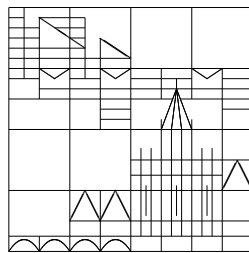


Skript zur Vorlesung

Funktionentheorie

Sommersemester 2022

Robert Denk



Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 22.07.2022

Inhaltsverzeichnis

1	Holomorphe Funktionen	3
	a) Definition und erste Eigenschaften	3
	b) Integration	11
2	Der Cauchysche Integralsatz und die Sätze von Morera und Liouville .	19
3	Isolierte Singularitäten und Laurentreihen	24
4	Der Residuensatz	33
	a) Der Residuensatz	33
	b) Homologie und Homotopie	38
5	Der Wertebereich holomorpher Funktionen	44
6	Folgen holomorpher Funktionen und der Riemannsche Abbildungssatz	48
	a) Folgen holomorpher Funktionen	48
	b) Der Riemannsche Abbildungssatz	51
	Literatur	55
	Index	56

1. Holomorphe Funktionen

1.1 Worum geht's? Der zentrale Begriff dieser Vorlesung sind holomorphe Funktionen. Zunächst einmal bedeutet Holomorphie komplexe Differenzierbarkeit, ähnlich wie in der Analysis II schon die Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n betrachtet wurde. Hier ist die Verallgemeinerung sogar noch leichter als in der Analysis II: Sei $G \subset \mathbb{C}$ und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f komplex differenzierbar an der Stelle $z \in G$, falls der Grenzwert

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}$$

existiert.

Mit der Identifizierung $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, scheint es sich hier um einen Spezialfall der Analysis II zu handeln. Die komplexe Differenzierbarkeit ist aber viel mehr, wie wir später sehen werden. Dieser Abschnitt behandelt die fundamentalen Definitionen und die ersten einfachen Aussagen.

Die Funktionentheorie ist eine wunderschöne und extrem leistungsfähige Theorie, und wir werden später viele überraschende Aussagen über holomorphe Funktionen kennenlernen, zum Teil mit tiefliegenden Beweisen. Es geht aber ganz einfach los.

a) Definition und erste Eigenschaften

Im folgenden werden wir (fast) immer folgende Schreibweisen verwenden: $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $f = u + iv$ mit $u, v: G \rightarrow \mathbb{R}$.

Da \mathbb{C} sowohl ein \mathbb{R} -Vektorraum (der Dimension 2) als auch ein \mathbb{C} -Vektorraum (der Dimension 1) ist, müssen wir hier genauer hinschauen:

1.2 Lemma. a) Eine Abbildung $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann \mathbb{R} -linear, falls

$$T(z) = T(1)x + T(i)y = \lambda z + \mu \bar{z} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

wobei $\lambda := \frac{1}{2}(T(1) - iT(i))$ und $\mu := \frac{1}{2}(T(1) + iT(i))$.

b) Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann \mathbb{C} -linear, falls

$$T(i) = iT(1)$$

(d.h. falls $\mu = 0$). In diesem Fall ist $T(z) = T(1)z$.

Beweis. Die erste Gleichheit in a) ist nichts als die Definition der \mathbb{R} -Linearität. Setzt man $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ ein, erhält man die zweite Gleichheit in a). Teil b) ist klar nach a). \square

Mit etwas unsauberer Schreibweise (aber ganz nach der ursprünglichen Definition von \mathbb{C} in Analysis I) identifizieren wir ohne Änderung der Bezeichnung $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ und schreiben $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $f = u + iv = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Jede \mathbb{R} -lineare Abbildung $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich schreiben in der Form

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}x + t_{12}y \\ t_{21}x + t_{22}y \end{pmatrix}.$$

Wie üblich bei linearen Abbildungen, schreiben wir oft Tz statt $T(z)$.

1.3 Lemma. Sei $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) T ist \mathbb{C} -linear.

(ii) In der Matrix-Darstellung von T gilt $t_{12} = -t_{21}$ und $t_{11} = t_{22}$, d.h. für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & -t_{21} \\ t_{21} & t_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und somit } Tz = cz \text{ mit } c := t_{11} + it_{21}.$$

Beweis. Nach Lemma 1.2 ist (i) äquivalent zur Bedingung $T(i) = iT(1)$. Wegen

$$T(i) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix}$$

und

$$iT(1) = i \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_{21} \\ t_{11} \end{pmatrix}$$

bedeutet das gerade also gerade $t_{12} = -t_{21}$ und $t_{11} = t_{22}$. □

Wir kommen jetzt zur zentralen Definition.

1.4 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ nichtleer und offen.

a) Eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $z \in G$, falls der Grenzwert

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}$$

existiert.

b) Eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph in G , falls f in jedem $z \in G$ komplex differenzierbar ist. f heißt holomorph an der Stelle $z \in G$, falls eine offene Umgebung U von z existiert, so dass $f|_U$ holomorph in U ist.

c) Eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ganz, falls f holomorph in \mathbb{C} ist.

1.5 Bemerkung. a) In obiger Definition 1.4 a) ist der Limes $h \rightarrow 0$ natürlich als $h \rightarrow 0, h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zu verstehen.

b) Eine äquivalente Definition der Holomorphie, die näher an der bisherigen Ideologie der Differenzierbarkeit liegt, ist folgende: Eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph in $z \in G$, falls eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $T_z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ existiert mit

$$f(z+h) = f(z) + T_z h + |h| \cdot r(z, h) \quad (h \text{ klein}),$$

wobei $\lim_{h \rightarrow 0} r(z, h) = 0$. In diesem Fall setze $f'(z) := T_z$.

Dies ist die übliche Definition der Differenzierbarkeit in normierten Räumen, wobei hier in natürlicher Weise die \mathbb{C} -Linearität gefordert wird. Die Äquivalenz der Definitionen ist klar nach Lemma 1.2, denn jede \mathbb{C} -lineare Abbildung T ist von der Form $Th = c \cdot h$ mit einem $c \in \mathbb{C}$. Nach Definition 1.4 ist $f'(z) := c$.

1.6 Beispiele. a) $f(z) := z^n$. Wegen

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1} \rightarrow nz_0^{n-1} \quad (z \rightarrow z_0)$$

ist f holomorph in ganz \mathbb{C} , also eine ganze Funktion.

b) $f(z) := |z|^2 = z\bar{z}$: An der Stelle $z_0 = 0$ ist f komplex differenzierbar wegen

$$\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{|h|^2}{h} = \bar{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Für $z_0 \neq 0$ ist f nicht komplex differenzierbar, denn

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{(z_0+h)(\bar{z}_0+\bar{h}) - z_0\bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{z}_0 h + z_0 \bar{h} + |h|^2}{h} = \underbrace{\frac{\bar{z}_0 + \bar{h}}{h}}_{\rightarrow \bar{z}_0 \text{ (} h \rightarrow 0 \text{)}} + z_0 \frac{\bar{h}}{h},$$

und der Limes $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$ existiert nicht. Die Funktion f ist also nirgends holomorph.

1.7 Bemerkung. Für das Rechnen mit komplex differenzierbaren Funktionen gelten dieselben Regeln wie im Reellen (mit den wörtlich gleichen Beweisen), etwa Produktregel, Kettenregel, Quotientenregel etc.

1.8 Satz (Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen). Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $f = u + iv: G \rightarrow \mathbb{C}$ und $z \in G$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist komplex differenzierbar in z .

(ii) f ist reell differenzierbar in z , und die Ableitung $f'(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist \mathbb{C} -linear.

(iii) f ist reell differenzierbar in z , und es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_x u(z) &= \partial_y v(z), \\ \partial_y u(z) &= -\partial_x v(z).\end{aligned}$$

Beweis. (i) \Leftrightarrow (ii) ist klar nach Definition bzw. Bemerkung 1.5.

(ii) \Leftrightarrow (iii). Die reelle Ableitung von f an der Stelle z ist gegeben durch

$$f'(z) = \begin{pmatrix} \partial_x u(z) & \partial_y u(z) \\ \partial_x v(z) & \partial_y v(z) \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 1.3 ist $f'(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann \mathbb{C} -linear, falls die Cauchy-Riemann-Dgl. gelten. \square

1.9 Bemerkung. Betrachtet man für eine reell differenzierbare Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ die Ableitung $T := f'(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, so lässt sich die komplexe Differenzierbarkeit nach Lemma 1.2 auf verschiedene Weise ausdrücken. Man definiert

$$\begin{aligned}\partial_x f &:= \partial_x u + i\partial_x v, & \text{d.h. } \partial_x f(z) &= T(1), \\ \partial_y f &:= \partial_y u + i\partial_y v, & \text{d.h. } \partial_y f(z) &= T(i), \\ \partial f &:= \partial_z f := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f), & \text{d.h. } \partial f(z) &= \frac{1}{2}(T(1) - iT(i)) =: \lambda, \\ \bar{\partial} f &:= \partial_{\bar{z}} f := \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f), & \text{d.h. } \bar{\partial} f(z) &= \frac{1}{2}(T(1) + iT(i)) =: \mu.\end{aligned}$$

Die letzten beiden Definitionen erklären sich formal dadurch, dass man z und \bar{z} als unabhängige Variablen betrachtet. Aus $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ erhält man

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{i}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2}$$

und damit

$$\partial_z f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \partial_x f - \frac{i}{2} \partial_y f.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ in $z \in G$ reell differenzierbar. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist in z komplex differenzierbar.
- (ii) Die Cauchy-Riemann-Dgl. gelten.
- (iii) Es ist $i\partial_x f(z) = \partial_y f(z)$.
- (iv) Es ist $\bar{\partial} f(z) = 0$.

In diesem Fall ist $f'(z) = \partial_x f(z) = \partial_z f(z)$.

Zum Beispiel für die Funktion $f(z) := \bar{z}$ gilt $\partial_{\bar{z}} f(z) = 1$, d.h. f ist an keiner Stelle komplex differenzierbar.

Im folgenden werden wir auch f_x statt $\partial_x f$ etc. schreiben.

Ein Gebiet (in \mathbb{C} oder in \mathbb{R}^n) ist nach Definition eine offene und zusammenhängende Menge. Dazu ist folgender Satz nützlich (der genauso in \mathbb{R}^n gilt, hier aber in \mathbb{C} formuliert wird). Dabei verwenden wir die übliche Schreibweise

$$B(z, \varepsilon) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}$$

für offene Kugeln (Kreisscheiben) in \mathbb{C} .

1.10 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Dann sind äquivalent:*

(i) G ist zusammenhängend.

(ii) G ist wegzusammenhängend.

In diesem Fall kann der Weg in (ii) stückweise achsenparallel gewählt werden.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Zu festem $z_0 \in G$ definiere die Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(z) := \begin{cases} 1, & \text{falls es einen Weg von } z_0 \text{ nach } z \text{ gibt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun $z \in G$. Wähle eine offene Kreisscheibe $B(z, \varepsilon) \subset G$. Da jeder Punkt in $B(z, \varepsilon)$ mit z durch einen Weg verbunden werden kann, gilt $f(w) = 1$ für alle $w \in B(z, \varepsilon)$, falls $f(z) = 1$. Ist andererseits $f(z) = 0$, so folgt aus dem gleichen Grund $f(w) = 0$ für alle $w \in B(z, \varepsilon)$. Also ist $f|_{B(z, \varepsilon)}$ konstant und damit ist f stetig.

Es gilt $G = f^{-1}(\{0\}) \dot{\cup} f^{-1}(\{1\})$, wobei $f^{-1}(\{1\})$ offen und abgeschlossen in G und nichtleer ist. Da G zusammenhängend ist, folgt $f^{-1}(\{1\}) = G$, d.h. G ist wegzusammenhängend.

Ersetzt man in diesem Beweis „Weg“ durch „stückweise achsenparallelen Weg“, so sieht man den Zusatz.

(ii) \Rightarrow (i). Angenommen es gibt eine Zerlegung $G = U \dot{\cup} (G \setminus U)$ mit U offen und abgeschlossen in G und $\emptyset \neq U \neq G$. Wähle zwei Punkte $z \in U$ und $w \in G \setminus U$. Da G wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ mit $\gamma(a) = z$, $\gamma(b) = w$. Dann ist $\gamma^{-1}(U) \subset [a, b]$ offen und abgeschlossen mit $\emptyset \neq \gamma^{-1}(U) \neq [a, b]$. Dies ist aber ein Widerspruch, da das Intervall $[a, b]$ zusammenhängend ist. \square

Man beachte beim Beweis dieses Satzes, dass die Offenheit in G betrachtet wird, d.h. die Offenheit als Teilmenge des metrischen Raums G , der mit der Einschränkung

der kanonischen Metrik auf \mathbb{C} versehen wird. Die Richtung von (ii) \Rightarrow (i) gilt auch ohne die Voraussetzung der Offenheit von G , wie man am Beweis sieht.

1.11 Definition. Sei $G \neq \emptyset$ offen. Zwei Punkte $z_1, z_2 \in G$ heißen wegäquivalent, falls es ein Weg in G gibt, der z_1 mit z_2 verbindet.

Eine maximale zusammenhängende Teilmenge von G heißt eine Zusammenhangskomponente von G .

Die Zusammenhangskomponenten von G sind offensichtlich Äquivalenzklassen bzgl. der Wegäquivalenz. Man sieht leicht, dass die Zusammenhangskomponenten von G offen und abgeschlossen bezüglich G sind.

1.12 Korollar. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

a) Eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann konstant in G , wenn f holomorph in G ist mit $f' = 0$.

b) Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \in \mathbb{R} \quad (z \in G)$. Dann ist f konstant.

c) Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| = 1 \quad (z \in G)$. Dann ist f konstant.

Beweis. a) Falls f holomorph ist mit $f' = 0$, so folgt

$$0 = f_x(z) = u_x(z) + iv_x(z) \quad (z \in G).$$

Aus den Cauchy-Riemann-Dgl. erhalten wir dann auch $u_y = 0 = v_y$ in G , d.h. $\nabla u = \nabla v = 0$ in G . Da G wegzusammenhängend ist, folgt $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ in G .

b) Aus $v = 0$ erhalten wir $v_x = v_y = 0$ und nach den Cauchy-Riemann-Dgl. $u_x = u_y = 0$, also $f = \text{const}$.

c) Aus $u^2 + v^2 = 1$ erhalten wir durch Differenzieren nach x bzw. y die Gleichheiten

$$\begin{aligned} uu_x + vv_x &= 0, \\ uu_y + vv_y &= 0. \end{aligned}$$

Mit den Cauchy-Riemann-Dgl. erhält man aus der zweiten Gleichung $uv_x = -uu_y = vv_y = vu_x$ und damit aus der ersten Gleichung

$$0 = u^2u_x + uvv_x = (u^2 + v^2)u_x = u_x.$$

Analog folgt $v_x = 0$ und damit $f' = f_x = u_x + iv_x = 0$. Die Behauptung folgt somit aus Teil a). \square

1.13 Definition. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f durch Potenzreihen dargestellt, falls für jedes $a \in G$ und jedes $r > 0$ mit $B(a, r) \subset G$ eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ existiert, welche (mindestens) in $B(a, r)$ konvergiert und dort gleich f ist.

Man beachte in dieser Definition, dass die Konvergenz in jeder Kreisscheibe $B(a, r)$ mit $B(a, r) \subset G$ verlangt wird. Es genügt nicht, dass es zu jedem $a \in G$ ein $r > 0$ gibt, so dass die Potenzreihe in $B(a, r)$ konvergiert.

1.14 Satz. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ durch Potenzreihen dargestellt.

a) Dann ist f holomorph in G mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

Diese Reihe hat denselben Konvergenzradius wie die Reihe, welche f darstellt.

b) Die Funktion f ist unendlich oft komplex differenzierbar in G mit

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}.$$

Insbesondere ist

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

d.h. die Potenzreihe ist durch f eindeutig bestimmt.

Beweis. a) O.E. sei $a = 0$. Setze $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$. Aus der Analysis ist bekannt, dass die Reihe g denselben Konvergenzradius besitzt wie die f darstellende Reihe. Insbesondere konvergiert die Reihe in $B(0, r)$, falls $B(0, r) \subset G$.

Für $w \in B(0, r)$ mit $|w| < \rho < r$ und $|z| < \rho$ gilt

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right).$$

Wir schätzen den Term in Klammern ab:

$$\begin{aligned} \frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} &= \sum_{j=1}^{n-1} (z^j w^{n-1-j} - w^{n-1}) \\ &= (z - w) \sum_{j=1}^{n-1} w^{n-1-j} \cdot \frac{z^j - w^j}{z - w} \end{aligned}$$

$$= (z - w) \sum_{j=1}^{n-1} w^{n-1-j} \sum_{k=0}^{j-1} z^k w^{j-1-k}$$

Da $|z|, |w| < \rho$, erhält man

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} \right| &\leq |z - w| \sum_{j=1}^{n-1} \left(\rho^{n-1-j} \sum_{k=0}^{j-1} \rho^{j-1-k} \right) \\ &= |z - w| \sum_{j=1}^{n-1} j \rho^{n-2} = |z - w| \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2}. \end{aligned}$$

Damit

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| \leq |z - w| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow w).$$

Hier wurde verwendet, dass die letzte Reihe endlich ist. Also ist f komplex differenzierbar, und $f' = g$.

b) Wende Teil a) auf f', f'' etc. an. □

1.15 Beispiele. a) Polynome $P(z) = \sum_{n=0}^N c_n z^n$ sind in ganz \mathbb{C} holomorph, d.h. ganze Funktionen.

b) Die Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

hat Konvergenzradius ∞ , ist also ebenfalls in ganz \mathbb{C} holomorph.

Wie im Reellen setzt man für $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z$$

mit

$$\begin{aligned} \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \\ \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}. \end{aligned}$$

Es gilt somit $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. Definiere außerdem die hyperbolischen Funktionen

$$\begin{aligned} \cosh z &:= \cos(iz) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \\ \sinh z &:= -i \sin(iz) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \end{aligned}$$

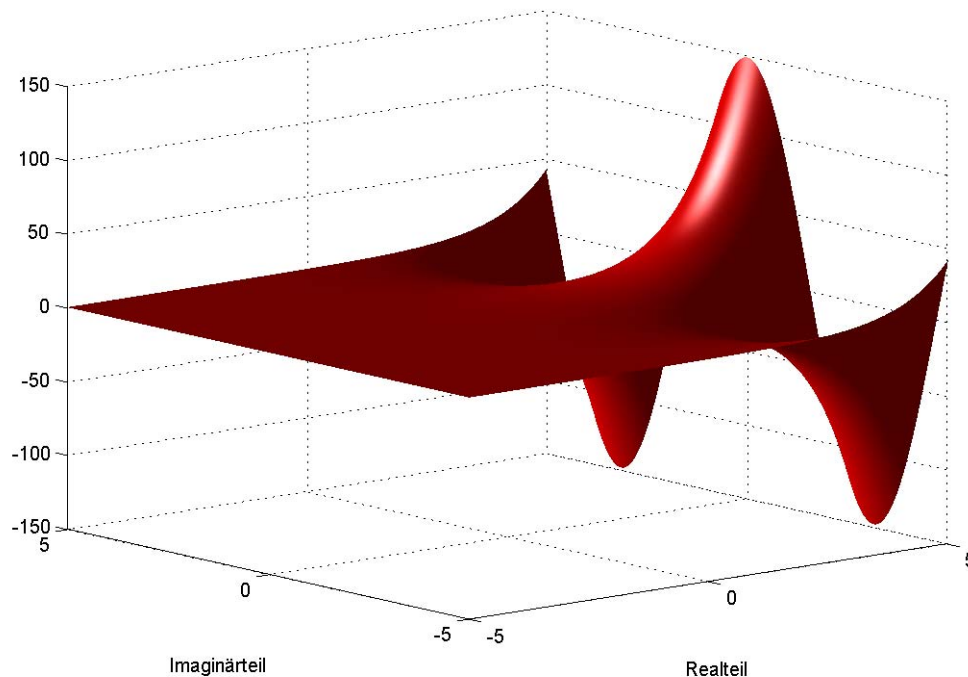


Abbildung 1: Die komplexe Exponentialfunktion, dargestellt ist $\operatorname{Re}(\exp(z))$.

b) Integration

Eine wesentliche Zutat der Funktionentheorie sind Kurvenintegrale in \mathbb{C} . Wie aus der Analysis bekannt, sind Kurven Äquivalenzklassen von Wegen. Der Wertebereich $\mathcal{R}(\Gamma)$ und Anfangs- und Endpunkt $\mathcal{A}(\Gamma)$, $\mathcal{E}(\Gamma)$ und die Länge $\mathcal{L}(\Gamma)$ sind unabhängig von der Parametrisierung, also wohldefiniert.

1.16 Definition. Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{C} mit $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $f: \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Definiere das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} f := \int_{\Gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \in \mathbb{C}.$$

(Bei stückweise glatten Kurven interpretiert man das Integral auf der rechten Seite wie üblich als Summe der Integrale auf den glatten Teilbereichen der Kurve.)

Im folgenden werden wir stets stückweise glatte Kurven betrachten. Daher sei ab sofort unter *Kurve* stets eine stückweise glatte Kurve in \mathbb{C} gemeint!

1.17 Beispiele. a) Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Kurve. Dann ist

$$\int_{\Gamma} 1 = \int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a) = \mathcal{E}(\Gamma) - \mathcal{A}(\Gamma).$$

b) Sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und Γ der positiv orientierte Kreis mit Radius r um a , d.h. $\Gamma = [\gamma]$ mit $\gamma(t) := a + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Sei $f(z) := (z - a)^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) ire^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} ir^{n+1} e^{i(n+1)t} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= \begin{cases} 2\pi ir^{n+1}, & n = -1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

1.18 Satz. Sei Γ eine Kurve, und $f: \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

a) Es gilt

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \mathcal{R}(\Gamma)} |f(z)| \cdot \mathcal{L}(\Gamma),$$

wobei $\mathcal{L}(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ die Länge von Γ ist.

b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\mathcal{R}(\Gamma) \subset G$ und F eine Stammfunktion zu f in G , d.h. F holomorph mit $F' = f$. Dann ist

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\mathcal{E}(\Gamma)) - F(\mathcal{A}(\Gamma)).$$

Beweis. a) Es gilt

$$\left| \int_{\Gamma} f \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \max_{z \in \mathcal{R}(\Gamma)} |f(z)| \cdot \mathcal{L}(\Gamma).$$

b) zeigt man genauso durch direkte Rechnung:

$$\int_{\Gamma} f = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\mathcal{E}(\Gamma)) - F(\mathcal{A}(\Gamma)).$$

□

1.19 Satz. Sei Γ eine Kurve und $g: \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Definiere

$$f(z) := \int_{\Gamma} \frac{g(w)}{w - z} dw \quad (z \in G := \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)).$$

Dann ist f auf G in Potenzreihen entwickelbar und insbesondere holomorph auf G .

Beweis. Sei $a \in G$ und $r > 0$ mit $B(a, r) \subset G$. Für $z \in B(a, r)$ und $w \in \mathcal{R}(\Gamma)$ ist

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a) - (z-a)} = \left[(w-a) \left(1 - \frac{z-a}{w-a} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n.$$

Die Reihe konvergiert wegen $|z-a| < r \leq |w-a|$. Also ist

$$\frac{g(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n.$$

Für $0 < \rho < r$ konvergiert die Reihe in $\overline{B(a, \rho)} \subset B(a, r)$ gleichmäßig und absolut, und wir dürfen Integral und Summation vertauschen:

$$f(z) = \int_{\Gamma} \frac{g(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit

$$c_n := \int_{\Gamma} \frac{g(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

□

1.20 Definition und Satz. Sei Γ eine geschlossene Kurve in \mathbb{C} . Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ definiert man die Windungszahl von Γ um z durch

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w-z} dw.$$

Dann ist $\text{Ind}_{\Gamma}(z) \in \mathbb{Z}$, und auf jeder Zusammenhangskomponente von $G := \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ ist Ind_{Γ} konstant. Auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von G ist $\text{Ind}_{\Gamma} = 0$.

Man beachte in obiger Aussage, dass $\mathcal{R}(\Gamma)$ kompakt ist, d.h. es existiert ein $R > 0$ mit $\mathbb{C} \setminus B(0, R) \subset G$. Da $\mathbb{C} \setminus B(0, R)$ zusammenhängend ist, existiert genau eine Zusammenhangskomponente Z von G mit $\mathbb{C} \setminus B(0, R) \subset Z$. Diese heißt die unbeschränkte Zusammenhangskomponente.

Beweis. Sei $z \in G$. Nach Definition ist

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

Setze

$$\varphi(s) := \exp \left(\int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right) \quad (s \in [a, b]).$$

Dann ist $\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}$ bis auf endlich viele Punkte, an denen γ' nicht existiert. Es folgt

$$\left(\frac{\varphi}{\gamma-z}\right)' = \frac{\varphi'(\gamma-z) - \gamma'\varphi}{(\gamma-z)^2} = 0.$$

Da $\frac{\varphi}{\gamma-z}$ stetig ist, ist $\frac{\varphi}{\gamma-z}$ konstant und damit

$$\frac{\varphi(b)}{\gamma(b)-z} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a)-z} = \frac{1}{\gamma(a)-z}.$$

Wegen $\gamma(b) = \gamma(a)$ folgt $\varphi(b) = 1$ und damit $\exp(2\pi i \operatorname{Ind}_\Gamma(z)) = 1$. Dies ist aber äquivalent zu $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

Nach Satz 1.19 ist $\operatorname{Ind}_\Gamma$ holomorph auf G und insbesondere stetig. Also ist das Bild einer Zusammenhangskomponente Z von G wieder zusammenhängend. Wegen $\operatorname{Ind}_\Gamma(Z) \subset \mathbb{Z}$ ist $\operatorname{Ind}_\Gamma$ konstant auf Z .

Für $|z| \rightarrow \infty$ ist $\sup_{w \in \mathcal{R}(\Gamma)} \left|\frac{1}{w-z}\right| \rightarrow 0$. Nach Satz 1.18 a) ist $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ für $|z| \rightarrow \infty$, also auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente. \square

1.21 Definition (Logarithmus). a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = z$ ($z \in G$) heißt ein stetiger Zweig des Logarithmus auf G .

b) Sei allgemeiner $M \subset \mathbb{C}$ und $g: M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt eine stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = g(z)$ ($z \in M$) ein stetiger Logarithmus für g . In diesem Fall heißt $\arg g(z) := \operatorname{Im} f: M \rightarrow \mathbb{R}$ die Argumentfunktion von g .

1.22 Bemerkung. a) Bekanntlich hat die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ den Wertebereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ist aber nicht injektiv. Auf dem Streifen $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ ist \exp bijektiv mit Wertebereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, die Umkehrfunktion ist aber nicht stetig.

b) Es gilt in 1.21 b): $g(z) = \exp(f(z)) = |g(z)| \exp(i \operatorname{Im} f(z))$. Dies rechtfertigt die Bezeichnung $\arg g(z)$. Man beachte, dass ebenso wie der Logarithmus die Argumentfunktion nicht eindeutig ist!

1.23 Definition und Satz. a) Sei $S_0 := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$. Dann wird durch $\ln := (\exp|_{S_0})^{-1}$ ein stetiger Zweig $\ln: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow S_0 \subset \mathbb{C}$ definiert, der sog. Hauptzweig, und die zugehörige Argumentfunktion $\arg: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow (-\pi, \pi)$, $z \mapsto \operatorname{Im} \ln z$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $w \in \mathbb{C}$ sei $z^w := \exp(w \ln z)$. Speziell bezeichnet man $\sqrt{z} := z^{1/2}$ ($z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$) als den Hauptzweig der Wurzel.

b) Falls G ein Gebiet ist, unterscheiden sich zwei stetige Zweige des Logarithmus auf G durch ein Vielfaches von $2\pi i$.

c) Jeder stetige Zweig f des Logarithmus auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist holomorph mit $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Beweis. a) ist klar.

b) Seien f, g stetige Zweige. Für $h := f - g$ folgt dann

$$\exp(h(z)) = \exp(f(z) - g(z)) = \frac{\exp(f(z))}{\exp(g(z))} = \frac{z}{z} = 1 \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

und damit $h(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Da h stetig und G zusammenhängend ist, ist h auf G konstant.

c) folgt wie in Analysis I: Sei $G \ni z_k \rightarrow z \in G$, $y_k := \ln z_k$ und $y := \ln z$. Dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln z_k - \ln z}{z_k - z} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k - y}{\exp(y_k) - \exp(y)} = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{z}.$$

□

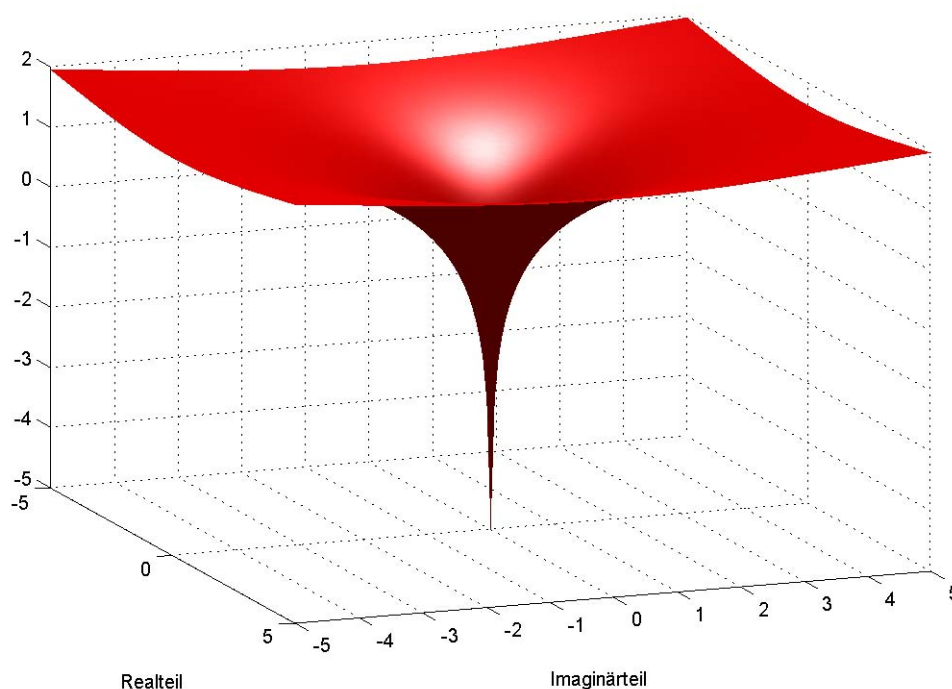


Abbildung 2: Der Realteil der Logarithmus-Funktion.

1.24 Bemerkung. Der letzte Satz zeigt, dass zumindest lokal ein stetiger Zweig des Logarithmus existiert: Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig und $t_0 \in [a, b]$. Falls $\gamma(t_0) \in$

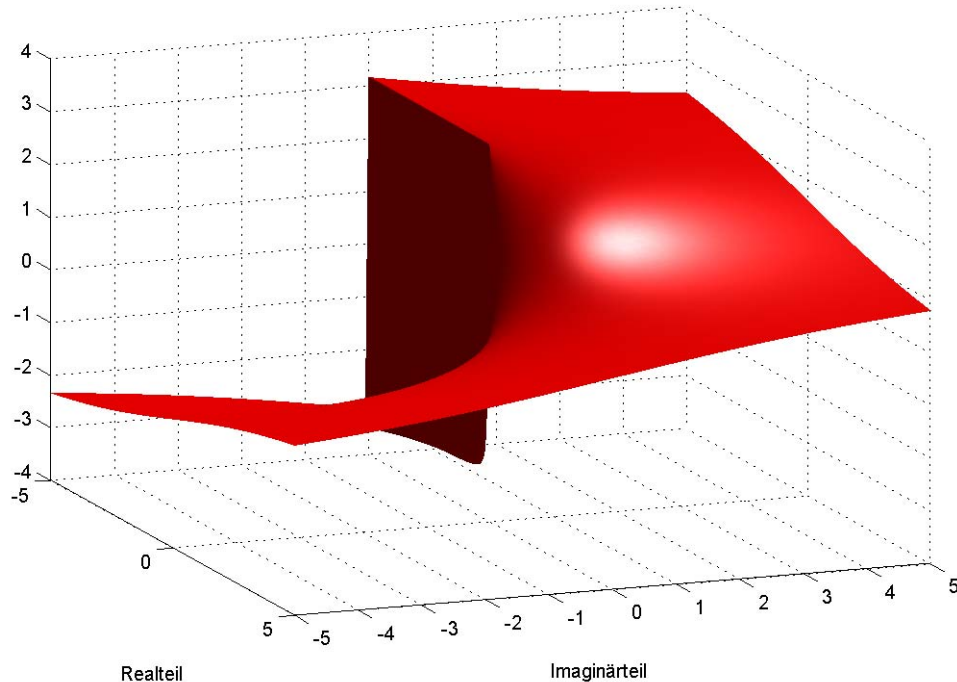


Abbildung 3: Der Imaginärteil der Logarithmus-Funktion (Hauptzweig).

$(0, \infty)$, so kann man den Hauptzweig $f(t) := \ln \gamma(t)$ wählen. Für $|t - t_0|$ hinreichend klein gilt dann $\exp(f(t)) = \gamma(t)$, denn für $|t - t_0|$ klein gilt aufgrund der Stetigkeit $\gamma(t) \notin (-\infty, 0]$.

Falls $\gamma(t_0) \notin (0, \infty)$, so schreibe $\gamma(t_0) = |\gamma(t_0)|e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und setze $f(t) := \ln[|\gamma(t)|e^{-i\varphi}] + i\varphi$.

Mit Hilfe eines Kompaktheitsarguments kann man somit leicht folgende Aussage beweisen: Es existiert zu γ eine stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(f(t)) = \gamma(t)$ ($t \in [a, b]$). Achtung: Im allgemeinen existiert *keine* stetige Funktion $f: \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = z$ ($z \in \mathcal{R}(\Gamma)$).

1.25 Bemerkung (Anschauliche Bedeutung der Windungszahl). Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Kurve, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $z \notin \mathcal{R}(\Gamma)$. Wendet man Bemerkung 1.24 auf $\tilde{\gamma} := \gamma - z$ an, so sieht man, dass ein stetiges $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ existiert mit $\exp(f(t)) = \tilde{\gamma}(t)$. Somit

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z} &= \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt = \int_a^b \frac{(\tilde{\gamma}(t)+z)'}{(\tilde{\gamma}(t)-z)+z} dt = \int_a^b \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\tilde{\gamma}(t)} dt \\ &= \int_a^b \frac{\exp(f(t))f'(t)}{\exp(f(t))} dt = \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Sei nun Γ geschlossen. Für die Imaginärteile folgt

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi} [\operatorname{Im}(f(b)) - \operatorname{Im}(f(a))] = \frac{\arg \tilde{\gamma}(b) - \arg \tilde{\gamma}(a)}{2\pi}.$$

Die Windungszahl gibt also den Zuwachs des Arguments einer Parametrisierung an.

1.26 Beispiele. a) Sei Γ die positiv orientierte Kreislinie um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$. Dann ist

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = \begin{cases} 1, & |z-a| < r, \\ 0, & |z-a| > r, \end{cases}$$

siehe Beispiel 1.17.

b) Sei Γ eine geschlossene Kurve, $n \in \mathbb{Z}$ und $0 \notin \mathcal{R}(\Gamma)$ falls $n < 0$. Dann ist

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i \operatorname{Ind}_{\Gamma}(0), & n = -1. \end{cases}$$

Für $n = -1$ ist dies gerade die Definition der Windungszahl, für $n \neq -1$ ist $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von f , damit folgt die Aussage aus Satz 1.18 b).

1.27 Satz. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:

- (i) f hat auf G eine holomorphe Stammfunktion.
- (ii) Für jede geschlossene Kurve Γ in G ist $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Falls G zusätzlich konvex ist (und damit insbesondere ein Gebiet), so ist dies äquivalent zu

- (iii) Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ ist $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

(Dabei ist $\partial\Delta$ in positiver Orientierung zu durchlaufen.)

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Satz 1.18 b).

(ii) \Rightarrow (i). Sei Z eine Zusammenhangskomponente von G . Dann ist Z offen und zusammenhängend, also wegzusammenhängend. Wähle $a \in Z$ fest und setze

$$F(z) := \int_{\Gamma_z} f(w) dw \quad (z \in Z),$$

wobei Γ_z eine Kurve von a nach z ist. Dann ist F wohldefiniert, da das Integral wegunabhängig ist.

Sei $z_0 \in Z$. Für $|z - z_0|$ klein kann man folgenden Weg von a nach z wählen: $\Gamma_z = \Gamma_{z_0} + s_{zz_0}$, wobei s_{zz_0} die Strecke von z nach z_0 sei. Damit

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{s_{zz_0}} f(w) dw - f(z_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt - f(z_0) \right| \\ &= \left| \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt - f(z_0) \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)| dt \\ &\leq \sup_{w \in s_{zz_0}} |f(w) - f(z_0)| \rightarrow 0 \quad (z_0 \rightarrow z). \end{aligned}$$

Also ist F holomorph in Z mit $F' = f$. Durch Zusammensetzen der Stammfunktionen auf den Zusammenhangskomponenten erhält man eine Stammfunktion auf G zu f .

Falls G konvex ist, sieht man an obigem Beweis, dass man den Weg $\Gamma_z := s_{az}$ wählen kann. Man benötigt dann nur die Wegunabhängigkeit für Wege, die als Rand eines Dreiecks gegeben sind. \square

2. Der Cauchysche Integralsatz und die Sätze von Morera und Liouville

2.1 Worum geht's? Nachdem wir nun schon erste Eigenschaften holomorpher Funktionen kennengelernt haben, können wir jetzt sehr schnell die Früchte ernten. In diesem Abschnitt werden sehr starke Eigenschaften holomorpher Funktionen untersucht, welche relativ einfach zu beweisen sind.

Grundlage ist das Lemma von Goursat bzw. der Cauchysche Integralsatz, welche besagen, dass das Integral einer holomorphen Funktion über einer geschlossenen Kurve den Wert Null hat. Dies führt sofort zu einer Darstellung holomorpher Funktionen als Integral, was wiederum eine Potenzreihendarstellung beweist. Potenzreihen sind aber unendlich oft differenzierbar, so dass wir ablesen können: Jede holomorphe Funktion ist unendlich oft komplex (und damit insbesondere reell) differenzierbar.

Die Darstellung als Potenzreihe lässt auch sofort beweisen, dass eine holomorphe Funktion nicht beschränkt sein kann, es sei denn, sie ist konstant. Das ist der berühmte Satz von Liouville. Als Korollar dieses Satzes beweisen wir den Fundamentalsatz der Algebra.

2.2 Satz (Lemma von Goursat). *Sei G ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Beweis. Teile Δ in vier kleinere Dreiecke Δ_1^j , $j = 1, \dots, 4$, auf, die durch die Seitenmitten gebildet werden. Dann ist

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| = \left| \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta_1^j} f(z)dz \right| \leq 4 \max_{j=1,\dots,4} \left| \int_{\partial\Delta_1^j} f(z)dz \right|.$$

Das Maximum wird bei einem der vier Integrale angenommen, nenne das zugehörige Dreieck Δ_1 . Nun wird Δ_1 analog unterteilt etc. Man erhält eine Folge von Dreiecken $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Summen der Seitenlängen

$$\mathcal{L}(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(\partial\Delta_{n-1}) = \dots = 2^{-n} \mathcal{L}(\Delta).$$

Für die Integrale gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right|.$$

Die Dreiecke $(\Delta_n)_n$ bilden eine Intervallschachtelung in \mathbb{C} . Da Δ kompakt ist, existiert genau ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \{z_0\}$.

Da f holomorph ist, gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$$

mit $g(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow z_0$. Nach Beispiel 1.26 ist

$$\int_{\partial \Delta_n} [f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)] dz = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial \Delta_n} (z - z_0)g(z) dz \right| \\ &\leq \mathcal{L}(\partial \Delta_n) \sup_{z \in \partial \Delta_n} |z - z_0| \cdot |g(z)| \\ &\leq [\mathcal{L}(\partial \Delta_n)]^2 \sup_{z \in \partial \Delta_n} |g(z)| = 4^{-n} [\mathcal{L}(\partial \Delta)]^2 \sup_{z \in \partial \Delta_n} |g(z)|. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\left| \int_{\partial \Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot 4^{-n} [\mathcal{L}(\partial \Delta)]^2 \sup_{z \in \partial \Delta_n} |g(z)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

2.3 Bemerkung. Es genügt in Satz 2.2, wenn f in G stetig und in $G \setminus \{p\}$ holomorph ist für ein $p \in G$. Denn im Falle $p \notin \Delta$ ändert sich nichts an obigem Beweis, falls p eine Ecke von Δ ist, so ist f holomorph in einer Umgebung von drei der vier Teildreiecke des ersten Schrittes. Für diese Teildreiecke ist nach Satz 2.2 aber das Integral gleich Null, so dass $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \int_{\partial \Delta_1} f(z) dz$. Dieselbe Überlegung angewendet auf Δ_1 liefert eine Kette

$$\int_{\partial \Delta} f = \int_{\partial \Delta_1} f = \int_{\partial \Delta_2} f = \dots = \int_{\partial \Delta_n} f \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Falls schließlich $p \in \Delta$ beliebig ist, unterteilt man zunächst Δ in drei Dreiecke, so dass p jeweils eine Ecke dieser Dreiecke ist. Nach dem soeben bewiesenen ist das Integral über diese Dreiecke gleich Null, so dass

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0.$$

Iterativ sieht man, dass im Lemma von Goursat die Voraussetzung „ f holomorph“ ersetzt werden kann durch die Voraussetzung „ f holomorph bis auf endlich viele Punkte und stetig“.

2.4 Satz (Cauchyscher Integralsatz für konvexe Gebiete). Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph mit Ausnahme endlich vieler Punkte. Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Beweis. Nach dem Lemma von Goursat (bzw. Bemerkung 2.3) ist Bedingung (iii) von Satz 1.27 erfüllt. Nach Satz 1.27 folgt die Behauptung. \square

2.5 Satz (Cauchysche Integralformel für konvexe Gebiete). Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und Γ eine geschlossene Kurve in G . Für $z \in G \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ gilt dann

$$f(z) \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Speziell gilt für den (positiv orientierten) Rand des Kreises $B(z, r) \subset G$ um z :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Beweis. Zu $z \in G \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ definiere

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z, \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Da f holomorph ist, ist g stetig in G und holomorph in $G \setminus \{z\}$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} g(w) dw = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\Gamma} \frac{1}{w-z} dw \\ &= \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) f(z). \end{aligned}$$

\square

Der nächste Satz ist zentral für die weiteren Überlegungen (auch wenn kein berühmter Name mit ihm verbunden ist).

2.6 Satz (Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen). Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f in G durch Potenzreihen darstellbar und insbesondere unendlich oft komplex (und damit auch reell) differenzierbar.

Genauer gilt für $a \in G$ und $r_0 > 0$ mit $B(a, r_0) \subset G$ die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

mit

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

wobei $0 < r < r_0$.

Es ist

$$|c_n| \leq r^{-n} \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Beweis. Da $B(a, r)$ konvex ist, können wir die Cauchy-Integralformel auf die Kreislinie, d.h. die Kurve $\Gamma_{a,r} := [\gamma_{a,r}]$ mit $\gamma_{a,r}(t) := a + re^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$) anwenden. Wir erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,r}} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (z \in B(a, r)).$$

Nach Satz 1.19 ist f durch Potenzreihen darstellbar, und es gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,r}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

(siehe Beweis von Satz 1.19). Man beachte, dass dieses Integral für $0 < r < r_0$ unabhängig von r ist, da es nur durch die Ableitung von f an der Stelle a bestimmt ist.

Wir schätzen c_n ab und erhalten

$$|c_n| \leq \mathcal{L}(\Gamma_{a,r}) \cdot \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \mathcal{R}(\Gamma_{a,r})} |f(w)| \cdot r^{-n-1} = r^{-n} \max_{|w-a|=r} |f(w)|.$$

□

Der letzte Satz hat viele wichtige Folgerungen.

2.7 Satz (von Morera). Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$. Dann ist f holomorph in G .

Beweis. Betrachte wie im Beweis von Satz 2.6 $f|_{B(a,r)}$. Nach Satz 1.27 hat $f|_{B(a,r)}$ eine Stammfunktion F . Nach Satz 2.6 ist aber $F' = f$ holomorph in $B(a, r)$. □

2.8 Satz (von Liouville). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Sei f holomorph in \mathbb{C} . Nach Satz 2.6 existiert eine in ganz \mathbb{C} konvergente Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Ebenfalls nach Satz 2.6 gilt für alle $r > 0$

$$|c_n| \leq r^{-n} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq r^{-n} \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|.$$

Da f beschränkt ist, konvergiert die rechte Seite gegen 0 für $r \rightarrow \infty$, falls $n \geq 1$. Damit ist $c_n = 0$ für alle $n \geq 1$, d.h. $f(z) = c_0$. \square

2.9 Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes komplexe Polynom P vom Grad $n \geq 1$ hat n komplexe Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt). Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt n Eigenwerte.*

Beweis. (i) Für $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ mit $a_n \neq 0$ gilt

$$|P(z)| \geq |z|^n \cdot \left| |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right| \geq \frac{|z|^n \cdot |a_n|}{2},$$

falls $|z| \geq R$ mit einem geeignet gewählten $R > 0$. Falls P keine komplexe Nullstelle besitzt, so ist $\frac{1}{P}$ eine ganze Funktion. Wählt man R so groß, dass $|P(z)| \geq 1$ für $|z| \geq R$ gilt, so ist

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{1}{|P(z)|} \leq \max \left\{ 1, \max_{|z| \leq R} \frac{1}{|P(z)|} \right\} < \infty,$$

da $\frac{1}{P}$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\{|z| \leq R\}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist $\frac{1}{P}$ konstant, Widerspruch.

(ii) Nach (i) hat P mindestens eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist $P(z) = (z - \lambda)P_1(z)$ mit $\deg P_1 = n - 1$. Falls $n - 1 > 0$, wende wieder (i) an und erhalte iterativ n (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen von P .

(iii) Die Aussage über Matrizen folgt, da die Eigenwerte einer Matrix die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind. \square

3. Isolierte Singularitäten und Laurentreihen

3.1 Worum geht's? Die Nullstellenmenge einer holomorphen Funktion ist (falls es sich nicht um die Nullfunktion handelt) höchstens abzählbar. Eine wichtige Folgerung aus dieser Eigenschaft ist der Identitätssatz für holomorphe Funktionen, der in Anwendungen recht nützlich ist. Eine isolierte Singularität ist ein Punkt, so dass die Funktion in einer Umgebung dieses Punktes mit Ausnahme des Punktes selbst holomorph ist. Die Klassifikation isolierter Singularitäten leitet über zu den Laurentreihen, welche eine Verallgemeinerung der Taylorreihen darstellen und später für den Residuensatz wichtig sein werden.

3.2 Definition. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen.

- a) Die Menge der in G holomorphen Funktionen wird mit $\mathcal{H}(G)$ bezeichnet.
- b) Die Menge $\mathcal{N}(f) := \{a \in G : f(a) = 0\}$ heißt die Nullstellenmenge von f .

3.3 Satz. Sei G ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$. Dann gilt entweder $\mathcal{N}(f) = G$, d.h. $f = 0$, oder $\mathcal{N}(f)$ ist abzählbar und hat keinen Häufungspunkt in G . In diesem Fall gibt es zu $a \in \mathcal{N}(f)$ eine eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

für eine geeignete Funktion $g \in \mathcal{H}(G)$ mit $g(a) \neq 0$. Die Zahl m heißt die Nullstellenordnung von f an der Stelle a .

Im Beweis verwenden wir folgendes Lemma.

3.4 Lemma. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist G abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.

Beweis. Setze $A_k := \{z \in G : |z| \leq k \text{ und } \text{dist}(z, \partial G) \geq \frac{1}{k}\}$. Dann gilt $A_k = \overline{G} \cap \varphi_1^{-1}([0, k]) \cap \varphi_2^{-1}([\frac{1}{k}, \infty))$ für die zwei stetigen Funktionen $\varphi_1: z \mapsto |z|$ und $\varphi_2: z \mapsto \text{dist}(z, \partial G)$. Damit ist A_k abgeschlossen und somit, da beschränkt, sogar kompakt. Offensichtlich gilt $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. \square

Beweis von Satz 3.3. Sei $H := \{z \in G : z \text{ ist Häufungspunkt von } \mathcal{N}(f)\}$.

(i) Da die Menge der Häufungspunkte von $\mathcal{N}(f)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{G} \subset \mathbb{C}$ ist, ist H abgeschlossen in G (d.h. in der Relativtopologie von G).

(ii) Wir zeigen, dass H auch offen in G ist. Da f stetig ist, gilt $f(a) = 0$ für alle

$a \in H$. Sei $a \in \mathcal{N}(f)$ und $r > 0$ so gewählt, dass $B(a, r) \subset G$. Nach Satz 2.6 gilt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (z \in B(a, r)).$$

Entweder sind alle $c_n = 0$, d.h. $f = 0$ in $B(a, r)$, oder es gibt eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$ und $c_m \neq 0$. In diesem Fall setze

$$g(z) := \begin{cases} (z - a)^{-m} f(z), & z \in G \setminus \{a\}, \\ c_m, & z = a. \end{cases}$$

Offensichtlich ist g holomorph in $G \setminus \{a\}$. Nach Definition von m gilt

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^{n-m} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m} (z - a)^k.$$

Damit konvergiert die Potenzreihe für g in $B(a, r)$, also ist g holomorph an der Stelle a mit $g(a) = c_m \neq 0$.

Da g stetig ist, folgt $g(z) \neq 0$ (und damit $f(z) \neq 0$), falls $z \neq a$ hinreichend nahe bei a liegt. Damit ist a die einzige Nullstelle von f in einer Umgebung von a , d.h. a ist kein Häufungspunkt von $\mathcal{N}(f)$.

Für $a \in H$ folgt somit in obiger Potenzreihe $c_n = 0$ für alle n , d.h. es gilt $f = 0$ in $B(a, r)$. Somit ist H auch offen in G .

(iii) Da G zusammenhängend ist, folgt aus (i) und (ii) entweder $H = G$, d.h. $f = 0$ in G , oder $H = \emptyset$, d.h. $\mathcal{N}(f)$ hat keinen Häufungspunkt in G .

(iv) Falls $f \neq 0$ und $K \subset G$ kompakt, so kann $K \cap \mathcal{N}(f)$ nur endlich sein, denn jede unendliche kompakte Menge in \mathbb{C} besitzt einen Häufungspunkt. Da G nach Lemma 3.4 abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist, ist $\mathcal{N}(f) \cap G$ abzählbar. \square

3.5 Korollar (Identitätssatz). Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g \in \mathcal{H}(G)$ mit $f(z) = g(z)$ auf einer Menge, die in G einen Häufungspunkt besitzt. Dann ist $f = g$.

Beweis. Wende Satz 3.3 auf $f - g$ an. \square

3.6 Bemerkung. Außerhalb von G kann $\mathcal{N}(f)$ einen Häufungspunkt besitzen. Für $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \sin(1/z)$, gilt $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, aber $\mathcal{N}(f)$ besitzt in 0 einen Häufungspunkt.

3.7 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Ein Punkt $a \in G$ heißt eine isolierte Singularität von f , falls $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$ für eine offene Umgebung $U \subset G$ von a . Falls f zu einer in einer offenen Umgebung von a holomorphen Funktion fortgesetzt werden kann, heißt a eine hebbare Singularität von f .

Z.B. hat die Funktion $\frac{\sin z}{z}$ eine (durch den Wert 1) hebbare Singularität an der Stelle 0.

3.8 Satz (Hebbarkeitssatz). Sei G offen und $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ beschränkt in einer Umgebung von a . Dann hat f in a eine hebbare Singularität.

Beweis. Definiere

$$h(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z), & z \neq a, \\ 0, & z = a. \end{cases}$$

Da f in einer Umgebung von a beschränkt ist, folgt $\lim_{z \rightarrow a} \frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$. Also ist h komplex differenzierbar an der Stelle a . Da offensichtlich h holomorph in $G \setminus \{a\}$ ist, folgt $h \in \mathcal{H}(G)$.

Sei $B(a, r) \subset G$. Dann besitzt h eine Potenzreihenentwicklung $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ in $B(a, r)$. Es gilt $c_0 = h(a) = 0$ und $c_1 = h'(a) = 0$, d.h.

$$f(z) = (z-a)^{-2} h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2} (z-a)^k \quad (z \in B(a, r) \setminus \{a\}).$$

Durch $f(a) := c_2$ wird f holomorph auf $B(a, r)$ fortgesetzt. □

3.9 Satz (Casorati-Weierstraß). Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in G$ und $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$. Dann liegt einer der drei folgenden Fälle vor:

(1) f hat eine hebbare Singularität an der Stelle a . In diesem Fall ist f beschränkt in einer Umgebung von a .

(2) Es gibt $m \in \mathbb{N}$ und $c_{-1}, \dots, c_{-m} \in \mathbb{C}$, $c_{-m} \neq 0$, so dass

$$f - \sum_{n=1}^m c_{-n} (z-a)^{-n}$$

eine hebbare Singularität an der Stelle a hat. In diesem Fall gilt $|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow a$.

(3) Für jedes $r > 0$ ist der Wertebereich $f(B(a, r) \setminus \{a\})$ dicht in \mathbb{C} .

3.10 Definition. a) In obiger Situation liege Fall (2) vor. Dann heißt a ein Pol der Ordnung m von f und $\sum_{n=1}^m c_{-n}(z-a)^{-n}$ der Hauptteil von f in a . Der Koeffizient c_{-1} von $(z-a)^{-1}$ heißt das Residuum von f an der Stelle a . Wir schreiben

$$\operatorname{res}(f, a) := \operatorname{res}_{z=a} f(z) := c_{-1}.$$

b) Wenn Fall (3) vorliegt, heißt a eine wesentliche Singularität von f .

Beweis von Satz 3.9. Wir nehmen an, dass nicht Fall (3) vorliegt. Dann existieren ein $r > 0$, ein $\delta > 0$ und ein $w \in \mathbb{C}$ mit

$$|f(z) - w| > \delta \quad (z \in \dot{B} := B(a, r) \setminus \{a\}).$$

Wir definieren

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w} \quad (z \in \dot{B}). \quad (3-1)$$

Es gilt $g \in \mathcal{H}(\dot{B})$ mit $|g| \leq 1/\delta$ auf \dot{B} . Nach dem Hebbarkeitssatz 3.8 hat g eine holomorphe Fortsetzung auf $B(a, r)$.

(i) Falls $g(a) \neq 0$, so ist nach (3-1) die Funktion f in einer Umgebung von a beschränkt, und nach dem Hebbarkeitssatz 3.8 liegt Fall (1) des Satzes 3.9 vor.

(ii) Sei nun $g(a) = 0$. Nach Satz 3.3 hat g an der Stelle a eine Nullstelle der Ordnung m , d.h. es existiert ein $\tilde{g} \in \mathcal{H}(B(a, r))$ mit $g(z) = (z-a)^m \tilde{g}(z)$ und $\tilde{g}(a) \neq 0$.

Da f holomorph in \dot{B} ist, hat g nach (3-1) keine Nullstelle in \dot{B} . Daher gilt $\tilde{g} \neq 0$ in $B(a, r)$. Die Funktion $h := \frac{1}{\tilde{g}}$ ist somit holomorph in $B(a, r)$ und hat dort keine Nullstelle. Es ist

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w = (z-a)^{-m} h(z) + w \quad (z \in \dot{B}).$$

Da h holomorph ist, existiert eine Darstellung als Potenzreihe:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k \quad (z \in B(a, r))$$

mit $h_0 = h(a) \neq 0$. Somit ist

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} b_{k+m} (z-a)^k + w,$$

d.h. Fall (2) des Satzes liegt vor. □

Die Abbildung 4 zeigt ein Beispiel einer wesentlichen Singularität. Gezeigt wird $\operatorname{Re}(\exp(\frac{1}{z}))$. Die komplexe exp-Funktion selbst wird in Abbildung 1 dargestellt. Eine typische Funktion mit Polen ist $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, siehe Abbildung 5. Man beachte, dass dies ein Beispiel einer Funktion ist, die im Reellen C^∞ ist, deren Potenzreihe aber (z.B. bei Entwicklung um 0) keinen unendlichen Konvergenzradius hat. Geht man ins Komplexe über, erkennt man die Pole bei $\pm i$, und der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe wird ersichtlich. Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß sind die Polstellen durch die Bedingung $|f(z)| \rightarrow \infty$ charakterisiert, was man schön an der Zeichnung sehen kann.

Ein Sonderrolle nimmt der Logarithmus ein: Beim ersten Hinsehen glaubt man, einen Pol an der Stelle 0 zu erkennen (da $|\ln(z)| \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow 0$)). Aber tatsächlich handelt es sich hier gar nicht um eine isolierte Singularität, denn \ln ist in $B(0, r) \setminus \{0\}$ nicht holomorph. Der Satz von Casorati-Weierstraß greift hier also nicht. Die Abbildung 2 zeigt den Realteil des Logarithmus, die Abbildung 3 den Imaginärteil. Es handelt sich hierbei um den Hauptzweig. Man sieht, dass der Imaginärteil gleich dem Argument der komplexen Zahl ist (eigentlich ist das ja die Definition des Arguments), während der Realteil rotationssymmetrisch ist. Dies wird anschaulich klar aus der Formel $\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$.

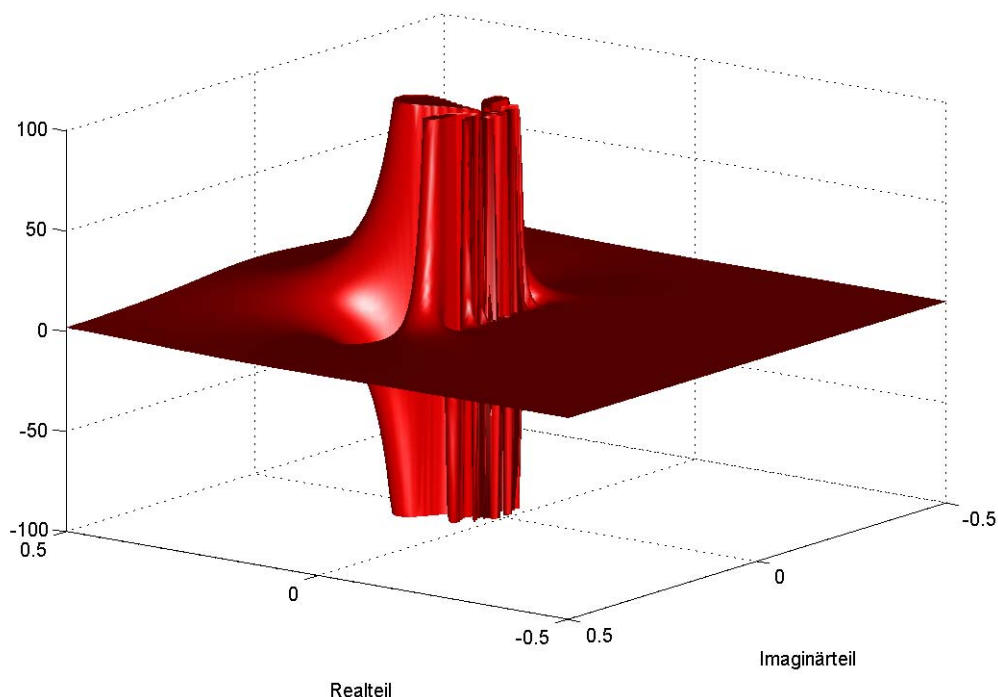


Abbildung 4: Eine wesentliche Singularität, dargestellt ist $\operatorname{Re}(\exp(\frac{1}{z}))$.

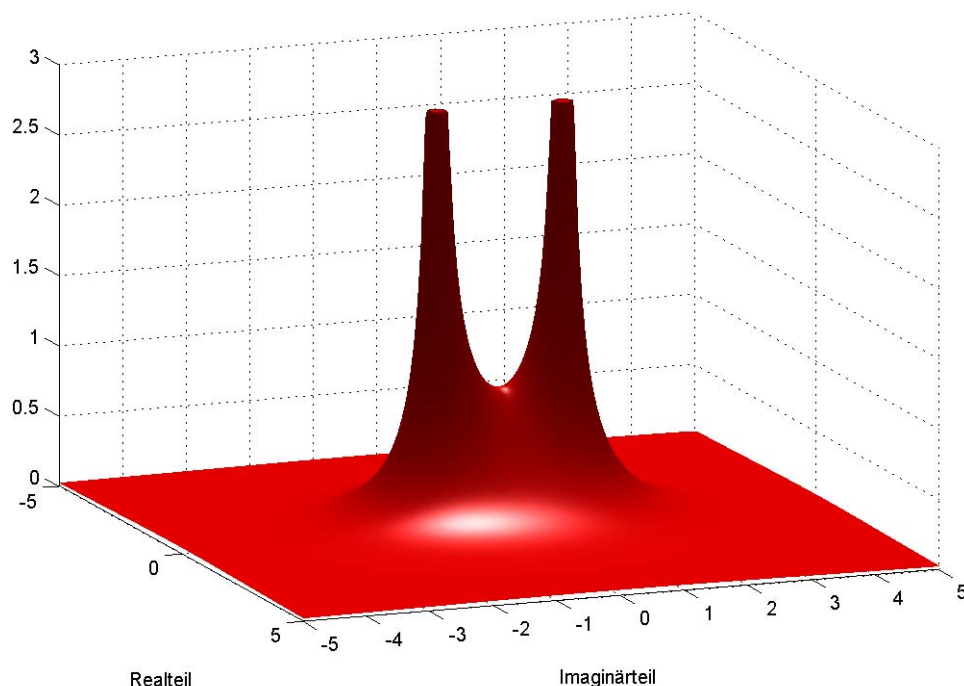


Abbildung 5: Eine Funktion mit zwei Polstellen, dargestellt ist $|(1+z^2)^{-1}|$.

3.11 Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < R \leq \infty$ definiere den Kreisring $B(a, r, R) \subset \mathbb{C}$ durch

$$B(a, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}.$$

3.12 Lemma. Seien $a \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}(B(a, r, R))$. Dann ist $\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz$ unabhängig von $\rho \in (r, R)$.

Beweis. Betrachte für $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ die Differenz

$$\int_{|z-a|=\rho_1} f(z)dz - \int_{|z-a|=\rho_2} f(z)dz.$$

Zerlegt man den Kreisring $B(a, \rho_1, \rho_2)$ in Sektoren, so kann man diese Differenz darstellen als Summe der Form $\sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f(z)dz$, wobei die Kurven Γ_j in konvexen Teilbereichen von $B(a, r, R)$ verlaufen. Nach dem Cauchyschen Integralsatz für konvexe Gebiete ist jedes Integral über Γ_j gleich Null, also ist die Differenz gleich 0. \square

3.13 Satz (Cauchysche Integralformel für Kreiströbe). Seien $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < r' < R' < R \leq \infty$, $f \in \mathcal{H}(B(a, r, R))$ und $z \in B(a, r', R')$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Beweis. Wie oben zerlege den Kreisring $B(a, r', R')$ in Sektoren, welche in konvexen Teilbereichen von $B(a, r, R)$ verlaufen. Dabei wähle man die Sektoren so, dass z auf keiner Trennlinie liegt. Dann liegt z in genau einem der Sektoren. Der Rand der Sektoren sei durch die Kurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ gegeben, wobei o.E. $z \in \Gamma_1$ sei. Da z im Äußeren von $\Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ liegt, folgt

$$\text{Ind}_{\Gamma_j}(z) = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach der Cauchyschen Integralformel für konvexe Gebiete gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\Gamma_j}(z) f(z) = \sum_{j=1}^n \delta_{1j} f(z) = f(z). \end{aligned}$$

□

3.14 Satz (Laurent-Reihen). Sei $f \in \mathcal{H}(B(a, r, R))$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad (z \in B(a, r, R)),$$

wobei für beliebiges $\rho \in (r, R)$ der Koeffizient gegeben ist durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw.$$

Beide Reihen $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ konvergieren gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $B(a, r, R)$.

Beweis. Sei $z \in B(a, r, R)$. Wähle r', R' mit $z \in B(a, r', R') \subset B(a, r, R)$. Nach Satz 3.13 ist $f(z) = F(z) + H(z)$ mit

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

$$H(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Dabei ist F holomorph in $B(a, r, R)$ und lässt sich in eine Potenzreihe um a entwickeln, wie man wie im Beweis von Satz 1.19 sieht. Es gilt $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ mit

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw$$

unabhängig von $\rho \in (r, R)$ (siehe Lemma 3.12).

Für $H(z)$ verwenden wir

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-a} \left[1 - \frac{w-a}{z-a} \right]^{-1} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^n.$$

Dabei konvergiert die rechte Seite wegen $r' = |w-a| < |z-a|$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} H(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} f(w)(w-a)^n (z-a)^{-(n+1)} dw \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k, \end{aligned}$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} f(w)(w-a)^{-k-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} f(w)(w-a)^{-k-1} dw$$

unabhängig von $\rho \in (r, R)$. □

3.15 Bemerkung. Die Laurent-Reihe einer Funktion ist die Verallgemeinerung der Taylorreihe. Falls die Funktion f in einer Kreisscheibe $B(a, R)$ holomorph ist, so lässt sich f dort in eine Potenzreihe entwickeln, in die Taylorreihe an der Stelle a . Falls aber f nur in einem Kreisring $B(a, r, R)$ holomorph ist, so hat man die Taylorreihe durch die Laurent-Reihe zu ersetzen, in der auch negative Potenzen $(z-a)^k$ für $k < 0$ auftreten. Besonders interessant ist der Fall $r = 0$, d.h. f hat an der Stelle a eine isolierte Singularität.

Die Reihe mit negativen Potenzen $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k$ heißt der Hauptteil der Laurentreihe oder der Hauptteil von f an der Stelle a . Damit können wir die drei Fälle des Satzes von Casorati-Weierstraß durch den Hauptteil beschreiben:

(i) f hat in a eine hebbare Singularität genau dann, wenn der Hauptteil gleich Null ist.

(ii) f hat in a einen Pol genau dann, wenn der Hauptteil nur eine endliche Summe ist, die Reihe also abbricht.

(iii) f hat in a genau dann eine wesentliche Singularität, falls der Hauptteil unendlich viele Terme hat.

Man beachte, dass durch die Laurent-Entwicklung einer Funktion auch das Residuum durch $\text{res}(f, a) = c_{-1}$ gegeben ist.

3.16 Bemerkung. Falls $f \in \mathcal{H}(a, r, \infty)$, so sagt man, dass f einen Pol m -ter Ordnung in ∞ besitzt, falls $g(z) := f(\frac{1}{z})$ einen Pol m -ter Ordnung bei 0 hat. Analog wesentliche Singularität.

So hat $f(z) := z^2 + 2z - 1$ einen Pol 2. Ordnung in ∞ und \exp eine wesentliche Singularität in ∞ .

4. Der Residuensatz

4.1 Worum geht's? Nach dem Cauchy-Integralsatz sind Integrale von holomorphen Funktionen über geschlossene Kurven (in einem konvexen Gebiet) gleich Null. Das gilt nicht mehr, wenn die Funktion nur meromorph ist, d.h. isolierte Singularitäten besitzt. In diesem Fall kann man das Integral mit Hilfe der Windungszahl und der Residuen berechnen, wie der Residuensatz sagt. Das liefert die Möglichkeit, einfach Integrale zu bestimmen, selbst für Integrale über die reelle Achse bietet damit die Funktionentheorie eine raffinierte Berechnungsmethode.

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden die Überlegungen über Kurvenintegrale nochmal vertieft und ausgebaut. Dazu wenden wir den Cauchyschen Integralsatz nicht auf eine geschlossene Kurve an, sondern auf eine Summe endlich vieler geschlossener Wege. Man erhält eine Verallgemeinerung der wichtigsten Sätze (Cauchy-Integralsatz, Cauchy-Integralformel und Residuensatz) auf nullhomologe Zyklen.

a) Der Residuensatz

4.2 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion f heißt auf G meromorph, falls eine Menge $P_f \subset G$ existiert, so dass f holomorph ist in $G \setminus P_f$, an jeder Stelle $p \in P_f$ einen Pol besitzt und P_f keinen Häufungspunkt in G hat. In diesem Fall schreiben wir $f \in \mathcal{M}(G)$. Die Menge $P_f = \{z \in G : f \text{ besitzt einen Pol an der Stelle } z\}$ heißt die Polstellenmenge von f .

Da jede beschränkte unendliche Menge in \mathbb{C} einen Häufungspunkt besitzt, kann P_f höchstens abzählbar sein. Auf dem Rand von G können Häufungspunkte von P_f auftreten. Wir erinnern daran, dass eine meromorphe Funktion an jeder Stelle $p \in P_f$ eine Laurent-Entwicklung mit dem zugehörigen Residuum $\text{res}(f, p)$ besitzt. Eine Kurve Γ , für welche $\text{Ind}_\Gamma(z) \in \{0, 1\}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ gilt, wird auch als einfach geschlossene Kurve bezeichnet.

4.3 Satz (Residuensatz). Seien $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $f \in \mathcal{M}(G)$ mit Polstellenmenge P_f und Γ eine geschlossene Kurve in G . Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{p \in P_f} \text{res}(f, p) \text{Ind}_\Gamma(p). \quad (4-1)$$

Dabei treten auf der rechten Seite nur endlich viele Pole mit $\text{Ind}_\Gamma(p) \neq 0$ auf.

Inbesondere gilt für eine einfach geschlossene Kurve Γ in $G \setminus P_f$: Das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz$ ist die Summe aller Residuen in den von Γ umschlossenen Polstellen von f .

Beweis. (i) Wir zeigen, dass die Menge $P_f^0 := \{p \in P_f : \text{Ind}_\Gamma(p) \neq 0\}$ endlich ist. Angenommen, es existieren unendlich viele Polstellen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P_f$ mit $\text{Ind}_\Gamma(p_n) \neq 0$. Da auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente $\text{Ind}_\Gamma = 0$ gilt, ist $(p_n)_n$ beschränkt, besitzt also einen Häufungspunkt $p \in \partial G$. Wegen $\text{Ind}_\Gamma(z) = 0$ in $\mathbb{C} \setminus G$ folgt $\text{Ind}_\Gamma(p) = 0$. Da Ind_Γ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ konstant ist, folgt $\text{Ind}_\Gamma(p_n) = 0$ für große n , Widerspruch. Sei $P_f^0 = \{p_1, \dots, p_m\}$.

(ii) Nach (i) ist die Summe in (4-6) endlich. Seien h_1, \dots, h_m die Hauptteile von f an den Stellen p_1, \dots, p_m . Dann ist $g := f - h_1 - \dots - h_m$ holomorph auf G fortsetzbar. Nach dem Cauchyschen Integralsatz 2.4 gilt

$$0 = \int_\Gamma g(z) dz = \int_\Gamma f(z) dz - \sum_{j=1}^m \int_\Gamma h_j(z) dz.$$

Sei $h_j(z) = \sum_{\ell=-M_j}^{-1} c_\ell^{(j)} (z - p_j)^\ell$. Dann folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma h_j(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=-M_j}^{-1} c_\ell^{(j)} \int_\Gamma (z - p_j)^\ell dz = c_{-1}^{(j)} \text{Ind}_\Gamma(p_j) = \text{res}(f, p_j) \text{Ind}_\Gamma(p_j).$$

(Beachte, dass für $\ell \neq -1$ eine Stammfunktion zu $(z - p_j)^\ell$ existiert.)

(iii) Falls Γ eine einfach geschlossene Kurve ist, so gilt $\text{Ind}_\Gamma(p) = 1$ für die von Γ eingeschlossenen Pole und $\text{Ind}_\Gamma(p) = 0$ für die Pole, die außerhalb von Γ liegen. \square

4.4 Beispiel. Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$. Dazu setze $f(z) := \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$. Es gilt $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit den beiden Polen $p = \pm i$. Das Residuum an der Stelle i ist $\text{res}(f, i) = \frac{1}{2i}$.

Betrachte als Integrationsweg den Rand des oberen Halbkreises $H_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \text{Im } z > 0\}$ für $R > 1$. Es gilt

$$\int_{\partial H_R} f(z) dz = 2\pi i \text{res}(f, i) = \pi.$$

Für $R \rightarrow \infty$ schätze das Integral über den Halbkreis ab: Wir parametrisieren $z = \gamma(\varphi) := Re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0, \pi]$. Dann ist $|\gamma'(\varphi)| = |iRe^{i\varphi}| \leq R$ und

$$|1 + z^2| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1.$$

Damit

$$\left| \int_{|z|=R, \text{Im } z > 0} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2 - 1} d\varphi = \frac{R\pi}{R^2 - 1} \rightarrow 0.$$

Andererseits gilt $\int_{-R}^R f(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$ für $R \rightarrow \infty$. Insgesamt erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial H_R} f(z) dz = \pi.$$

4.5 Beispiel. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Dabei ist das Integral als uneigentliches Riemann-Integral zu verstehen, d.h. als $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$. Beachte, dass an der Stelle $x = 0$ keine Singularität vorliegt.

Setze $f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$. Dann ist f meromorph in \mathbb{C} mit einzigem Pol an der Stelle 0. Als Integrationsweg wählen wir $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_4$ mit

$$\begin{aligned} \gamma_1: [0, R] &\rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto R + it, \\ \gamma_2: [-R, R] &\rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto -t + iR, \\ \gamma_3: [0, R] &\rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto -R + i(R - t). \end{aligned}$$

Der Weg γ_4 durchlaufe $[-R, -\varepsilon] \cup \{z = \varepsilon e^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq \pi\} \cup [\varepsilon, R]$ in Richtung von „-“ nach „+“.

Da f im von γ umschlossenen Bereich holomorph ist, gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

(i) Auf γ_1 schätzen wir den Integranden durch $\frac{e^{-t}}{R}$ ab und erhalten

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| \leq \int_0^R \frac{e^{-t}}{R} dt \leq \frac{1}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

Analog folgt $\int_{\gamma_3} f(z) dz \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$.

(ii) Auf γ_2 schätzen wir den Integranden durch $\frac{e^{-R}}{R}$ ab und erhalten

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \int_{-R}^R \frac{e^{-R}}{R} dt = 2e^{-R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

(iii) Auf dem Halbkreis (in negativer Richtung durchlaufen) ist das Integral gegeben durch

$$-\int_0^{\pi} f(\varepsilon e^{i\varphi}) i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi = -\int_0^{\pi} i \exp(i\varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi \rightarrow -i\pi \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Dabei haben wir die Abschätzung $|\exp(i\varepsilon e^{i\varphi})| \leq \exp(|\varepsilon|) \leq e$ für $\varepsilon \in (0, 1)$ und majorisierte Konvergenz verwendet. Die Integrale auf der reellen Achse sind

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx &= \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\ &= 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx \\ &= i \int_{[-R, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, R]} \frac{\sin x}{x} dx \\ &\rightarrow i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

(iv) Insgesamt erhalten wir

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = i\pi.$$

4.6 Bemerkung. Sei G ein Gebiet und $a \in G$ eine Polstelle von f . Nach dem Residuensatz gilt dann für kleines r

$$\operatorname{res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} f(w) dw.$$

Falls $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ mit einer in der Nähe von a holomorphen Funktion g , so folgt für kleine $r > 0$ mit dem Residuensatz und Satz 2.6

$$\operatorname{res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} f(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{g(w)}{(w-a)^m} dw = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a).$$

Speziell gilt dies für Funktionen der Form $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, wenn f_2 an der Stelle a eine m -fache Nullstelle besitzt. In diesem Fall schreibt man $f_2(z) = (z-a)^m g_2(z)$ und setzt $g(z) := \frac{f_1(z)}{g_2(z)}$. Falls $m = 1$ ist, gilt $g_2(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f_2(z)}{z-a} = f_2'(a)$ wegen $f_2(a) = 0$.

Dies ist eine Möglichkeit, Residuen zu berechnen. Wir fassen einige Berechnungsmöglichkeiten zusammen:

- (1) Man kann das Residuum direkt über die Potenzreihenentwicklung (Laurentreihe) bestimmen, indem man den Koeffizienten bei $(z-a)^{-1}$ abliest.
- (2) Sei wie oben $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$. Dann gilt $\operatorname{res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$.
- (3) Falls $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, wobei f_1 und f_2 in der Nähe von a holomorph sind und f_2 an der Stelle a eine m -fache Nullstelle hat, schreibt man $f_2(z) = (z-a)^m g_2(z)$ und setzt $g(z) = \frac{f_1(z)}{g_2(z)}$ in (2).
- (4) Die Regeln (2) bzw. (3) werden einfacher für $m = 1$: Falls f an der Stelle a eine einfache Polstelle hat, gilt

$$\operatorname{res}(f, a) = g(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$$

wegen $g(z) = (z-a)f(z)$ für $z \neq a$.

- (5) Falls a einfacher Pol von f ist und $g \in \mathcal{H}(G)$, so ist

$$\operatorname{res}(f \cdot g, a) = g(a) \operatorname{res}(f, a).$$

- (6) Das Residuum ist linear. Speziell gilt: Falls a Polstelle von f ist und $g \in \mathcal{H}(G)$, so ist

$$\operatorname{res}(\alpha f + g, a) = \alpha \operatorname{res}(f, a).$$

(7) Falls f holomorph (fortsetzbar) an der Stelle a ist, so ist $\text{res}(f, a) = 0$.

4.7 Satz (Satz vom Nullstellen und Polstellen zählenden Integral). Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $f \in \mathcal{M}(G)$ und Γ eine einfach geschlossene Kurve mit $f(z) \neq 0$ ($z \in \mathcal{R}(\Gamma)$). Sei N bzw. P die Anzahl der von Γ eingeschlossenen Nullstellen bzw. Polstellen von f (entsprechend der Vielfachheit gezählt). Dann gilt

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Beweis. Sei p eine Nullstelle der Ordnung m von f . Schreibe $f(z) = (z - p)^m g(z)$ mit $g(z) \neq 0$ in der Nähe von p . Dann folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - p)^{m-1}g(z) + (z - p)^m g'(z)}{(z - p)^m g(z)} = \frac{m}{z - p} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Da $\frac{g'}{g}$ in der Nähe von p holomorph ist, folgt $\text{res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) = m$. Analog erhält man $\text{res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) = -m$ bei einem Pol der Ordnung m . Die Behauptung folgt nun aus dem Residuensatz. \square

Mit dem obigen Satz erhalten wir wieder den Fundamentalsatz der Algebra durch Zählen der Nullstellen:

4.8 Korollar (Fundamentalsatz der Algebra). Ein komplexes Polynom P von Grad n besitzt genau n komplexe Nullstellen.

Beweis. Wähle $R > 0$ mit $|P(z)| \geq 1$ für alle $|z| \geq R$. Für $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ folgt

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{na_n z^{n-1} + \dots + a_1}{a_n z^n + \dots + a_0} = \frac{n}{z} + \sum_{j=2}^{\infty} c_j z^{-j} = f\left(\frac{1}{z}\right),$$

wobei

$$f(w) := \frac{na_n w + \dots + a_1 w^n}{a_n + a_{n-1} w + \dots + a_1 w^{n-1} + a_0 w^n}.$$

Die Funktion f ist holomorph in einer Umgebung von 0, da der Nenner nicht 0 wird. Es gilt $f(0) = 0$ und $f'(0) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(w)}{w} = n$, d.h. die Potenzreihe von f an der Stelle 0 hat die Form $f(w) = nw + \sum_{k=2}^{\infty} c_k w^k$. Daher gilt für alle $|z| \geq R$ mit großem R

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{n}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{-k}.$$

Die Anzahl der Nullstellen von P ist nach Satz 4.17

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \text{res}\left(\frac{P'}{P}, 0\right) = n. \quad \square$$

b) Homologie und Homotopie

Ab sofort werden wir den formalen Unterschied zwischen Kurven und ihren Repräsentanten (Wegen) fallenlassen. Für einen Weg γ ist das Integral $\int_{\gamma} f(z)dz$ ab sofort stets zu verstehen als das Integral $\int_{[\gamma]} f(z)dz$. Der Vorteil, mit Wegen zu arbeiten, liegt darin, dass wir Repräsentanten mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften auswählen können. Nach wie vor verstehen wir unter einem Weg, falls nichts anderes erwähnt wird, einen stückweise glatten Weg. Anfangs- und Endpunkt und Länge eines Wegs sind analog über die zugehörigen Kurven definiert.

4.9 Lemma. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(G)$. Definiere $g: G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z \neq w, \\ f'(z), & z = w. \end{cases} \quad (4-2)$$

Dann ist g stetig.

Beweis. Zu zeigen ist nur die Stetigkeit an den Stellen (a, a) mit $a \in G$. Da f' stetig ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\rho > 0$ mit $B(a, \rho) \subset G$ und

$$|f'(\xi) - f'(a)| < \varepsilon \quad (\xi \in B(a, \rho)). \quad (4-3)$$

Sei nun $(z, w) \in B(a, \rho) \times B(a, \rho)$ und $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z + t(w - z)$ die Verbindungsstrecke von z nach w . Dann ist

$$f(w) - f(z) = \int_{\gamma} f'(\xi)d\xi = \int_0^1 f'(\gamma(t))dt (w - z).$$

Damit

$$g(z, w) - g(a, a) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(a) = \int_0^1 (f'(\gamma(t)) - f'(a))dt.$$

Wegen (4-3) folgt $|g(z, w) - g(a, a)| < \varepsilon$. □

4.10 Definition. a) Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ Wege in \mathbb{C} und $K := \mathcal{R}(\gamma_1) \cup \dots \cup \mathcal{R}(\gamma_n)$. Betrachte die zugehörigen linearen Funktionalen $T_j: C(K) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int_{\gamma_j} f(z)dz$. Eine Kette γ ist eine formale Summe

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n,$$

welche die Summe der linearen Funktionalen induziert. D.h. wir setzen

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Wir setzen $\mathcal{R}(\gamma) := K$. Eine Kette in G ist eine Kette γ mit $\mathcal{R}(\gamma) \subset G$. Ein Zyklus ist eine Kette geschlossener Wege.

Man beachte, dass eine Kette auf verschiedene Weise dargestellt werden kann. Es gilt $\gamma_1 + \dots + \gamma_n = \mu_1 + \dots + \mu_m$, falls gilt: $\mathcal{R}(\gamma_1) \cup \dots \cup \mathcal{R}(\gamma_n) = \mathcal{R}(\mu_1) \cup \dots \cup \mathcal{R}(\mu_m) =: K$ und

$$\sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \int_{\mu_j} f(z) dz \quad (f \in C(K)).$$

Falls $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ eine Kette ist, schreiben wir $-\gamma$ für die Kette, die entsteht, wenn man jeden Weg γ_j durch den entgegengesetzten Weg $-\gamma_j$ ersetzt.

b) Die Summe von Ketten ist in offensichtlicher Weise definiert. Für zwei Ketten γ und μ ist die Summe bestimmt durch die Gleichheit

$$\int_{\gamma+\mu} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\mu} f(z) dz \quad f \in C(\mathcal{R}(\gamma) \cup \mathcal{R}(\mu)).$$

c) Sei $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ ein Zyklus und $z \notin \mathcal{R}(\gamma)$. Dann ist die Windungszahl von γ um z definiert durch

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\gamma_j}(z).$$

Damit können wir nun die Cauchysche Integralformel auf allgemeinere Gebiete und Zyklen verallgemeinern.

4.11 Satz. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, γ ein Zyklus in G mit $\text{Ind}_{\gamma}(w) = 0$ ($w \in \mathbb{C} \setminus G$). Sei $f \in \mathcal{H}(G)$.

a) **(Cauchyscher Integralsatz)** Es gilt $\int_{\gamma} f(w) dw = 0$.

b) **(Cauchysche Integralformel)** Es gilt

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)). \quad (4-4)$$

Beweis. b) Wie in Lemma 4.9 definiere die Funktion g durch (4-2) und setze $h(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, w) dw$.

(i) h ist holomorph in G : Als Integral über eine stetige Funktion (Lemma 4.9) ist h stetig. Wir rechnen die Voraussetzung des Satzes von Morera nach. Sei $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} h(z) dz = \int_{\partial\Delta} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, w) dw dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\int_{\partial\Delta} g(z, w) dz \right) dw,$$

wobei der Satz von Fubini benutzt wurde.

Die Funktion $z \mapsto g(z, w)$ ist holomorph für $z \neq w$ und beschränkt. Nach Satz 3.8 hat g also eine hebbare Singularität, ist also in G holomorph. Damit ist

$$\int_{\partial\Delta} g(z, w) dz = 0.$$

und somit $\int_{\partial\Delta} h(z) dz = 0$. Nach dem Satz von Morera ist h holomorph in G .

(ii) h kann zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden: Definiere $G_0 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\gamma) : \text{Ind}_\gamma(z) = 0\}$ und

$$h_0(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (z \in G_0).$$

Nach Voraussetzung gilt $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$ für alle $z \notin G$, d.h. $G_0 \supset \mathbb{C} \setminus G$. Für $z \in G \cap G_0$ gilt

$$h_0(z) - h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w} dw = f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = 0.$$

Damit ist

$$\tilde{h}(z) := \begin{cases} h(z), & z \in G, \\ h_0(z), & z \in G_0 \end{cases}$$

wohldefiniert auf ganz \mathbb{C} und eine ganze Funktion.

(iii) Anwendung des Satzes von Liouville: Da G_0 auch die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\gamma)$ enthält, gilt $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{h}(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} h_0(z) = 0$ (der Integrand konvergiert gegen Null). Nach dem Satz von Liouville ist also $\tilde{h} = 0$ und damit $h = 0$. Nach Definition von h bedeutet dies

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \text{Ind}_\gamma(z).$$

a) Wähle $z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)$ und wende Teil b) an auf die Funktion $g: G \rightarrow \mathbb{C}$, $w \mapsto f(w)(w - z)$. Nach Teil a) ist

$$\int_\gamma f(w) dw = \int_\gamma \frac{g(w)}{w - z} dw = 2\pi i g(z) \text{Ind}_\gamma(z) = 0,$$

wobei $g(z) = 0$ verwendet wurde. □

4.12 Bemerkung. a) Falls $G \subset \mathbb{C}$ konvex ist und γ ein Weg in G ist, so ist $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$ für alle $z \notin G$, und Satz 4.11 ist anwendbar. Wir erhalten den Cauchyschen Integralsatz bzw. die Cauchysche Integralformel für konvexe Gebiete.

b) Analog folgt der Cauchysche Integralsatz für Kreisringe, wenn man Satz 4.11 auf $G := B(a, r, R)$ und den Zyklus $\gamma_1 - \gamma_2$ mit $\mathcal{R}(\gamma_1) = \{z : |z - a| = R'\}$, $\mathcal{R}(\gamma_2) = \{z : |z - a| = r'\}$ anwendet.

c) Aus Teil a) des Satzes folgt für zwei Zyklen γ_1, γ_2 mit $\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = \text{Ind}_{\gamma_2}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$ die Gleichheit $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$.

4.13 Lemma. *In der Situation von Satz 4.11 gilt*

$$f^{(n)}(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Beweis. Das folgt induktiv sofort aus der Cauchyschen Integralformel durch Differentiation unter dem Integral. Beachte, dass Ind_{γ} lokal konstant ist. \square

4.14 Definition (Homologie und Homotopie). a) Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und seien γ_1, γ_2 zwei Zyklen in G . Dann heißen γ_1 und γ_2 homolog in G , falls

$$\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = \text{Ind}_{\gamma_2}(z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus G).$$

Ein Zyklus γ in G heißt nullhomolog in G , falls $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C} \setminus G)$.

b) Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G$ zwei Wege in G mit gleichem Anfangspunkt $A \in G$ und Endpunkt $E \in G$. Dann heißen γ_0 und γ_1 homotop in G , falls es eine stetige Funktion $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ gibt mit $H(\cdot, 0) = \gamma_0$, $H(\cdot, 1) = \gamma_1$, $H(0, \tau) = A$ und $H(1, \tau) = E \quad (\tau \in [0, 1])$. Ein Weg γ heißt nullhomotop, falls homotop zum konstanten Weg $\tilde{\gamma}(t) := c \quad (t \in [0, 1])$ für ein $c \in G$ ist.

Sowohl die Homologie als auch die Homotopie definiert eine Äquivalenzrelation.

c) Die Menge der Äquivalenzklassen geschlossener Wege bzgl. Homotopie in G heißt die Fundamentalgruppe von G . Ein Gebiet G heißt einfach zusammenhängend, falls jeder geschlossene Weg nullhomotop ist.

4.15 Lemma. *Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei geschlossene Wege und $z \in \mathbb{C}$. Es gelte*

$$|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |z - \gamma_0(t)| \quad (t \in [0, 1]). \quad (4-5)$$

Dann folgt $\text{Ind}_{\gamma_0}(z) = \text{Ind}_{\gamma_1}(z)$.

Beweis. Wegen (4-5) gilt $z \notin \mathcal{R}(\gamma_j)$ für $j = 0, 1$. Für den Weg $\gamma(t) := \frac{\gamma_1(t) - z}{\gamma_0(t) - z}$ gilt

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - z} - \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - z}$$

und

$$|1 - \gamma(t)| = \frac{|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)|}{|\gamma_0(t) - z|} < 1.$$

Damit gilt $\mathcal{R}(\gamma) \subset B(1, 1)$ und damit $\text{Ind}_\gamma(0) = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi i \text{Ind}_\gamma(0) = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - 0} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - z} dt - \int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - z} dt \\ &= 2\pi i (\text{Ind}_{\gamma_1}(z) - \text{Ind}_{\gamma_0}(z)). \quad \square \end{aligned}$$

4.16 Bemerkung. a) Seien $G \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ geschlossene Wege in G . Unter Verwendung von Lemma 4.15 kann man zeigen: Falls γ_0 und γ_1 homotop sind, so sind sie auch homolog.

b) Der Satz von Cauchy gilt somit für nullhomologe Zyklen. Insbesondere gilt dieser Satz für jeden geschlossenen Weg, falls das Gebiet einfach zusammenhängend ist.

Auch der Residuensatz und der Satz vom Nullstellen und Polstellen zählenden Integral übertragen sich auf nullhomologe Zyklen, wobei die Beweise wie im Fall eines konvexen Gebietes geführt werden können.

4.17 Satz. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{M}(G)$ mit Polmenge P_f . Sei γ ein nullhomologer Zyklus in G mit $\mathcal{R}(\gamma) \subset G \setminus P_f$.

a) **(Residuensatz)** Es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{p \in P_f} \text{res}(f, p) \text{Ind}_\gamma(p). \quad (4-6)$$

b) **(Satz vom Nullstellen und Polstellen zählenden Integral)** Es gelte $\text{Ind}_\gamma(z) \in \{0, 1\}$ für alle $z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)$ und $f(z) \neq 0$ ($z \in \mathcal{R}(\gamma)$). Sei N bzw. P die Anzahl der von γ eingeschlossenen Nullstellen bzw. Polstellen von f . Dann gilt

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Der folgende Satz besagt, dass die Anzahl der eingeschlossenen Nullstellen bei nicht zu starker Änderung der Funktion unverändert bleibt.

4.18 Satz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und γ ein nullhomologer Weg in G mit $\text{Ind}_\gamma(z) \in \{0, 1\}$ für alle $z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)$. Zu $f \in \mathcal{H}(G)$ sei N_f die Anzahl der von γ eingeschlossenen Nullstellen inklusive Vielfachheit.

a) Falls $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $f(z) \neq 0$ für $z \in \mathcal{R}(\gamma)$, so gilt

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0).$$

b) **(Satz von Rouché)** Falls $f, g \in \mathcal{H}(G)$ mit

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad (z \in \mathcal{R}(\gamma)), \quad (4-7)$$

so gilt $N_f = N_g$.

Beweis. a) Die erste Gleichheit folgt direkt aus Satz 4.17. Es gilt

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{(f(\gamma(t)))} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

b) Wegen (4-7) gilt $f(z) \neq 0$ und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathcal{R}(\gamma)$. Nach a) gilt $N_f = \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0)$ und $N_g = \text{Ind}_{g \circ \gamma}(0)$. Wegen (4-7) können wir Lemma 4.15 auf $\gamma_0 := f \circ \gamma$ und $\gamma_1 := g \circ \gamma$ mit $z = 0$ anwenden und erhalten $\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \text{Ind}_{g \circ \gamma}(0)$. \square

5. Der Wertebereich holomorpher Funktionen

5.1 Worum geht's? Die Frage der Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen wurde in den bisherigen Abschnitten noch nicht vollständig beantwortet. Wir wissen zwar schon einiges über die Nullstellen holomorpher Funktionen und über die singulären Stellen, jetzt kommen aber einige wichtige Aussagen dazu. So ist eine holomorphe Funktion offen, d.h. sie bildet offene Mengen auf offene Mengen ab. Lokal verhält sich jede Funktion wie eine Potenzfunktion.

Aus diesen Eigenschaften lassen sich wichtige Prinzipien wie etwa das Maximumprinzip ableiten. Eine holomorphe Funktion kann in einem Gebiet kein lokales Betragsmaximum besitzen, die Maxima liegen alle auf dem Rand des Gebietes.

Holomorphe Funktionen sind winkeltreu und erhalten die Orientierung. Hier ist der Begriff einer konformen Abbildung wichtig. Es gibt eine ganze Klasse konformer Abbildungen, welche hier aber nicht im Detail diskutiert werden.

5.2 Satz (Satz von der lokalen Umkehrbarkeit). Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(G)$ und $z_0 \in G$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann existiert eine offene Umgebung $V \subset G$ von z_0 , so dass $f|_V$ biholomorph ist d.h. $f|_V$ ist bijektiv, $f(V)$ ist offen, und $(f|_V)^{-1}$ ist holomorph. Es ist $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ für alle $w \in f(V)$.

Beweis. Das zeigt man genauso wie in Analysis II. □

5.3 Definition. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt offen, falls $f(U) \subset Y$ offen ist für jede offene Teilmenge $U \subset X$.

5.4 Beispiel. Für $m \in \mathbb{N}$ betrachte die Potenzfunktion $\pi_m: z \mapsto z^m$. Dann ist $\pi_m: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ offen: Falls $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ offen ist, so ist $\pi_m(V)$ offen nach Satz 5.2. Im Falle $0 \in U$ müssen wir nur zeigen, dass $f(0) = 0$ ein innerer Punkt von $f(U)$ ist. Dies gilt aber, da $f(B(0, r)) = B(0, r^m)$.

Beachte, dass $z^m = w$ genau die m Lösungen $z_j = \sqrt[m]{r} \exp(i \frac{\theta + 2\pi j}{m})$, $j = 0, \dots, m-1$, hat, wobei $w = re^{i\theta}$.

5.5 Satz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(G)$ nicht konstant, $z_0 \in G$ und $w_0 := f(z_0)$. Es sei m die Nullstellenordnung von $z \mapsto f(z) - w_0$ bei z_0 . Dann existiert eine offene Umgebung U von z_0 und ein $\varphi \in \mathcal{H}(G)$ mit $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$ in U , wobei $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z) \neq 0$ ($z \in U$) und $\varphi(U) = B(0, r)$ für $r > 0$ geeignet. Somit gilt $f(z) = w_0 + (\varphi(z))^m$ ($z \in U$).

Beweis. Sei $\tilde{U} \subset G$ eine konvexe offene Umgebung von z_0 , so dass $f(z) \neq w_0$ ($z \in$

$\tilde{U} \setminus \{z_0\}$. Die Existenz von \tilde{U} folgt, da die Nullstellen von $f - w_0$ keinen Häufungspunkt in G besitzen.

Schreibe $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$ mit $g \in \mathcal{H}(\tilde{U})$ und $g(z) \neq 0$ ($z \in \tilde{U}$). Da $\frac{g'}{g} \in \mathcal{H}(\tilde{U})$, besitzt $\frac{g'}{g}$ eine Stammfunktion h in \tilde{U} . Es gilt

$$(g \exp(-h))' = g' \exp(-h) - gh' \exp(-h) = g \exp(-h) \left(\frac{g'}{g} - h' \right) = 0.$$

Damit ist $g = c \exp(h)$ mit einer Konstanten c . Ersetzt man h durch $h + \tilde{c}$ mit einer geeigneten Konstante \tilde{c} , so können wir $g = \exp(h)$ annehmen.

Setze $\varphi(z) := (z - z_0) \exp\left(\frac{h(z)}{m}\right)$. Dann folgt

$$\pi_m \circ \varphi(z) = (z - z_0)^m \exp(h(z)) = (z - z_0)^m g(z) = f(z) - w_0.$$

Weiter gilt $\varphi(z_0) = 0$ und $\varphi'(z_0) = \exp(h(z_0)/m) \neq 0$. Damit ist nach Satz 5.2 $\varphi|_V$ biholomorph für eine offene Umgebung V , und für hinreichend kleines $r > 0$ gilt $B(0, r) \subset \varphi(V)$. Setze nun $U := \varphi^{-1}(B(0, r))$. \square

5.6 Satz (Satz von der offenen Abbildung, Satz von der Gebietstreue). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$ nicht konstant. Dann ist f offen, und $f(G)$ ist ein Gebiet.

Beweis. Sei $w_0 \in f(G)$. Schreibe $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$ nach Satz 5.5. Da $\varphi'(z) \neq 0$ für alle $z \in V$, ist φ offen nach Satz 5.2. Nach Beispiel 5.4 ist π_m offen, und damit ist $f - w_0$ als Verknüpfung offener Abbildungen offen. Somit ist f offen.

Da das stetige Bild zusammenhängender Mengen zusammenhängend ist, ist mit G auch $f(G)$ ein Gebiet. \square

5.7 Korollar. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$ injektiv. Dann gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$, und $f: G \rightarrow f(G)$ ist biholomorph.

Beweis. Angenommen, es ist $f'(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in G$. Dann hat die Funktion $f - w_0$ mit $w_0 := f(z_0)$ an der Stelle z_0 eine m -fache Nullstelle mit $m \geq 2$. Schreibe $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$ nach Satz 5.5. Aber nach Beispiel 5.4 ist π_m nicht injektiv für $m \geq 2$, Widerspruch zur Injektivität von f (man beachte, dass φ lokal bijektiv ist). Die Holomorphie von $f^{-1}: f(G) \rightarrow G$ folgt nun aus dem Satz von der lokalen Umkehrbarkeit, Satz 5.2. \square

5.8 Satz (Maximumprinzip). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$.

- a) Falls $|f|$ an der Stelle $z_0 \in G$ ein lokales Maximum hat, so ist f konstant.
 b) Falls G beschränkt und f stetig in \overline{G} , so gilt

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)| \quad (z \in \overline{G}).$$

Beweis. Sei f nicht konstant und $z_0 \in G$ lokales Maximum, d.h. es existiert eine Umgebung $U \subset G$ von z_0 , so dass

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad (z \in U).$$

Dann folgt $f(U) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq |f(z_0)|\}$. Damit ist $f(z_0)$ kein innerer Punkt von $f(U)$, und $f(U)$ ist nicht offen, im Widerspruch zum Satz von der offenen Abbildung. Dies zeigt a), und Teil b) folgt direkt aus a), wenn man noch beachtet dass \overline{G} kompakt ist und damit wegen der Stetigkeit von $z \mapsto |f(z)|$ das Maximum von $|f(z)|$ auf \overline{G} angenommen wird. \square

5.9 Satz (Minimumprinzip). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$.

- a) Falls $|f|$ an der Stelle $z_0 \in G$ ein lokales Minimum hat, so ist $f(z_0) = 0$ oder f konstant.
 b) Falls G beschränkt und f stetig in \overline{G} , so gilt

$$|f(z)| \geq \min_{w \in \partial G} |f(w)| \quad (z \in \overline{G}),$$

oder f besitzt eine Nullstelle in G .

Beweis. Wende Satz 5.8 auf $\frac{1}{f}$ an. \square

5.10 Definition. a) Seien $\gamma_1, \gamma_2: [-a, a] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei glatte Wege mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) =: z_0$. Dann heißt

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0} := \arg \left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \right)$$

der (orientierte) Schnittwinkel von γ_1 und γ_2 an der Schnittstelle z_0 .

b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt winkeltreu und orientierungserhaltend, falls für alle glatten Wege $\gamma_1, \gamma_2: [-a, a] \rightarrow G$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) =: z_0$ gilt:

$$\sphericalangle(f(\gamma_1)_{f(z_0)}, f(\gamma_2))_{f(z_0)} = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0}.$$

c) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt konform, falls f injektiv, winkeltreu und orientierungserhaltend ist. Falls f nur statt injektiv nur lokal injektiv ist, heißt f lokal konform.

5.11 Bemerkung. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Dann ist f winkeltreu und orientierungserhaltend. Denn

$$\begin{aligned} \sphericalangle(f(\gamma_1), f(\gamma_2))_{f(z_0)} &= \arg \left(\frac{f \circ \gamma_1(0)}{f \circ \gamma_2(0)} \right) = \arg \left(\frac{f'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0)}{f'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0)} \right) \\ &= \arg \left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \right) = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0}. \end{aligned}$$

5.12 Beispiele. a) Die exp-Funktion ist lokal konform, aber nicht konform.

b) Die Potenzfunktionen $\pi_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$, $n \geq 1$, ist lokal konform in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $k = 0, \dots, n-1$ betrachte den Sektor

$$S_k := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{2\pi}{n}k < \arg z < \frac{2\pi}{n}(k+1)\}.$$

Dann ist $\pi_n: S_k \rightarrow \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ konform.

5.13 Satz (Schwarzsches Lemma). Sei $f: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ holomorph mit $f(0) = 0$.

a) Es gilt $|f(z)| \leq |z|$ ($z \in B(0, 1)$) und $|f'(0)| \leq 1$.

b) Es gelte $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \dot{B}(0, 1) := B(0, 1) \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $f(z) = e^{i\varphi}z$ ($z \in B(0, 1)$), d.h. f ist eine Drehung.

Beweis. a) Betrachte

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Dann ist $g \in \mathcal{H}(\dot{B}(0, 1))$ und stetig in $B(0, 1)$, also nach dem Hebbbarkeitssatz holomorph in $B(0, 1)$. Nach dem Maximumprinzip folgt für $|z| \leq r < 1$

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r},$$

wobei $|f| \leq 1$ verwendet wurde. Für $r \rightarrow 1$ folgt $|g(z)| \leq 1$ ($z \in B(0, 1)$) und damit a).

b) Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$, so nimmt $|g(z)|$ sein Maximum (nämlich 1) in $B(0, 1)$ an. Nach dem Maximumprinzip ist g konstant mit $|g(z)| = 1$, d.h. es existiert ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $g(z) = e^{i\varphi}$. Nach Definition von g folgt b). \square

6. Folgen holomorpher Funktionen und der Riemannsche Abbildungssatz

6.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden verschiedene Konvergenzbegriffe für Folgen holomorpher Funktionen betrachtet. Die wichtigste Konvergenzart ist dabei die lokal gleichmäßige Konvergenz, d.h. die gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen des Gebietes. Ein Satz von Weierstraß besagt in diesem Fall, dass auch die Ableitungen lokal gleichmäßig konvergieren. Nach dem Satz von Hurwitz gehen bei lokal gleichmäßiger Konvergenz keine Nullstellen im Grenzwert verloren bzw. es kommen keine neuen dazu. Das wichtigste Kriterium für lokal gleichmäßige Konvergenz (einer Teilfolge) liefert der Satz von Montel.

Diese Sätze bilden das Werkzeug, um das Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen zu studieren. Wir kennen bereits den Satz von der offenen Abbildung, nach dem eine holomorphe Funktion offene Gebiete auf Gebiete abbildet. Aus dem Cauchyschen Integralsatz wissen wir bereits, dass einfach zusammenhängende Gebiete eine besondere Rolle spielen. Das Standardbeispiel eines einfach zusammenhängenden Gebietes ist die offene Einheitskugel $B(0, 1)$. Der Riemannsche Abbildungssatz, einer der stärksten Sätze der Funktionentheorie, besagt, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet biholomorph auf $B(0, 1)$ abgebildet werden kann.

a) Folgen holomorpher Funktionen

6.2 Bemerkung. In diesem Abschnitt wird es um die Konvergenz einer Folge holomorpher Funktionen gehen. Daher fassen wir die wichtigen Konvergenzbegriffe zusammen. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$ und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$.

a) Sei $M \subset G$. Dann heißt f_n gleichmäßig konvergent gegen f auf M , falls

$$\sup_{z \in M} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die Folge $(f_n)_n$ heißt lokal gleichmäßig konvergent gegen f , falls zu jedem $z \in G$ eine Umgebung U von z existiert, so dass $(f_n)_n$ gleichmäßig in U gegen f konvergiert.

b) Die Folge $(f_n)_n$ heißt gleichmäßig auf Kompakta konvergent gegen f , falls $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig in jeder kompakten Menge $K \subset G$. Offensichtlich ist die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz.

Sei nun \mathcal{F} eine Familie von Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ mit $M \subset G$.

c) \mathcal{F} heißt beschränkt in $M \subset G$, falls $\sup\{|f(z)| : z \in M, f \in \mathcal{F}\} < \infty$.

\mathcal{F} heißt lokal beschränkt in G , falls zu jedem $z \in G$ eine Umgebung U existiert, so dass \mathcal{F} beschränkt in U ist.

d) \mathcal{F} heißt gleichgradig stetig in $M \subset G$, falls

$$\forall z \in G \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z' \in M, |z - z'| < \delta, \forall f \in \mathcal{F} : |f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

Wieder heißt \mathcal{F} lokal gleichgradig stetig in G , falls zu jedem $z \in G$ eine Umgebung U von z existiert, so dass f gleichgradig stetig in U ist.

e) \mathcal{F} heißt gleichmäßig gleichgradig stetig in M , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z, z' \in M, |z - z'| < \delta, \forall f \in \mathcal{F} : |f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

Analog definiert man lokal gleichmäßig gleichgradig stetig.

f) Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert auf U lokal gleichmäßig gegen ∞ , falls für alle kompakten Mengen $K \subset U$ und für alle $R > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|f_n(z)| \geq R \quad (n \geq n_0, z \in K).$$

6.3 Satz (von Weierstraß). Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(G)$ eine Folge von Funktionen, welche lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist $f \in \mathcal{H}(G)$ und jede Folge der Ableitungen $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen $f^{(j)}$ in G für $j \in \mathbb{N}$.

Beweis. Nach den Sätzen über gleichmäßige Konvergenz wissen wir, dass f stetig ist. Sei $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0,$$

wobei das Lemma von Goursat und ein Satz über Integration gleichmäßig konvergenter Funktionen verwendet wurde. Nach dem Satz von Morera folgt $f \in \mathcal{H}(G)$.

Sei $\overline{B(a, r)} \subset G$. Nach der Cauchy-Integralformel (Lemma 4.13) gilt für $z \in B(a, \frac{r}{2})$ die Darstellung

$$\begin{aligned} |f_n^{(j)}(z) - f^{(j)}(z)| &= \left| \frac{j!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{j+1}} dw \right| \\ &\leq \frac{j!}{2\pi} 2\pi r \left(\frac{r}{2}\right)^{-j-1} \cdot \max_{|w-a|=r} |f_n(w) - f(w)| \\ &= j! 2^{j+1} r^{-j} \cdot \max_{|w-a|=r} |f_n(w) - f(w)|. \end{aligned}$$

Da f_n gleichmäßig auf Kompakta gegen f konvergiert, folgt $|f_n(w) - f(w)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) gleichmäßig auf $|w - a| = r$. Damit konvergiert $|f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$ gleichmäßig für $z \in B(a, \frac{r}{2})$, d.h. $f_n^{(j)}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen $f^{(j)}$. \square

Der folgende Satz besagt, dass der lokal gleichmäßige Grenzwert einer Folge holomorpher Funktionen genauso viele Nullstellen besitzt wie die Folge selbst. Es gehen also beim Grenzübergang keine Nullstellen verloren und es kommen keine dazu.

6.4 Satz (von Hurwitz). Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(G)$ eine Folge von Funktionen, welche lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f \neq 0$ konvergiert. Für $a \in G$ sind äquivalent:

- (i) f hat an der Stelle a eine Nullstelle der Ordnung $m \geq 0$.
- (ii) Es existiert eine offene Umgebung $U \subset G$ von a , so dass für alle $B(a, r)$ mit $\overline{B(a, r)} \subset U$ ein $n_0(r)$ existiert mit folgender Eigenschaft: Für $n \geq n_0(r)$ hat die Funktion f_n in $B(a, r)$ genau m Nullstellen (inklusive Vielfachheit gezählt).

Beweis. Wegen $f \neq 0$ ist die Nullstellenmenge von f diskret, es existiert also eine Umgebung U von a , in der a die einzige Nullstelle von f ist.

Sei nun $\overline{B(a, r)} \subset U$. Wir definieren $\varepsilon(r) := \min_{|z-a|=r} |f(z)|$. Da $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f auf Kompakta konvergiert, existiert ein $n_0(r)$ mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon(r) \leq |f(z)| \quad (|z - a| = r, n \geq n_0(r)).$$

Nach dem Satz von Rouché haben f und f_n dieselbe Anzahl von Nullstellen in $B(a, r)$. □

6.5 Korollar. In der Situation von Satz 6.4 gilt:

- a) Ist jedes f_n nullstellenfrei, so ist auch f nullstellenfrei oder $f = 0$.
- b) Ist jedes f_n injektiv, so ist auch f injektiv oder konstant.

Beweis. a) Satz von Hurwitz mit $m = 0$.

b) Zu $a \in G$ betrachte $g_n(z) := f_n(z) - f_n(a)$ und wende a) auf die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Gebiet $G \setminus \{a\}$ an. □

6.6 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ heißt normal, falls jede Folge in \mathcal{F} eine Teilfolge besitzt, die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion oder gegen ∞ konvergiert.

6.7 Satz (von Montel). Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ eine lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen. dann ist \mathcal{F} normal.

Ist insbesondere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(G)$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen, so besitzt $(f_n)_n$ eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis. Wie in Lemma 3.4 schreiben wir G als Vereinigung kompakter Mengen, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_k$, wobei nach Konstruktion der Mengen A_k gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists r = r(k) > 0 \forall z \in A_k \ B(z, 2r) \subset A_{k+1}.$$

(i) Sei $K \subset G$ kompakt. Wir zeigen, dass \mathcal{F} gleichmäßig gleichgradig stetig auf K ist. Wegen $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $K \subset A_k$. Da f lokal beschränkt ist, existiert ein $C > 0$ mit

$$|f(z)| \leq C \quad (f \in \mathcal{F}, z \in A_{k+1}).$$

Wähle $r = r(k)$ wie oben. Für $f \in \mathcal{F}$ und $z, z' \in K$ mit $|z - z'| < r$ gilt

$$\overline{B(w, r)} \subset A_{k+1} \quad (w \in s_{zz'}).$$

Hier ist wieder $s_{zz'}$ die Strecke von z nach z' .

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &= \left| \int_{s_{zz'}} f'(w) dw \right| \leq |z - z'| \cdot \max_{w \in s_{zz'}} |f'(w)| \\ &\leq |z - z'| \cdot \max_{w \in s_{zz'}} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-w|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^2} d\zeta \right| \\ &\leq |z - z'| \cdot \frac{2\pi r}{2\pi} \max_{w \in A_{k+1}} |f(w)| \cdot \frac{1}{r^2} \leq \frac{C}{r} |z - z'|. \end{aligned}$$

Damit ist f Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten $\frac{C}{r}$, welche nicht von f abhängt. Somit ist \mathcal{F} gleichmäßig gleichgradig stetig in K .

(ii) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Sei $K \subset G$ kompakt. Dann ist $(f_n)_n$ in K beschränkt und nach (i) gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli besitzt $(f_n)_n$ eine auf K gleichmäßig konvergente Teilfolge.

(iii) Sei wieder $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Dann besitzt $(f_n)_n$ nach (ii) eine auf A_1 gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n,1})_n$. Davon existiert wiederum eine Teilfolge $(f_{n,2})_n$, die auf A_2 gleichmäßig konvergent ist etc. Dann ist die Diagonalfolge $(f_{n,n})_n$ auf jedem Kompaktum A_k gleichmäßig konvergent. Da für jede kompakte Menge $K \subset G$ gilt $K \subset A_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, ist $(f_{n,n})_n$ auf jeder kompakten Menge gleichmäßig konvergent, d.h. lokal gleichmäßig konvergent. Somit ist die Familie \mathcal{F} normal. \square

b) Der Riemannsche Abbildungssatz

6.8 Definition und Satz. Für $a \in B(0, 1)$ definiere die Möbius-Transformation $\mu_a: \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{a}}\} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\mu_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Dann gilt

- (i) $\mu_a \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{a}}\})$ mit $\mu_a(a) = 0$.
- (ii) $\mu_a^{-1} = \mu_{-a}$.
- (iii) Es gilt $\mu'_a(z) = \frac{(1-\bar{a}z)+\bar{a}(z-a)}{(1-\bar{a}z)^2}$. Insbesondere ist $\mu'_a(0) = 1 - |a|^2$ und $\mu'_a(a) = (1 - |a|^2)^{-1}$.
- (iv) Es ist $\mu_a(B(0, 1)) = B(0, 1)$ und $|\mu_a(z)| = 1 \quad (|z| = 1)$.

Beweis. Die Aussagen (i)–(iii) folgen durch direktes Nachrechnen. Sei nun $|z| = 1$, d.h. $z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$. Dann ist

$$|\mu_a(z)| = \left| \frac{e^{i\varphi} - a}{1 - \bar{a}e^{i\varphi}} \right| = \left| e^{-i\varphi} \frac{e^{i\varphi} - a}{e^{-i\varphi} - \bar{a}} \right| = 1.$$

Somit ist $\mu_a(\partial B(0, 1)) \subset \partial B(0, 1)$. Nach (ii) ist $\mu_a^{-1} = \mu_{-a}$ und damit $\mu_a^{-1}(\partial B(0, 1)) \subset \partial B(0, 1)$. Somit ist μ_a eine Bijektion von $\partial B(0, 1)$ nach $\partial B(0, 1)$. Nach dem Maximumprinzip Satz 5.8 folgt $\mu_a(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ und, genauso wie vorher, $\mu_a^{-1}(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$. Dies zeigt (iv). \square

6.9 Lemma. Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $f(z) \neq 0 \quad (z \in G)$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{H}(G)$ mit $g^2 = f$ in G .

Beweis. Wegen $f(z) \neq 0 \quad (z \in G)$ ist $\frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(G)$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz (siehe Bemerkung 4.16 b)) gilt für jeden geschlossenen Weg γ in G

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

Nach Satz 1.27 besitzt $\frac{f'}{f}$ eine Stammfunktion F in G . Somit ist $(f \exp(-F))' = f' \exp(-F) - f \exp(-F) \frac{f'}{f} = 0$, d.h. es existiert eine Konstante $c \neq 0$ mit $f = c \exp(F)$. Setze $g := c^{1/2} \exp(F/2)$, wobei $c^{1/2}$ eine der beiden Wurzeln von c ist. \square

6.10 Satz (Riemannscher Abbildungssatz). Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ ist biholomorph auf $B(0, 1)$ abbildbar.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte:

- (i) Es existiert ein biholomorphes $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $0 \in f(G) \subset B(0, 1)$.
- (ii) Es existiert ein $g \in \mathcal{F} := \{h: f(G) \rightarrow B(0, 1) \mid h \text{ biholomorph mit } h(0) = 0\}$ mit $|g'(0)| = \sup_{h \in \mathcal{F}} |h'(0)|$.
- (iii) Die Funktion $g: f(G) \rightarrow B(0, 1)$ ist surjektiv.

Wenn wir (i)–(iii) gezeigt haben, so ist $g \circ f: G \rightarrow B(0, 1)$ die gesuchte biholomorphe Abbildung von G nach $B(0, 1)$.

Zu (i): Sei $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann ist $z \mapsto z - a$ eine holomorphe Funktion auf G ohne Nullstelle und besitzt daher nach Lemma 6.9 eine Wurzel $q \in \mathcal{H}(G)$ mit $q^2(z) = z - a$ ($z \in G$). Wegen $a \notin G$ ist $q(z) \neq 0$ ($z \in G$).

Es gilt

$$q(w) \neq \pm q(z) \quad (w, z \in G \text{ mit } w \neq z). \quad (6-1)$$

Denn sonst wäre $w - a = q^2(w) = q^2(z) = z - a$, d.h. $w = z$. Insbesondere ist q injektiv.

Wähle nun $c \in q(G)$. Nach dem Satz von der offenen Abbildung 5.6 ist $q(G)$ offen, d.h. es existiert ein $r > 0$ mit $B(c, r) \subset q(G)$. Es gilt

$$|q(z) + c| \geq r \quad (z \in G). \quad (6-2)$$

Denn sonst existiert ein $z \in G$ mit $q(z) \in B(-c, r)$, d.h. $-q(z) \in B(c, r) \subset q(G)$. Damit gibt es $z, w \in q(G)$ mit $q(z) = -q(w)$, Widerspruch zu (6-1).

Nach (6-2) gilt $q(G) \subset \mathbb{C} \setminus B(-c, r)$. Da $q(G)$ offen ist, folgt sogar $q(G) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B(-c, r)}$, d.h. man kann in (6-2) das „ \geq “ durch „ $>$ “ ersetzen. Definiere \tilde{f} durch

$$\tilde{f}(z) := \frac{r}{q(z) + c} \quad (z \in G).$$

Da $|q(z) + c| > r$ ($z \in G$), ist $\tilde{f} \in \mathcal{H}(G)$ mit $|\tilde{f}(z)| < 1$ ($z \in G$) und damit $\tilde{f}(G) \subset B(0, 1)$. Da q injektiv ist, ist auch \tilde{f} injektiv.

Sei $z_0 \in G$ beliebig. Definiere $f(z) := \frac{1}{2}(\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0))$. Dann ist $f \in \mathcal{H}(G)$ injektiv mit $f(G) \subset B(0, 1)$ und $0 \in f(G)$. Nach Korollar 5.7 ist $f: G \rightarrow f(G)$ biholomorph.

Zu (ii): Wegen $\text{id}_{f(G)} \in \mathcal{F}$ ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Sei $\alpha := \sup_{h \in \mathcal{F}} |h'(0)|$. Wegen $\text{id}_{f(G)} \in \mathcal{F}$ ist $\alpha \geq 1$.

Nach der Cauchy-Integralformel gilt für $h \in \mathcal{H}(B(0, 1))$ und $r \in (0, 1)$ mit $\overline{B(0, r)} \subset f(G)$ die Gleichheit

$$h'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{h(z)}{z^2} dz.$$

Für $h \in \mathcal{F}$ ist somit $|h'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r}$, d.h. $\alpha < \infty$. Also existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ mit $|g'_n(0)| \rightarrow \alpha$.

Wegen $|g_n(z)| < 1$ ($z \in f(G), n \in \mathbb{N}$) ist die Folge $(g_n)_n$ gleichmäßig beschränkt. Nach dem Satz von Montel 6.7 existiert eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge, die wieder mit $(g_n)_n$ bezeichnet sei. Setze $g := \lim_n g_n \in \mathcal{H}(f(G))$.

Nach dem Maximumprinzip gilt $|g(z)| < 1$ ($z \in f(G)$). Nach dem Satz von Weierstraß 6.3 gilt $g'_n \rightarrow g'$ gleichmäßig in $f(G)$ und damit insbesondere $g'_n(0) \rightarrow g'(0)$,

d.h. $|g'(0)| = \alpha \geq 1$. Außerdem ist $g(0) = \lim_n g_n(0) = 0$. Da jedes g_n injektiv ist und g nicht konstant ist (wegen $g'(0) \neq 0$), ist nach Korollar 6.5 auch g injektiv. Nach Korollar 5.7 ist g biholomorph. Insgesamt folgt $g \in \mathcal{F}$.

Zu (iii): Wir nehmen an, dass $g: f(G) \rightarrow B(0, 1)$ nicht surjektiv ist. Wähle $a \in B(0, 1) \setminus g(f(G))$ und betrachte $\mu_a \circ g$, wobei μ_a die Möbius-Transformation zu a ist (siehe Definition 6.8). Dann ist $\mu_a \circ g \in \mathcal{H}(f(G))$ injektiv (da g und μ_a injektiv sind), und wegen $\mu_a(a) = 0$ und $a \notin g(f(G))$ gilt $(\mu_a \circ g)(z) \neq 0 \quad (z \in f(G))$.

Nach Lemma 6.9 existiert eine Wurzel $h_1 \in \mathcal{H}(f(G))$ von $\mu_a \circ g$ in $f(G)$ mit $h_1^2 = \mu_a \circ g$. Die Funktion h_1 ist wieder injektiv, da für $h_1(z_1) = h_1(z_2)$ folgt $(\mu_a \circ g)(z_1) = (\mu_a \circ g)(z_2)$ und damit $z_1 = z_2$, da $\mu_a \circ g$ injektiv ist.

Definiere $h: f(G) \rightarrow B(0, 1)$ durch $h := \mu_{h_1(0)} \circ h_1$. Dann ist $h \in \mathcal{H}(f(G))$ injektiv mit $h(0) = \mu_{h_1(0)}(h_1(0)) = 0$ nach Definition 6.8. Somit ist $h \in \mathcal{F}$.

Wir werden zeigen, dass $|h'(0)| > |g'(0)|$ gilt, was einen Widerspruch zu (ii) darstellt. Dazu setze

$$w(z) := \mu_{-a}(\mu_{-h_1(0)}(z))^2 = \mu_{-a} \circ \pi_2 \circ \mu_{-h_1(0)},$$

wobei wieder $\pi_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ sei. Es ist

$$w \circ h = \mu_{-a} \circ \pi_2 \circ \mu_{-h_1(0)} \circ \mu_{h_1(0)} \circ h_1 = \mu_{-a} \circ (h_1)^2 = g.$$

Damit folgt

$$g'(0) = (w \circ h)'(0) = w'(h(0))h'(0) = w'(0)h'(0).$$

Da $w \in \mathcal{H}(B(0, 1))$ mit $w(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$, $w(0) = 0$ und w nicht bijektiv ist (da π_2 nicht bijektiv ist), folgt nach dem Schwarzschen Lemma 5.13 die Abschätzung $|w'(0)| < 1$. Somit ist $|g'(0)| < |h'(0)|$. Da $h \in \mathcal{F}$, ist dies ein Widerspruch zu Eigenschaft (ii) von g .

Somit ist g surjektiv auf $B(0, 1)$, was Teil (iii) zeigt und den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes beendet. \square

Literatur

- [BF] Busam, R., Freitag, E.: Funktionentheorie. Springer, Heidelberg, 1993.
- [Co] Conway, J.B.: Functions of One Complex Variable. Springer, New York Heidelberg Berlin,
- [DR] Denk, R., Racke, R.: Kompendium der Analysis, Band 2. Springer Spektrum, Wiesbaden 2012.
- [FH] Forst, W., Hoffmann, D.: Funktionentheorie erkunden mit Maple. Springer, Berlin 2002.
- [FL] Fischer, W., Lieb I.: Funktionentheorie. Vieweg, Wiesbaden 1994.
- [FB] Freitag, E., Busam, R.: Funktionentheorie. Springer, Berlin 1995.
- [Jä] Jänich, K.: Funktionentheorie. Ein Einführung. Springer, Berlin 1999.
- [La] Lang S.: Complex Analysis. 3rd edn., Springer, New York Berlin Heidelberg, 1993,
- [Lo] Lorenz, F.: Funktionentheorie. Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg , 1997.
- [Re] Remmert, R.: Funktionentheorie I. Springer, Berlin 1995.

Index

- Argumentfunktion, 14
- beschränkte Funktionenfamilie, 48
- Cauchy-Integralformel, 39
- Cauchy-Integralformel für Kreisringe, 29
- Cauchy-Integralformel für konvexe Gebiete, 21
- Cauchy-Integralsatz, 39
 - für konvexe Gebiete, 21
- Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, 5
- cos-Funktion, 10
- cosh-Funktion, 10
- Darstellung durch Potenzreihen, 9
- exp-Funktion, 10
- Exponentialfunktion, 10
- Fundamentalsatz der Algebra, 23, 37
- Gebiet, 7
 - gleichgradig stetig, 49
 - gleichmäßig auf Kompakta konvergent, 48
 - gleichmäßig gleichgradig stetig, 49
 - gleichmäßig konvergent, 48
- Hauptteil, 26
- hebbare Singularität, 26
- Hebbarkeitssatz, 26
- holomorph, 4
- homolog, 41
- homotop, 41
- hyperbolische Funktionen, 10
- Identitätssatz, 25
- Integral in \mathbb{C} , 12
- isolierte Singularität, 26
- Kette, 38
- komplex differenzierbar, 4
- konform, 47
- konvergent
 - gleichmäßig, 48
 - gleichmäßig auf Kompakta, 48
 - lokal gleichmäßig, 48
- Kreisring, 28
- Kurve, 11
- Kurvenintegral, 11
- Laurent-Reihe, 30
- Lemma von Goursat, 19
- ln-Funktion, 14
- Logarithmus, 14
 - Hauptzweig, 14
- lokal beschränkte Funktionenfamilie, 48
- lokal gleichmäßig gleichgradig stetig, 49
- lokal gleichmäßig konvergent, 48
- Möbius-Transformation, 51
- Maximumprinzip, 46
- meromorph, 33
- Minimumprinzip, 46
- normale Familie von Funktionen, 50
- nullhomolog, 41
- nullhomotop, 41
- Nullstellenmenge, 24
- offene Abbildung, 44
- Pol, 26
- Polstellenmenge, 33
- Potenzreihendarstellung, 22
- Reisduensatz, 33
- Residuensatz, 42
- Residuum, 26
- Riemannscher Abbildungssatz, 52
- Satz
 - Cauchy-Integralformel, 39
 - Cauchy-Integralformel für Kreisringe, 29

- Cauchy-Integralformel für konvexe Gebiete, [21](#)
- Cauchy-Integralsatz, [39](#)
- Cauchy-Integralsatz für konvexe Gebiete, [21](#)
- Fundamentalsatz der Algebra, [23](#), [37](#)
- Hebbarkeitssatz, [26](#)
- Identitätssatz, [25](#)
- Lemma von Goursat, [19](#)
- Maximumprinzip, [46](#)
- Minimumprinzip, [46](#)
- Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen, [22](#)
- Residuensatz, [33](#), [42](#)
- Riemannscher Abbildungssatz, [52](#)
- Schwarzsches Lemma, [47](#)
- von Nullstellen und Polstellen zählenden Integral, [37](#), [42](#)
- von Casorati-Weierstraß, [26](#)
- von der Gebietstreue, [45](#)
- von der lokalen Umkehrbarkeit, [44](#)
- von der offenen Abbildung, [45](#)
- von Hurwitz, [50](#)
- von Liouville, [23](#)
- von Montel, [50](#)
- von Morera, [22](#)
- von Rouché, [43](#)
- von Weierstraß, [49](#)
- Schnittwinkel, [46](#)
- Schwarzsches Lemma, [47](#)
- sin-Funktion, [10](#)
- Singularität
 - hebbare, [26](#)
 - isolierte, [26](#)
 - wesentliche, [27](#)
- sinh-Funktion, [10](#)
- Stammfunktion, [12](#)

- wegäquivalent, [8](#)
- wesentliche Singularität, [27](#)
- Windungszahl, [13](#), [39](#)
- winkeltreu, [46](#)

- Zusammenhangskomponente, [8](#)