# Skript zur Vorlesung

# Interpolationsräume

**Sommersemester 2014**

**Robert Denk**

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 26. 8. 2014

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Motivation und Grundbegriffe

**1.1 Worum geht's?** In diesem kurzen einleitenden Abschnitt geht es um die Idee der Interpolation von Banachräumen und einige wesentliche Begriffe. Als Motivation geben wir den Satz von Riesz-Thorin ohne Beweis an.

**1.2 Bemerkung.** Liegt der Raum $L^3(\mathbb{R}^n)$ „zwischen" den Räumen $L^2(\mathbb{R}^n)$ und $L^4(\mathbb{R}^n)$? Und falls ja, in welchem Sinne kann man das formalisieren? Einer der Hauptgedanken der Interpolationstheorie von Banachräumen liegt darin, dass Zwischenräume systematisch definiert werden können und Eigenschaften von Operatoren in diesen Räumen ohne zusätzliche Rechnung bewiesen werden können. So ist es z.B. möglich, nichtganzzahlige Sobolevräume wie $H^{3/2}(\mathbb{R}^n)$ oder $W_p^{3/2}(\mathbb{R}^n)$ zu definieren. Es gibt im Bereich partieller Differentialgleichungen zwei zentrale Methoden, Zwischenräume zu definieren: die reelle Interpolation und die komplexe Interpolation, welche beide später behandelt werden. Im Zusammenhang mit $L^p$-Sobolevräumen erhält man, falls $p \neq 2$, unterschiedliche Räume vom Sobolevtyp, welche häufig als Besovräume bzw. Bessel-Potentialräume bezeichnet werden.

Der folgende Satz wird später bewiesen werden und ist ein gutes und zugleich auch wichtiges Beispiel für Interpolationstheorie. Wir geben hier nur eine einfache Version an. Hier und im Folgenden wird stets $1/\infty = 0$ gesetzt. Wir verwenden die Standard-Bezeichnungen $L(X, Y)$ für die linearen stetigen Operatoren von $X$ nach $Y$, $R(T)$ bzw. $\ker T$ für den Wertebereich bzw. Kern eines Operators $T \in L(X, Y)$.

**1.3 Satz** (Riesz-Thorin). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, und seien $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$. Ferner sei $T\colon L^{p_0}(\Omega) + L^{p_1}(\Omega) \to L^{q_0}(\Omega) + L^{q_1}(\Omega)$ ein linearer Operator mit*

$$T \in L(L^{p_0}(\Omega), L^{q_0}(\Omega)) \cap L(L^{p_1}(\Omega), L^{q_1}(\Omega)).$$

*Definiert man für $\theta \in (0, 1)$ die Parameter $p_\theta$ und $q_\theta$ durch*

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \; \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

*so gilt*

$$T \in L(L^{p_\theta}(\Omega), L^{q_\theta}(\Omega))$$

*sowie*

$$\|T\|_{L(L^{p_\theta}(\Omega), L^{q_\theta}(\Omega))} \leq \|T\|^{1-\theta}_{L(L^{p_0}(\Omega), L^{q_0}(\Omega))} \|T\|^{\theta}_{L(L^{p_1}(\Omega), L^{q_1}(\Omega))}.$$

Der Beweis dieses Satzes liegt in der Tatsache, dass in obiger Situation $L^{p_\theta}(\Omega)$ der komplexe Interpolationsraum zwischen $L^{p_0}(\Omega)$ und $L^{p_1}(\Omega)$ ist. Die Stetigkeitsaussage des Satzes ist dann genau eine definierende Eigenschaft eines Interpolationsfunktors, während die Abschätzung der Normen aus der sogenannten Exaktheit des Funktors folgt.

© Robert Denk 26. 8. 2014

Der Satz von Riesz-Thorin impliziert folgende Eigenschaft der Fourier-Transformation $\mathscr{F}$, welche für Schwartz-Funktionen $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\mathscr{F} f(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

definiert ist und für temperierte Distributionen $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch Dualität.

**1.4 Satz** (Hausdorff-Young). *Sei $p \in (1, 2]$ und $p'$ der zu $p$ konjugierte Exponent, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (also $p' = \frac{p}{p-1}$). Dann gilt*

$$\mathscr{F} \in L(L^p(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n)) \;\; \textit{und} \;\; \|F\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n))} \le (2\pi)^{-n(1/p-1/2)}.$$

*Beweis.* Die Fourier-Transformation ist stetig von $L^1(\mathbb{R}^n)$ nach $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Norm nicht größer als $(2\pi)^{-n/2}$ und eine Isometrie in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Daher können wir im Satz von Riesz-Thorin $p_0 = q_0 = 2$ und $p_1 = 2$, $q_1 = \infty$ wählen. Für $\theta \in (0, 1)$ erhält man $p_\theta = \frac{2}{1+\theta}$ und $q_\theta = \frac{2}{1-\theta} = p'_\theta$. Wenn $\theta$ die Menge $(0, 1)$ durchläuft, erhält man die Werte $p_\theta \in (1, 2)$. Die Normabschätzung folgt ebenfalls direkt aus dem Satz von Riesz-Thorin. □

Nach diesen ersten Beispielen definieren wir nun einige wesentliche Begriffe. Im Folgenden seien $X_0, X_1, Y_0$ und $Y_1$ stets vier reelle oder vier komplexe Banachräume. Für zwei Banachräume $X$ und $Y$ schreiben wir $X = Y$, falls $X$ und $Y$ dieselben Elemente und äquivalente Normen besitzen, sowie $X \subset Y$, falls $X$ eine Teilmenge von $Y$ ist und die Inklusion stetig ist.

**1.5 Definition.** a) Das Paar $(X_0, X_1)$ heißt ein Interpolationspaar, falls ein hausdorffscher topologischer Vektorraum $Z$ mit $X_0 \subset Z$ und $X_1 \subset Z$ existiert. In diesem Fall werden die Räume $X_0 \cap X_1$ und $X_0 + X_1$ in kanonischer Weise mit den Normen

$$\begin{aligned} \|v\|_{X_0 \cap X_1} &:= \max\{\|v\|_{X_0}, \|v\|_{X_1}\}, \\ \|v\|_{X_0 + X_1} &:= \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0,\, x_1 \in X_1,\, x_0 + x_1 = v\} \end{aligned}$$

zu Banachräumen, für welche $X_0 \cap X_1 \subset X_i \subset X_0 + X_1$, $i = 0, 1$, gilt.

b) Seien $(X_0, X_1)$ und $(Y_0, Y_1)$ Interpolationspaare. Wir schreiben $T \in L(X_0, Y_0) \cap L(X_1, Y_1)$, falls $T\colon X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ ein linearer Operator ist mit $T|_{X_i} \in L(X_i, Y_i)$ für $i = 0, 1$.

Ein Interpolationsfunktor $\{\cdot, \cdot\}$ ist eine Abbildung $(X_0, X_1) \mapsto \{X_0, X_1\}$, welche jedem Interpolationspaar $(X_0, X_1)$ einen Banachraum $\{X_0, X_1\}$ zuordnet mit $X_0 \cap X_1 \subset \{X_0, X_1\} \subset X_0 + X_1$, und für welche folgende Eigenschaft gilt: Seien $(X_0, X_1)$ und $(Y_0, Y_1)$ Interpolationspaare, und sei $T \in L(X_0, Y_0) \cap L(X_1, Y_1)$. Dann gilt $T|_{\{X_0, X_1\}} \in L(\{X_0, X_1\}, \{Y_0, Y_1\})$. In diesem Fall heißt $\{X_0, X_1\}$ auch Interpolationsraum zwischen $X_0$ und $X_1$.

© Robert Denk 26. 8. 2014

c) Ein Interpolationsfunktor $\{\cdot,\cdot\}$ heißt exakt (vom Typ $\theta \in [0,1]$), falls für alle Interpolationspaare $(X_0, X_1)$ und $(Y_0, Y_1)$ und für jeden Operator $T \in L(X_0, Y_0) \cap L(Y_0, Y_1)$ gilt:

$$\|T\|_{L(\{X_0,X_1\},\{Y_0,Y_1\})} \le \|T\|^{1-\theta}_{L(X_0,Y_0)} \|T\|^{\theta}_{L(X_1,Y_1)}.$$

**1.6 Bemerkung.** a) Der Begriff Funktor ist hier kein Zufall, ein Interpolationsfunktor lässt sich kategoriell definieren.

b) Man kann leicht zeigen: Falls $E$ ein Interpolationsraum zwischen $X_0$ und $X_1$ ist, so gilt für alle $T \in L(X_0) \cap L(X_1)$ eine Abschätzung der Form

$$\|T\|_{L(E)} \le C \max\{\|T\|_{L(X_0)}, \|T\|_{L(X_1)}\},$$

wobei die Konstante $C$ nicht von $T$ abhängt.

(Beweis siehe [7], Lemma 0.1).

c) Falls für einen Interpolationsfunktor die Abschätzung der Form

$$\|T\|_{L(\{X_0,X_1\},\{Y_0,Y_1\})} \le C\|T\|^{1-\theta}_{L(X_0,X_1)} \|T\|^{\theta}_{L(Y_0,Y_1)}$$

gilt, folgt $C \ge 1$, wie man mit der Wahl $X_0 = X_1 = Y_0 = Y_1$ und $T = \mathrm{id}_{X_0}$ sieht. Somit wird bei der Definition eines exakten Interpolationsfunktor die optimale Konstante gewählt.

c) Die Abbildung $(X_0, X_1) \mapsto X_0$ ist ein exakter Interpolationsfunktor vom Typ 0, die Abbildung $(X_0, X_1) \mapsto X_1$ ist ein exakter Interpolationsfunktor vom Typ 1.

d) In vielen Fällen gilt $X_1 \subset X_0$. In diesem Fall ist $X_0 + X_1 = X_0$, und $(X_0, X_1)$ ist stets ein Interpolationspaar. Für jeden Interpolationsraum $E$ gilt dann $X_1 \subset E \subset X_0$.

Ebenfalls kategoriell definieren lässt sich der Begriff einer Retraktion. Wir formulieren dies in der Kategorie normierter Räume und stetiger linearer Operatoren, analoge Definitionen gelten etwa in der Kategorie lokalkonvexer topologischer Vektorräume oder in der Kategorie der Banachräume. Ein typisches Beispiel einer Retraktion ist die Einschränkung einer Funktion auf eine Teilmenge des Definitionsbereichs. Eine entsprechende Koretraktion ist dann ein Fortsetzungsoperator.

**1.7 Definition.** Seien $X$ und $Y$ normierte Räume. Dann heißt ein linearer Operator $r \in L(X, Y)$ eine Retraktion, falls ein Operator $e \in L(Y, X)$ existiert mit $re = \mathrm{id}_Y$. In diesem Fall heißt $e$ eine Koretraktion zu $r$.

**1.8 Bemerkung.** a) Offensichtlich ist jede Retraktion surjektiv.

b) Seien $r, e$ wie in Definition 1.7. Dann ist $p := er \in L(X)$ eine Projektion, d.h. es gilt $p^2 = p$, und wir erhalten eine direkte Zerlegung $X = R(p) \oplus R(1-p)$. Weiter gilt $e \in L_{\mathrm{Isom}}(Y, R(p))$ und $R(1-p) = \ker p = \ker r$.

© Robert Denk 26. 8. 2014

Denn es gilt $p^2 = (er)(er) = e(re)r = er = p$ sowie $R(1-p) = \ker p \supset \ker r$. Für $x \in \ker p$ folgt aber auch $0 = rpx = rerx = rx$. Also folgt $\ker p = \ker r$.

c) Falls in der Situation von Definition 1.7 der Raum $X$ vollständig ist, so gilt dies auch für $Y$.

Denn nach b) ist $R(p) = \ker(1-p) \subset X$ abgeschlossen und damit vollständig. Wegen $e \in L_{\text{Isom}}(Y, R(p))$ ist auch $Y$ vollständig.

**1.9 Lemma.** *Seien $(X_0, X_1)$ und $(Y_0, Y_1)$ Interpolationspaare, und sei $\{\cdot,\cdot\}$ ein Interpolationsfunktor. Weiter seien $r \in L(X_0, Y_0) \cap L(X_1, Y_1)$ und $e \in L(Y_0, X_0) \cap L(Y_1, X_1)$. Falls $r$ und $e$ Retraktion und Koretraktion sowohl bzgl. der Räume $X_0, Y_0$ als auch bzgl. der Räume $X_1, Y_1$ sind, so ist*

$$r \in L(\{X_0, X_1\}, \{Y_0, Y_1\})$$

*eine Retraktion in $\{X_0, X_1\}$ und $e \in L(\{Y_0, Y_1\}, \{X_0, X_1\})$ die zugehörige Koretraktion.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus den kategoriellen Eigenschaften von Interpolationsfunktoren bzw. Retraktionen und Koretraktionen. $\square$

© Robert Denk 26. 8. 2014

# 2. Reelle Interpolation

**2.1 Worum geht's?** Die vielleicht wichtigsten Interpolationsräume sind die reellen Interpolationsräume. Ausgehend von ganzzahligen $L^p$-Sobolevräumen, erhält man mit reeller Interpolation die Besovräume. Es gibt verschiedene Methoden, den reellen Interpolationsfunktor zu definieren. Wir werden hier nur die K-Methode und die Spurmethode behandeln. Die Äquivalenz der beiden Methoden impliziert auch einen Spursatz z.B. für Sobolevräume.

## a) Die K-Methode

Im Folgenden seien stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $(X_0, X_1)$ ein Interpolationspaar aus $\mathbb{K}$-Banachräumen. Für ein Intervall $I \subset (0,\infty)$ schreiben wir $L^p_*(I) := L^p(I; \frac{dt}{t})$. Man beachte $L^\infty_*(J) = L^\infty(J)$.

**2.2 Definition.** a) Für $x \in X_0 + X_1$ und $t > 0$ definiert man

$$K(t,x) := K(t,x,X_0,X_1) := \inf\big\{\|a\|_{X_0} + t\|b\|_{X_1} : a \in X_0,\, b \in X_1,\, a+b = x\big\}.$$

b) Für $\theta \in (0,1)$ und $p \in [1,\infty]$ definiert man den reellen Interpolationsraum $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ als die Menge aller $x \in X_0 + X_1$, für welche $t \mapsto t^{-\theta}K(t,x) \in L^p_*((0,\infty))$ gilt. Auf $(X_0,X_1)_{\theta,p}$ definiert man die Norm

$$\|x\|_{\theta,p} := \|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,p}} := \|t \mapsto t^{-\theta}K(t,x)\|_{L^p_*((0,\infty))}.$$

**2.3 Satz.** *Für alle $\theta \in (0,1)$ und $p \in [1,\infty]$ ist $(X_0,X_1)_{\theta,p}$ ein Banachraum mit $X_0 \cap X_1 \subset (X_0,X_1)_{\theta,p} \subset X_0 + X_1$.*

*Beweis.* **(i)** Wir zeigen zunächst: Es existiert eine Konstante $c = c(\theta,p)$ mit

$$t^{-\theta}K(t,x) \le c\,\|x\|_{\theta,p} \quad (t \in (0,\infty)),\ x \in (X_0,X_1)_{\theta,p}). \tag{2-1}$$

Für $p = \infty$ ist dies nach Definition von $\|\cdot\|_{\theta,p}$ trivial. Für $p < \infty$ verwendet man, dass $K(\cdot,x)$ monoton steigend ist, und erhält

$$\begin{aligned} t^{-\theta}K(t,x) &= (\theta p)^{1/p}\Big(\int_t^\infty s^{-\theta p-1}ds\Big)^{1/p}K(t,x) \\ &\le (\theta p)^{1/p}\Big(\int_t^\infty s^{-\theta p-1}K(s,x)^p ds\Big)^{1/p} \\ &\le (\theta p)^{1/p}\|x\|_{\theta,p}. \end{aligned}$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

**(ii)** Nach (i) gilt $\|x\|_{X_0+X_1} = K(1,x) \le c\|x\|_{\theta,p}$. Andererseits gilt nach Definition von $K(t,x)$ auch $K(t,x) \le \min\{1,t\}\|x\|_{X_0\cap X_1}$ und damit

$$\|x\|_{\theta,p} \le \|t \mapsto \min\{t^{-\theta}, t^{1-\theta}\}\|_{L^p_*((0,\infty))}\|x\|_{X_0\cap X_1} \le C\|x\|_{X_0\cap X_1}.$$

Insgesamt erhalten wir also $X_0 \cap X_1 \subset (X_0,X_1)_{\theta,p} \subset X_0 + X_1$.

**(iii)** Offensichtlich definiert $\|\cdot\|_{\theta,p}$ eine Norm. Zu zeigen ist noch die Vollständigkeit. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (X_0,X_1)_{\theta,p}$ eine Cauchyfolge. Nach (ii) ist dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in $X_0+X_1$. Sei $x_n \to x$ in $X_0 + X_1$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_m\|_{\theta,p} \le \varepsilon$ $(n,m \ge N)$. Da $K(t,\cdot)$ für jedes $t > 0$ eine Norm auf $X_0 + X_1$ ist, folgt mit der Dreiecksungleichung

$$t^{-\theta}K(t,x_n - x) \le t^{-\theta}K(t,x_n - x_m) + t^{-\theta}\max\{t,1\}\|x_m - x\|_{X_0+X_1}. \tag{2-2}$$

Sei $p = \infty$. Dann gilt für jedes feste $t > 0$ und für alle $m,n \ge N$

$$t^{-\theta}K(t,x_n - x) \le C\varepsilon + t^{-\theta}\max\{t,1\}\|x_m - x\|_{X_0+X_1}.$$

Für $m \to \infty$ erhält man $t^{-\theta}K(t,x_n - x) \le C\varepsilon$ für jedes $t > 0$. Also gilt $x \in (X_0,X_1)_{\theta,\infty}$ und $x_n \to x$ in $(X_0,X_1)_{\theta,\infty}$, d.h. $(X_0,X_1)_{\theta,\infty}$ ist ein Banachraum.

Sei nun $p < \infty$. Dann gilt

$$\|x_n - x\|_{\theta,p} = \lim_{\delta\to 0}\Big(\int_\delta^{1/\delta} t^{-\theta p-1}K(t,x_n-x)^p dt\Big)^{1/p}.$$

Für $m,n \ge N$ und festes $\delta \in (0,1)$ gilt nach (2-2)

$$\begin{aligned}\Big(\int_\delta^{1/\delta} t^{-\theta p-1}K(x_n-x)^p dt\Big)^{1/p} &\le \|x_n - x_m\|_{\theta,p} \\ &\quad + \|x_m - x\|_{X_0+X_1}\Big(\int_\delta^{1/\delta} t^{-\delta p-1}\max\{t^p,1\}dt\Big)^{1/p} \\ &\le \varepsilon + C(\delta,p)\|x_m - x\|_{X_0+X_1}.\end{aligned}$$

Nimmt man nun zunächst $m \to \infty$ und dann $\delta \to 0$, so erhält man $x \in (X_0,X_1)_{\theta,p}$ sowie $x_n \to x$ in $(X_0,X_1)_{\theta,p}$, d.h. $(X_0,X_1)_{\theta,p}$ ist ein Banachraum. □

**2.4 Lemma.** *Sei $(X_0,X_1)$ ein Interpolationspaar, und seien $\theta \in (0,1)$, $p,p_1,p_2 \in [1,\infty]$ mit $p_1 < p_2$.*

*a) Es gilt $(X_0,X_1)_{\theta,p} = (X_1,X_0)_{1-\theta,p}$.*

*b) Falls $X_0 = X_1 =: X$, so gilt $(X,X)_{\theta,p} = X$. Falls $X_0 \cap X_1 = \{0\}$, so gilt $(X_0,X_1)_{\theta,p} = \{0\}$.*

*c) Es gilt*

$$(X_0,X_1)_{\theta,1} \subset (X_0,X_1)_{\theta,p_1} \subset (X_0,X_1)_{\theta,p_2} \subset (X_0,X_1)_{\theta,\infty}.$$

*Beweis.* a) Dies folgt direkt aus der Identität $K(t,x,X_0,X_1) = tK(\frac{1}{t},x,X_1,X_0)$ und der Tatsache, dass die Transformation $t \mapsto \frac{1}{t}$ den Raum $L^p_*((0,\infty))$ invariant lässt.

b) Die erste Behauptung folgt aus Satz 2.3, da $X_0 \cap X_1 \subset (X_0,X_1)_{\theta,p} \subset X_0 + X_1$ gilt. Falls $X_0 \cap X_1 = \{0\}$, dann existiert zu jedem $x \in X_0 + X_1$ eine eindeutige Darstellung $x = a + b$ mit $a \in X_0$, $b \in X_1$. Damit gilt $K(t,x) = \|a\|_{X_0} + t\|b\|_{X_1}$. Damit gilt $t \mapsto t^{-\theta}K(t,x) \in L^p_*((0,\infty))$ nur falls $a = b = 0$ und damit $x = 0$.

c) Für $p_2 = \infty$ folgt die Behauptung direkt aus (2-1). Sei also $1 \le p_1 < p_2 < \infty$. Für $x \in (X_0,X_1)_{\theta,p_1}$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\theta,p_2} &= \Big(\int_0^\infty t^{-\theta p_2} K(t,x)^{p_2} \tfrac{dt}{t}\Big)^{1/p_2} \\
&= \Big(\int_0^\infty t^{-\theta p_1} K(t,x)^{p_1} (t^{-\theta}K(t,x))^{p_2-p_1} \tfrac{dt}{t}\Big)^{1/p_2} \\
&\le \Big(\int_0^\infty t^{-\theta p_1} K(t,x)^{p_1} \tfrac{dt}{t}\Big)^{1/p_2} \big(\sup_{t>0} t^{-\theta}K(t,x)\big)^{(p_2-p_1)/p_2} \\
&= \|x\|_{\theta,p_1}^{p_1/p_2} \, \|x\|_{\theta,\infty}^{1-p_1/p_2} \\
&\le C\|x\|_{\theta,p_1},
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Einbettung $(X_0,X_1)_{\theta,p_1} \subset (X_0,X_1)_{\theta,\infty}$ verwendet wurde. □

**2.5 Bemerkung.** Seien $\theta \in (0,1)$, $p \in [1,\infty]$, und $x \in (X_0,X_1)_{\theta,p}$. Dann existieren zu jedem $t > 0$ Elemente $a_t \in X_0$ und $b_t \in X_1$, $a_t + b_t = x$, mit $\|a_t\|_{X_0} + t\|b_t\|_{X_1} \le 2K(t,x)$. In diesem Fall gilt $x = \lim_{t\to 0} b_t$ in $X_0 + X_1$.

Denn nach Lemma 2.4 c) gilt $(X_0,X_1)_{\theta,p} \subset (X_0,X_1)_{\theta,\infty}$. Damit ist $t \mapsto t^{-\theta}K(t,x)$ beschränkt, und es folgt $\lim_{t\to 0} K(t,x) = 0$. Nach Definition von $K(t,x)$ bedeutet das $\lim_{t\to 0}\|a_t\|_{X_0} = 0$ und damit $\|x - b_t\|_{X_0+X_1} = \|a_t\|_{X_0+X_1} \le \|a_t\|_{X_0} \to 0$ $(t \to 0)$.

Das folgende Lemma zeigt, dass der erste Parameter $\theta$ im Vergleich zum zweiten Parameter $p$ in gewissem Sinne dominant ist. Ohne die Voraussetzung $X_1 \subset X_0$ gilt dies übrigens nicht.

**2.6 Lemma.** *Seien $X_1 \subset X_0$, $p,q \in [1,\infty]$ und $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$. Dann gilt*

$$(X_0,X_1)_{\theta_2,p} \subset (X_0,X_1)_{\theta_1,q}.$$

*Beweis.* Es genügt, $(X_0,X_1)_{\theta_2,\infty} \subset (X_0,X_1)_{\theta_1,1}$ zu zeigen. Sei $x \in (X_0,X_1)_{\theta_2,\infty}$. Wir verwenden $K(t,x) \le \|x\|_{X_0+X_1} = \|x\|_{X_0}$ $(t \ge 1)$ und $K(t,x) \le t^{\theta_2}\|x\|_{\theta_2,\infty}$ $(t \le 1)$ (nach (2-1)) und erhalten

$$\|x\|_{\theta_1,1} = \int_0^1 t^{-\theta_1-1}K(t,x)dt + \int_1^\infty t^{-\theta_1-1}K(t,x)dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 t^{-\theta_1-1+\theta_2}\|x\|_{\theta_2,\infty}dt + \int_1^\infty t^{-\theta_1-1}\|x\|_{X_0}dt\\
&\leq \frac{1}{\theta_2-\theta_1}\,\|x\|_{\theta_2,\infty} + \frac{1}{\theta_1}\,\|x\|_{X_0}\\
&\leq C\|x\|_{\theta_2,\infty},
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $(X_0, X_1)_{\theta_2,\infty} \subset X_0 + X_1 = X_0$ verwendet wurde. □

**2.7 Satz.** *Für alle $\theta \in (0,1)$ und $p \in [1,\infty]$ ist $(\cdot,\cdot)_{\theta,p}$ ein exakter Interpolationsfunktor.*

*Beweis.* Seien $(X_0, X_1)$ und $(Y_0, Y_1)$ Interpolationspaare, und sei $T \in L(X_0, Y_0) \cap L(X_1, Y_1)$. Wir müssen zeigen, dass

$$\|T\|_{L((X_0,X_1)_{\theta,p},(Y_0,Y_1)_{\theta,p})} \leq \|T\|^{1-\theta}_{L(X_0,Y_0)}\|T\|^{\theta}_{L(X_1,Y_1)}. \tag{2-3}$$

Falls $T = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei zunächst $\|T\|_{L(X_0,Y_0)} \neq 0$, und sei $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$. Für alle $a \in X_0$ und $b \in X_1$ mit $x = a + b$ und alle $t > 0$ gilt

$$\|Ta\|_{Y_0} + t\|Tb\|_{Y_1} \leq \|T\|_{L(X_0,Y_0)}\left(\|a\|_{X_0} + t\frac{\|T\|_{L(X_1,Y_1)}}{\|T\|_{L(X_0,Y_0)}}\|b\|_{Y_1}\right).$$

Nimmt man das Infimum über alle $a, b$, erhält man

$$K(t, Tx, Y_0, Y_1) \leq \|T\|_{L(X_0,Y_0)}K\left(t\frac{\|T\|_{L(X_1,Y_1)}}{\|T\|_{L(X_0,Y_0)}}, x, X_0, X_1\right).$$

Wir verwenden die Transformation $s := \frac{\|T\|_{L(X_1,Y_1)}}{\|T\|_{L(X_0,Y_0)}}\,t$ in der Definition von $\|\cdot\|_{(Y_0,Y_1)_{\theta,p}}$ und erhalten

$$\|Tx\|_{(Y_0,Y_1)_{\theta,p}} \leq \|T\|_{L(X_0,Y_0)}\left(\frac{\|T\|_{L(X_1,Y_1)}}{\|T\|_{L(X_0,Y_0)}}\right)^{\theta}\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,p}}$$

und damit (2-3).

Falls $T \neq 0$ und $\|T\|_{L(X_0,Y_0)} = 0$, so gilt $\|T\|_{L(X_1,Y_1)} \neq 0$, und die Behauptung folgt, indem wir die Indizes 0 und 1 vertauschen und $\theta$ durch $1-\theta$ ersetzen (Lemma 2.4 a)). □

**2.8 Korollar.** *Für alle $\theta \in (0,1)$, $p \in [1,\infty]$ existiert eine Konstante $c(\theta,p) > 0$ mit*

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,p}} \leq c(\theta,p)\|x\|^{1-\theta}_{X_0}\|x\|^{\theta}_{X_1} \quad (x \in X_0 \cap X_1).$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

*Beweis.* Übung. Zu $x \in X_0 \cap X_1$ definiere $T \in L(\mathbb{K}, X_0) \cap L(\mathbb{K}, X_1)$ durch $T(\lambda) := \lambda x$. Dann gilt $\|T\|_{L(\mathbb{K},X_j)} = \|x\|_{X_j}$, $j = 0, 1$. Mit $(\mathbb{K}, \mathbb{K})_{\theta,p} = \mathbb{K}$ (mit äquivalenten Normen) erhält man

$$\begin{aligned} \|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,p}} &= \|T\|_{L(\mathbb{K},(X_0,X_1)_{\theta,p})} \le c(\theta, p)\|T\|_{L((\mathbb{K},\mathbb{K})_{\theta,p},(X_0,X_1)_{\theta,p})} \\ &\le c(\theta, p)\|x\|_{X_0}^{1-\theta}\|x\|_{X_1}^{\theta}. \end{aligned}$$

□

## b) Anwendungen: Hölderräume und Lorentzräume

Wir wollen die reelle Interpolation auf Funktionenräume anwenden. Dazu definieren wir zunächst einige Notationen.

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen definiert man $C_b^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}_0$, der Raum aller $k$-fach stetig differenzierbaren (reell- oder komplexwertigen) Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, für welche alle Ableitungen bis zur Ordnung $k$ in $\Omega$ beschränkt sind, mit Norm

$$\|f\|_{C_b^k(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Falls die Funktion $f$ bzw. deren Ableitungen alle gleichmäßig stetig sind, schreiben wir $BUC^k(\Omega)$ statt $C_b^k(\overline{\Omega})$. Für $k = 0$ schreibt man auch $C_b(\overline{\Omega})$.

Für $\theta \in (0, 1)$ sei $C^\theta(\overline{\Omega})$ der Raum aller beschränkten und gleichmäßig Hölderstetigen Funktionen $f \colon \Omega \to \mathbb{K}$ mit Exponent $\theta$ mit der Norm

$$\|f\|_{C^\theta(\overline{\Omega})} := \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + [f]_{C^\theta(\Omega)} := \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\ne y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\theta}.$$

Setzt man in der Definition der Norm $\theta = 1$, so erhält man den Raum $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ aller Lipschitz-stetigen und beschränkten Funktionen. Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ schreibt man üblicherweise $C_b^\theta(\mathbb{R}^n)$ statt $C^\theta(\overline{\mathbb{R}^n})$.

**2.9 Satz.** *Für alle und $\theta \in (0, 1)$ gilt*

$$\begin{aligned} (C_b(\mathbb{R}^n), C_b^1(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty} &= C_b^\theta(\mathbb{R}^n), \\ (L^\infty(\mathbb{R}^n), \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty} &= C_b^\theta(\mathbb{R}^n), \\ (BUC(\mathbb{R}^n), BUC^1(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty} &= C_b^\theta(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

*Beweis.* **(i)** Sei $f \in (C_b(\mathbb{R}^n), C_b^1(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty}$. Für jede Zerlegung $f = a + b$ mit $a \in C_b(\mathbb{R}^n)$ und $b \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$ folgt $\|f\|_\infty \le \|a\|_\infty + \|b\|_\infty$ und damit

$$\|f\|_\infty \le K(1, f) \le \|f\|_{\theta,\infty}.$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

Weiter gilt für $x \neq y$

$$|f(x) - f(y)| \leq |a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| \leq 2\|a\|_\infty + \|b\|_{C_b^1(\mathbb{R}^n)}|x - y|.$$

Also folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq 2K(|x - y|, f) \leq 2|x - y|^\theta \|f\|_{\theta,\infty}.$$

Somit ist $f$ Hölderstetig mit Exponent $\theta$ und

$$\|f\|_{C_b^\theta(\mathbb{R}^n)} \leq 3\|f\|_{\theta,\infty}.$$

**(ii)** Sei $f \in C_b^\theta(\mathbb{R}^n)$. Wähle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B(0,1)}$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. Für $t \in (0,1)$ definiert man

$$\begin{aligned} b_t(x) &:= t^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)dy \quad (x \in \mathbb{R}^n), \\ a_t(x) &:= f(x) - b_t(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Dann gilt $a_t(x) = t^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-y))\varphi(\frac{y}{t})dy$ und damit

$$\|a_t\|_\infty \leq [f]_{C^\theta(\mathbb{R}^n)} t^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^\theta \varphi(\tfrac{y}{t})dy = t^\theta [f]_{C^\theta(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |w|^\theta \varphi(w)dw.$$

Weiter gilt $\|b_t\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ und für $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} b_t(x) &= t^{-n-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial_{x_i}\varphi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)dy \\ &= t^{-n-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)(\partial_{x_i}\varphi)(\tfrac{y}{t})dy \\ &= t^{-n-1} \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-y) - f(x)\big)(\partial_{x_i}\varphi)(\tfrac{y}{t})dy, \end{aligned}$$

wobei $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i}\varphi(y)dy = 0$ verwendet wurde. Wir erhalten

$$\|\partial_{x_i} b\|_\infty \leq t^{\theta-1} [f]_{C^\theta(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |w|^\theta |\partial_{x_i}\varphi(w)|dw.$$

Insgesamt folgt für $t \in (0,1)$

$$t^{-\theta} K(t,f) \leq t^{-\theta}\big(\|a\|_\infty + t\|b\|_\infty\big) \leq C\|f\|_{C_b^\theta(\mathbb{R}^n)}.$$

Für $t \geq 1$ verwendet man $t^{-\theta}K(t,f) \leq t^{-\theta}\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Damit gilt

$$\|f\|_{\theta,\infty} = \sup_{t>0} t^{-\theta}K(t,f) \leq C\|f\|_{C_b^\theta(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $C_b^\theta(\mathbb{R}^n) \subset (C_b(\mathbb{R}^n), C_b^1(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty}$.

© Robert Denk 26. 8. 2014

**(iii)** In der obigen Konstruktion in (ii) gilt sogar $b_t \in BUC^1(\mathbb{R}^n)$ und $a_t \in BUC(\mathbb{R}^n)$. Somit folgt

$$(BUC(\mathbb{R}^n), BUC^1(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty} = C_b^\theta(\mathbb{R}^n).$$

Andererseits gilt die Argumentation in Teil (i) auch für $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $b \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$, und damit folgt auch

$$(L^\infty(\mathbb{R}^n), \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty} = C_b^\theta(\mathbb{R}^n).$$

$\square$

**2.10 Bemerkung.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Rand $\partial\Omega$ sei gleichmäßig $C^1$, d.h. es existieren ein $N \in \mathbb{N}$ und abzählbar viele offene Kugeln $B(x_k, r_k)$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(x_k, r_k) \supset \partial\Omega$ so, dass der Durchschnitt von je $N+1$ Kugeln leer ist, sowie $C^1$-Diffeomorphismen $\Phi_k\colon B(x_k, r_k) \to \Phi(B(x_k, r_k)) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Phi_k(B(x_k, r_k) \cap \overline{\Omega}) = \{y \in \Phi_k(B(x_k, r_k)) : y_n \geq 0\}$ und $\|\Phi_k\|_{C_1} + \|\Phi_k^{-1}\|_{C_1} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann existiert ein Fortsetzungsoperator in $\Omega$, d.h. ein Operator

$$e_\Omega \in L(C_b(\overline{\Omega}), C_b(\mathbb{R}^n)) \cap L(C_b^1(\overline{\Omega}), C_b^1(\mathbb{R}^n))$$

mit $r_\Omega e_\Omega = \mathrm{id}_{C_b(\overline{\Omega})}$, wobei

$$r_\Omega\colon C_b(\mathbb{R}^n) \to C_b(\overline{\Omega}),\ f \mapsto f|_\Omega$$

die Einschränkung auf $\Omega$ ist. Es gilt sogar $e_\Omega \in L(C_b^\theta(\overline{\Omega}), C_b^\theta(\mathbb{R}^n))$ für alle $\theta \in (0,1)$.

Die Existenz von $e_\Omega$ folgt mit Lokalisierung und Partition der Eins aus der Existenz von $e_{\mathbb{R}^n_+}$, wobei $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Der Operator $e_{\mathbb{R}^n_+}$ kann mittels Reflektion explizit angegeben werden:

$$e_{\mathbb{R}^n_+} f(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x_n \geq 0, \\ 3f(x', -x_n) - 2f(x', -2x_n), & \text{falls } x_n < 0. \end{cases}$$

Hier ist $x' := (x_1, \ldots, x_{n-1})$.

**2.11 Lemma.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\theta \in (0,1)$. Es existiere ein Fortsetzungsoperator*

$$e_\Omega \in L(C_b(\overline{\Omega}), C_b(\mathbb{R}^n)) \cap L(C_b^1(\overline{\Omega}), C_b^1(\mathbb{R}^n)) \cap L(C_b^\theta(\overline{\Omega}), C_b^\theta(\mathbb{R}^n)).$$

*Dann gilt*

$$(C_b(\overline{\Omega}), C_b^1(\overline{\Omega}))_{\theta,\infty} = C_b^\theta(\overline{\Omega}).$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

*Beweis.* Nach Definition eines Interpolationsfunktors gilt

$$\begin{aligned} e_\Omega &\in L\big((C_b(\overline{\Omega}), C_b^1(\overline{\Omega}))_{\theta,\infty}, (C_b(\mathbb{R}^n), C_b^1(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty}\big),\\ r_\Omega &\in L\big((C_b(\mathbb{R}^n), C_b^1(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty}, (C_b(\overline{\Omega}), C_b^1(\overline{\Omega}))_{\theta,\infty}\big). \end{aligned}$$

Damit sind die folgenden Abbildungen alle stetig:

$$\begin{aligned} (C_b(\overline{\Omega}), C_b^1(\overline{\Omega}))_{\theta,\infty} &\xrightarrow{e_\Omega} \quad (C_b(\mathbb{R}^n), C_b^1(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty} = C_b^\theta(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{r_\Omega} C_b^\theta(\overline{\Omega}),\\ C_b^\theta(\overline{\Omega}) &\xrightarrow{e_\Omega} \quad C_b^\theta(\mathbb{R}^n) = (C_b(\mathbb{R}^n), C_b^1(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty} \xrightarrow{r_\Omega} (C_b(\overline{\Omega}), C_b^1(\overline{\Omega}))_{\theta,\infty}. \end{aligned}$$

Mit $r_\Omega e_\Omega = \mathrm{id}_{C_b(\overline{\Omega})}$ folgt die Behauptung. □

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein $\sigma$-endlicher Maßraum. Mit $\lambda$ wird das Lebesgue-Maß bezeichnet, und $\mathscr{B}(X)$ steht für die Borel-$\sigma$-Algebra eines topologischen Raums $X$.

**2.12 Definition.** Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ messbar. Dann definiert man

$$\begin{aligned} m(\sigma, f) &:= \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \sigma\}) \quad (\sigma \in [0,\infty)),\\ f^*(t) &:= \inf\{\sigma \geq 0 : m(\sigma, f) \leq t\} \quad (t \in [0,\infty)). \end{aligned}$$

Die Funktion $f^*$ heißt auch die monotone Umsortierung von $f$.

**2.13 Lemma.** *a) Die Funktionen $m(\cdot, f)$ und $f^*$ sind nichtnegativ, monoton fallend und rechtsseitig stetig. Es gilt $m(f^*(t), f) \leq t$.*

*b) Für alle $\sigma > 0$ gilt*

$$\lambda(\{t > 0 : f^*(t) > \sigma\}) = m(\sigma, f) = \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \sigma\}).$$

*Somit gilt die Gleichheit der Maße $\lambda \circ (f^*)^{-1} = \mu \circ (|f|)^{-1}$ auf $\mathscr{B}([0,\infty))$, und für alle $p \in [1,\infty)$ gilt*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) = \int_0^\infty (f^*(t))^p dt = \|f^*\|_{L^p((0,\infty))}^p.$$

*Für $p = \infty$ gilt*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = f^*(0) = \|f^*\|_{L^\infty((0,\infty))}.$$

*c) Für alle $A \in \mathscr{A}$ gilt*

$$\int_A |f(x)| d\mu(x) \leq \int_0^{\mu(A)} f^*(t) dt.$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

*Beweis.* Übung. Übung. □

**2.14 Definition.** Seien $p, q \in [1, \infty]$. Die Lorentz-Räume $L^{p,q}(\Omega)$ sind definiert durch

$$L^{p,q}(\Omega) := \{f \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega) : \|f\|_{L^{p,q}(\Omega)} < \infty\},$$

$$\|f\|_{L^{p,q}(\Omega)} := \begin{cases} \big(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t}\big)^{1/q}, & \text{falls } q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & \text{falls } q = \infty \end{cases}$$

(d.h. $\|f\|_{L^{p,q}(\Omega)} := \|t \mapsto t^{1/p} f^*\|_{L^q_*((0,\infty))}$).

Insbesondere gilt nach Definition von $f^*$ auch

$$L^{p,\infty}(\Omega) = \{f \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega) : \sup_{\sigma>0} \sigma^{1/p} m(\sigma, f) < \infty\}.$$

Der Raum $L^{p,\infty}(\Omega)$ heißt auch Marcinkiewicz-Raum.

**2.15 Bemerkung.** a) Im Allgemeinen ist $\|\cdot\|_{L^{p,q}(\Omega)}$ keine Norm, sondern nur eine Quasi-Norm, d.h. statt der Dreiecksungleichung gilt nur $\|f + g\| \le C(\|f\| + \|g\|)$.

b) Nach Lemma 2.13 b) gilt $L^{p,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ für alle $p \in [1, \infty]$.

**2.16 Satz.** *$(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$ ist ein Interpolationspaar, und für alle $\theta \in (0, 1)$ und $q \in [1, \infty]$ gilt*

$$(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))_{\theta,q} = L^{1/(1-\theta),q}(\Omega).$$

*Speziell gilt für alle $p \in (1, \infty)$*

$$(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))_{1-1/p,p} = L^p(\Omega).$$

*Beweis.* **(i)** Sei $Z$ der Raum aller messbaren Funktionen, welche $\mu$-fast überall auf $\Omega$ sind. Auf $Z$ wird eine Topologie durch die Konvergenz nach Maß auf allen Mengen $A \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ induziert. Dabei konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $A$ nach Maß gegen $f$, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in A : |f(x) - f_n(x)| \ge \varepsilon\}) = 0$. (Bei Wahrscheinlichkeitsmaßen entspricht dies der Konvergenz nach Wahrscheinlicheit oder der stochastischen Konvergenz.) Dann ist $Z$ ein topologischer Vektorraum, hausdorffsch, und $L^1(\Omega) \subset Z$, $L^\infty(\Omega) \subset Z$. Also ist $(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$ ein Interpolationspaar.

**(ii)** Sei $f \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$. Wir zeigen

$$K(t, f) = \int_0^t f^*(s)ds \quad (t > 0). \tag{2-4}$$

Für festes $t > 0$ und $x \in \Omega$ definiert man

$$\begin{aligned} a_t(x) &:= \begin{cases} f(x) - f^*(t)\frac{f(x)}{|f(x)|}, & \text{falls } |f(x)| > f^*(t), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ b_t(x) &:= f(x) - a_t(x). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$|a_t(x)| = \begin{cases} |f(x)| - f^*(t), & \text{falls } x \in E, \\ 0, & \text{falls } x \in \Omega \setminus E, \end{cases}$$

wobei $E := \{x \in \Omega : |f(x)| > f^*(t)\}$. Somit gilt

$$\|a_t\|_{L^1(\Omega)} = \int_E (|f(x)| - f^*(t)) d\mu(x).$$

Nach Lemma 2.13 a), b) gilt

$$\mu(E) = (\mu \circ |f|^{-1})((f^*(t), \infty)) = (\lambda \circ (f^*)^{-1})((f^*(t), \infty)) = m(f^*(t), f) \leq t$$

und damit (wieder mit Lemma 2.13 b), c))

$$\|a\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_0^{\mu(E)} (f^*(s) - f^*(t)) ds \leq \int_0^t (f^*(s) - f^*(t)) ds.$$

Wegen

$$|b_t(x)| = \begin{cases} f^*(t), & \text{falls } x \in E, \\ |f(x)|, & \text{falls } x \in \Omega \setminus E \end{cases}$$

folgt $|b_t(x)| \leq f^*(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(t) ds$ $(x \in \Omega)$. Damit erhalten wir

$$K(t, f) \leq \|a_t\|_{L^1(\Omega)} + t\|b_t\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \int_0^t f^*(s) ds,$$

d.h. die Ungleichung „$\leq$“ in (2-4). Für die andere Ungleichung verwendet man, dass für jede Zerlegung $f = a + b$ gilt

$$f^*(s) \leq a^*((1-\varepsilon)s) + b^*(\varepsilon s) \quad (s \geq 0,\, \varepsilon \in (0,1))$$

(Übung). Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^t f^*(s) ds &\leq \int_0^t a^*((1-\varepsilon)s) ds + \int_0^t b^*(\varepsilon s) ds \\ &\leq \frac{1}{1-\varepsilon} \int_0^\infty a^*(\tau) d\tau + t b^*(0) \\ &= \frac{1}{1-\varepsilon} \int_\Omega |a(x)| d\mu(x) + t\|b\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

Für $\varepsilon \searrow 0$ erhält man $\int_0^t f^*(s)ds \le \|a\|_{L^1(\Omega)} + t\|b\|_{L^\infty(\Omega)}$ und damit „$\ge$" in (2-4).

**(iii)** Da $f^*$ monoton fällt, folgt aus (2-4) $K(t,f) \ge tf^*(t)$ $(t>0)$. Für $q<\infty$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\|t\mapsto t^{-\theta}K(t,f)\|_{L^q_*((0,\infty))} &= \int_0^\infty t^{-\theta q}K(t,f)^q\frac{dt}{t}\\ &\ge \int_0^\infty t^{-\theta q+q}f^*(t)^q\frac{dt}{t} = \|f\|_{L^{1/(1-\theta),q}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Für $q=\infty$ verwendet man

$$\sup_{t>0} t^{-\theta}K(t,f) \ge \sup_{t>0} t^{1-\theta}f^*(t) = \|f\|_{L^{1/(1-\theta),\infty}(\Omega)}.$$

Damit gilt $(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))_{q,\theta} \subset L^{1/(1-\theta),q}(\Omega)$.

Für die andere Inklusion schreibt man unter Verwendung der Hardy-Young-Ungleichung (Satz A.2)

$$\begin{aligned}\|t\mapsto t^{-\theta}K(t,f)\|^q_{L^q_*((0,\infty))} &= \int_0^\infty t^{-\theta q}\Big(\int_0^t sf^*(s)\frac{ds}{s}\Big)^q\frac{dt}{t}\\ &\le \theta^{-q}\int_0^\infty s^{(1-\theta)q}f^*(s)^q\frac{ds}{s} = \theta^{-q}\|f\|^q_{L^{1/(1-\theta),q}(\Omega)},\end{aligned}$$

falls $q<\infty$, bzw.

$$\begin{aligned}\|t\mapsto t^{-\theta}K(t,f)\|_{L^\infty((0,\infty))} &\le t^{-\theta}\|\tau\mapsto \tau^{1-\theta}f^*(\tau)\|_{L^\infty((0,\infty))}\int_0^t s^{\theta-1}ds\\ &= \frac{1}{\theta}\|f\|_{L^{1/(1-\theta),\infty}(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

## c) Die Spurmethode

Im Folgenden sei wieder $(X_0, X_1)$ ein Interpolationspaar von $\mathbb{K}$-Banachräumen. Für eine offene Teilmenge $U\subset\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{N}_0$, $p\in[1,\infty]$ ist $W^k_{p,\text{loc}}(U)$ definiert als die Menge aller $u\colon U\to\mathbb{K}$, für welche $u|_K \in W^k_p(K)$ für alle kompakten Teilmengen $K\subset U$ gilt.

**2.17 Definition.** Für $\theta\in(0,1)$ und $p\in[1,\infty]$ sei $V(p,\theta,X_1,X_0)$ die Menge aller Funktionen $u\in W^1_{p,\text{loc}}((0,\infty);X_0+X_1)$, für welche

$$\begin{aligned}t\mapsto t^\theta u(t) &\in L^p_*((0,\infty);X_1),\\ t\mapsto t^\theta u'(t) &\in L^p_*((0,\infty);X_0)\end{aligned}$$

gilt. Wir versehen $V(p,\theta,X_1,X_0)$ mit der kanonischen Norm

$$\|u\|_{V(p,\theta,X_1,X_0)} := \|t\mapsto t^\theta u(t)\|_{L^p_*((0,\infty);X_1)} + \|t\mapsto t^\theta u'(t)\|_{L^p_*((0,\infty);X_0)}.$$

**2.18 Bemerkung.** a) Der Raum $V(p,\theta,X_1,X_0)$ ist ein Banachraum.

b) Es gilt $V(p,\theta,X_1,X_0)\subset C([0,\infty);X_0+X_1)$. Um dies zu sehen, sei zunächst $p\in(1,\infty)$ und $0<s<t$. Dann folgt aus $u(t)-u(s)=\int_s^t u'(\tau)d\tau$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|u(t)-u(s)\|_{X_0} &\le \Big(\int_s^t \|\tau^{\theta-1/p}u'(\tau)\|_{X_0}^p d\tau\Big)^{1/p}\Big(\int_s^t \tau^{-(\theta-1/p)p'}d\tau\Big)^{1/p'}\\ &\le \|u\|_{V(p,\theta,X_1,X_0)}\big(p'(1-\theta)\big)^{-1/p'}\big(t^{p'(1-\theta)}-s^{p'(1-\theta)}\big)^{1/p'}.\end{aligned}$$

Dies zeigt sogar die gleichmäßige Stetigkeit von $u\in C([0,\infty);X_0+X_1)$. Die Aussage für $p=1$ und $p=\infty$ folgt analog.

c) Nach b) ist insbesondere die Spur $u(0)\in X_0+X_1$ wohldefiniert.

Der folgende Satz ist zentral in diesem Abschnitt und liefert eine äquivalente Beschreibung der reellen Interpolationsräume, welche auch für Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen nützlich ist.

**2.19 Satz.** *Seien $\theta\in(0,1)$ und $p\in[1,\infty]$. Dann gilt*

$$(X_0,X_1)_{\theta,p}=\{u(0): u\in V(p,1-\theta,X_1,X_0)\},$$

*und die Norm*

$$\|x\|_{\theta,p}^{\mathrm{tr}}:=\inf\big\{\|u\|_{V(p,1-\theta,X_1,X_0)}: x=u(0),\ u\in V(p,1-\theta,X_1,X_0)\big\}$$

*ist äquivalent zu $\|\cdot\|_{\theta,p}$.*

*Beweis.* **(i)** Sei $x\in(X_0,X_1)_{\theta,p}$. Gesucht ist $u\in V(p,1-\theta,X_1,X_0)$ mit $u(0)=x$. Für alle $t>0$ existieren $a_t\in X_0$, $b_t\in X_1$ mit $a_t+b_t=x$ und $\|a_t\|_{X_0}+t\|b_t\|_{X_1}\le 2K(t,x)$. Wegen $t^{1-\theta}\|b_t\|_{X_1}\le 2t^{-\theta}K(t,x)$ und $t\mapsto t^{-\theta}K(t,x)\in L_*^p((0,\infty))$ sowie $\lim_{t\to0}b_t=x$ (siehe Bemerkung 2.5) könnte die Funktion $t\mapsto b_t$ ein geeigneter Kandidat für $u$ sein. Allerdings stimmt im Allgemeinen die Messbarkeit nicht, daher muss $b_t$ noch modifiziert werden.

Für $n\in\mathbb{N}$ seien $a_n\in X_0$, $b_n\in X_1$ mit $a_n+b_n=x$ und $\|a_n\|_{X_0}+\frac1n\|b_n\|_{X_1}\le 2K(\frac1n,x)$. Für $t>0$ definiere

$$u(t):=\sum_{n\in\mathbb{N}}b_{n+1}\chi_{(1/(n+1),1/n]}(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(x-a_{n+1})\chi_{(1/(n+1),1/n]}(t)$$

und $v(t):=\frac1t\int_0^t u(s)ds$. Dann gilt $b_n\to x$ in $X_0+X_1$ und somit $x=\lim_{t\to0}u(t)=\lim_{t\to0}v(t)$. Da $K(\cdot,x)$ monoton wächst, folgt

$$\|t^{1-\theta}u(t)\|_{X_1}\le t^{-\theta}\sum_{n\in\mathbb{N}}t\chi_{(1/(n+1),1/n]}(t)2(n+1)K(\tfrac{1}{n+1},x)\le 4t^{-\theta}K(t,x).$$

Also gilt $t \mapsto t^{1-\theta}u(t) \in L^p_*((0,\infty);X_1)$. Nach Korollar A.3 gilt $t \mapsto v_\theta(t) := t^{1-\theta}v(t) \in L^p_*((0,\infty);X_1)$ und $\|v_\theta\|_{L^p_*((0,\infty);X_1)} \le 4\theta^{-1}\|x\|_{\theta,p}$. Es gilt

$$v(t) = x - \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{(1/(n+1),1/n]}(s)a_{n+1}ds,$$

also ist $v$ fast überall differenzierbar mit Werten in $X_0$, und

$$v'(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t g(s)ds - \frac{1}{t}g(t),$$

wobei $g(t) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{(1/(n+1),1/n]}(t)a_{n+1}$. Es gilt

$$\|g(t)\|_{X_0} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{(1/(n+1),1/n]}(t)2K(\tfrac{1}{n+1},x) \le 2K(t,x)$$

und

$$\|t^{1-\theta}v'(t)\|_{X_0} \le t^{-\theta}\sup_{0<s<t}\|g(s)\|_{X_0} + t^{-\theta}\|g(t)\|_{X_0} \le 4t^{-\theta}K(t,x) \quad (t>0).$$

Damit erhalten wir $t \mapsto w_\theta(t) := t^{1-\theta}v'(t) \in L^p_*((0,\infty);X_0)$ mit Norm $\|w_\theta\|_{L^p_*((0,\infty);X_0)} \le 4\|x\|_{\theta,p}$.

**(ii)** Sei nun $x = u(0)$ mit $u \in V(p,1-\theta,X_1,X_0)$. Dann folgt

$$x = x - u(t) + u(t) = -\int_0^t u'(s)ds + u(t) \quad (t>0)$$

und damit

$$t^{-\theta}K(t,x) \le t^{1-\theta}\Big\|\frac{1}{t}\int_0^t u'(s)ds\Big\|_{X_0} + t^{1-\theta}\|u(t)\|_{X_1}. \tag{2-5}$$

Nach Korollar A.3 gilt $t \mapsto t^{-\theta}K(t,x) \in L^p_*((0,\infty))$, d.h. $x \in (X_0,X_1)_{\theta,p}$, sowie $\|x\|_{\theta,p} \le \frac{1}{\theta}\|x\|^{\mathrm{tr}}_{\theta,p}$. □

**2.20 Korollar.** *Sei $p \in (1,\infty)$.*

*a) Der Raum $(X_0,X_1)_{1-1/p,p}$ ist der Spurraum von $W^1_p((0,\infty);X_0) \cap L^p((0,\infty);X_1)$.*

*b) Es gilt $W^1_p((0,\infty);X_0) \cap L^p((0,\infty);X_1) \subset C_b([0,\infty);(X_0,X_1)_{1-1/p,p})$.*

*Beweis.* a) Dies ist Satz 2.19 mit $\theta = 1 - \frac{1}{p}$.

b) Sei $u \in W^1_p((0,\infty);X_0) \cap L^p((0,\infty);X_1)$. Für $t \ge 0$ gehört dann $u(t+\cdot)$ ebenfalls zum Durchschnitt dieser Räume, d.h. es gilt $u(t) \in (X_0,X_1)_{1-1/p,p}$ für jedes $t \ge 0$. Mit (2-5) gilt

$$\|u(t)\|_{1-1/p,p} \le \frac{1}{1-\frac{1}{p}}\big(\|u\|_{W^1_p((0,\infty);X_0)} + \|u\|_{L^p((0,\infty);X_1)}\big) \quad (t \ge 0). \tag{2-6}$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

Also ist $t \mapsto u(t)$ beschränkt in $(X_0, X_1)_{1-1/p,p}$.

Wir approximieren $u$ durch eine Folge

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_p^1((0,\infty); X_0) \cap L^p((0,\infty); X_1) \cap C([0,\infty); X_1)$$

(z.B. durch gerade Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ und Friedrich-Glättung). Dann ist $u_n \in C_b([0,\infty); X_0 \cap X_1) \subset C_b([0,\infty); (X_0, X_1)_{1-1/p,p})$. Nach (2-6) ist $u$ der gleichmäßige Limes der $u_n$ und damit ebenfalls in $C_b([0,\infty); (X_0, X_1)_{1-1/p,p})$. $\square$

**2.21 Lemma.** *a) Seien $\theta \in (0,1)$, $p \in [1,\infty]$. Sei $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ und $u \in V(p, 1-\theta, X_1, X_0)$. Dann existiert zu $u$ ein $v \in V(p, 1-\theta, X_1, X_0)$ mit $v(0) = x$ und zusätzlicher höherer Glattheitseigenschaft: Es gilt $v \in C^\infty((0,\infty); X_0 + X_1)$, und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $c_n > 0$ mit*

$$\|t \mapsto t^{n-\theta} v^{(n)}(t)\|_{L_*^p((0,\infty);X_0)} \le c_n \|u\|_{V(p,1-\theta,X_1,X_0)}, \tag{2-7}$$

$$\|t \mapsto t^{n+1-\theta} v^{(n)}(t)\|_{L_*^p((0,\infty);X_1)} \le c_n \|u\|_{V(p,1-\theta,X_1,X_0)}. \tag{2-8}$$

*b) Die Fortsetzung in a) kann zusätzlich mit kompaktem Träger in $[0,\infty)$ gewählt werden.*

*Beweis.* Übung. a) Sei $\varphi \in \mathscr{D}((0,\infty))$ mit $\varphi \ge 0$ und $\int_0^\infty \varphi(s) \frac{ds}{s} = 1$. Man definiert

$$v(t) := \int_0^\infty \varphi(s) u\Big(\frac{t}{s}\Big) \frac{ds}{s} \quad (t > 0).$$

Siehe [7], Remark 1.16.

b) Man multipliziert das $v$ aus a) mit einer Abschneidefunktion $\varphi \in C^\infty([0,\infty))$, $\varphi(x) = 1$ für $x \in [0,1]$. $\square$

**2.22 Lemma.** *Für $\theta \in (0,1)$ und $p \in [1,\infty)$ ist $X_0 \cap X_1$ dicht in $(X_0, X_1)_{\theta,p}$.*

Diese Aussage wird hier nicht bewiesen, für einen Beweis kann man etwas die sogenannte Mittelungsmethode verwenden (siehe [9], Theorem 1.6.2).

## d) Weitere Eigenschaften und Reiteration

Wie bisher sei $(X_0, X_1)$ ein Interpolationspaar von $\mathbb{K}$-Banachräumen. Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen, für einen Beweis siehe [7], Theorem 1.18.

**2.23 Satz** (Reelle Interpolation und Dualräume). *Sei $X_0 \cap X_1$ dicht sowohl in $X_0$ als auch in $X_1$. Dann gilt für alle $\theta \in (0,1)$ und $p \in (1,\infty)$*

$$\big((X_0, X_1)_{\theta,p}\big)' = (X_0', X_1')_{\theta,p'}.$$

Die Idee der Reiteration besteht darin, Interpolationsräume wieder zu interpolieren. Dazu definieren wir zunächst einige Begriffe.

**2.24 Definition.** a) Für $\theta \in [0,1]$ wird $J_\theta(X_0, X_1)$ definiert als die Menge aller Banachräume $E$ mit $X_0 \cap X_1 \subset E \subset X_0 + X_1$, für welche ein $c > 0$ existiert mit

$$\|x\|_E \le c\|x\|_{X_0}^{1-\theta}\|x\|_{X_1}^{\theta} \quad (x \in X_0 \cap X_1).$$

b) Für $\theta \in [0,1]$ wird $K_\theta(X_0, X_1)$ definiert als die Menge aller Banachräume $E$ mit $X_0 \cap X_1 \subset E \subset X_0 + X_1$, für welche ein $k > 0$ existiert mit

$$K(t,x) \le kt^\theta \|x\|_E \quad (x \in E,\, t > 0).$$

**2.25 Bemerkung.** Nach Definition gilt immer $X_0 \in K_0(X_0, X_1) \cap J_0(X_0, X_1)$ und $X_1 \in K_1(X_0, X_1) \cap J_1(X_0, X_1)$. Für $E \in J_\theta(X_0, X_1)$ sagt man auch: $E$ ist von Klasse $J_\theta$.

**2.26 Lemma.** *Sei $\theta \in (0,1)$, und sei $E$ ein Banachraum mit $X_0 \cap X_1 \subset E \subset X_0 + X_1$.*

*a) Es gilt $E \in J_\theta(X_0, X_1)$ genau dann, wenn $(X_0, X_1)_{\theta,1} \subset E$.*

*b) Es gilt $E \in K_\theta(X_0, X_1)$ genau dann, wenn $E \subset (X_0, X_1)_{\theta,\infty}$.*

*Beweis.* a) Aus $(X_0, X_1)_{\theta,1} \subset E$ folgt $E \in J_\theta(X_0, X_1)$ nach Korollar 2.8.

Es gelte also $E \in J_\theta(X_0, X_1)$. Sei $x \in (X_0, X_1)_{\theta,1}$, und sei $u \in V(1, 1-\theta, X_1, X_0)$ mit $u(0) = x$, $u(t) = 0$ $(t \ge 1)$. Nach Lemma 2.21 existiert dann ein $v \in V(1, 1-\theta, X_1, X_0)$ mit $v(0) = x$ und den Glattheitseigenschaften (2-7) und (2-8). Wir schreiben $x = -\int_0^\infty v'(t)dt$. Wegen $E \in J_\theta(X_0, X_1)$ gilt für alle $t \ge 0$

$$\|v'(t)\|_E \le c\|v'(t)\|_{X_0}^{1-\theta}\|v'(t)\|_{X_1}^{\theta} = ct^{-1}\|t^{1-\theta}v'(t)\|_{X_0}^{1-\theta}\|t^{2-\theta}v'(t)\|_{X_1}^{\theta}.$$

Nach der Hölderschen Ungleichung und den Abschätzungen (2-7), (2-8) folgt

$$\begin{aligned}\|x\|_E = \Big\| \int_0^\infty v'(t)dt \Big\|_E &= \|v'\|_{L^1((0,\infty);E)} \\ &\le c\|t \mapsto t^{1-\theta}v'(t)\|_{L^1_*((0,\infty);X_0)}^{1-\theta} \|t \mapsto t^{2-\theta}v'(t)\|_{L^1_*((0,\infty);X_1)}^{\theta} \\ &\le c\|u\|_{V(1,1-\theta,X_1,X_0)} \le c\|x\|_{\theta,1}.\end{aligned}$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

Damit gilt $(X_0, X_1)_{\theta,1} \subset E$.

b) Diese Äquivalenz ist nur eine Umformulierung der Definitionen von $(X_0, X_1)_{\theta,\infty}$ und von $K_\theta(X_0, X_1)$. □

**2.27 Korollar.** *a) Für einen Banachraum $E$ mit $X_0 \cap X_1 \subset E \subset X_0 + X_1$ gilt*

$$E \in J_\theta(X_0, X_1) \cap K_\theta(X_0, X_1) \iff (X_0, X_1)_{\theta,1} \subset E \subset (X_0, X_1)_{\theta,\infty}.$$

*b) Für alle $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$ gilt*

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} \in J_\theta(X_0, X_1) \cap K_\theta(X_0, X_1).$$

*c) (Interpolationsungleichung) Sei $E \in J_\theta(X_0, X_1)$, $\theta \in (0, 1)$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon > 0$ mit*

$$\|x\|_E \le \varepsilon \|x\|_{X_1} + c_\varepsilon \|x\|_{X_0} \quad (x \in X_0 \cap X_1).$$

*Beweis.* a) ist klar nach Lemma 2.26.

b) ist Lemma 2.6.

c) folgt sofort aus der Youngschen Ungleichung $ab \le \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$ für $a, b > 0$, $p \in (1, \infty)$ mit geeigneter Wahl von $a, b, p$. □

Der folgende Satz ist nützlich für Anwendungen der Interpolationstheorie.

**2.28 Satz** (Reiterationssatz). *Seien $p \in [1, \infty]$, $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 1$, $\theta \in (0, 1)$ und $\omega := (1 - \theta)\theta_0 + \theta\theta_1$.*

*a) Falls $E_i \in K_{\theta_i}(X_0, X_1)$, $i = 0, 1$, so gilt $(E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (X_0, X_1)_{\omega,p}$.*

*b) Falls $E_i \in J_{\theta_i}(X_0, X_1)$, $i = 0, 1$, so gilt $(X_0, X_1)_{\omega,p} \subset (E_0, E_1)_{\theta,p}$.*

*Insbesondere gilt für $E_i \in K_{\theta_i}(X_0, X_1) \cap J_{\theta_i}(X_0, X_1)$, $i = 0, 1$ die Gleichheit*

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} = (X_0, X_1)_{\omega,p}$$

*mit äquivalenten Normen.*

*Beweis.* a) Sei $K(t, x) = K(t, x, X_0, X_1) \le k_i t^{\theta_i} \|x\|_{E_i}$, $i = 0, 1$, und sei $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$. Für $a \in E_0, b \in E_1$ mit $x = a + b$ folgt

$$K(t, x) \le K(t, a) + K(t, b) \le k_0 t^{\theta_0} \|a\|_{E_0} + k_1 t^{\theta_1} \|b\|_{E_1}.$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

Damit erhält man

$$K(t,x) \le \max\{k_0,k_1\} t^{\theta_0} K(t^{\theta_1-\theta_0}, x, E_0, E_1).$$

Durch die Substitution $s = t^{\theta_1-\theta_2}$ folgt

$$t \mapsto t^{-\omega} K(t,x) \in L_*^p((0,\infty)),$$

d.h. $x \in (X_0, X_1)_{\omega,p}$, sowie

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\omega,p}} \le \max\{k_0,k_1\}(\theta_1-\theta_0)^{-1/p}\|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}}.$$

b) Sei nun $x \in (X_0,X_1)_{\omega,p}$, und sei $v \in V(p, 1-\omega, X_1, X_0)$ mit $v \in C^\infty((0,\infty); X_0 \cap X_1)$, $v(\infty) = 0$, $v(0) = x$, sowie

$$\begin{aligned} \|t \mapsto t^{1-\omega} v'(t)\|_{L_*^p((0,\infty);X_1)} &\le C\|x\|_{(X_0,X_1)_{\omega,p}}, \\ \|t \mapsto t^{2-\omega} v'(t)\|_{L_*^p((0,\infty);X_0)} &\le C\|x\|_{(X_0,X_1)_{\omega,p}} \end{aligned}$$

(siehe Lemma 2.21). Definiere $g(t) := v(t^{1/(\theta_1-\theta_0)})$ $(t > 0)$. Wir zeigen, dass $g \in V(p, 1-\theta, E_1, E_0)$ gilt.

Nach Voraussetzung gilt $\|x\|_{E_i} \le c_i \|x\|_{X_0}^{1-\theta_i} \|x\|_{X_1}^{\theta_i}$ für alle $x \in X_0 \cap X_1$, $i = 0, 1$. Wir wenden dies auf $v'(s)$ für festes $s > 0$ an und erhalten

$$\|v'(s)\|_{E_i} \le \frac{c_i}{s^{\theta_i+1-\omega}} \big\|s^{1-\omega} v'(s)\big\|_{X_0}^{1-\theta_i} \big\|s^{2-\omega} v'(s)\big\|_{X_1}^{\theta_i} \quad (i = 0, 1).$$

Wegen $\theta_0 + 1 - \omega = 1 - \theta(\theta_1 - \theta_0)$ und $\theta_1 + 1 - \omega = 1 + (1-\theta)(\theta_1 - \theta_0)$ folgt

$$\|s \mapsto s^{1-\theta(\theta_1-\theta_0)} v'(s)\|_{L_*^p((0,\infty);E_0)} \le C\|x\|_{(X_0,X_1)_{\omega,p}}, \tag{2-9}$$

$$\|s \mapsto s^{1+(1-\theta)(\theta_1-\theta_0)} v'(s)\|_{L_*^p((0,\infty);E_1)} \le C\|x\|_{(X_0,X_1)_{\omega,p}}. \tag{2-10}$$

Mit $v(t) = -\int_t^\infty v'(s) ds$ und (2-10) und der Hardy-Young-Ungleichung folgt

$$\big\|t \mapsto t^{(1-\theta)(\theta_1-\theta_0)} v(t)\big\|_{L_*^p((0,\infty);E_1)} \le \frac{C}{(1-\theta)(\theta_1-\theta_0)} \|x\|_{(X_0,X_1)_{\omega,p}}.$$

Für $g$ impliziert dies

$$\begin{aligned} \big\|t \mapsto t^{1-\theta} g(t)\big\|_{L_*^p((0,\infty);E_1)} &= (\theta_1-\theta_0)^{-1/p} \big\|t \mapsto t^{(1-\theta)(\theta_1-\theta_0)} v(t)\big\|_{L_*^p((0,\infty);E_1)} \\ &\le C\|x\|_{(X_0,X_1)_{\omega,p}}. \end{aligned}$$

Für die Ableitung von $g$ gilt $g'(t) = \frac{1}{\theta_1-\theta_0} t^{-1+1/(\theta_1-\theta_0)} v'(t^{1/(\theta_1-\theta_0)})$. Mit (2-9) folgt

$$\begin{aligned} \big\|t \mapsto t^{1-\theta} g'(t)\big\|_{L_*^p((0,\infty);E_0)} &= (\theta_1-\theta_0)^{-1-1/p} \big\|t \mapsto t^{1-\theta(\theta_1-\theta_0)} v'(t)\big\|_{L_*^p((0,\infty);X_0)} \\ &\le C\|x\|_{(X_0,X_1)_{\omega,p}}. \end{aligned}$$

Also gilt $g \in V(p, 1-\theta, E_1, E_0)$ und $\|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} \le C\|x\|_{(X_0,X_1)_{\omega,p}}$. □

© Robert Denk 26. 8. 2014

**2.29 Korollar.** *Für alle* $\theta_0, \theta_1, \theta \in (0,1)$ *und* $p, q \in [1,\infty]$ *gilt*

$$\big((X_0,X_1)_{\theta_0,q_0}, (X_0,X_1)_{\theta_1,q_1}\big)_{\theta,p} = (X_0,X_1)_{(1-\theta)\theta_0+\theta\theta_1,p}.$$

*Dies gilt auch noch für* $\theta_0 = 0$ *bzw.* $\theta_1 = 1$*, wenn man* $(X_0,X_1)_{\theta_0,p}$ *durch* $X_0$ *bzw.* $(X_0,X_1)_{\theta_1,p}$ *durch* $X_1$ *ersetzt.*

*Beweis.* Folgt sofort aus dem Reiterationssatz nach Korollar 2.27 b) bzw. Bemerkung 2.25. □

Wir geben noch einige Anwendungen für Funktionenräume an.

**2.30 Korollar.** *a) Für* $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 1$*,* $\theta \in (0,1)$*, gilt*

$$(C_b^{\theta_1}(\mathbb{R}^n), C_b^{\theta_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty} = C_b^{(1-\theta)\theta_1+\theta\theta_2}(\mathbb{R}^n).$$

*Falls* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet mit gleichmäßigem* $C^1$*-Rand ist, so gilt dies auch mit* $\overline{\Omega}$ *statt* $\mathbb{R}^n$*.*

*b) Sei* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *ein* $\sigma$*-endlicher Maßraum. Dann gilt für alle* $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$*,* $\theta \in (0,1)$*,* $q \in [1,\infty]$

$$\big(L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega)\big)_{\theta,q} = L^{p,q}(\Omega) \quad \textit{für} \;\; \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\,.$$

*Speziell folgt für* $p_0 < q < p_1$

$$\big(L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega)\big)_{\theta,q} = L^{q}(\Omega) \quad \textit{für} \;\; \theta := \Big(1-\frac{p_0}{q}\Big)\Big(1-\frac{p_0}{p_1}\Big)^{-1}.$$

*Für* $1 < p_0 < p_1 < \infty$*,* $\theta \in (0,1)$ *und* $1 \le q_0 \le q_1 \le \infty$ *gilt*

$$\big(L^{p_0,q_0}(\Omega), L^{p_1,q_1}(\Omega)\big)_{\theta,q} = L^{p,q}(\Omega) \quad \textit{für} \;\; \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

*Beweis.* Dies folgt sofort aus dem Reiterationssatz und den entsprechenden Aussagen über $C^\theta$ bzw. $L^{p,q}$. □

Im Folgenden seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und $(\Lambda, \mathscr{A}', \nu)$ zwei $\sigma$-endliche Maßräume.

**2.31 Definition.** Seien $p, q \in [1,\infty]$. Ein linearer Operator $T\colon L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega) \to L^1(\Lambda) + L^\infty(\Lambda)$ heißt vom schwachen Typ $(p,q)$, falls $T|_{L^p(\Omega)} \in L(L^p(\Omega), L^{q,\infty}(\Lambda))$.

$T$ heißt vom starken Typ $(p,q)$, falls $T|_{L^p(\Omega)} \in L(L^p(\Omega), L^q(\Lambda))$.

Wegen $L^q(\Lambda) = L^{q,q}(\Lambda) \subset L^{q,\infty}(\Lambda)$ ist jeder Operator vom starken Typ $(p,q)$ auch vom schwachen Typ $(p,q)$.

**2.32 Satz** (Satz von Marcinkiewicz)**.** *Sei $T\colon L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega) \to L^1(\Lambda) + L^\infty(\Lambda)$ vom schwachen Typ $(p_0,q_0)$ und $(p_1,q_1)$ mit $p_0,p_1 \in [1,\infty]$ und $q_0,q_1 \in (1,\infty]$, $q_0 \neq q_1$, $p_0 \le q_0$ und $p_1 \le q_1$. Zu festem $\theta \in (0,1)$ definiere $p$ und $q$ wie üblich durch $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ und $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.*
*Dann ist $T$ vom starken Typ $(p,q)$, und es gilt*

$$\|T\|_{L(L^p(\Omega),L^q(\Lambda))} \le C\|T\|^{1-\theta}_{L(L^{p_0}(\Omega),L^{q_0,\infty}(\Lambda))}\|T\|^{\theta}_{L(L^{p_1}(\Omega),L^{q_1,\infty}(\Lambda))}$$

*mit einer von $T$ und $\theta$ unabhängigen Konstanten $C > 0$.*

*Beweis.* Sei $M_i := \|T\|_{L(L^{p_i}(\Omega),L^{q_i,\infty}(\Lambda))}$, $i = 0,1$. Da $(\cdot,\cdot)_{\theta,p}$ ein exakter Interpolationsfunktor ist, ist die Norm von $T$ als Operator

$$T\colon \big(L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega)\big)_{\theta,p} \longrightarrow \big(L^{q_0,\infty}(\Lambda), L^{q_1,\infty}(\Lambda)\big)_{\theta,p}$$

nicht größer als $M_0^{1-\theta}M_1^\theta$. Nach Korollar 2.30 b) gilt

$$(L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega))_{\theta,p} = L^p(\Omega), \quad \big(L^{q_0,\infty}(\Lambda), L^{q_1,\infty}(\Lambda)\big)_{\theta,p} = L^{q,p}(\Lambda).$$

Wegen $p_0 \le q_0$, $p_1 \le q_1$ gilt $p \le q$ und damit

$$L^{q,p}(\Lambda) \subset L^{q,q}(\Lambda) = L^q(\Lambda).$$

Also ist $T \in L(L^p(\Omega), L^q(\Lambda))$ mit Norm nicht größer als $CM_0^{1-\theta}M_1^\theta$. □

© Robert Denk 26. 8. 2014

# 3. Komplexe Interpolation

**3.1 Worum geht's?** Neben der reellen Interpolation ist in Anwendungen auch noch die komplexe Interpolation wichtig, insbesondere weil sie einerseits gut mit der Fouriertransformation verträglich ist (Bessel-Potentialräume), andererseits die Definitionsbereiche $D(A^\theta)$ für viele Operatoren $A$ durch komplexe Interpolation beschrieben werden können. Grundlage der komplexen Interpolation ist die Theorie Banachraum-wertiger holomorpher Funktionen.

## a) Definition und erste Eigenschaften

Im Folgenden seien $X, X_0, X_1$ $\mathbb{C}$-Banachräume, und $(X_0, X_1)$ sei ein Interpolationspaar. Wir betrachten den Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

**3.2 Definition.** Die Menge $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ ist definiert als die Menge aller $f \in C_b(\overline{S}; X_0 + X_1)$, für welche $f|_S \colon S \to X_0 + X_1$ holomorph ist und für welche $t \mapsto f(it) \in C_b(\mathbb{R}; X_0)$ und $t \mapsto f(1+it) \in C_b(\mathbb{R}; X_1)$ gilt. Auf $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ wird die Norm

$$\|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} := \max\Big\{ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_{X_0}, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1+it)\|_{X_1} \Big\}$$

definiert.

Die Definitheit der Norm erhält man aus folgendem Satz:

**3.3 Satz** (Dreiliniensatz). *Seien $f \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$, $\theta \in [0,1]$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$\|f(\theta + it)\|_{X_0+X_1} \le M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

*wobei $M_j := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(j+it)\|_{X_j}$, $j = 0, 1$.*

*Beweis.* Wir schreiben im Beweis $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{X_0+X_1}$. Für $\theta \in \{0,1\}$ ist die Aussage trivial. Sei also $\theta \in (0,1)$. Seien $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren $f_{\varepsilon,\lambda}(z) := \exp(\varepsilon z^2 + \lambda z) f(z)$ für $z \in \overline{S}$. Dann gilt

$$\|f_{\varepsilon,\lambda}(it)\| \le M_0, \quad \|f_{\varepsilon,\lambda}(1+it)\| \le e^{\varepsilon+\lambda} M_1 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Setze $M := \sup_{z\in\overline{S}} \|f_{\varepsilon,\lambda}\|$. Da $f$ beschränkt ist, gilt $f_{\varepsilon,\lambda} \to 0$ für $|\operatorname{Im} z| \to \infty$. Daher existiert ein $K > 0$ mit $\|f_{\varepsilon,\lambda}(z)\| \le \frac{M}{2}$ für $|\operatorname{Im} z| \ge K$, und $\|f_{\varepsilon,\lambda}\|$ nimmt ein globales Maximum in $[0,1] \times [-K, K]$ an. Nach dem Maximumprinzip für Banachraum-wertige holomorphe Funktionen wird das Maximum auf dem Rand und nach Wahl von $K$ sogar auf $\{0,1\} \times [-K, K]$ angenommen. Also gilt

$$\|f_{\varepsilon,\lambda}(z)\| \le \max\{M_0, e^{\varepsilon+\lambda} M_1\} \quad (z \in \overline{S}).$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

Nach Definition von $f_{\varepsilon,\lambda}$ folgt

$$\|f(\theta+it)\| \le e^{-\varepsilon(\theta^2-t^2)} \max\{e^{-\theta\lambda}M_0, e^{\varepsilon+(1-\theta)\lambda}M_1\} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Wähle $N_j > M_j$ beliebig, $j=0,1$. Für $\varepsilon > 0$ und $\rho = e^\lambda$ erhält man für alle $\rho\in(0,\infty)$

$$\|f(\theta+it)\| \le \max\{\rho^{-\theta}N_0, \rho^{1-\theta}N_1\} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Da $N_0, N_1 > 0$, $\rho\mapsto\rho^{1-\theta}$ streng monoton steigend und $\rho\mapsto\rho^{-\theta}$ streng monoton fallend ist, wird die rechte Seite als Funktion von $\rho$ minimal, falls $\rho^{-\theta}N_0 = \rho^{1-\theta}N_1$, d.h. $\rho = N_0/N_1$. Mit dieser Wahl folgt

$$\|f(\theta+it)\| \le N_0^{1-\theta}N_1^\theta \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Mit $N_0\to M_0$ und $N_1\to M_1$ folgt schließlich die Behauptung. □

**3.4 Lemma.** *Der Raum $\mathcal{F}(X_0,X_1)$ ist ein Banachraum.*

*Beweis.* Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X_0,X_1)$ eine Cauchyfolge. Nach dem Dreiliniensatz und wegen $X_0, X_1 \subset X_0+X_1$ gilt $\|f_n - f_m\|_{C_b(\overline{S};X_0+X_1)} \le \|f_n-f_m\|_{\mathscr{F}(X_0,X_1)}$, also existiert ein $f\in C_b(\overline{S};X_0+X_1)$ mit $f_n\to f$ in $C_b(\overline{S};X_0+X_1)$. Als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge holomorpher Funktionen ist $f$ wieder holomorph in $S$ nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz.

Andererseits ist nach Definition von $\mathcal{F}(X_0,X_1)$ auch $(f_n(i\,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}\subset C_b(\mathbb{R};X_0)$ eine Cauchyfolge, und somit existiert ein $f_0\in C_b(\mathbb{R};X_0)$ mit $f_n(i\,\cdot)\to f_0$ in $C_b(\mathbb{R};X_0)$. Wegen $X_0\subset X_0+X_1$ gilt die Konvergenz auch in $X_0+X_1$, und mit der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt $f_0 = f(i\,\cdot)$. Somit gilt $f(i\,\cdot)\in C_b(\mathbb{R};X_0)$. Genauso sieht man $f(1+i\,\cdot)\in C_b(\mathbb{R};X_1)$. Insgesamt erhalten wir $f\in\mathscr{F}(X_0,X_1)$ sowie $f_n\to f$ in $\mathcal{F}(X_0,X_1)$. □

**3.5 Bemerkung.** Wir definieren $\mathcal{F}_0(X_0,X_1)$ als die Menge aller $f\in\mathcal{F}(X_0,X_1)$ mit $\lim_{|t|\to\infty}\|f(it)\|_{X_0} = 0$ und $\lim_{|t|\to\infty}\|f(1+it)\|_{X_1} = 0$, versehen mit der Spurtopologie.

Dann ist $\mathcal{F}_0(X_0,X_1)$ wieder ein Banachraum, wie man etwa im Beweis von Lemma 3.4 sieht, indem man $C_b(\mathbb{R};X_j)$ durch $C_0(\mathbb{R};X_j)$, $j=0,1$, ersetzt.

Das folgende Lemma ist technisch recht aufwändig zu beweisen (Beweise siehe z.B. [6], Lemma 3.8, oder [9], Theorem 1.9.1).

**3.6 Lemma.** *Die Menge aller Linearkombinationen von Funktionen der Form $\overline{S}\to X_0+X_1$, $z\mapsto e^{\delta z^2+\lambda z}u$ mit $\delta>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ und $u\in X_0\cap X_1$, liegt dicht in $\mathscr{F}_0(X_0,X_1)$.*

**3.7 Definition** (Komplexer Interpolationsraum)**.** Für $\theta \in (0,1)$ definiert man den komplexen Interpolationsraum $[X_0, X_1]_\theta$ durch

$$[X_0, X_1]_\theta := \{x \in X_0 + X_1 \,|\, \exists\, f \in \mathcal{F}(X_0, X_1) : x = f(\theta)\}$$

mit der kanonischen Norm

$$\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta} := \inf \big\{ \|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} : f \in \mathcal{F}(X_0, X_1), x = f(\theta) \big\}.$$

**3.8 Bemerkung.** a) Sei $\theta \in (0,1)$. Wegen $\|f(\theta)\|_{X_0+X_1} \le \|f\|_{\mathscr{F}(X_0,X_1)}$ ist die Abbildung $T\colon \mathcal{F}(X_0, X_1) \to X_0 + X_1$, $f \mapsto f(\theta)$, stetig. Nach Definition der Normen ist die induzierte Abbildung $\overline{T}\colon \mathcal{F}(X_0, X_1)/\ker T \to [X_0, X_1]_\theta$ ein isometrischer Isomorphismus normierter Räume. Da $\ker T$ abgeschlossen ist, ist der Quotientenraum $\mathcal{F}(X_0, X_1)/\ker T$ ein Banachraum. Somit ist auch $[X_0, X_1]_\theta$ ein Banachraum.

b) Für alle $\theta \in (0,1)$ gilt $[X_0, X_1]_\theta = [X_1, X_0]_{1-\theta}$ mit gleichen Normen. Falls $X_0 = X_1 =: X$, so gilt $[X, X]_\theta = X$ mit gleichen Normen. (Übung)

c) Man kann in Definition 3.7 den Raum $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ durch $\mathcal{F}_0(X_0, X_1)$ ersetzen. Denn für alle $f \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$ und $\delta > 0$ ist $z \mapsto f_\delta(z) := e^{\delta(z-\theta)^2} f(z) \in \mathcal{F}_0(X_0, X_1)$ mit $f_\delta(\theta) = f(\theta)$ und $\lim_{\delta\to 0} \|f_\delta\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} = \|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)}$.

d) Sei $f \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$, $\theta \in (0,1)$. Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ gilt dann $f(\theta + it) \in [X_0, X_1]_\theta$ und $\|f(\theta + it)\|_{[X_0,X_1]_\theta} = \|f(\theta)\|_{[X_0,X_1]_\theta}$. Dies sieht man sofort durch Betrachten der Funktion $g(z) = f(z + it)$.

e) Nach Lemma 3.6 ist $X_0 \cap X_1$ dicht in $[X_0, X_1]_\theta$ für alle $\theta \in (0,1)$.

**3.9 Satz.** *Für alle $\theta \in (0,1)$ ist $[\cdot,\cdot]_\theta$ ein exakter Interpolationsfunktor vom Typ $\theta$.*

*Beweis.* **(i)** Für $x \in [X_0, X_1]_\theta$ und $f \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$ mit $f(\theta) = x$ gilt $\|x\|_{X_0+X_1} = \|f(\theta)\|_{X_0+X_1} \le \|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)}$ und damit $\|x\|_{X_0+X_1} \le \|x\|_{[X_0,X_1]_\theta}$.

Für $x \in X_0 \cap X_1$ definiert man $f(z) := e^{(z-\theta)^2} x$. Dann gilt $f \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$, $f(\theta) = x$ und

$$\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta} \le \|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} \le C \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\} = C\|x\|_{X_0\cap X_1}.$$

Ingesamt erhalten wir $X_0 \cap X_1 \subset [X_0, X_1]_\theta \subset X_0 + X_1$.

**(ii)** Sei $(Y_0, Y_1)$ ein weiteres Interpolationspaar, und sei $T \in L(X_0, Y_0) \cap L(X_1, Y_1)$. Setze $M_j := \|T\|_{L(X_j,Y_j)}$, $j = 0, 1$.

Zu $x \in [X_0, X_1]_\theta$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $f \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$ mit $\|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} \le \|x\|_{[X_0,X_1]_\theta} + \varepsilon$ und $f(\theta) = x$. Man definiert $g\colon \overline{S} \to Y_0 + Y_1$, $z \mapsto M_0^{z-1} M_1^{z} T(f(z))$. Dann gilt $g \in \mathcal{F}(Y_0, Y_1)$ und

$$\|g\|_{\mathcal{F}(Y_0,Y_1)} = \max \Big\{ \sup_{t\in\mathbb{R}} M_0^{-1} \|T(f(it))\|_{Y_0}, \sup_{t\in\mathbb{R}} M_1^{-1} \|T(f(1+it))\|_{X_1} \Big\}$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

$$\leq \|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} \leq \|x\|_{[X_0,X_1]_\theta} + \varepsilon.$$

Wegen $g(\theta) = M_0^{\theta-1} M_1^\theta T x$ folgt

$$\|Tx\|_{[Y_0,Y_1]_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \big(\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta} + \varepsilon\big).$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

**3.10 Korollar.** *Für alle $\theta \in (0,1)$ gilt*

$$\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta} \leq \|x\|_{X_0}^{1-\theta} \|x\|_{X_1}^\theta \quad (x \in X_0 \cap X_1).$$

*Beweis.* Das folgt genauso wie im Beweis von Korollar 2.8, allerdings ist jetzt die Konstante gleich 1, da $[\mathbb{C},\mathbb{C}]_\theta = \mathbb{C}$ mit gleicher Norm. □

**3.11 Lemma.** *Falls $X_0 \subset X_1$, so gilt für $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$:*

$$X_0 \subset [X_0, X_1]_{\theta_1} \subset [X_0, X_1]_{\theta_2} \subset X_1.$$

*Beweis.* Seien $\varepsilon > 0$, $x \in X_0$ und $f \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$ mit $f(\theta_1) = x$ sowie $\|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} \leq \|x\|_{[X_0,X_1]_\theta} + \varepsilon$. Nach Lemma 3.6 sei o.E. $f$ eine Linearkombination von Funktionen der Form $z \mapsto e^{\delta z^2 + \lambda z} u$ mit $u \in X_0 \cap X_1$.

Nach Satz 3.9 ist $X_0 = X_0 \cap X_1 \subset [X_0, X_1]_{\theta_2} \subset X_0 + X_1 = X_1$, d.h. $(X_0, [X_0, X_1]_{\theta_2})$ ist ein Interpolationspaar. Wähle $\lambda \in (0,1)$ mit $\theta_1 = \lambda\theta_2$ und definiere $\varphi\colon \overline{S} \to X_0 + [X_0, X_1]_{\theta_2}$ durch $\varphi(z) := e^{\varepsilon(z^2-\lambda^2)} f(\theta_2 z)$. Dann gilt $\varphi \in \mathcal{F}(X_0, [X_0, X_1]_{\theta_2})$ und $\varphi(\lambda) = x$.

Wegen $\|f(\theta_2 + it)\|_{[X_0,X_1]_{\theta_2}} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)}$ gilt $\|\varphi\|_{\mathcal{F}(X_0,[X_0,X_1]_{\theta_2})} \leq e^\varepsilon \|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)}$ und damit

$$\|x\|_{[X_0,X_1]_{\theta_2}} \leq C\|\varphi(\lambda)\|_{\mathcal{F}(X_0,[X_0,X_1]_{\theta_2})} \leq Ce^\varepsilon \|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} \leq Ce^\varepsilon\big(\|x\|_{[X_0,X_1]_{\theta_1}} + \varepsilon\big).$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt $\|x\|_{[X_0,X_1]_{\theta_2}} \leq C\|x\|_{[X_0,X_1]_{\theta_1}}$ für alle $x \in X_0$. Da $X_0$ dicht in $[X_0, X_1]_{\theta_1}$ ist, folgt $[X_0, X_1]_{\theta_1} \subset [X_0, X_1]_{\theta_2}$. □

**3.12 Satz.** *Für alle $\theta \in (0,1)$ gilt*

$$[X_0, X_1]_\theta \in J_\theta(X_0, X_1) \cap K_\theta(X_0, X_1).$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

*Beweis.* Nach Korollar 3.10 gilt $[X_0,X_1]_\theta \in J_\theta(X_0,X_1)$. Sei $x \in [X_0,X_1]_\theta$, $f \in \mathcal{F}(X_0,X_1)$ mit $f(\theta)=x$. Sei zu festem $t>0$ der Raum $X_1^t$ definiert als der Raum $X_1$, versehen mit der (zu $\|\cdot\|_{X_1}$ äquivalenten) Norm $t\|\cdot\|_{X_1}$. Dann sind die Normen $\|\cdot\|_{X_0+X_1}$ und $K(t,\cdot)=\|\cdot\|_{X_0+X_1^t}$ äquivalent, und es gilt $f\in\mathcal{F}(X_0,X_1^t)$. Nach dem Dreiliniensatz gilt

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\theta,\infty} &= \sup_{t>0} t^{-\theta}K(t,f(\theta))\\
&\le \sup_{t>0}\Big(t^{-\theta}\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\|f(i\tau)\|_{X_0}^{1-\theta}\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\|f(1+i\tau)\|_{X_1^t}^{\theta}\Big)\\
&= \sup_{t>0}\Big(t^{-\theta}\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\|f(i\tau)\|_{X_0}^{1-\theta}\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\big(t^{\theta}\|f(1+i\tau)\|_{X_1}^{\theta}\big)\Big)\\
&= \sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(i\tau)\|_{X_0}^{1-\theta}\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\|f(1+i\tau)\|_{X_1}^{\theta}\\
&\le \|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)}.
\end{aligned}$$

Nehme nun das Infimum über alle $f\in\mathcal{F}(X_0,X_1)$ mit $f(\theta)=x$ und erhalte $\|x\|_{\theta,\infty}\le \|x\|_{[X_0,X_1]_\theta}$, d.h. $[X_0,X_1]_\theta\in K_\theta(X_0,X_1)$. □

**3.13 Korollar.** *Für* $0<\theta_1<\theta_2<1$, $\theta\in(0,1)$, $p\in[1,\infty]$ *gilt*

$$\big([X_0,X_1]_{\theta_1},[X_0,X_1]_{\theta_2}\big)_{\theta,p}=(X_0,X_1)_{(1-\theta)\theta_1+\theta\theta_2,p}.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus dem Reiterationssatz. □

Die folgenden Sätze werden hier nicht bewiesen (Beweise siehe [4], Kapitel 4.7).

**3.14 Satz** (Reiterationssatz für komplexe Interpolation)**.** *Es gelte eine der beiden folgenden Bedingungen*

*(i)* $X_0\subset X_1$,

*(ii)* $X_0,X_1$ *sind beide reflexiv und* $X_0\cap X_1$ *ist dicht sowohl in* $X_0$ *als auch in* $X_1$.

*Dann gilt für alle* $0<\theta_1<\theta_2<1$, $\theta\in(0,1)$

$$\big[[X_0,X_1]_{\theta_1},[X_0,X_1]_{\theta_2}\big]_\theta=[X_0,X_1]_{(1-\theta)\theta_1+\theta\theta_2}.$$

**3.15 Satz.** *a) Seien* $X_0$ *und* $X_1$ *beide reflexiv. Dann gilt für alle* $0<\theta_1<\theta_2<1$, $\theta\in(0,1)$ *und* $p\in(1,\infty)$

$$\big[(X_0,X_1)_{\theta_1,p},(X_0,X_1)_{\theta_2,p}\big]_\theta=(X_0,X_1)_{(1-\theta)\theta_1+\theta\theta_2}.$$

*b) Es sei mindestens einer der beiden Räume $X_0$ und $X_1$ reflexiv, und $X_0 \cap X_1$ sei dicht sowohl in $X_0$ als auch in $X_1$. Dann gilt für alle $\theta \in (0,1)$*

$$\big([X_0, X_1]_\theta\big)' = [X_0', X_1']_\theta.$$

*Ohne Reflexivität gilt noch „$\supset$“.*

**3.16 Bemerkung.** Falls $X_0$ und $X_1$ Hilberträume sind, so gilt $[X_0, X_1]_\theta = (X_0, X_1)_{\theta,2}$. Es gibt aber keine allgemeine Antwort auf die Frage, unter welchen Bedingungen die Räume $[X_0, X_1]_\theta$ und $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ übereinstimmen.

## b) Anwendung: Der Satz von Riesz-Thorin

Im Folgenden sei wieder $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein $\sigma$-endlicher Maßraum.

**3.17 Satz.** *Für alle $p_0, p_1 \in [1, \infty]$ und $\theta \in (0,1)$ gilt*

$$\big[L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega)\big]_\theta = L^p(\Omega) \quad \textit{mit} \;\; \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\,.$$

*Beweis.* Der Durchschnitt $L^{p_0}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega)$ ist dicht sowohl in $L^p(\Omega)$ als auch in $[L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega)]_\theta$ (für letzeres siehe Bemerkung 3.8 e)). Sei $x \in L^{p_0}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega)$, o.E. sei $\|x\|_{L^p(\Omega)} = 1$.

**(i)** Für $z \in \overline{S}$ definiere $f(z)$ durch

$$f(z)(\omega) := \begin{cases} |x(\omega)|^{p((1-z)/p_0 + z/p_1)} \frac{x(\omega)}{|x(\omega)|}, & \text{falls } x(\omega) \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x(\omega) = 0. \end{cases}$$

Dann ist $f \in C_b(\overline{S}; L^{p_0}(\Omega) + L^{p_1}(\Omega))$ holomorph in $S$, und für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |f(it)(\omega)| &= |x(\omega)|^{p/p_0}, \\ |f(1+it)(\omega)| &= |x(\omega)|^{p/p_1} \quad (\omega \in \Omega). \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|f(it)\|_{L^{p_0}(\Omega)}^{p_0} &= \|x\|_{L^p(\Omega)}^p = 1, \\ \|f(1+it)\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{p_1} &= \|x\|_{L^p(\Omega)}^p = 1, \end{aligned}$$

sowie $t \mapsto f(it) \in C_b(\mathbb{R}; L^{p_0}(\Omega))$ und $t \mapsto f(1+it) \in C_b(\mathbb{R}; L^{p_1}(\Omega))$. Insgesamt folgt $f \in \mathcal{F}(L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega))$ mit $\|f\|_{\mathcal{F}} = 1 = \|x\|_{L^p(\Omega)}$, $f(\theta) = x$. Also gilt $\|x\|_{[L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega)]_\theta} \leq \|x\|_{L^p(\Omega)}$.

© Robert Denk 26. 8. 2014

**(ii)** Sei $f \in \mathcal{F}(L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega))$ mit $f(\theta) = x$. Wir verwenden

$$1 = \|x\|_{L^p(\Omega)} = \sup\Big\{\Big|\int_\Omega x(\omega)y(\omega)d\mu(\omega)\Big| : y \in L^{p_0'}(\Omega) \cap L^{p_1'}(\Omega),\ \|y\|_{L^{p'}(\Omega)} = 1\Big\}.$$

Wie oben definieren wir zu $y \in L^{p_0'}(\Omega) \cap L^{p_1'}(\Omega)$ die Funktion $g$ durch

$$g(z)(\omega) := \begin{cases} |y(\omega)|^{p'((1-z)/p_0'+z/p_1')}\frac{y(\omega)}{|y(\omega)|}, & \text{falls } y(\omega) \neq 0,\\ 0, & \text{falls } y(\omega) = 0, \end{cases}$$

für alle $z \in \overline{S}$.

Definiere $F\colon \overline{S} \to C$ durch

$$F(z) := \int_\Omega f(z)(\omega)g(z)(\omega)d\mu(\omega) \quad (z \in \overline{S}).$$

Dann ist $F \in C(\overline{S})$, holomorph in $S$, und nach dem Dreiliniensatz gilt

$$|F(z)| \leq \max\big\{\sup_{t\in\mathbb{R}}|F(it)|, \sup_{t\in\mathbb{R}}|F(1+it)|\big\}.$$

Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$|F(it)| \leq \|f(it)\|_{L^{p_0}(\Omega)}\|g(it)\|_{L^{p_0'}(\Omega)} = \|f(it)\|_{L^{p_0}(\Omega)}\|y\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'/p_0'} = \|f(it)\|_{L^{p_0}(\Omega)},$$

und analog

$$\begin{aligned}|F(1+it)| &\leq \|f(1+it)\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|g(1+it)\|_{L^{p_1'}(\Omega)}\\ &= \|f(1+it)\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|y\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'/p_1'} = \|f(1+it)\|_{L^{p_1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$|F(z)| \leq \max\big\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(it)\|_{L^{p_0}(\Omega)}, \sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(1+it)\|_{L^{p_1}(\Omega)}\big\} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(L^{p_0}(\Omega),L^{p_1}(\Omega))}.$$

Also ist $|\int_\Omega x(\omega)y(\omega)d\mu(\omega)| = |F(\theta)| \leq \|f\|_{\mathcal{F}(L^{p_0}(\Omega),L^{p_1}(\Omega))}$. Da $y$ und $f$ beliebig waren, erhalten wir

$$\|x\|_{L^p(\Omega)} \leq \|x\|_{[L^{p_0}(\Omega),L^{p_1}(\Omega)]_\theta}.$$

Dies gilt für alle $x \in L^{p_0}(\Omega) \cap L^{p_1}(\Omega)$ und wegen Dichtheit für alle $x \in L^p(\Omega)$. Insgesamt erhalten wir $L^p(\Omega) = [L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega)]_\theta$ mit gleichen Normen. □

**3.18 Korollar** (Satz von Riesz-Thorin)**.** *Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und $(\Lambda, \mathscr{A}', \nu)$ $\sigma$-endliche Maßräume. Seien $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1,\infty]$, $T \in L(L^{p_j}(\Omega), L^{q_j}(\Lambda))$, $j = 0, 1$. Für alle $\theta \in (0,1)$ gilt dann $T \in L(L^{p_\theta}(\Omega), L^{q_\theta}(\Lambda))$ mit Norm*

$$\|T\|_{L(L^{p_\theta}(\Omega),L^{q_\theta}(\Lambda))} \leq \|T\|_{L(L^{p_0}(\Omega),L^{q_0}(\Lambda))}^{1-\theta}\|T\|_{L(L^{p_1}(\Omega),L^{q_1}(\Lambda))}^{\theta},$$

*wobei* $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ *und* $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

© Robert Denk 26. 8. 2014

*Beweis.* Folgt sofort aus Satz 3.17 und Satz 3.9. □

Wie in Abschnitt 1 bereits gezeigt, folgt unter anderem der Satz von Hausdorff-Young aus dem Satz von Riesz-Thorin.

© Robert Denk 26. 8. 2014

# 4. Sobolevräume

**4.1 Worum geht's?** In diesem Abschnitt werden verschiedene Typen von $L^p$-Sobolevräumen definiert und analysiert: Besovräume, Bessel-Potentialräume und Sobolev-Slobodecki-Räume. Während die Letztgenannten eher die klassischen Räume darstellen, wird sich zeigen, dass tatsächlich die grundlegenden Räume die Besovräume und die Bessel-Potentialräume sind. Dabei sind die Besovräume mit reeller Interpolation verknüpft, die Bessel-Potentialräume mit komplexer Interpolation. Durch die Spurmethode erhält man eine Aussage über Spuren von Funktionen auf dem Rand eines Gebietes, was für Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen eine zentrale Rolle spielt. Wir verwenden hier einen einheitlichen Zugang, wie er inzwischen Standard wurde, über dyadische Zerlegungen.

## a) Definition der Sobolevräume

Im Folgenden betrachten wir die Fourier-Transformation $\mathscr{F}\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ auf dem Raum der temperierten Distributionen. Dabei wird $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ wie üblich mit der schwach-*-Topologie versehen, welche durch die Abbildungen $u \mapsto u(\psi)$ mit $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt wird.

Da die Multiplikation $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \cdot \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert ist (wie üblich durch $(\varphi u)(\psi) := u(\varphi\psi)$), ist für $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ die Abbildung $\operatorname{op}[\varphi]\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $u \mapsto \mathscr{F}^{-1}\varphi\mathscr{F}u$ ebenfalls wohldefiniert.

**4.2 Definition.** Eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Funktionen heißt eine dyadische Zerlegung, falls gilt:

(i) Es ist $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_k \geq 0$, $\operatorname{supp}\varphi_0 \subset B(0,2)$ sowie $\operatorname{supp}\varphi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} < |\xi| < 2^{k+1}\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Es gibt ein $c > 0$ mit $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \varphi_k(\xi) \geq c$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existiert ein $c_\alpha > 0$ mit

$$|\xi|^{|\alpha|}\big|\partial^\alpha\varphi_k(\xi)\big| \leq c_\alpha \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}_0).$$

**4.3 Bemerkung.** Es gibt viele Methoden, dyadische Zerlegungen zu konstruieren. Sei etwa $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi \geq 0$, $\operatorname{supp}\psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < |\xi| < 2\}$ sowie $\psi(\xi) > 0$, falls $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |\xi| \leq \sqrt{2}$. Dann definiert man $\varphi_k(\xi) := \psi(2^{-k}\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$. Sei weiter $\psi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\psi_0 \subset \overline{B(0,2)}$, $\psi_0 \geq 0$ und $\psi_0(\xi) > 0$ falls $|\xi| \leq 1$.

© Robert Denk 26. 8. 2014

Dann gilt $\sum_{k=0}^\infty \psi_k(\xi) > 0$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$), und für

$$\varphi_k(\xi) := \frac{\psi_k(\xi)}{\sum_{j=0}^\infty \psi_j(\xi)} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}_0)$$

gilt Eigenschaft (i) aus Definition 4.2 sowie $\sum_{k=0}^\infty \varphi_k = 1$, was auch (ii) zeigt. Um Eigenschaft 4.2 (iii) zu zeigen, schreibt man für $\xi \in \operatorname{supp}\varphi_k$

$$|\xi|^{|\alpha|}\big|\partial^\alpha \varphi_k(\xi)\big| = |\xi|^{|\alpha|}2^{-|\alpha|k}\big|(\partial^\alpha\varphi)(2^{-k}\xi)\big| \le 2^{(k+1)|\alpha|}2^{-|\alpha|k}\|\partial^\alpha\varphi\|_\infty = 2^{|\alpha|}\|\partial^\alpha\varphi\|_\infty.$$

**4.4 Definition.** Sei $X$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum. Zu $s \in \mathbb{R}$ und $q \in [1,\infty]$ definiert man den Raum $\ell_q^s(X)$ als die Menge aller $X$-wertigen Folgen $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset X$, für welche $\|x\|_{\ell_q^s(X)} < \infty$ gilt. Dabei ist die Norm $\|\cdot\|_{\ell_q^s(X)}$ definiert durch

$$\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\|_{\ell_q^s(X)} := \begin{cases} \Big[\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\big(2^{sk}\|x_k\|_X\big)^q\Big]^{1/q}, & \text{falls } q<\infty,\\ \sup_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{sk}\|x_k\|_X, & \text{falls } q=\infty. \end{cases}$$

Man beachte, dass $\ell_q^s(X) = L^q((\mathbb{N}_0, \mathscr{P}(\mathbb{N}_0), \zeta_s); X)$ mit dem gewichteten Zählmaß $\zeta_s$, definiert durch $\zeta_s(\{k\}) := 2^{sk}$ gilt. Insbesondere ist $\ell_q^s(X)$ ein Banachraum. Wir schreiben wie üblich $\ell_q^s := \ell_q^s(\mathbb{C})$.

Im Folgenden fixieren wir stets eine dyadische Zerlegung $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Die folgende Definition ist zentral für alle Typen von Sobolevräumen.

**4.5 Definition.** a) Seien $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1,\infty]$. Dann wird der Besovraum $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty\}$, wobei

$$\|u\|_{B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)} := \big\|\big(\operatorname{op}[\varphi_k]u\big)_{k\in\mathbb{N}_0}\big\|_{\ell_q^s(L^p(\mathbb{R}^n))}.$$

b) Für $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in [1,\infty)$ definiert man den Lizorkin-Triebel-Raum $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ durch $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty\}$, wobei

$$\|u\|_{F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)} := \big\|\big(\operatorname{op}[\varphi_k]u\big)_{k\in\mathbb{N}_0}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell_q^s)}.$$

c) Für $s \in \mathbb{R}$ und $p \in [1,\infty)$ wird der Bessel-Potentialraum $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) := F_{p2}^s(\mathbb{R}^n).$$

d) Für $p \in [1,\infty)$ und $s \in [0,\infty)$ wird der Sobolev-Slobodecki-Raum $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$W_p^s(\mathbb{R}^n) := \begin{cases} H_p^s(\mathbb{R}^n), & \text{falls } s \in \mathbb{N}_0,\\ B_{pp}^s(\mathbb{R}^n), & \text{falls } s \in (0,\infty)\setminus\mathbb{N}. \end{cases}$$

Die Räume $W_p^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{N}_0$, heißen auch (klassische) Sobolevräume.

© Robert Denk 26. 8. 2014

**4.6 Bemerkung.** a) Für $p, q < \infty$ lauten die Normen explizit

$$\|u\|_{B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)} = \Big[ \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{skq} \Big( \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathrm{op}[\varphi_k]u)(x)|^p dx \Big)^{q/p} \Big]^{1/q},$$
$$\|u\|_{F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)} = \Big[ \int_{\mathbb{R}^n} \Big( \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{skq} |(\mathrm{op}[\varphi_k]u)(x)|^q \Big)^{p/q} dx \Big]^{1/p}.$$

Im Fall $p = \infty$ bzw. $q = \infty$ ergeben sich die offensichtlichen Modifikationen. Im Folgenden wird aber an einigen Stellen $p, q < \infty$ vorausgesetzt, da nicht alle Sätze auch für die Grenzfälle unverändert gelten. Insbesondere spielen die Räume $B^s_{\infty,q}(\mathbb{R}^n)$ eine Sonderrolle.

b) Man kann zeigen, dass die Definition dieser Räume nicht von der Wahl der dyadischen Zerlegung abhängt im Sinn, dass verschiedene Wahlen von dyadischen Zerlegungen äquivalente Normen ergeben (siehe [9], Theorem 2.3.2).

c) Sei $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Da $\operatorname{supp}(\varphi_k \mathscr{F} u)$ kompakt ist, ist nach einem Satz von Paley und Wiener $u_k := \mathrm{op}[\varphi_k]u = \mathscr{F}^{-1}(\varphi_k \mathscr{F} u)$ holomorph in $\mathbb{C}^n$ (fortsetzbar). Insbesondere ist $u_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und somit eine reguläre Distribution. Weiter gilt

$$\mathrm{op}[\varphi_k]u = \mathscr{F}^{-1}(\varphi_k \mathscr{F} u) = (\mathscr{F}^{-1}\varphi_k) * u$$

mit der Funktion $\mathscr{F}^{-1}\varphi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

d) Nach Definition 4.2 (iii) gilt $|\xi|^{|\alpha|} \big|\partial^\alpha \varphi_k(\xi)\big| \le c_\alpha$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Michlin erfüllt, und es folgt $\mathrm{op}[\varphi_k] \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$, d.h. $\varphi_k$ ist ein Fourier-Multiplikator.

**4.7 Lemma.** *Sei $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \mathrm{op}[\varphi_k]u \quad \textit{in } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

*Beweis.* **(i)** Sei $\varphi^{(N)} := \sum_{k=N+1}^\infty \varphi_k$. Nach Definition einer dyadischen Zerlegung ist $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, und die Summe besteht an jeder Stelle nur aus endlich vielen nichttrivialen Summanden. Daher ist $\varphi^{(N)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Zu $m \in \mathbb{N}$ sei $p_m(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{|\alpha|\le m} (1+|x|^2)^m |\partial^\alpha f(x)|$, d.h. die Topologie von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ wird von den Seminormen $\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ erzeugt. Sei nun $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $K := \operatorname{supp} f$. Für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ gilt dann $\|\varphi^{(N)}\|_{C^m(K)} \to 0$ $(N \to \infty)$ sowie

$$p_m(\varphi^{(N)} f) \le C_m \|\varphi^{(N)}\|_{C^m(K)} p_m(f) \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Da $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt, gilt dies auch für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Damit erhalten wir

$$\varphi^{(N)} f \to 0 \quad \text{in } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{für alle } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

**(ii)** Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Nach Definition der Fourier-Transformation auf $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist $(\operatorname{op}[\varphi_k]u)(f) = u(f_k)$ mit $f_k := \mathscr{F}\varphi_k\mathscr{F}^{-1}f$. Da $\mathscr{F}^{-1}f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, gilt nach (i) $\varphi^{(N)}(\mathscr{F}^{-1}f) \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Da $\mathscr{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist, folgt

$$\mathscr{F}\big[\varphi^{(N)}(\mathscr{F}^{-1}f)\big] \to 0 \quad \text{in } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Da $u\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ stetig ist, erhält man

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} (\operatorname{op}[\varphi_k]u)(f) = \sum_{k=N+1}^{\infty} u(f_k) = u\Big(\mathscr{F}\big[\varphi^{(N)}(\mathscr{F}^{-1}f)\big]\Big) \to 0 \quad (N \to \infty)$$

für alle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Also gilt $\sum_{k=N+1}^{\infty} \operatorname{op}[\varphi_k]u \to 0$ $(N \to \infty)$ in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

**4.8 Satz.** *Seien $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1,\infty)$, $1 \le q_1 \le q_2 \le \infty$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

$$B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset B^s_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \subset B^s_{p,q_2}(\mathbb{R}^n) \subset B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \tag{4-1}$$

*sowie*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset B^{s-\varepsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{4-2}$$

*Beweis.* **(i)** Es gilt $\ell^s_{q_1} \subset \ell^s_{q_2}$ für $1 \le q_1 \le q_2 \le \infty$, woraus sofort (4-1) folgt.

**(ii)** Wir zeigen die inneren Inklusionen in (4-2). Sei $u \in B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|u\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{sk}\|\operatorname{op}[\varphi_k]u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\le \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-\varepsilon k}\Big) \sup_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{(2+\varepsilon)k}\|\operatorname{op}[\varphi_k]u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\le C\|u\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt $B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$. Ersetzt man $s$ durch $s-\varepsilon$, erhält man $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset B^{s-\varepsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$.

**(iii)** Zur Inklusion $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$: Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
2^{k(s+\varepsilon)}\|\operatorname{op}[\varphi_k]u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\le C2^{k(s+\varepsilon)}\|(1+|x|^2)^n \operatorname{op}[\varphi_k]u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&\le C2^{k(s+\varepsilon)} \sum_{|\alpha|\le 2n} \|\mathscr{F}^{-1}\partial^\alpha(\varphi_k\mathscr{F}f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&\le C2^{k(s+\varepsilon)} \sum_{|\alpha|\le 2n} \|\partial^\alpha(\varphi_k\mathscr{F}f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

$$
\begin{aligned}
&\leq C2^{k(s+\varepsilon)} \sum_{|\alpha|\leq 2n} \big\|(1+|\xi|^2)^n \partial^\alpha(\varphi_k \mathscr{F} f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \sum_{|\alpha|\leq 2n} \Big( \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{n+m} |\partial^\alpha \mathscr{F} f(\xi)|\Big) \\
&\qquad \cdot \sum_{|\alpha|\leq 2n} \Big( \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-m+s+\varepsilon} |\partial^\alpha \varphi_k(\xi)|\Big) \\
&\leq C \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{n+m} |\partial^\alpha \mathscr{F} f(\xi)|.
\end{aligned}
$$

Hier wurde im letzten Schritt Eigenschaft (4.2) (iii) verwendet. Da $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist, folgt $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

**(iv)** Wir zeigen noch $B^{s-\varepsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sei dazu $u \in B^{s-\varepsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen eine zweite dyadische Zerlegung $(\widetilde{\varphi}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $\widetilde{\varphi}_k = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$
\operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k] \operatorname{op}[\varphi_k] = \mathscr{F}^{-1}\widetilde{\varphi}_k\varphi_k\mathscr{F} = \mathscr{F}^{-1}\varphi_k\mathscr{F} = \operatorname{op}[\varphi_k].
$$

Nach Lemma 4.7 gilt

$$
\begin{aligned}
|u(\psi)| &= \Big| \sum_{k\in\mathbb{N}_0} (\operatorname{op}[\varphi_k]u)(\psi) \Big| \\
&= \Big| \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big(\operatorname{op}[\varphi_k]u\big)\big(\operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k]\psi\big) \Big| \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big|(\operatorname{op}[\varphi_k]u)\big(\operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k]\psi\big) \big| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{op}[\varphi_k]u)(x)(\operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k]\psi)(x)dx \Big| \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \Big( 2^{k(s-\varepsilon)} \|\operatorname{op}[\varphi_k]u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} 2^{-k(s-\varepsilon)} \|\operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k]\psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \Big) \\
&\leq \|u\|_{B^{s-\varepsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{B^{-s+\varepsilon}_{p',\infty}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Wegen $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset B^{-s+\varepsilon}_{p',\infty}(\mathbb{R}^n)$ folgen $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ sowie die Stetigkeit der Einbettung $B^{s-\varepsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

**4.9 Lemma.** *a) Für $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in (1,\infty)$ gilt*

$$
\begin{aligned}
B^s_{pq}(\mathbb{R}^n) \subset F^s_{pq}(\mathbb{R}^n) \subset B^s_{pp}(\mathbb{R}^n) \quad &\textit{falls } q \leq p, \\
B^s_{pp}(\mathbb{R}^n) \subset F^s_{pq}(\mathbb{R}^n) \subset B^s_{pq}(\mathbb{R}^n) \quad &\textit{falls } q \geq p.
\end{aligned}
$$

*Weiter gilt $B^s_{pp}(\mathbb{R}^n) = F^s_{pp}(\mathbb{R}^n)$ und*

$$
H^s_2(\mathbb{R}^n) = F^s_{22}(\mathbb{R}^n) = B^s_{22}(\mathbb{R}^n).
$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

*b) Es gilt für $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in (1,\infty)$ und $1 < q_1 < q_2 < \infty$*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset F^{s+\varepsilon}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n) \subset F^{s}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \subset F^{s}_{p,q_2}(\mathbb{R}^n) \subset F^{s-\varepsilon}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

*Beweis.* a) Sei $q \le p$. Wegen $\ell_q^s \subset \ell_p^s$ folgt $F^s_{pq}(\mathbb{R}^n) \subset F^s_{pp}(\mathbb{R}^n) = B^s_{pp}(\mathbb{R}^n)$ direkt nach Definition der Räume. Für $u \in B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ gilt mit $u_k := \operatorname{op}[\varphi_k]u$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{skq}|u_k(x)|^q\Big)^{p/q} dx\Big)^{1/p} \\
&= \Big\| \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{skq}|u_k|^q \Big\|^{1/q}_{L^{p/q}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{skq}\big\|\, |u_k|^q \,\big\|_{L^{p/q}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/q} \\
&= \big\|(u_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\big\|_{l^s_q(L^p(\mathbb{R}^n))} = \|u\|_{B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Analog gilt für $p \le q$ und $u \in F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)} &= \Big\|\Big(\int_{\mathbb{R}^n} 2^{skp}|u_k(x)|^p dx\Big)_{k\in\mathbb{N}_0}\Big\|^{1/p}_{\ell_{q/p}} \\
&\le \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \big\|(2^{skp}|u_k(x)|^p)_{k\in\mathbb{N}_0}\big\|_{\ell_{q/p}} dx\Big)^{1/p} \\
&= \|u\|_{F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt Teil a). Teil b) folgt nun direkt aus a) und Satz 4.8. □

Die folgende Aussage gilt wiederum auch für $p = 1$ und $q \in \{1,\infty\}$, der Beweis erfordert aber einige Modifikationen, auf welche wir hier verzichten.

**4.10 Lemma.** *Für $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in (1,\infty)$ sind $B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ und $F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ Banachräume.*

*Beweis.* Zu zeigen ist nur die Vollständigkeit. Sei dazu wieder $(\widetilde{\varphi}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine dyadische Zerlegung mit $\widetilde{\varphi}_k = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi_k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$.

Definiere $e \in L(B^s_{pq}(\mathbb{R}^n), \ell^s_q(L^p(\mathbb{R}^n)))$ durch

$$eu := \Big(\operatorname{op}[\varphi_k]u\Big)_{k\in\mathbb{N}_0} \quad (u \in B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)).$$

Dann ist $e$ nach Definition von $B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ eine Isometrie. Sei $r$ definiert durch

$$r\Big((f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\Big) := \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k]f_k \quad ((f_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \ell^s_q(L^p(\mathbb{R}^n))).$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

Nach Definition einer dyadischen Zerlegung und nach dem Satz von Michlin gilt $\operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k] \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$ mit $\|\operatorname{op}[\varphi_k]\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le C_1$ mit einer von $k$ unabhängigen Konstante $C_1 > 0$. Damit folgt unter Verwendung von Bemerkung 4.3

$$\begin{aligned}\big\|r\big((f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\big)\big\|_{B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)} &\le C\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{skq}\|\operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k]f_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/q}\\ &\le CC_1\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{skq}\|f_k\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/q} = \|(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\|_{\ell^s_q(L^p(\mathbb{R}^n))}.\end{aligned}$$

Somit gilt $r \in L(\ell^s_q(\mathbb{R}^n), B^s_{pq}(\mathbb{R}^n))$. Wegen $\operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k]\operatorname{op}[\varphi_k] = \operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k\varphi_k] = \operatorname{op}[\varphi_k]$ gilt

$$reu = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k]\operatorname{op}[\varphi_k]u = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\operatorname{op}[\varphi_k]u = u.$$

Somit ist $r$ eine Retraktion mit zugehöriger Koretraktion $e$. Da $\ell^s_q(L^p(\mathbb{R}^n))$ ein Banachraum ist, ist nach Bemerkung 1.8 c) auch $B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum.

Die Vollständigkeit von $F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ zeigt man analog. □

## b) Äquivalente Beschreibungen und Interpolationseigenschaft

Die folgenden Aussagen zeigen, dass in Spezialfällen die oben definierten Sobolevräume mit den klassischen Räumen übereinstimmen.

**4.11 Satz.** *Seien $s \in \mathbb{R}$ und $p \in (1,\infty)$. Dann gilt*

$$H^s_p(\mathbb{R}^n) = \big\{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} := \big\|\mathscr{F}^{-1}(1+|\cdot|^2)^{s/2}\mathscr{F}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty\big\},$$

*und $\|\cdot\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}$ ist eine zu $\|\cdot\|_{F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)}$ äquivalente Norm auf $H^s_p(\mathbb{R}^n)$.*

*Beweis.* **(i)** Sei $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Definiere $g := \mathscr{F}^{-1}(1+|\cdot|^2)^{s/2}\mathscr{F}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Zu $k \in \mathbb{N}_0$ sei $m_k(\xi) := 2^{sk}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\varphi_k(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$. Aus den Eigenschaften einer dyadischen Zerlegung folgt (unter Beachtung der Trägereigenschaft) $|\xi|^{|\alpha|}|\partial^\alpha m_k(\xi)| \le C_\alpha$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sowie, da die Summe nur aus endlich vielen Summanden besteht, auch

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0}|\xi|^{|\alpha|}|\partial^\alpha m_k(\xi)| \le C_\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n)$$

mit einer geänderten Konstanten $C_\alpha$. Wir definieren für $\xi \in \mathbb{R}^n$ die unendliche Matrix $M(\xi) \in L(\ell^0_2)$ durch

$$M(\xi)\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\big) := \big(m_k(\xi)x_0\big)_{k\in\mathbb{N}_0} \quad ((x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \ell^0_2).$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

Dann gilt

$$|\xi|^\alpha \big\|\partial^\alpha M(\xi)x\big\|_{\ell_2^0} = |\xi|^{|\alpha|}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} |\partial^\alpha m_k(\xi)|^2|x_0|^2\Big)^{1/2} \le C_\alpha |x_0| \le C_\alpha \|x\|_{\ell_2^0} \quad (x\in \ell_2^0).$$

Damit sind die Voraussetzungen für den Satz von Michlin im Raum $L^p(\mathbb{R}^n;\ell_2^0)$ (Satz B.2) erfüllt, und wir erhalten für $Tg := \big(\operatorname{op}[m_k]g\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit der Bezeichnung $\widetilde{g} := (g,0,0,\dots)^\top$

$$\|Tg\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell_2^0)} = \big\|\mathscr{F}^{-1}M\mathscr{F}\widetilde{g}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell_2^0)} \le C\|\widetilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell_2^0)} = C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\|u\|_{F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)} &= \Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{2sk}|\operatorname{op}[\varphi_k]u|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= \Big\|\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \big|\operatorname{op}[m_k]g\big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= \|Tg\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell_2^0)} \le C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|u\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Somit gilt $u\in F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$, und die Einbettung $F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)\subset H^s_p(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

**(ii)** Wir nehmen o.E. an, dass $\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\varphi_k(\xi) = 1$ $(\xi\in\mathbb{R}^n)$ gilt. Sei $u\in H^s_p(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$. Wir modifizieren die dyadische Zerlegung durch

$$\psi_k(\xi) := \frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{2^{ks}}\,\varphi_k(\xi) \quad (\xi\in\mathbb{R}^n,\ k\in\mathbb{N}_0).$$

Dann ist $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ wieder eine dyadische Zerlegung, und es gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\frac{2^{ks}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\,\psi_k(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\varphi_k(\xi) = 1 \quad (\xi\in\mathbb{R}^n).$$

Wieder sei $(\widetilde{\varphi}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine weitere dyadische Zerlegung mit $\widetilde{\varphi}_k = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi_k$. Dann gilt $\widetilde{\varphi}_k\psi_k = \psi_k$, und man erhält

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} &= \|\mathscr{F}^{-1}(1+|\cdot|^2)^{s/2}\mathscr{F}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= \Big\|\mathscr{F}^{-1}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\frac{2^{ks}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\,\psi_k(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathscr{F}u(\xi)\Big)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= \Big\|\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{ks}\operatorname{op}[\psi_k]u\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= \Big\|\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\operatorname{op}[\widetilde{\varphi}_k]\big(2^{ks}\operatorname{op}[\psi_k]u\big)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

Zu $\xi \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die unendliche Matrix $M(\xi) \in L(\ell_2^0)$ durch

$$M(\xi)\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\big) := (y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}, \quad \text{mit } y_0 := \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \widetilde{\varphi}_k(\xi)x_k,\ y_1 = y_2 = \ldots = 0.$$

Damit können wir schreiben

$$\begin{aligned}\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} &= \big\|\mathscr{F}^{-1}M\mathscr{F}\big(2^{ks}\operatorname{op}[\psi_k]u\big)_{k\in\mathbb{N}_0}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell_2^0)} \\ &\le C\big\|\big(2^{ks}\operatorname{op}[\psi_k]u\big)_{k\in\mathbb{N}_0}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell_2^0)} \\ &\le C\|u\|_{F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Hier wurde wieder der Satz von Michlin in der Hilbertraum-wertigen Version (Satz B.2) verwendet. □

**4.12 Satz.** *Seien $s \in \mathbb{N}$ und $p \in (1,\infty)$. Dann gilt*

$$W_p^s(\mathbb{R}^n) = \Big\{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)} := \Big(\sum_{|\alpha|\le s}\|\partial^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p} < \infty\Big\},$$

*und $\|\cdot\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)}$ ist eine zu $\|\cdot\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)}$ (und damit zu $\|\cdot\|_{F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)}$) äquivalente Norm auf $H_p^s(\mathbb{R}^n)$.*

*Beweis.* Die Funktion $\xi \mapsto \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}$, $|\alpha| \le s$, erfüllt die Michlin-Bedingung. Daher gilt

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\mathscr{F}^{-1}(\,\cdot\,)^\alpha\mathscr{F}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|\mathscr{F}^{-1}(1+|\cdot|^2)^{s/2}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. es gilt $W_p^s(\mathbb{R}^n) \subset H_p^s(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial_j^s u = (\frac{\partial}{\partial x_j})^s u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(j = 1,\ldots,n)$, und sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(t) = 0$ für $|t| \le \frac12$, $\varphi(t) = 1$ für $t \ge 1$, $\varphi(t) \ge 0$ für $t \ge 0$ sowie $\varphi(t) = -\varphi(-t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Dann erfüllen sowohl $\varphi$ die Michlin-Bedingung in $\mathbb{R}$ als auch

$$\xi \mapsto \frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{1+\sum_{j=1}^n(\varphi(\xi_j)\xi_j)^s}$$

die Michlin-Bedingung in $\mathbb{R}^n$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} &\le C\Big\|\mathscr{F}^{-1}\Big(1+\sum_{j=1}^n\varphi(\xi_j)^s\xi_j^s\Big)\mathscr{F}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C\Big(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n\Big\|\,\big\|\mathscr{F}_1^{-1}\varphi(\xi_j)^s\xi_j^s\mathscr{F}_1 f\big\|_{L^p(\mathbb{R})}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}\end{aligned}$$

© Robert Denk 26. 8. 2014

$$\leq C\Big(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|\partial_j^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)$$
$$\leq C\|u\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Hier ist $\mathscr{F}_1$ die eindimensionale Fourier-Transformation. □

**4.13 Bemerkung.** a) Es wurde im Beweis von Satz 4.12 gezeigt, dass auch

$$\Big(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|\partial_j^s u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p}$$

eine äquivalente Norm auf $H_p^s(\mathbb{R}^n) = W_p^s(\mathbb{R}^n)$ ist.

b) Die „klassischen“ Sobolevräume sind die Sobolev-Slobodecki-Räume

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) = W_p^s(\mathbb{R}^n) \;\text{ für } s \in \mathbb{N}_0 \text{ und}$$
$$B_{pp}^s(\mathbb{R}^n) =: W_p^s(\mathbb{R}^n) \;\text{ für } s \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}_0$$

sowie die Bessel-Potentialräume $H_p^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$. Nach den obigen Sätzen gilt

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) \subset B_{pp}^s(\mathbb{R}^n), \quad \text{falls } p \in [2,\infty),$$
$$B_{pp}^s(\mathbb{R}^n) \subset H_p^s(\mathbb{R}^n), \quad \text{falls } p \in (1,2],$$
$$H_p^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n), B_{pp}^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \subset B_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \subset H_p^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n), B_{pp}^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$.

c) Für $s = 0$ gilt

$$F_{p,2}^0(\mathbb{R}^n) = H_p^0(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n),$$

und damit insbesondere

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \approx \big\|(\mathrm{op}[\varphi_k]u)_{k\in\mathbb{N}_0}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\ell_2^0)}.$$

Derartige Zerlegungen heißen auch Paley-Littlewood-Zerlegungen. Man beachte, dass

$$B_{pp}^0(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n) \;\text{ für } p \neq 2.$$

**4.14 Satz** (Interpolation von Besovräumen)**.** *Seien $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \neq s_1$, $p \in (1,\infty)$, $q, q_0, q_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$. Dann gilt*

$$\big(B_{p,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)\big)_{\theta,q} = B_{pq}^s(\mathbb{R}^n),$$

*wobei $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. Im Falle $q_0 < \infty$ gilt auch*

$$\big[B_{p,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)\big]_\theta = B_{pq}^s(\mathbb{R}^n),$$

*wobei $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.*

*Beweis.* Wir betrachten die Operatoren $e$ und $r$ aus dem Beweis von Lemma 4.10. Wegen $B^{s_i}_{p,q_i}(\mathbb{R}^n) \subset B^{\max\{s_1,s_2\}+\varepsilon}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ (Satz 4.8) ist $(B^{s_0}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n), B^{s_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n))$ ein Interpolationspaar. Da für $i = 0, 1$

$$r \in L\big(\ell^{s_i}_{q_i}(L^p(\mathbb{R}^n)), B^{s_i}_{p,q_i}(\mathbb{R}^n)\big)$$

eine Retraktion mit Koretraktion

$$e \in L\big(B^{s_i}_{p,q_i}(\mathbb{R}^n), \ell^{s_i}_{q_i}(L^p(\mathbb{R}^n))\big)$$

ist, folgt

$$\|u\|_{(B^{s_0}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n), B^{s_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q}} \approx \big\|(\mathrm{op}[\varphi_k]u)_{k\in\mathbb{N}_0}\big\|_{(\ell^{s_0}_{q_0}(L^p(\mathbb{R}^n)), \ell^{s_1}_{q_1}(L^p(\mathbb{R}^n)))_{\theta,q}}.$$

Ähnlich wie bei der Interpolation der $L^p$-Räume kann man zeigen, dass

$$\Big(\ell^{s_0}_{q_0}(L^p(\mathbb{R}^n)), \ell^{s_1}_{q_1}(L^p(\mathbb{R}^n))\Big)_{\theta,q} = \ell^s_q(L^p(\mathbb{R}^n)).$$

Dies zeigt die erste Behauptung.

Analog folgt die Behauptung über komplexe Interpolation aus

$$\big[\ell^{s_0}_{q_0}(L^p(\mathbb{R}^n)), \ell^{s_1}_{q_1}(L^p(\mathbb{R}^n))\big]_\theta = \ell^s_q(L^p(\mathbb{R}^n)).$$

□

**4.15 Satz** (Interpolation von Lizorkin-Triebel-Räumen)**.** *Seien $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \neq s_1$, $p_0, p_1, q_0, q_1 \in (1, \infty)$, $\theta \in (0, 1)$. Definiere $s, p, q$ durch*

$$s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1,\ \tfrac{1}{p} = \tfrac{1-\theta}{p_0} + \tfrac{\theta}{p_1},\ \tfrac{1}{q} = \tfrac{1-\theta}{q_0} + \tfrac{\theta}{q_1}.$$

*Dann gilt*

$$\begin{aligned}\big(F^{s_0}_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n), F^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)\big)_{\theta,q} &= B^s_{pq}(\mathbb{R}^n),\\ \big[F^{s_0}_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n), F^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)\big]_\theta &= F^s_{pq}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

*Insbesondere gilt wegen $H^s_p(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$:*

$$\begin{aligned}\big(H^{s_0}_{p_0}(\mathbb{R}^n), H^{s_1}_{p_1}(\mathbb{R}^n)\big)_{\theta,q} &= B^s_{pq}(\mathbb{R}^n),\\ \big[H^{s_0}_{p_0}(\mathbb{R}^n), H^{s_1}_{p_1}(\mathbb{R}^n)\big]_\theta &= H^s_p(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Der Beweis dieses Satzes folgt mit einem Retraktions-Koretraktions-Argument genauso wie im Beweis von Satz 4.14 aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}\big(L^{p_0}(\mathbb{R}^n;\ell^{s_0}_{q_0}), L^{p_1}(\mathbb{R}^n;\ell^{s_1}_{q_1})\big)_{\theta,q} &= L^p\big(\mathbb{R}^n; (\ell^{s_0}_{q_0}, \ell^{s_1}_{q_1})_{\theta,q}\big),\\ \big[L^{p_0}(\mathbb{R}^n;\ell^{s_0}_{q_0}), L^{p_1}(\mathbb{R}^n;\ell^{s_1}_{q_1})\big]_\theta &= L^p\big(\mathbb{R}^n; [\ell^{s_0}_{q_0}, \ell^{s_1}_{q_1}]_\theta\big),\end{aligned}$$

welche hier nicht bewiesen werden.

© Robert Denk 26. 8. 2014

**4.16 Bemerkung.** Seien $0 < s < k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Satz 4.15

$$B^s_{pq}(\mathbb{R}^n) = \big(L^p(\mathbb{R}^n), W^k_p(\mathbb{R}^n)\big)_{s/k,q}.$$

Dies wird häufig als eine Definition der Besovräume verwendet.

**4.17 Korollar.** *Seien $s \in \mathbb{R}$ und $p, q \in (1, \infty)$.*

*a) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $\partial^\alpha \in L(H^s_p(\mathbb{R}^n), H^{s-|\alpha|}_p(\mathbb{R}^n))$ und $\partial^\alpha \in L(B^s_{pq}(\mathbb{R}^n), B^{s-|\alpha|}_{pq}(\mathbb{R}^n))$.*

*b) Zu $r \in \mathbb{R}$ sei $\Lambda_r := \operatorname{op}[(1 + |\cdot|^2)^{r/2}] = \mathscr{F}^{-1}(1 + |\cdot|^2)^{r/2}\mathscr{F}(= (1-\Delta)^{r/2})$. Dann gilt $\Lambda_r \in L_{\text{Isom}}(H^s_p(\mathbb{R}^n), H^{s-r}_p(\mathbb{R}^n))$ und $\Lambda_r \in L_{\text{Isom}}(B^s_{pq}(\mathbb{R}^n), B^{s-r}_{pq}(\mathbb{R}^n))$.*

*Beweis.* Beide Aussagen sind klar für $H^s_p(\mathbb{R}^n)$, wobei für a) verwendet wird, dass $\xi \mapsto \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{|\alpha|/2}}$ die Michlin-Bedingung erfüllt. Da nach Satz 4.15 die Besovräume durch Interpolation aus den Bessel-Potentialräumen entstehen, folgt die Behauptung für $B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ mit reeller Interpolation. □

## c) Spurräume und Sobolevräume in Gebieten

Der Begriff der Sobolevräume lässt sich leicht vom Ganzraum auf Gebiete des $\mathbb{R}^n$ übertragen. Man beachte, dass in der folgenden Definition keine Glattheit des Randes vorausgesetzt wird.

**4.18 Definition.** Seien $p, q \in [1, \infty]$ und $s \in \mathbb{R}$. Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiert man

$$H^s_p(\Omega) := \{u \in \mathscr{D}'(\Omega) : \exists\, \widetilde{u} \in H^s_p(\mathbb{R}^n) : u = \widetilde{u}|_\Omega\}$$

mit der kanonischen Norm

$$\|u\|_{H^s_p(\Omega)} := \inf\big\{\|\widetilde{u}\|_{H^s_p(\mathbb{R}^n)} : u = \widetilde{u}|_\Omega\big\}.$$

Man beachte dabei, dass die Einschränkung $\widetilde{u}|_\Omega$ einer Distribution $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert wird durch $\widetilde{u}|_\Omega := \widetilde{u}|_{\mathscr{D}(\Omega)}$.

Analog wird $B^s_{pq}(\Omega)$ definiert. Wie im $\mathbb{R}^n$ setzt man für $s \in [0, \infty)$

$$W^s_p(\Omega) := \begin{cases} H^s_p(\Omega), & \text{falls } s \in \mathbb{N}_0, \\ B^s_{pp}(\Omega), & \text{falls } s \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die Aussagen über die Spurmethode erlaubt es, den Spurraum von Sobolevräumen in Gebieten zu bestimmen. Wir betrachten zunächst den Halbraum $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

© Robert Denk 26. 8. 2014

**4.19 Satz.** *Sei $p \in (1,\infty)$. Dann gilt $W_p^1(\mathbb{R}^n_+) = V(p, \frac{1}{p}, W_p^1(\mathbb{R}^{n-1}), L^p(\mathbb{R}^{n-1}))$, wobei die Identifizierung $L^p(\mathbb{R}^n_+) = L^p((0,\infty), L^p(\mathbb{R}^{n-1}))$ verwendet wurde, bei welcher eine Funktion $u \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$ mit der Funktion $x_n \mapsto u(\cdot, x_n)$ identifiziert wird.*

*Somit ist die Spurabbildung*

$$\gamma_0 \colon u \mapsto u|_{\mathbb{R}^{n-1}},\ W_p^1(\mathbb{R}^n_+) \to B_{pp}^{1-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

*wohldefiniert und surjektiv, und die Norm $\|v\|_{B_{pp}^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})}$ ist äquivalent zur Spurnorm $\inf\{\|u\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n_+)} : \gamma_0 u = v\}$.*

*Beweis.* Die Norm auf $V(p, \frac{1}{p}, W_p^1(\mathbb{R}^{n-1}), L^p(\mathbb{R}^{n-1}))$ ist nach Definition dieses Raums gegeben durch

$$\|u\|_{L^p((0,\infty);W_p^1(\mathbb{R}^{n-1}))} + \|\partial_n u\|_{L^p((0,\infty);L^p(\mathbb{R}^{n-1}))}$$

und damit offensichtlich äquivalent zur Norm $\|u\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n_+)} \approx \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$. Unter Verwendung der im Satz angegebenen Identifizierung erhält man also

$$W_p^1(\mathbb{R}^n_+) = V(p, \tfrac{1}{p}, W_p^1(\mathbb{R}^{n-1}), L^p(\mathbb{R}^{n-1})).$$

Wegen $(L^p(\mathbb{R}^{n-1}), W_p^1(\mathbb{R}^{n-1}))_{1-1/p,p} = B_{pp}^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ folgt

$$W_p^1(\mathbb{R}^n_+) \subset BC([0,\infty); B_{pp}^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})),$$

und die Spur $\gamma_0 \colon W_p^1(\mathbb{R}^n_+) \to B_{pp}^{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1}),\ u \mapsto u(0)$ ist wohldefiniert. Die Surjektivität und Äquivalenz der Normen ist gerade die Aussage des Spursatzes 2.19. □

**4.20 Bemerkung.** Die Aussage wurde der Einfachheit halber nur für $W_p^1(\mathbb{R}^n_+)$ formuliert. Man kann aber mit denselben Methoden und einer leichten Variation des Raums $V(p, \theta, X_1, X_0)$ auch folgende Aussage zeigen: Seien $k \in \mathbb{N}$ und $p \in (1,\infty)$. Dann ist die Spurabbildung $\gamma_0 \colon W_p^k(\mathbb{R}^n_+) \to B_{pp}^{k-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ wohldefiniert und surjektiv. Tatsächlich ist $\gamma_0$ eine Retraktion, d.h. es existiert eine zugehörige Koretraktion $e_+ \in L(B_{pp}^{k-1/p}(\mathbb{R}^{n-1}), W_p^k(\mathbb{R}^n_+))$ (Fortsetzungsoperator).

**4.21 Korollar.** *Seien $k \in \mathbb{R}^n$ und $\Omega$ ein gleichmäßiges $C^k$-Gebiet. Dann ist die Spurabbildung*

$$\gamma_0 \colon W_p^k(\Omega) \to B_{pp}^{k-1/p}(\partial\Omega),\ u \mapsto u|_{\partial\Omega}$$

*wohldefiniert, stetig und eine Retraktion.*

*Beweisidee.* Dies folgt aus der entsprechenden Aussage im Fall des Halbraums mit Hilfe von Lokalisierung (mit $C^k$-Diffeomorphismen) und einer Partition der Eins. □

# A. Integralungleichungen

**A.1 Worum geht's?** Hier wird die wichtige Hardy-Young-Ungleichung wiedergegeben, welche in der Integrationstheorie der gewichteten $L^p$-Räume die Rolle der Höderschen Ungleichung spielt. Wie üblich, schreiben wir $L^p_*((0,\infty)) := L^p((0,\infty), \frac{dt}{t})$.

**A.2 Satz** (Hardy-Young-Ungleichung)**.** *Seien $T \in (0,\infty]$, $\alpha \in (0,\infty)$, $p \in (1,\infty)$. Dann gilt für jede nichtnegative messbare Funktion $\varphi\colon (0,T) \to \mathbb{R}$*

$$\int_0^T t^{-\alpha p}\Big(\int_0^t \varphi(s)\frac{ds}{s}\Big)^p \frac{dt}{t} \le \alpha^{-p}\int_0^T s^{-\alpha p}\varphi(s)^p\frac{ds}{s}, \tag{1-1}$$

$$\int_0^T t^{\alpha p}\Big(\int_t^T \varphi(s)\frac{ds}{s}\Big)^p \frac{dt}{t} \le \alpha^{-p}\int_0^T s^{\alpha p}\varphi(s)^p\frac{ds}{s}. \tag{1-2}$$

**A.3 Korollar.** *Seien $X$ ein Banachraum, $T \in (0,\infty]$, $\theta \in (0,1)$, $p \in [1,\infty]$. Sei $u\colon (0,T) \to X$ eine Funktion mit $t \mapsto t^\theta u(t) \in L^p_*((0,T);X)$. Dann gilt für $v(t) := \frac{1}{t}\int_0^t u(s)ds$ $(t \in (0,T))$ die Abschätzung*

$$\|t \mapsto t^\theta v(t)\|_{L^p_*((0,T);X)} \le \frac{1}{1-\theta}\|t \mapsto t^\theta u(t)\|_{L^p_*((0,T);X)}.$$

*Beweis.* Dies folgt sofort aus Ungleichung (1-1), angewendet auf $\varphi(s) = s|u(s)|$, mit $\alpha = \theta - 1$. □

© Robert Denk 26. 8. 2014

# B. Der Satz von Michlin

**B.1 Worum geht's?** Der Satz von Michlin ist ein zentraler Satz, um die $L^p$-Stetigkeit von Operatoren zu beweisen, welche mit Hilfe der Fourier-Transformation definiert sind bzw. beschrieben werden können. Wir geben hier eine Hilbertraum-wertige Version an, welche im Abschnitt über Sobolevräume verwendet werden kann.

Im Folgenden sei $[x]$ die Gauß-Klammer, d.h. die größte ganze Zahl, welche $\leq x$ ist.

**B.2 Satz** (Satz von Michlin)**.** *Sei $p \in (1,\infty)$, sei $H$ ein komplexer Hilbertraum, und sei $M \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; L(H))$. Es gelte für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq [\frac{n}{2}]+1$:*

$$|\xi|^{|\alpha|} \|\partial^\alpha M(\xi)\|_{L(H)} \leq C_\alpha \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

*Definiere* $\operatorname{op}[M]$ *durch* $\operatorname{op}[M]u := \mathscr{F}^{-1} M \mathscr{F} u$*, wobei* $\mathscr{F} \colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; H) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; H)$ *die $H$-wertige Fouriertransformation bezeichne, welche auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; H)$ wie üblich durch*

$$(\mathscr{F}\varphi)(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; H))$$

*definiert ist. Dann ist* $\operatorname{op}[M] \in L(L^p(\mathbb{R}^n; H))$ *und*

$$\|\operatorname{op}[M]\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n;H))} \leq C \max_{|\alpha| \leq [\frac{n}{2}]+1} C_\alpha,$$

*wobei $C$ nur von $p, n$ und $H$ abhängt.*

© Robert Denk 26. 8. 2014

# Literatur

[1] Adams, R. A., Fournier, J.: *Sobolev spaces.* 2nd edition, Academic Press, Amsterdam etc., 2003.

[2] Amann, H.: *Linear and quasilinear parabolic problems I.* Birkhäuser, Basel etc., 1995.

[3] Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M., Neubrander, F.: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[4] Bergh, J., Löfström, J.: *Interpolation spaces. An introduction.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223, Springer, Berlin., 1976.

[5] Engel, K.-J., Nagel, R.: *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Springer, New York etc., 2000.

[6] Hummel, F.: Interpolationsräume und nichtganzzahlige Sobolevräume. Bachelorarbeit, Universität Konstanz, 2012.

[7] Lunardi, A.: *Interpolation Theory.* 2nd edition, Lecture Notes Scuola Normale Superiore Pisa, 2009.

[8] Maz'ya, V. G.: *Sobolev Spaces* Springer, Berlin etc. , 1985.

[9] Triebel, H.: *Interpolation. Function Spaces. Differential Operators.* North-Holland, Amsterdam etc., 1978.

© Robert Denk 26. 8. 2014