und  $m$  erhält man verschiedene Verfahren. Alle haben die Form

$$y_i = y_{i-s} + h \sum_{j=k-m}^k \beta_j f(t_j, y_j).$$

**4.11 Beispiel (Adams-Bashforth-Verfahren).** Hier ist  $s = 1$  und  $k = i - 1$ . Man erhält

$$y_i = y_{i-1} + h \sum_{j=i-1-m}^{i-1} \beta_j f(t_j, y_j) \quad (i = m + 1, m + 2, \dots). \quad (4-2)$$

Die Koeffizienten  $\beta_i$  sind gegeben durch Integrale über Lagrange-Faktoren; genauer ist

$$\beta_j = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \prod_{\substack{l=i-1-m \\ l \neq j}}^{i-1} \frac{t - t_l}{t_j - t_l} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \int_{t_i-h}^{t_i} \prod_{\substack{l=i-1-m \\ l \neq j}}^{i-1} \frac{t - t_0 - lh}{(t_0 - jh) - (t_0 - lh)} dt \\
&= \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \prod_{\substack{l=-1-m \\ l \neq j}}^{-1} \frac{t - lh}{jh - lh} dt \\
&= \int_{-1}^0 \prod_{\substack{l=-1-m \\ l \neq j}}^{-1} \frac{t - l}{j - l} dt.
\end{aligned}$$

Man sieht, dass  $\beta_j$  nicht von  $h$  abhängt. Da der Term  $y_i$  auf der rechten Seite von (4-2) nicht auftaucht, handelt es sich um ein explizites Verfahren. Schreibt man  $f_j := f(t_j, y_j)$ , so lauten die einfachsten Adams-Bashforth-Verfahren

$$\begin{aligned}
m = 0: & \quad y_i = y_{i-1} + hf_{i-1}, \\
m = 1: & \quad y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(3f_{i-1} - f_{i-2}), \\
m = 2: & \quad y_i = y_{i-1} + \frac{h}{12}(23f_{i-1} - 16f_{i-2} + 5f_{i-3}).
\end{aligned}$$

Man beachte, dass man für  $m = 0$  wieder das Euler-Verfahren erhält.

**4.12 Beispiel (Adams-Moulton-Verfahren).** Hier ist  $s = 1$  und  $k = i$ , d.h. das Verfahren hat die Form

$$y_i = y_{i-1} + h \sum_{j=i-m}^i \beta_j f(t_j, y_j) \quad (i = m + 1, m + 2, \dots).$$

Hier taucht der unbekannte Wert  $y_i$  auf der rechten Seite wieder auf, d.h. es handelt sich um ein implizites Verfahren. Die Koeffizienten  $\beta_j$  sind wie beim Adams-Bashforth-Verfahren durch Integration gewisser Lagrange-Faktoren explizit bestimmbar und hängen nicht von  $h$  ab. Die einfachsten Verfahren lauten

$$\begin{aligned}
m = 0: & \quad y_i = y_{i-1} + hf_i, \\
m = 1: & \quad y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(f_i + f_{i-1}), \\
m = 2: & \quad y_i = y_{i-1} + \frac{h}{12}(5f_i + 8f_{i-1} - f_{i-2}).
\end{aligned}$$

Das erste Verfahren  $y_i = y_{i-1} + hf(t_i, y_i)$  heißt auch implizites Euler-Verfahren, für  $m = 1$  spricht man von der Trapezregel.

Weitere Beispiele sind Nyström-Verfahren ( $s = 2$  und  $k = i - 1$ , explizit) und die Milne-Simpson-Verfahren ( $s = 2$  und  $k = i$ , implizit).

**4.13 Bemerkung.** Jedes lineare Mehrschrittverfahren mit äquivalenten Stützstellen hat die Form

$$y_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j y_{i-j} + h \sum_{j=k-m}^k \beta_j f(t_j, y_j) =: \Phi(t_i, h, y_{i-m}, y_{i-m+1}, \dots, y_i) \quad (4-3)$$

Zur Definition der Konsistenzordnung betrachtet man zu einem beliebigen  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  mit exakter Lösung  $y(t)$ . Dann heißt das Verfahren konsistent von Ordnung  $p \in \mathbb{N}$ , falls

$$\tau := \frac{1}{h} (y(t_i) - \Phi(t_i, h, y(t_{i-m}), \dots, y(t_i))) = O(h^p) \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

gilt. Ein Verfahren heißt konvergent von Ordnung  $p$ , falls  $y(t_i) - y_i = O(h^p)$  für  $h \rightarrow 0$  gilt. Die Konsistenzordnung kann leicht bestimmt werden durch eine Fehlerabschätzung für die verwendete Interpolation.

Das Verfahren

$$y_i := 5y_{i-2} - 4y_{i-1} + 2h [f(t_{i-2}, y_{i-2}) + 2f(t_{i-1}, y_{i-1})]$$

ist ein Verfahren der Konsistenzordnung 3, d.h. es gilt  $\tau = O(h^3)$  für  $h \rightarrow 0$ . Wendet man dieses Verfahren auf die Differentialgleichung  $y' = -y$  mit  $y(0) = 1$  an, so erhält man bei 30-stelliger Rechnung in Maple mit exaktem  $y_1$  und  $h = 10^{-2}$  folgende Tabelle:

|                |   |           |                     |                    |     |                   |     |                   |
|----------------|---|-----------|---------------------|--------------------|-----|-------------------|-----|-------------------|
| $i$            | 0 | 1         | 2                   | 3                  | ... | 10                | ... | 100               |
| $t_i$          | 0 | $10^{-2}$ | $2 \cdot 10^{-2}$   | $3 \cdot 10^{-2}$  | ... | 0.1               | ... | 1                 |
| $y_i - y(t_i)$ | 0 | 0         | $1.6 \cdot 10^{-9}$ | $-5 \cdot 10^{-8}$ | ... | $4 \cdot 10^{-4}$ | ... | $6 \cdot 10^{59}$ |

Bei Mehrschrittverfahren bedeutet also Konsistenz nicht Konvergenz! Der Grund dafür liegt in der sogenannten Instabilität des Verfahrens.

**4.14 Definition.** Ein lineares Mehrschrittverfahren der Form (4-3) heißt stabil, falls für das charakteristische Polynom

$$\psi(\lambda) := \lambda^m + \alpha_1 \lambda^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} \lambda + \alpha_m$$

gilt: Alle Nullstellen haben Betrag nicht größer als 1, und alle Nullstellen mit Betrag 1 sind einfach.

**4.15 Satz (Konvergenz von Mehrschrittverfahren).** Falls ein lineares Mehrschrittverfahren stabil und konsistent von Ordnung  $p$  ist, so ist es auch konvergent von Ordnung  $p$ .

### c) Steife Differentialgleichungen

**4.16 Beispiel.** Betrachte das Anfangswertproblem  $y' = Ay$ ,  $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind  $-1$  und  $-1000$ , die exakte Lösung ist

$$y(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-1000t} \\ -e^{-t} + e^{-1000t} \end{pmatrix}.$$

Wendet man das Euler-Verfahren  $y_{i+1} := (I + hA)y_i$  ( $i \in \mathbb{N}_0$ ) an, so erhält man explizit

$$y_{i+1} = \begin{pmatrix} 2(1-h)^i - (1-1000h)^i \\ -(1-h)^i + (1-1000h)^i \end{pmatrix}.$$

Für  $y_i \rightarrow 0$  ( $i \rightarrow \infty$ ) muss somit  $|1-h| < 1$  und  $|1-1000h| < 1$  gelten, d.h.  $h < 1$  bzw.  $h < \frac{2}{1000}$ . Obwohl der Lösungsanteil  $e^{-1000t}$  nichts zur Lösung beiträgt, zwingt er zur Wahl einer extrem kleinen Schrittweite und damit zu sehr hohem Rechenaufwand. Das Euler-Verfahren (wie auch die meisten anderen bisher besprochenen Verfahren) kann also nicht zur numerischen Lösung derartiger Systeme verwendet werden. Das obige Anfangswertproblem ist ein Beispiel einer steifen Differentialgleichung.

**4.17 Definition.** a) Ein konstantes Differentialgleichungssystem der Form  $y' = Ay$  heißt steif, falls  $A$  mindestens einen Eigenwert  $\ll 1$  besitzt und falls

$$S(A) := \frac{\max_j |\operatorname{Re} \lambda_j(A)|}{\min_j |\operatorname{Re} \lambda_j(A)|}$$

groß ist (in der Praxis auftretende Werte sind  $S(A) \approx 10^3 \dots 10^6$ ).

b) Ein Anfangswertproblem  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  heißt steif, falls für die Jacobi-Matrix  $A := D_y f(t, y(t))$  der Wert  $S(A)$  groß ist.

**4.18 Bemerkung.** Wendet man ein (explizites oder implizites) Einschrittverfahren auf das skalare Modellproblem  $y' = \lambda y$  an, so erhält man häufig eine Rekursion  $y_{i+1} = g(\lambda h)y_i$ . In diesem Fall heißt  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die Stabilitätsfunktion des Verfahrens.

Das Euler-Verfahren besitzt die Stabilitätsfunktion  $g(z) = 1 + z$ , für das implizite Euler-Verfahren ist  $g(z) = \frac{1}{1-z}$ . Falls für ein Verfahren gilt  $|g(z)| < 1$  für alle  $z$  mit  $\operatorname{Re} z < 0$ , so erhält man bei Anwendung auf das Modellproblem  $y' = \lambda y$  mit  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  stets eine Nullfolge. In diesem Fall heißt das Verfahren A-stabil (absolut stabil). Allgemein bestimmt das absolute Stabilitätsgebiet  $G := \{z \in \mathbb{C} : |g(z)| < 1\}$  das Stabilitätsverhalten des Verfahrens.

Das explizite Euler-Verfahren ist nicht A-stabil, denn hier ist  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-1)| < 1\}$ . Hingegen besitzt das implizite Euler-Verfahren das Stabilitätsgebiet  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > 1\}$  und ist somit A-stabil. Das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung ist ebenfalls nicht A-stabil; man sieht leicht, dass kein explizites Verfahren A-stabil sein kann.

## 5. Stabilität

**5.1 Worum geht's?** Für viele Anwendungen ist nicht nur die Frage der eindeutigen Lösbarkeit einer Dgl. wichtig, sondern auch die Frage, wie sich die Lösungen verhalten. Insbesondere die Stabilität der Lösungen, d.h. das Verhalten der Lösung für  $t \rightarrow \infty$  ist wichtig. Eine Lösung heißt stabil, falls eine kleine Abweichung im Anfangswert eine (für alle Zeiten) kleine Abweichung in der Lösung bewirkt. Man beachte, dass kleine Abweichungen in den Daten in den Anwendungen stets vorhanden sind.

Die Stabilität der Lösung einer gewöhnlichen Dgl. (und erst recht einer partiellen Dgl.) ist sehr schwer zu beweisen. Es gibt kein allgemein gültiges Rezept, diese Frage zu beantworten. Falls man jedoch Glück hat, kann man eine Ljapunov-Funktion zur Dgl. finden und somit die Stabilität beweisen.

Dieser Abschnitt soll nur einen kurzen Einblick in dieses Themengebiet liefern. Vertieft werden diese Fragen dann im Hauptstudium insbesondere auch bei partiellen Dgl.

Bei der qualitativen Beschreibung des Lösungsverhaltens von Dgl. werden einige Begriffe üblicherweise verwendet, die in folgender Definition zusammengestellt werden.

**5.2 Definition.** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in J), \quad y(t_0) = y^0. \quad (5-1)$$

mit  $f: J \times X \rightarrow X$ ,  $X := \mathbb{R}^n$ .

Der Raum  $X$  heißt der Zustandsraum oder Phasenraum.

Sei nun das Anfangswertproblem (5-1) eindeutig lösbar und  $t_0 \in J$  fest. Dann heißt die Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X, \quad (t, y^0) \mapsto \Phi(t, y^0) := y(t)$$

der Fluss der Dgl. (wobei  $y$  wieder die Lösung des Anfangswertproblems ist). Der zugehörige Wertebereich

$$\gamma(y^0) := \{\Phi(t, y^0) : t \in J\}$$

heißt der Orbit (oder Phasenkurve, Trajektorie). Ein  $y^0 \in X$  heißt ein Fixpunkt, falls gilt

$$\Phi(t, y^0) = y^0 \quad (t \in J).$$

Offensichtlich ist  $y^0$  genau dann ein Fixpunkt, wenn

$$f(t, y^0) = 0 \quad (t \in J).$$

In diesem Fall heißt  $y^0$  ein singulärer Punkt von  $f$ . So besitzt z.B. die logistische Gleichung

$$y'(t) = y(t)(y(t) - 1)$$

die singulären Punkte  $y^0 = 0$  und  $y^0 = 1$ .

**5.3 Beispiel.** Die Dgl.

$$x'' + x = 0$$

(ungedämpftes lineares Pendel) ist äquivalent zum System

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix},$$

wobei wie üblich  $y := \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$  gesetzt wurde. Zu  $y^0 \in \mathbb{R}^2$  ist die Lösung des Anfangswertproblems  $y' = Ay$ ,  $y(0) = y^0$  gegeben durch

$$\Phi(t, y^0) = y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} y^0.$$

Damit ist der Orbit periodisch mit Periode  $2\pi$ .

**5.4 Beispiel (Orbits bei  $2 \times 2$ -Matrizen).** Das qualitative Verhalten lässt sich gut beschreiben, falls man die lineare Dgl.  $y' = Ay$  mit einer konstanten  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  betrachtet. Die Lösung ist natürlich durch  $y(t) = \exp(tA)y(t_0)$  gegeben, das qualitative Verhalten wird durch die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  von  $A$  bestimmt. Wir sehen an den Phasenportraits (Orbits) der Lösung folgende Möglichkeiten:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , d.h.  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ : Quelle (siehe Abbildung 7).
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , d.h.  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ : Senke (siehe Abbildung 8).
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , d.h.  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ : instabiler Sattelpunkt (siehe Abbildung 9).
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , d.h. doppelter Eigenwert  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  mit einfacher geometrischer Vielfachheit (Jordan-Normalform): instabiler eintangentiger Knoten (siehe Abbildung 10).
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , d.h. doppelter Eigenwert  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  mit einfacher geometrischer Vielfachheit (Jordan-Normalform): stabiler eintangentiger Knoten (siehe Abbildung 11).

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , d.h. zwei rein imaginäre (und zueinander konjugiert komplexe) Eigenwerte  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$  : Zentrum oder Wirbelpunkt (siehe Abbildung 12).
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , d.h. zwei komplexe (und zueinander konjugierte) Eigenwerte  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$  : instabiler Strudelpunkt (siehe Abbildung 13).
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ , d.h. zwei komplexe (und zueinander konjugierte) Eigenwerte  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$  : stabiler Strudelpunkt (siehe Abbildung 14).

**5.5 Definition.** Eine Lösung  $y$  des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y^0$$

heißt stabil, falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle Lösungen  $x$  des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x^0$$

mit  $|x^0 - y^0| < \delta$  gilt:

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon \quad (t \in [0, \infty)).$$

Die Lösung  $y$  heißt instabil, falls sie nicht stabil ist.

Die Lösung  $y$  heißt asymptotisch stabil, falls sie stabil ist und falls für  $x$  wie oben zusätzlich gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0.$$

In obigen Beispielen ist etwa ein Wirbelpunkt stabil, eine Senke ist asymptotisch stabil, eine Quelle ist instabil. Allgemein ist die triviale Lösung  $y = 0$  der Dgl.  $y' = Ay$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  genau dann

- instabil, falls ein Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  existiert mit  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  oder falls ein Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  existiert mit  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , für welchen die algebraische Vielfachheit größer ist als die geometrische Vielfachheit,
- stabil, falls für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$  gilt:  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  und für alle Eigenwerte  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit ist,
- asymptotisch stabil, falls für alle Eigenwerte  $\lambda$  gilt  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ .

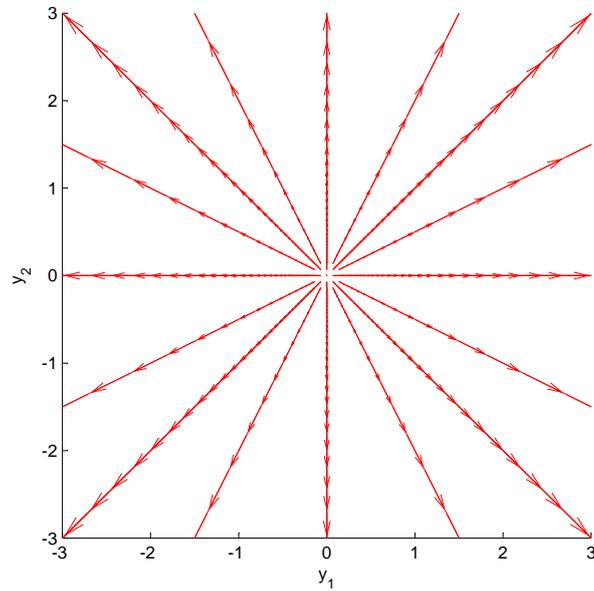


Abbildung 7: Orbits bei zwei positiven Eigenwerten (Quelle)

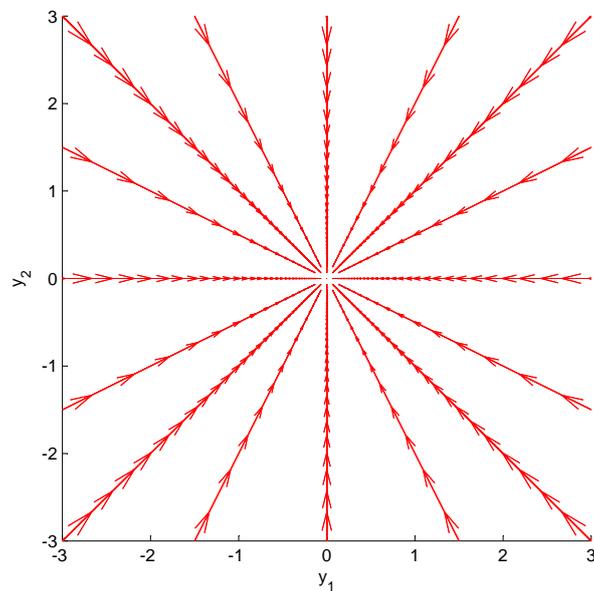


Abbildung 8: Orbits bei zwei negativen Eigenwerten (Senke)

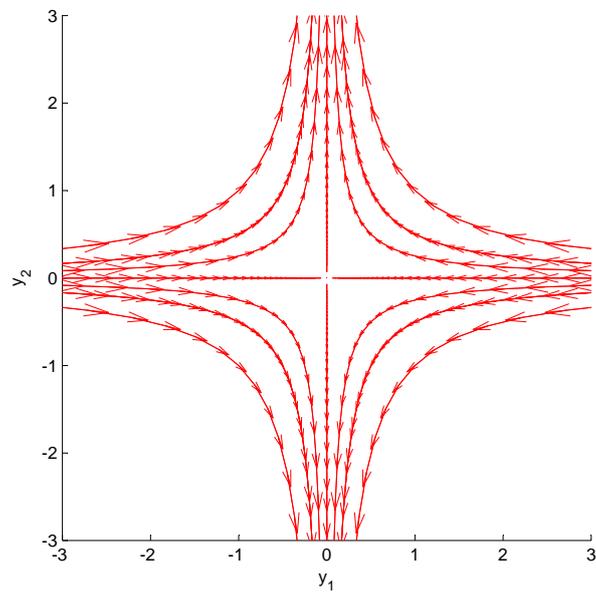


Abbildung 9: Ein positiver und ein negativer Eigenwert (instabiler Sattelpunkt)

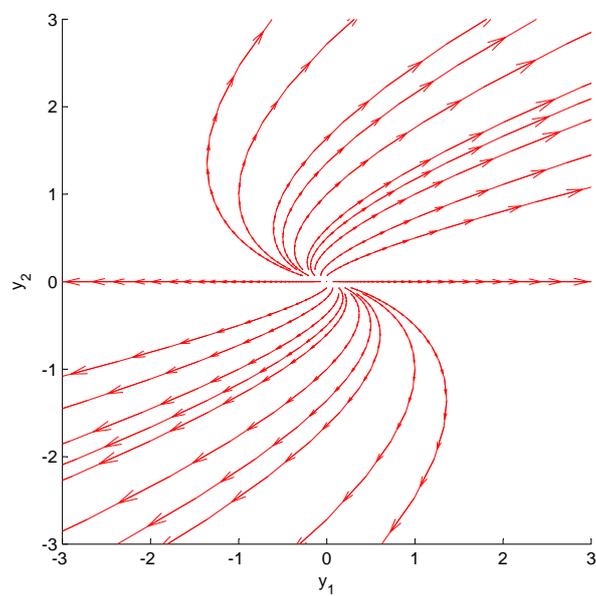


Abbildung 10: Doppelter positiver Eigenwert mit Jordan-Normalform (instabiler eintangentiger Knoten)

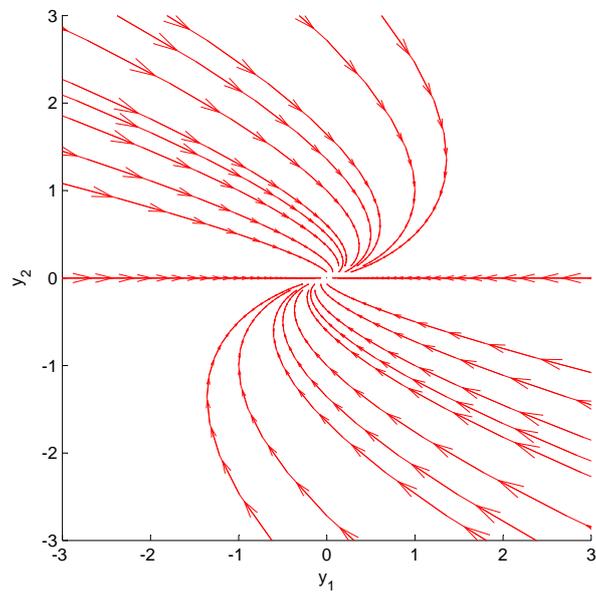


Abbildung 11: Doppelter negativer Eigenwert mit Jordan-Normalform (stabiler eintangentiger Knoten)

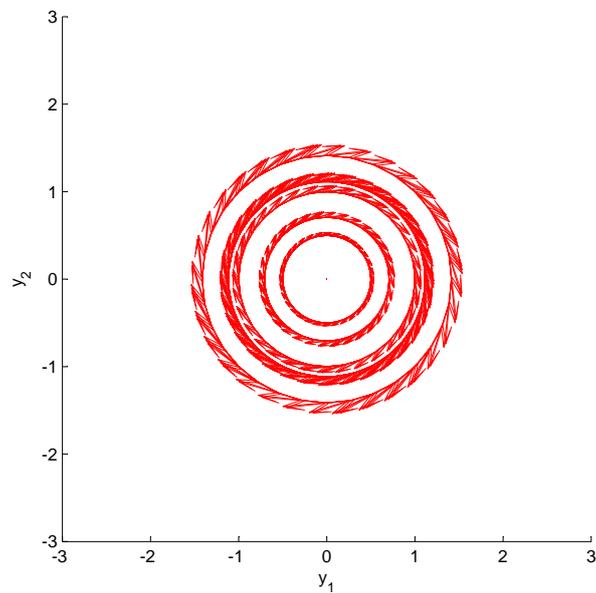


Abbildung 12: Rein imaginärer Eigenwert (Wirbelpunkt)

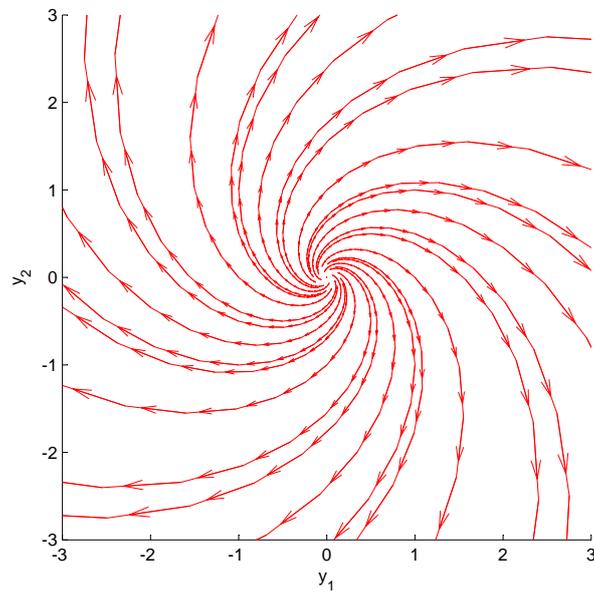


Abbildung 13: Zwei komplexe Eigenwerte mit positivem Realteil (instabiler Strudel-  
punkt)

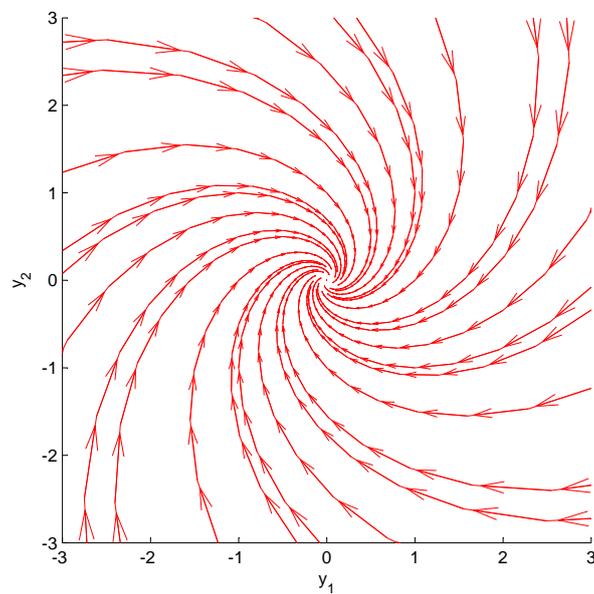


Abbildung 14: Zwei komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil (stabiler Strudel-  
punkt)

**5.6 Beispiel.** Betrachte die Dgl. einer gedämpften Schwingung

$$y''(t) + y(t) + ry'(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

mit  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $r > 0$  der Dämpfungsfaktor ist. Wir multiplizieren mit  $y'$ :

$$y''y' + yy' + r(y')^2 = 0$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dt} (|y'|^2 + |y|^2) = -2r(y')^2 \leq 0.$$

Also ist die linke Seite als Funktion von  $t$  monoton fallend, d.h.

$$|y'(t)|^2 + |y(t)|^2 \leq |y'(0)|^2 + |y(0)|^2.$$

Damit ist die Lösung  $y_0(t) = 0$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) eine stabile Lösung der Dgl., denn eine kleine Abweichung der Startwerte  $(y(0), y'(0))$  an der Stelle 0 kann für alle  $t \in \mathbb{R}$  nicht größer werden.

Schreibt man dieses Beispiel als System erster Ordnung, erhält man mit  $x := \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$  die (autonome) Gleichung

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) - rx_2(t) \end{pmatrix} =: f(x(t)).$$

Für  $E(x) := |x|^2$  erhält man für eine Lösung  $x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$

$$\frac{d}{dt} E(x(t)) = (\nabla E(x(t)))^t \cdot x'(t) = 2x(t)^t x'(t) = -2rx_2^2(t) \leq 0.$$

Die Funktion  $E$  heißt eine Ljapunow-Funktion zur Dgl.  $x'(t) = f(x(t))$ .

**5.7 Definition.** Der Punkt  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  sei ein isolierter singulärer Punkt des Vektorfeldes  $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Dann heißt  $L \in C^1(U(x^0); \mathbb{R})$ ,  $U(x^0)$  eine Umgebung von  $x^0$ , eine Ljapunow-Funktion zur autonomen Dgl.  $x'(t) = f(x(t))$  am Punkt  $x^0$ , falls gilt:

- (i)  $L(x) \geq 0$  und  $L(x) = 0$  nur an der Stelle  $x^0$ ,
- (ii) Es gilt  $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq 0$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ).

**5.8 Satz.** Sei  $x^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$  ein isolierter singulärer Punkt des Vektorfeldes  $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Falls eine Ljapunow-Funktion  $L$  zur autonomen Dgl.  $x'(t) = f(x(t))$  am Punkt  $x^0$  existiert, so ist die konstante Lösung  $y = 0$  stabil.

**5.9 Bemerkung.** a) Die Schwierigkeit in der Anwendung dieses Satzes liegt darin, eine Ljapunow-Funktion zu finden. Auch bei partiellen Dgl. ist derselbe Ansatz möglich, aber dort ist es noch schwerer, eine Ljapunow-Funktion zu konstruieren. Manchmal hilft ein physikalischer Zugang (Energie).

b) Falls in Definition 5.7 (ii) sogar

$$\langle \nabla L(x), f(x) \rangle < 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

so spricht man von einer strengen Ljapunow-Funktion, und man kann die asymptotische Stabilität beweisen.

## 6. Rand- und Eigenwertprobleme

**6.1 Worum geht's?** Die Schwingung einer Saite führt zur partiellen Differentialgleichung

$$\partial_t^2 u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = 0,$$

wobei  $t$  die Zeit und  $x \in [0, L]$  den Ort auf der Saite der Länge  $L$  beschreibt. Die Lösung  $u(t, x)$  ist dann die Auslenkung an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$ . Eine natürliche Bedingung ist die, dass die Saite am Rand fest eingespannt ist:

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0.$$

Wir geben noch die Auslenkung und die Geschwindigkeit zur Zeit  $t = 0$  vor:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x).$$

Macht man den Ansatz  $u(t, x) = a(t)v(x)$ , so erhält man aus der Dgl.  $a''(t)v(x) - a(t)v''(x) = 0$  und damit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{a''(t)}{a(t)} =: -\lambda$$

mit einer Konstanten  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Für die Funktion  $v$ , welche jetzt nur noch von  $x$  abhängt, erhalten wir eine gewöhnliche Dgl.:

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v(L) = 0.$$

Im Vergleich zu bisher behandelten Dgl. unterscheidet sich diese in zwei Punkten:

- Es ist nicht der Wert und die erste Ableitung an einer Stelle vorgegeben (AWP), sondern der Wert der Lösung an zwei verschiedenen Stellen (Randwertproblem, RWP).
- In der Gleichung taucht ein unbekannter Parameter  $\lambda$  auf, es handelt sich um eine sogenannte Eigenwertaufgabe.

Um derartige Probleme geht es in diesem Abschnitt. Die erste Frage ist wieder die nach der eindeutigen Lösbarkeit eines Randwertproblems. Jetzt stellt sich allerdings heraus, dass das RWP nicht in jedem Fall eindeutig lösbar ist. Es gibt die Fälle, in denen keine Lösung existiert, es kann aber auch unendlich viele Lösungen geben. Wenn aber eindeutige Lösbarkeit gegeben ist, kann man die Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktion berechnen.

Wir werden später sehen, dass das zugehörige Eigenwertproblem nur für bestimmte Werte von  $\lambda$  eine nichttriviale Lösung besitzt. Tatsächlich kann man von diesen Eigenwerten und zugehörigen Eigenfunktionen noch mehr sagen, ja sogar beliebige Funktionen nach diesen Eigenfunktionen in Reihen entwickeln, ähnlich der Theorie der Fourier-Reihen.

## a) Randwertaufgaben für lineare Dgl.-Systeme

**6.2 Beispiel.** Wir betrachten noch einmal das Beispiel aus dem vorherigen Abschnitt: Gesucht waren Lösungen des Randwertproblems

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = y(L) = 0.$$

Für alle Werte von  $\lambda$  ist die triviale Lösung  $y = 0$  eine Lösung, die Frage ist also, ob es Werte  $\lambda$  gibt, für welche eine weitere Lösung existiert. Wir beschränken uns hier auf den Fall  $\lambda \in \mathbb{R}$  (wie wir später sehen werden, gibt es für nichtreelle  $\lambda$  keine weitere Lösung). Die Werte  $\lambda$ , für welche eine nichttriviale Lösung existiert, heißen Eigenwerte der Differentialgleichung.

(a) Falls  $\lambda = 0$  ist, lautet die Differentialgleichung  $y''(x) = 0$ . Jede Lösung dieser Gleichung hat die Form  $y(x) = c_1 x + c_2$ . Aus der Bedingung  $y(0) = 0$  erhalten wir  $c_2 = 0$ , aus der Bedingung  $y(L) = 0$  dann auch  $c_1 = 0$ . Also ist 0 kein Eigenwert.

(b) Falls  $\lambda < 0$ , so hat jede Lösung der Gleichung  $y'' + \lambda y = 0$  die Form  $y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ . Aus den Randbedingungen folgt dann

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ e^{\sqrt{-\lambda}L} c_1 + e^{-\sqrt{-\lambda}L} c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in den Konstanten  $c_1, c_2$ . Eine nichttriviale Lösung existiert genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}L} & e^{-\sqrt{-\lambda}L} \end{pmatrix} = e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn  $e^{2\sqrt{-\lambda}L} = 1$ . Die letzte Bedingung kann für  $\lambda < 0$  nie erfüllt sein, da  $e^z > 1$  für alle  $z > 0$  gilt. Also existiert kein negativer Eigenwert.

(c) Sei nun  $\lambda > 0$ . Jetzt ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben durch  $y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ . Aus  $y(0) = 0$  folgt  $c_1 = 0$ , und aus  $y(L) = 0$  folgt  $c_2 \sin \sqrt{\lambda}L = 0$ . Die letzte Gleichung ist erfüllt, falls  $\sqrt{\lambda}L = k\pi$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , d.h. falls  $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$ . Die Eigenwerte des Randwertproblems sind also die positiven Zahlen  $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$  mit  $k \in \mathbb{N}$ . Die nichttrivialen Lösungen (Eigenfunktionen) sind gegeben durch  $y(x) = c_2 \sin \frac{k\pi x}{L}$ .

Das obige Beispiel ist ein skalares Randwertproblem zweiter Ordnung. Ähnlich wie im Abschnitt über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, untersuchen wir zunächst Systeme erster Ordnung und wenden die Ergebnisse dann auf Gleichungen höherer Ordnung an.

Betrachte das Randwertproblem

$$y'(t) = F(t)y(t) + g(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (6-1)$$

$$Ay(a) + By(b) = c. \quad (6-2)$$

Hier seien  $a < b$ ,  $F \in C([a, b], \mathbb{C}^{n \times n})$ ,  $g \in C([a, b]; \mathbb{C}^n)$ ,  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $c \in \mathbb{C}^n$ . Im folgenden sei  $Y \in C^1([a, b]; \mathbb{C}^{n \times n})$  eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems, d.h.

$$Y'(t) = F(t)Y(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann erhält man durch Variation der Konstanten eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems durch

$$y_0(t) := Y(t) \left( \int_a^t Y(s)^{-1} g(s) ds \right).$$

Die allgemeine Lösung hat die Form

$$y(t) = y_0(t) + Y(t)d$$

mit  $d \in \mathbb{C}^n$ .

**6.3 Satz.** *Das Randwertproblem (6-1)–(6-2) ist genau dann für beliebiges  $g$  und  $c$  eindeutig lösbar, wenn die charakteristische Matrix*

$$C_Y := AY(a) + BY(b)$$

*invertierbar ist. Dies ist äquivalent dazu, dass das zugehörige homogene Randwertproblem*

$$y'(t) = F(t)y(t), \quad Ay(a) + By(b) = 0$$

*nur die triviale Lösung  $y = 0$  besitzt.*

*Beweis.* Wir setzen die allgemeine Lösung in die Randbedingung ein und erhalten wegen  $y_0(a) = 0$  die Bedingung

$$(AY(a) + BY(b))d + By_0(b) = c.$$

Dies ist genau dann eindeutig nach  $d$  auflösbar, falls  $\det C_Y \neq 0$ . □

**6.4 Bemerkung.** Seien  $Y$  und  $Z$  zwei verschiedene Fundamentalmatrizen der Dgl. (6-1). Da das zu (6-1) gehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist, gilt  $Z(t) = Y(t)S$  mit der invertierbaren Matrix  $S := Y(a)^{-1}Z(a)$ . Für die charakteristischen Matrizen erhalten wir

$$C_Z = AZ(a) + BZ(b) = C_Y S.$$

Also ist  $C_Z$  genau dann invertierbar, falls  $C_Y$  dies ist.

Der folgende Satz liefert eine Darstellung der Lösung des Randwertproblems mit homogenen Randbedingungen

$$y'(t) = F(t)y(t) + g(t), \quad Ay(a) + By(b) = 0. \quad (6-3)$$

**6.5 Satz.** Sei  $C_Y$  invertierbar. Dann existiert eine matrixwertige Abbildung  $G: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  (die Greensche Matrix) mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die Einschränkung von  $G$  auf die Bereiche  $\{(t, s) : a \leq t < s \leq b\}$  und  $\{(t, s) : a \leq s \leq t \leq b\}$  ist jeweils stetig.

(ii)  $G(t+0, t) - G(t-0, t) = I_n$  für  $a < t < b$ .

(iii) Für jedes  $g \in C([a, b]; \mathbb{C}^k)$  ist durch

$$y(t) := \int_a^b G(t, s)g(s)ds$$

die Lösung des Randwertproblems (6-3) gegeben.

*Beweis.* Die eindeutige Lösung des Randwertproblems ergibt sich mit obigen Bezeichnungen als  $y(t) = y_0(t) + Y(t)d$  mit  $d := -C_Y^{-1}By_0(b)$ . Wir setzen die Darstellung von  $y_0$  ein und erhalten

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^t Y(t)Y(s)^{-1}g(s)ds - Y(t)C_Y^{-1}B \int_a^b Y(b)Y(s)^{-1}g(s)ds \\ &= \int_a^b G(t, s)g(s)ds \end{aligned}$$

mit

$$G(t, s) := \begin{cases} Y(t)[I_n - C_Y^{-1}BY(b)]Y(s)^{-1}, & a \leq s \leq t \leq b, \\ -Y(t)C_Y^{-1}BY(b)Y(s)^{-1}, & a \leq t < s \leq b. \end{cases}$$

Die Gleichung (ii) folgt sofort durch Einsetzen.  $\square$

**6.6 Bemerkung.** Aus der Definition von  $C_Y$  erhalten wir

$$I_n - C_Y^{-1}BY(b) = C_Y^{-1}AY(a)$$

und damit eine symmetrische Darstellung der Greenschen Matrix:

$$G(t, s) = \begin{cases} Y(t)C_Y^{-1}AY(a)Y(s)^{-1}, & a \leq s \leq t \leq b, \\ -Y(t)C_Y^{-1}BY(b)Y(s)^{-1}, & a \leq t < s \leq b. \end{cases}$$

Da sich die Lösung des Randwertproblems durch Integration über  $G(t, \cdot)$  ergibt, spielen die Werte von  $G$  auf der Diagonalen  $\Delta := \{(t, t) : t \in [a, b]\}$  keine Rolle.

**6.7 Lemma.** Die Greensche Matrix ist durch die folgenden vier Eigenschaften eindeutig bestimmt:

- (i)  $G$  ist auf  $[a, b]^2 \setminus \Delta$  stetig.
- (ii) Es gilt  $G(t+0, t) - G(t-0, t) = I_n$  ( $a < t < b$ ).
- (iii) Für jedes feste  $s \in [a, b]$  löst  $G(\cdot, s)$  die homogene Matrix-Dgl.  $\partial_t G(t, s) = F(t)G(t, s)$  ( $t \in [a, b] \setminus \{s\}$ ).
- (iv) Für jedes feste  $s \in (a, b)$  erfüllt  $G(\cdot, s)$  die homogenen Randbedingungen  $AG(a, s) + BG(b, s) = 0$ .

*Beweis.* Dass die Greensche Matrix die Eigenschaften (i) und (ii) besitzt, ist klar nach Satz 6.5. Nach Bemerkung 6.6 ist in jedem der beiden Dreiecke  $\{(t, s) : t < s\}$  und  $\{(t, s) : t > s\}$  die Greensche Matrix  $G(t, s)$  für festes  $s$  von der Form  $Y(t)S$  mit einer Matrix  $S$  und löst daher die Matrix-Dgl. in (iii).

Für festes  $s$  ist

$$\begin{aligned} AG(a, s) + BG(b, s) &= A[-Y(a)C_Y^{-1}BY(b)Y(s)^{-1}] + B[Y(b)C_Y^{-1}AY(a)Y(s)^{-1}] \\ &= [-AY(a)C_Y^{-1}BY(b) + BY(b)C_Y^{-1}AY(a)]Y(s)^{-1} \\ &= [-AY(a)C_Y^{-1}(C_Y - AY(a)) + (C_Y - AY(a))C_Y^{-1}AY(a)]Y(s)^{-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei  $BY(b) = C_Y - AY(a)$  verwendet wurde. Also gilt (iv).

Sei nun  $\tilde{G}$  eine weitere Abbildung mit den Eigenschaften (i)-(iv). Dann ist  $H := G - \tilde{G}$  wegen (i) stetig ergänzbar auf  $[a, b]^2$ , und  $H$  erfüllt für festes  $s$  die Dgl.  $\partial_t H(t, s) = F(t)H(t, s)$  in  $[a, b] \setminus \{s\}$  und damit, da  $H$  stetig ist, im ganzen Intervall  $[a, b]$ . Nach (iv) erfüllt  $H(\cdot, s)$  die homogenen Randbedingungen. Somit ist  $H(\cdot, s)$  eine Lösung des homogenen Randwertproblems und damit (da die Lösung eindeutig ist) gleich Null.  $\square$

## b) Randwertprobleme für lineare Dgl. höherer Ordnung

Nun betrachten wir lineare Dgl.  $k$ -ter Ordnung:

$$f_0(t)x^{(n)}(t) + f_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + f_n(t)x(t) = \gamma(t), \quad (6-4)$$

wobei wieder  $a < b$  und  $f_0, \dots, f_k, \gamma \in C([a, b]; \mathbb{C})$  mit  $f_0(t) \neq 0$  ( $t \in [a, b]$ ) sei. Diesmal haben wir  $n$  lineare Randbedingungen der Form

$$R_i x := \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x^{(j-1)}(a) + \beta_{ij} x^{(j-1)}(b) = \gamma_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6-5)$$

Hier sind  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i \in \mathbb{C}$  für  $i, j = 1, \dots, n$ . Zur einfacheren Notation definieren wir die Randoperatoren  $R_i: C^n([a, b]; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  für  $i = 1, \dots, n$  durch

$$R_i x := \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x^{(j-1)}(a) + \beta_{ij} x^{(j-1)}(b).$$

Damit lässt sich die Randbedingung (6-5) schreiben als  $R_i x = \gamma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Man kann (6-4) normieren durch die Wahl von

$$\tilde{f}_j := \frac{f_j}{f_0} \quad (j = 0, \dots, n), \quad \tilde{\gamma} := \frac{\gamma}{f_0}.$$

Wie üblich setzen wir

$$y(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}$$

und entsprechend

$$F(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\tilde{f}_n(t) & -\tilde{f}_{n-1}(t) & \dots & \dots & -\tilde{f}_1(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{\gamma}(t) \end{pmatrix}.$$

Mit  $A := (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ,  $B := (\beta_{ij})_{i,j}$ ,  $c := (\gamma_i)_{i=1,\dots,n}$  ist das Randwertproblem (6-4)–(6-5) äquivalent zum Randwertproblem

$$y'(t) = F(t)y(t) + g(t), \quad Ay(a) + By(b) = c.$$

Im folgenden Satz ist wieder  $\Delta := \{(t, t) : t \in [a, b]\}$ .

**6.8 Satz.** *Das homogene Randwertproblem (6-4)–(6-5) mit  $\gamma = 0$  und  $\gamma_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) besitze nur die triviale Lösung  $y = 0$ . Dann existiert eine Funktion  $G: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , welche in  $[a, b]^2 \setminus \Delta$  stetig ist und für welche durch*

$$x(t) := \int_a^b G(t, s) \gamma(s) ds \quad (t \in [a, b])$$

die Lösung der Dgl. (6-4) mit homogenen Randbedingungen  $R_i x = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gegeben ist. Die Funktion  $G$  heißt Greensche Funktion des Randwertproblems.

*Beweis.* Der Beweis verwendet das äquivalente System erster Ordnung. Man sieht direkt, dass  $G(t, s)$  als die rechte obere Ecke der zugehörigen Greenschen Matrix gewählt werden kann.  $\square$

**6.9 Lemma.** Die Greensche Funktion  $G: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  zum Randwertproblem (6-4)–(6-5) ist durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt:

(i)  $G$  ist stetig, und für jedes feste  $s \in [a, b]$  ist  $G(\cdot, s) \in C^{n-2}([a, b]; \mathbb{C})$ .

(ii) Für jedes feste  $s \in [a, b]$  ist  $G(\cdot, s)$  in  $[a, b] \setminus \{s\}$   $n$ -mal stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} G(t+0, t) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} G(t-0, t) = \frac{1}{f_0(t)} \quad (t \in (a, b)).$$

(iii) Für jedes feste  $s \in [a, b]$  löst  $G(\cdot, s)$  die homogene Dgl. (6-4) in  $[a, b] \setminus \{s\}$ .

(iv) Für jedes feste  $s \in [a, b]$  erfüllt  $G(\cdot, s)$  die homogenen Randbedingungen (6-5).

*Beweis.* Auch diese Aussage folgt aus der entsprechenden Aussage für Systeme erster Ordnung.  $\square$

Wir betrachten nun Randwertprobleme zweiter Ordnung, welche wir in folgender Form schreiben:

$$(Lx)(t) := -(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = r(t), \quad (6-6)$$

$$R_1x := \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) = \gamma_1,$$

$$R_2x := \beta_{21}x(b) + \beta_{22}x'(b) = \gamma_2. \quad (6-7)$$

Dabei sind  $p \in C^1([a, b]; \mathbb{C})$  mit  $p(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ ,  $q, r \in C([a, b]; \mathbb{C})$  und  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i \in \mathbb{C}$  mit  $(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \neq 0$  und  $(\beta_{21}, \beta_{22}) \neq 0$ . Ein Randwertproblem der Form (6-6)–(6-7) heißt ein Sturm-Liouville-Randwertproblem.

**6.10 Satz.** Das zu (6-6)–(6-7) gehörige homogene Randwertproblem besitze nur die triviale Lösung. Dann lässt sich die Greensche Funktion des Randwertproblems in der Form

$$G(t, s) = \begin{cases} -\frac{1}{p(a)W(a)}\varphi(t)\psi(s), & a \leq t \leq s \leq b, \\ -\frac{1}{p(a)W(a)}\varphi(s)\psi(t), & a \leq s \leq t \leq b \end{cases}$$

darstellen. Dabei sind  $\varphi$  und  $\psi$  Lösungen von  $Lx = 0$  mit  $R_1\varphi = 0$ ,  $R_2\varphi \neq 0$  und  $R_2\psi = 0$ ,  $R_1\psi \neq 0$  und

$$W(t) := W(\varphi, \psi)(t) := \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)$$

die Wronski-Determinante zu  $\{\varphi, \psi\}$ .

*Beweis.* Für einen Beweis dieses Satzes beachte man, dass die Existenz von zwei linear unabhängigen Lösungen  $\varphi$  und  $\psi$  aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit des homogenen Problems gegeben ist. Nun können die Eigenschaften (i)–(iv) aus Lemma 6.9 nachgerechnet werden.

Die Stetigkeit (i) ist klar. Für (ii) schreiben wir

$$\begin{aligned}\partial_t G(t+0, t) - \partial_t G(t-0, t) &= -\frac{1}{p(a)W(a)}(\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)) \\ &= -\frac{1}{p(a)W(a)}W(t) = -\frac{1}{p(t)}.\end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass  $W(t)p(t) = W(a)p(a)$  gilt, was aus der Formel von Liouville folgt.

Sei  $s \in [a, b]$  fest. Für  $t < s$  ist

$$[LG(\cdot, s)](t) = -\frac{\psi(s)}{p(a)W(a)}(L\varphi)(t) = 0,$$

analog  $LG(\cdot, s) = 0$  für  $t > s$ . Dies zeigt (iii). Für die Randterme gilt

$$R_1 G(\cdot, s) = -\frac{1}{p(a)W(a)}\psi(s)R_1\varphi = 0$$

und ebenso  $R_2 G(\cdot, s) = 0$ . Somit gilt (iv). Nach Lemma 6.9 ist  $G$  also die Greensche Funktion zu (6-6)–(6-7).  $\square$

**6.11 Bemerkung.** a) In der Situation von Satz 6.10 gilt  $G(t, s) = G(s, t)$  (Symmetrie der Greenschen Funktion).

b) Nach Bemerkung 6.4 ist das Randwertproblem (6-6)–(6-7) genau dann eindeutig lösbar, falls für ein Fundamentalsystem  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  von (6-6) gilt

$$\det \left( (R_i \varphi_j)_{i,j=1,2} \right) = \det \begin{pmatrix} R_1 \varphi_1 & R_1 \varphi_2 \\ R_2 \varphi_1 & R_2 \varphi_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

In diesem Fall gilt dies für alle Fundamentalsysteme.

**6.12 Beispiel.** Betrachte für einen reellen Parameter  $k \geq 0$

$$(Lx)(t) := -x''(t) - k^2 x(t) = \gamma(t) \quad (t \in [0, 1])$$

mit den Randbedingungen

$$R_1 x := x(0) = 0, \quad R_2 x := x(1) = 0.$$

Hier ist  $p = 1$  und  $q = -k^2$ . Ein Fundamentalsystem von  $Lx = 0$  ist gegeben durch  $\varphi_1 = \sin kt$ ,  $\varphi_2 = \cos kt$ . Dafür gilt

$$\det \begin{pmatrix} R_1\varphi_1 & R_1\varphi_2 \\ R_2\varphi_1 & R_2\varphi_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix} = -\sin k \neq 0,$$

falls  $k \notin \pi\mathbb{Z}$ .

Sie also  $k \notin \pi\mathbb{Z}$ , d.h. das Randwertproblem eindeutig lösbar. Um die Greensche Matrix zu berechnen, bestimmen wir  $\varphi$  und  $\psi$  aus Satz 6.10. Eine Lösung von  $Lx = 0$  mit der Randbedingung  $R_1x = 0$  ist  $\varphi(t) := \sin kt$ . Eine Lösung von  $Lx = 0$  mit der Randbedingung  $R_2x = 0$  ist  $\psi(t) := \sin k(1-t)$ . Die Wronski-Determinante an der Stelle  $a = 0$  ist

$$W(0) = \varphi(0)\psi'(0) - \varphi'(0)\psi(0) = 0 \cdot (-k \cos k) - k \sin k = -k \sin k \neq 0.$$

Nach Satz 6.10 ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$G(t, s) = \frac{1}{k \sin k} \sin(kt) \sin(k(1-s)) \quad (0 \leq t \leq s \leq 1)$$

und durch  $G(t, s) = G(s, t)$  für  $0 \leq s \leq t \leq 1$ .

Die Lösung des Randwertproblems  $Lx = \gamma$ ,  $R_1x = R_2x = 0$  für  $\gamma \in C([0, 1]; \mathbb{C})$  ist also gegeben durch

$$(Lx)(t) = \int_0^t G(t, s)\gamma(s)ds$$

mit obiger Greenscher Funktion  $G$ .

### c) Selbstadjungierte Eigenwertaufgaben

Wir betrachten wieder ein Sturm-Liouville-Randwertproblem, diesmal aber mit einem (unbekannten) Eigenwertparameter  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$(Lx)(t) := -\frac{1}{r(t)} \left[ (p(t)x'(t))' - q(t)x(t) \right] = \lambda x(t), \quad (6-8)$$

$$R_1x := \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) = \gamma_1,$$

$$R_2x := \beta_{21}x(b) + \beta_{22}x'(b) = \gamma_2. \quad (6-9)$$

Dabei sind jetzt die Koeffizienten reellwertig, d.h.  $p \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$  mit  $p(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ ,  $q, r \in C([a, b]; \mathbb{R})$  und  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i \in \mathbb{R}$  mit  $(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \neq 0$  und  $(\beta_{21}, \beta_{22}) \neq 0$ . Zusätzlich gelte noch

$$r(t) > 0 \quad (t \in [a, b]).$$

**6.13 Definition.** a) Der zum Eigenwertproblem (6-8)–(6-9) gehörige lineare Operator  $A$  ist definiert als Abbildung  $A: D(A) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{C})$  mit Definitionsbereich

$$D(A) := \{x \in C^2([a, b]; \mathbb{C}) : R_1x = R_2x = 0\} \subset C([a, b]; \mathbb{C})$$

durch

$$Ax := Lx \quad (x \in D(A)).$$

b) Ein Eigenwert von  $A$  ist eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für welche ein  $u \in D(A) \setminus \{0\}$  existiert mit  $Au = \lambda u$ . In diesem Fall heißt  $u$  eine Eigenfunktion von  $A$ .

c) Das zum Eigenwertproblem (6-8)–(6-9) zugehörige Skalarprodukt ist definiert als

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b r(t)u(t)\overline{v(t)}dt \quad (u, v \in C([a, b]; \mathbb{C})).$$

Die Norm ist definiert durch  $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ .

Im folgenden bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $\|\cdot\|$  stets das oben definierte Skalarprodukt bzw. die oben definierte Norm. Dass es sich tatsächlich um ein Skalarprodukt und damit um eine Norm handelt, sieht man sofort wie in der Analysis I.

**6.14 Bemerkung.** a) Das Randwertproblem  $Au = \lambda u$  hat immer die triviale Lösung  $u = 0$ . Die Eigenwerte sind also genau diejenigen  $\lambda$ , in denen keine eindeutige Lösbarkeit gegeben ist. Sei  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  ein Fundamentalsystem der Dgl.  $Lu - \lambda u = 0$ ,  $\varphi_j = \varphi_j(t, \lambda)$ . Dann existiert genau dann eine Eigenfunktion  $x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ , falls

$$\sum_{j=1}^2 c_j R_i[\varphi_j(\cdot, \lambda)] = 0 \quad (i = 1, 2)$$

eine nichttriviale Lösung besitzt. Dies ist äquivalent zur Bedingung

$$\Delta(\lambda) := \det \begin{pmatrix} R_1[\varphi_1(\cdot, \lambda)] & R_1[\varphi_2(\cdot, \lambda)] \\ R_2[\varphi_1(\cdot, \lambda)] & R_2[\varphi_2(\cdot, \lambda)] \end{pmatrix} = 0.$$

b) Nach Satz 6.10 ist die Greensche Funktion reellwertig.

**6.15 Satz.** a) Der Operator  $A$  ist symmetrisch, d.h. es gilt

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \quad (u, v \in D(A)).$$

b) Alle Eigenwerte von  $A$  sind reell. Die zugehörigen Eigenfunktionen können reell gewählt werden.

c) Die Eigenfunktionen  $u_1, u_2$  zu verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  sind orthogonal, d.h. es gilt  $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ .

*Beweis.* a) Für  $u, v \in D(A)$  gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\langle Au, v \rangle &= \int_a^b [(-p(t)u'(t))' + q(t)u(t)]\overline{v(t)}dt \\ &= -p(t)u'(t)\overline{v(t)}\Big|_{t=a}^b + \int_a^b \left( [p(t)u'(t)]\overline{v'(t)} + q(t)u(t)\overline{v(t)} \right) dt\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung für  $\langle u, Av \rangle$  zeigt

$$\langle Au, v \rangle - \langle u, Av \rangle = p(t) \left[ u(t)\overline{v'(t)} - u'(t)\overline{v(t)} \right] \Big|_{t=a}^b.$$

Da sowohl  $u$  als auch  $v$  die homogenen Randbedingungen  $R_i x = 0$  erfüllen, folgt

$$\left[ u(t)\overline{v'(t)} - u'(t)\overline{v(t)} \right] \Big|_{t=a}^b = 0. \quad (6-10)$$

Zum Beispiel gelten im Fall  $\alpha_{11} \neq 0$  und  $\beta_{21} \neq 0$  mit geeigneten Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  die Gleichheiten

$$\begin{aligned}u(a) &= c_1 u'(a), \\ v(a) &= c_1 v'(a), \\ u(b) &= c_2 u'(b), \\ v(b) &= c_2 v'(b).\end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man (6-10).

b) Das folgt wie in der Linearen Algebra: Sei  $u \in D(A) \setminus \{0\}$  und  $Au = \lambda u$ . Dann gilt

$$\lambda \|u\|^2 = \langle \lambda u, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle u, Au \rangle = \overline{\lambda} \|u\|^2$$

und damit  $\lambda = \overline{\lambda}$ .

Da alle Koeffizienten der Dgl.  $Lu - \lambda u = 0$  und die Randbedingungen reell sind, ist mit einer Eigenfunktion  $u$  auch  $\operatorname{Re} u$  und  $\operatorname{Im} u$  eine Lösung. Daher existieren stets reellwertige Eigenfunktionen.

c) Seien  $u_1, u_2 \in D(A) \setminus \{0\}$  mit  $Au_i = \lambda_i u_i$ , wobei  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Dann gilt

$$\lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle = \langle Au_1, u_2 \rangle = \langle u_1, Au_2 \rangle = \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Dabei wurde  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  verwendet. Wegen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  folgt  $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ . □

**6.16 Satz.** Falls 0 kein Eigenwert von  $A$  ist, so besitzt der Operator  $A$  unendlich viele Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ . Falls die Eigenwerte so sortiert werden, dass  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$  gilt, so folgt

$$|\lambda_n| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die Folge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt keinen (endlichen) Häufungspunkt.

**6.17 Definition (Verallgemeinerte Fourier-Reihe).** Sei 0 kein Eigenwert von  $A$ , und seien  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen von  $A$  mit  $\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm}$ . Für eine Funktion  $f \in D(A)$  heißt

$$f_n := \langle f, u_n \rangle$$

der  $n$ -te verallgemeinerte Fourier-Koeffizient von  $f$ , und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n \rangle u_n$$

die verallgemeinerte Fourier-Reihe von  $f$ .

**6.18 Satz (Entwicklung nach Eigenfunktionen).** In der Situation von Definition 6.17 gilt

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n \rangle u_n(t),$$

wobei die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert.

**6.19 Beispiel.** Betrachte das Eigenwertproblem in  $C([0, 1]; \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} Lu &:= -u'' = \lambda u, \\ R_1 u &:= u(0) = 0, \\ R_2 u &:= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Für  $\lambda = 0$  ist  $u_1(t) := 1$ ,  $u_2(t) := t$  ein Fundamentalsystem von  $Lu = 0$ . Es gilt

$$\Delta(\lambda) = \det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Die Voraussetzung, dass 0 kein Eigenwert von  $A$  ist, ist also erfüllt.

Für  $\lambda \neq 0$  ist ein Fundamentalsystem durch  $u_1(t) := \exp(\sqrt{-\lambda}t)$ ,  $u_2(t) := \exp(-\sqrt{-\lambda}t)$  gegeben. Jetzt ist

$$\Delta(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \exp(\sqrt{-\lambda}) & \exp(-\sqrt{-\lambda}) \end{pmatrix} = \exp(-\sqrt{-\lambda}) - \exp(\sqrt{-\lambda}).$$

Dies ist genau dann 0, wenn  $\exp(-2\sqrt{-\lambda}) = 1$ , also für  $-2\sqrt{-\lambda} = 2k\pi i$  mit  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Die Eigenwerte von  $A$  sind also gegeben durch

$$\lambda = \lambda_k := k^2 \pi^2 (k \in \mathbb{N}).$$

Die zugehörigen normierten Eigenfunktionen sind

$$u_k(t) := d_k \sin(k\pi t) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

wobei die Konstante  $d_k$  so zu wählen ist, dass  $\|u_k\| = 1$ .

Aus Satz 6.18 erhalten wir also: Sei  $f \in D(A)$ , d.h.  $f \in C^1([0, 1]; \mathbb{C})$  mit  $f(0) = f(1) = 0$ . Dann lässt sich  $f$  in eine Reihe von Eigenfunktionen entwickeln:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k\pi t),$$

wobei

$$f_k := \langle f, u_k \rangle = \text{const} \int_0^1 f(t) \sin(k\pi t) dt.$$

Dies ist ein Spezialfall der komplexen Fourier-Reihen aus Analysis I: Da  $f(0) = 0$ , können wir  $f$  als ungerade Funktion auf das Intervall  $[-1, 1]$  fortsetzen. Die komplexe Fourier-Reihe von  $f$  enthält dann nur ungerade Terme, also Sinus-Terme.

Das letzte Beispiel ist nur eines von vielen. Die Entwicklung nach Satz 6.18 ist viel allgemeiner, z.B. lassen sich auch Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen (etwa Hermite-Polynome, Legendre-Polynome, siehe Abschnitt 2 c)) damit beweisen.



## Literatur

- [Am] Amann, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. De Gruyter, Berlin 1995.
- [Ar] Arnol'd, V. I.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Aufl., Dt. Verl. der Wissenschaften, Berlin 1991.
- [Br] Braun, M.: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen. 2. Aufl., Springer Berlin 1991.
- [FH1] Forst, W., Hoffmann, D.: Gewöhnliche Differentialgleichungen - Theorie und Praxis. Springer Berlin 2005.
- [Fo] Forster, O.: Analysis 2. Vieweg-Verlag 1979.
- [Heu] Heuser, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3. Aufl., Teubner Stuttgart 1995.
- [Jae] Jänich, K.: Analysis für Physiker und Ingenieure. 2. Aufl., Springer Berlin 1990.
- [Wa] Walter W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 7. Aufl., Springer Berlin 2000.