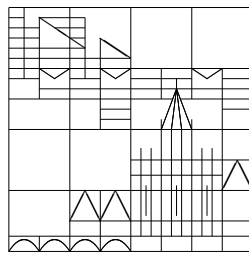


# Skript zur Vorlesung

## Funktionentheorie

Sommersemester 2012

Robert Denk



Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 4. 7. 2012

## Inhaltsverzeichnis

1	Holomorphe Funktionen . . . . .	3
	a) Definition und erste Eigenschaften . . . . .	3
	b) Integration . . . . .	11
2	Der Cauchysche Integralsatz und die Sätze von Morera und Liouville .	18
3	Isolierte Singularitäten und Laurentreihen . . . . .	23
4	Der Residuensatz . . . . .	33
	a) Homologie und Homotopie . . . . .	33
	b) Der Residuensatz . . . . .	38
5	Der Wertebereich holomorpher Funktionen . . . . .	43
6	Folgen holomorpher Funktionen und der Riemannsche Abbildungssatz	48
	a) Folgen holomorpher Funktionen . . . . .	48
	b) Der Riemannsche Abbildungssatz . . . . .	51
	Literatur . . . . .	55
	Index . . . . .	56

# 1. Holomorphe Funktionen

**1.1 Worum geht's?** Der zentrale Begriff dieser Vorlesung sind holomorphe Funktionen. Zunächst einmal bedeutet Holomorphie komplexe Differenzierbarkeit, ähnlich wie in der Analysis II schon die Differenzierbarkeit im  $\mathbb{R}^n$  betrachtet wurde. Hier ist die Verallgemeinerung sogar noch leichter als in der Analysis II: Sei  $G \subset \mathbb{C}$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Dann ist  $f$  komplex differenzierbar an der Stelle  $z \in G$ , falls der Grenzwert

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}$$

existiert.

Mit der Identifizierung  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ , scheint es sich hier um einen Spezialfall der Analysis II zu handeln. Die komplexe Differenzierbarkeit ist aber viel mehr, wie wir später sehen werden. Dieser Abschnitt behandelt die fundamentalen Definitionen und die ersten einfachen Aussagen.

Die Funktionentheorie ist eine wunderschöne und extrem leistungsfähige Theorie, und wir werden später viele überraschende Aussagen über holomorphe Funktionen kennenlernen, zum Teil mit tiefliegenden Beweisen. Es geht aber ganz einfach los.

## a) Definition und erste Eigenschaften

Im folgenden werden wir (fast) immer folgende Schreibweisen verwenden:  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $f = u + iv$  mit  $u, v: G \rightarrow \mathbb{R}$ .

Da  $\mathbb{C}$  sowohl ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum (der Dimension 2) als auch ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum (der Dimension 1) ist, müssen wir hier genauer hinschauen:

**1.2 Lemma.** a) Eine Abbildung  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann  $\mathbb{R}$ -linear, falls

$$T(z) = T(1)x + T(i)y = \lambda z + \mu \bar{z} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

wobei  $\lambda := \frac{1}{2}(T(1) - iT(i))$  und  $\mu := \frac{1}{2}(T(1) + iT(i))$ .

b) Eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann  $\mathbb{C}$ -linear, falls

$$T(i) = iT(1)$$

(d.h. falls  $\mu = 0$ ). In diesem Fall ist  $T(z) = T(1)z$ .

*Beweis.* Die erste Gleichheit in a) ist nichts als die Definition der  $\mathbb{R}$ -Linearität. Setzt man  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  und  $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$  ein, erhält man die zweite Gleichheit in a). Teil b) ist klar nach a).  $\square$

Mit etwas unsauberer Schreibweise (aber ganz nach der ursprünglichen Definition von  $\mathbb{C}$  in Analysis I) identifizieren wir ohne Änderung der Bezeichnung  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  und schreiben  $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und  $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ . Jede  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  lässt sich schreiben in der Form

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

**1.3 Lemma.** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sind äquivalent:

- (i) Die von  $A$  induzierte  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , ist  $\mathbb{C}$ -linear.  
(ii) Es gilt  $c = -b$  und  $d = a$ , d.h.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a + ic)z.$$

*Beweis.* Nach Lemma 1.2 ist (i) äquivalent zur Bedingung  $T(i) = iT(1)$ . Es ist

$$T(i) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b + id$$

und

$$iT(1) = i \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = i(a + ic) = -c + ia.$$

Die Bedingung  $T(i) = iT(1)$  bedeutet also gerade  $b = -c$ ,  $a = d$ . □

Wie üblich bei linearen Abbildungen, schreiben wir oft  $Tz$  statt  $T(z)$ . Im folgenden bezeichnet  $\langle z, w \rangle$  für  $z, w \in \mathbb{C}$  das Standard-Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^2$ .

**1.4 Definition.** Eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt winkeltreu, falls sie injektiv (und damit bijektiv) ist und falls

$$\cos(\angle(Tw, Tz)) := \frac{\langle Tw, Tz \rangle}{|Tw| \cdot |Tz|} = \frac{\langle w, z \rangle}{|w| \cdot |z|} =: \cos(\angle(w, z)).$$

**1.5 Lemma.** Sei  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathbb{R}$ -linear. Dann ist  $T$  genau dann winkeltreu, falls ein  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existiert mit  $Tz = az$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) oder  $Tz = a\bar{z}$  ( $z \in \mathbb{C}$ ).

*Beweis.* Sei  $T$  winkeltreu. Da  $T$  injektiv ist, ist  $a := T1 \neq 0$ . Setze  $b := \frac{Ti}{a}$ . Dann ist  $\langle i, 1 \rangle = 0 = \langle Ti, T1 \rangle = \langle ab, a \rangle = |a|^2 \langle b, 1 \rangle = |a|^2 \operatorname{Re} b$ , d.h.  $b = ir \in i\mathbb{R}$ .

Da  $T$   $\mathbb{R}$ -linear ist, gilt  $Tz = T1 \cdot x + Ti \cdot y = ax + iary$ . Für  $z \neq 0$  erhält man aus der Winkeltreue

$$\frac{x}{|x + iy|} = \frac{\langle 1, z \rangle}{|z|} = \frac{\langle T1, Tz \rangle}{|T1| \cdot |Tz|} = \frac{\langle a, a(x + iry) \rangle}{|a|^2 |x + iry|} = \frac{x}{|x + iry|}.$$

Somit gilt  $|x + iry| = |x + iy|$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $x \neq 0$  und damit  $r = \pm 1$ . Also ist  $Tz = a(x \pm iy)$ . Die andere Richtung des Lemmas ist klar.  $\square$

Wie bisher ist ein Gebiet (in  $\mathbb{C}$  oder in  $\mathbb{R}^n$  eine offene und zusammenhängende Menge. Dazu ist folgender Satz nützlich (der genauso in  $\mathbb{R}^n$  gilt, hier aber in  $\mathbb{C}$  formuliert wird).

**1.6 Satz.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen und nichtleer. Dann sind äquivalent:

- (i)  $G$  ist zusammenhängend.
- (ii)  $G$  ist wegzusammenhängend.

In diesem Fall kann der Weg in (ii) stückweise achsenparallel gewählt werden.

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Zu festem  $z_0 \in G$  definiere die Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(z) := \begin{cases} 1, & \text{falls es einen Weg von } z_0 \text{ nach } z \text{ gibt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun  $z \in G$ . Wähle eine offene Kreisscheibe  $B := B(z, \varepsilon) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\} \subset G$ . Da jeder Punkt in  $B$  mit  $z$  durch einen Weg verbunden werden kann, gilt  $f(w) = 1$  für alle  $w \in B$ , falls  $f(z) = 1$ . Ist andererseits  $f(z) = 0$ , so folgt aus dem gleichen Grund  $f(w) = 0$  für alle  $w \in B$ . Also ist  $f|_B$  konstant und damit ist  $f$  stetig.

Es gilt  $G = f^{-1}(\{0\}) \dot{\cup} f^{-1}(\{1\})$ , wobei  $f^{-1}(\{1\})$  offen und abgeschlossen in  $G$  und nichtleer ist. Da  $G$  zusammenhängend ist, folgt  $f^{-1}(\{1\}) = G$ , d.h.  $G$  ist wegzusammenhängend.

Ersetzt man in diesem Beweis „Weg“ durch „stückweise achsenparallelen Weg“, so sieht man den Zusatz.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Angenommen es gibt eine Zerlegung  $G = U \dot{\cup} (G \setminus U)$  mit  $U$  offen und abgeschlossen in  $G$  und  $\emptyset \neq U \neq G$ . Wähle zwei Punkte  $z \in U$  und  $w \in G \setminus U$ . Da  $G$  wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow G$  mit  $\gamma(a) = z$ ,  $\gamma(b) = w$ . Dann ist  $\gamma^{-1}(U) \subset [a, b]$  offen und abgeschlossen mit  $\emptyset \neq \gamma^{-1}(U) \neq [a, b]$ . Dies ist aber ein Widerspruch, da das Intervall  $[a, b]$  zusammenhängend ist.  $\square$

Man beachte beim Beweis dieses Satzes, dass die Offenheit in  $G$  betrachtet wird, d.h. die Offenheit als Teilmenge des metrischen Raums  $G$ , der mit der Einschränkung

der kanonischen Metrik auf  $\mathbb{C}$  versehen wird. Die Richtung von (ii) $\Rightarrow$ (i) gilt auch ohne die Voraussetzung der Offenheit von  $G$ , wie man am Beweis sieht.

**1.7 Definition.** Sei  $G \neq \emptyset$  offen. Zwei Punkte  $z_1, z_2 \in G$  heißen wegäquivalent, falls es ein Weg in  $G$  gibt, der  $z_1$  mit  $z_2$  verbindet.

Eine maximale zusammenhängende Teilmenge von  $G$  heißt eine Zusammenhangskomponente von  $G$ .

Die Zusammenhangskomponenten von  $G$  sind offensichtlich Äquivalenzklassen bzgl. der Wegäquivalenz. Man sieht leicht, dass die Zusammenhangskomponenten von  $G$  offen und abgeschlossen bezüglich  $G$  sind.

Wir kommen jetzt zur zentralen Definition.

**1.8 Definition.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  nichtleer und offen.

a) Eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt komplex differenzierbar in  $z \in G$ , falls der Grenzwert

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}$$

existiert.

b) Eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt holomorph in  $G$ , falls  $f$  in jedem  $z \in G$  komplex differenzierbar ist.  $f$  heißt holomorph an der Stelle  $z \in G$ , falls eine offene Umgebung  $U$  von  $z$  existiert, so dass  $f|_U$  holomorph in  $U$  ist.

c) Eine Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ganz, falls  $f$  holomorph in  $\mathbb{C}$  ist.

**1.9 Bemerkung.** a) In obiger Definition 1.8 a) heißt „ $\lim_{h \rightarrow 0}$  ...“ natürlich „ $\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}$  ...“.

b) Eine äquivalente Definition der Holomorphie, die näher an der bisherigen Ideologie der Differenzierbarkeit liegt, ist folgende: Eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt holomorph in  $z \in G$ , falls eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $T_z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  existiert mit

$$f(z+h) = f(z) + T_z h + |h| \cdot r(z, h) \quad (h \text{ klein}),$$

wobei  $\lim_{h \rightarrow 0} r(z, h) = 0$ . In diesem Fall setze  $f'(z) := T_z$ .

Dies ist die übliche Definition der Differenzierbarkeit in normierten Räumen, wobei hier in natürlicher Weise die  $\mathbb{C}$ -Linearität gefordert wird. Die Äquivalenz der Definitionen ist klar nach Lemma 1.2, denn jede  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $T$  ist von der Form  $Th = c \cdot h$  mit einem  $c \in \mathbb{C}$ . Nach Definition 1.8 ist  $f'(z) := c$ .

**1.10 Beispiele.** a)  $f(z) := z^n$ . Wegen

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1} \rightarrow nz_0^{n-1} \quad (z \rightarrow z_0)$$

ist  $f$  holomorph in ganz  $\mathbb{C}$ , also eine ganze Funktion.

b)  $f(z) := |z|^2 = z\bar{z}$ : An der Stelle  $z_0 = 0$  ist  $f$  komplex differenzierbar wegen

$$\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{|h|^2}{h} = \bar{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Für  $z_0 \neq 0$  ist  $f$  nicht komplex differenzierbar, denn

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{(z_0 + h)(\bar{z}_0 + \bar{h}) - z_0\bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{z}_0 h + z_0 \bar{h} + |h|^2}{h} = \underbrace{\frac{\bar{z}_0 + \bar{h}}{h}}_{\rightarrow \bar{z}_0 \ (h \rightarrow 0)} + z_0 \frac{\bar{h}}{h},$$

und der Limes  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$  existiert nicht. Die Funktion  $f$  ist also nirgends holomorph.

**1.11 Bemerkung.** Für das Rechnen mit komplex differenzierbaren Funktionen gelten dieselben Regeln wie im Reellen (mit den wörtlich gleichen Beweisen), etwa Produktregel, Kettenregel, Quotientenregel etc.

**1.12 Satz (Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen).** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f = u + iv: G \rightarrow \mathbb{C}$  und  $z \in G$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $f$  ist komplex differenzierbar in  $z$ .
- (ii)  $f$  ist reell differenzierbar in  $z$ , und die Ableitung  $f'(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $\mathbb{C}$ -linear.
- (iii)  $f$  ist reell differenzierbar in  $z$ , und es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_x u(z) &= \partial_y v(z), \\ \partial_y u(z) &= -\partial_x v(z). \end{aligned}$$

*Beweis.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) ist klar nach Definition bzw. Bemerkung 1.9.

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii). Die reelle Ableitung von  $f$  an der Stelle  $z$  ist gegeben durch

$$f'(z) = \begin{pmatrix} \partial_x u(z) & \partial_y u(z) \\ \partial_x v(z) & \partial_y v(z) \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 1.3 ist  $f'(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann  $\mathbb{C}$ -linear, falls die Cauchy-Riemann-Dgl. gelten.  $\square$

**1.13 Bemerkung.** Betrachtet man für eine reell differenzierbare Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  die Ableitung  $T := f'(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , so lässt sich die komplexe Differenzierbarkeit nach Lemma 1.2 auf verschiedene Weise ausdrücken. Man definiert

$$\partial_x f := \partial_x u + i\partial_x v, \quad \text{d.h. } \partial_x f(z) = T(1),$$

$$\begin{aligned}\partial_y f &:= \partial_y u + i\partial_y v, & \text{d.h. } \partial_y f(z) &= T(i), \\ \partial f &:= \partial_z f := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f), & \text{d.h. } \partial f(z) &= \frac{1}{2}(T(1) - iT(i)) = \lambda, \\ \bar{\partial} f &:= \partial_{\bar{z}} f := \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f), & \text{d.h. } \bar{\partial} f(z) &= \frac{1}{2}(T(1) + iT(i)) = \mu.\end{aligned}$$

Die letzten beiden Definitionen erklären sich formal dadurch, dass man  $z$  und  $\bar{z}$  als unabhängige Variablen betrachtet. Aus  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  und  $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$  erhält man

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{i}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{2}$$

und damit

$$\partial_z f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \partial_x f - \frac{i}{2} \partial_y f.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Sei  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z \in G$  reell differenzierbar. Dann sind äquivalent:

- (i)  $f$  ist in  $z$  komplex differenzierbar.
- (ii) Die Cauchy-Riemann-Dgl. gelten.
- (iii) Es ist  $i\partial_x f(z) = \partial_y f(z)$ .
- (iv) Es ist  $\bar{\partial} f(z) = 0$ .

In diesem Fall ist  $f'(z) = \partial_x f(z) = \partial_z f(z)$ .

Zum Beispiel für die Funktion  $f(z) := \bar{z}$  gilt  $\partial_{\bar{z}} f(z) = 1$ , d.h.  $f$  ist an keiner Stelle komplex differenzierbar.

Im folgenden werden wir auch  $f_x$  statt  $\partial_x f$  etc. schreiben.

**1.14 Korollar.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet.

- a) Eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann konstant in  $G$ , wenn  $f$  holomorph in  $G$  ist mit  $f' = 0$ .
- b) Sei  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $f(z) \in \mathbb{R} \quad (z \in G)$ . Dann ist  $f$  konstant.
- c) Sei  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $|f(z)| = 1 \quad (z \in G)$ . Dann ist  $f$  konstant.

*Beweis.* a) Falls  $f$  holomorph ist mit  $f' = 0$ , so folgt

$$0 = f_x(z) = u_x(z) + iv_x(z) \quad (z \in G).$$

Aus den Cauchy-Riemann-Dgl. erhalten wir dann auch  $u_y = 0 = v_y$  in  $G$ , d.h.  $\nabla u = \nabla v = 0$  in  $G$ . Da  $G$  wegzusammenhängend ist, folgt  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  in  $G$ .



b) Aus  $v = 0$  erhalten wir  $v_x = v_y = 0$  und nach den Cauchy-Riemann-Dgl.  $u_x = u_y = 0$ , also  $f = \text{const.}$

c) Aus  $u^2 + v^2 = 1$  erhalten wir durch Differenzieren nach  $x$  bzw.  $y$  die Gleichheiten

$$uu_x + vv_x = 0,$$

$$uu_y + vv_y = 0.$$

Mit den Cauchy-Riemann-Dgl. erhält man aus der zweiten Gleichung  $uv_x = -uu_y = vv_y = vu_x$  und damit aus der ersten Gleichung

$$0 = u^2u_x + uvv_x = (u^2 + v^2)u_x = u_x.$$

Analog folgt  $v_x = 0$  und damit  $f' = f_x = u_x + iv_x = 0$ . Die Behauptung folgt somit aus Teil a).  $\square$

In der folgenden Definition ist wie üblich  $B(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ . Man erinnere sich auch an den Begriff Konvergenzradius aus der Analysis I.

**1.15 Definition.** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Dann ist  $f$  durch Potenzreihen dargestellt, falls für jedes  $a \in G$  und jedes  $r > 0$  mit  $B(a, r) \subset G$  eine Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  existiert, welche (mindestens) in  $B(a, r)$  konvergiert und dort gleich  $f$  ist.

**1.16 Satz.** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  durch Potenzreihen dargestellt.

a) Dann ist  $f$  holomorph in  $G$  mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - a)^{n-1}.$$

Diese Reihe hat denselben Konvergenzradius wie die Reihe, welche  $f$  darstellt.

b) Die Funktion  $f$  ist unendlich oft komplex differenzierbar in  $G$  mit

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}.$$

Insbesondere ist

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

d.h. die Potenzreihe ist durch  $f$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* a) O.E. sei  $a = 0$ . Setze  $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ . Aus Analysis I ist bekannt, dass die Reihe  $g$  denselben Konvergenzradius besitzt wie die  $f$  darstellende Reihe. Insbesondere konvergiert die Reihe in  $B(0, r)$ , falls  $B(0, r) \subset G$ .

Für  $w \in B(0, r)$  mit  $|w| < \rho < r$  und  $|z| < \rho$  gilt

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} \right).$$

Wir schätzen den Term in Klammern ab:

$$\begin{aligned} \frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} &= \sum_{j=1}^{n-1} (z^j w^{n-1-j} - w^{n-1}) \\ &= (z - w) \sum_{j=1}^{n-1} w^{n-1-j} \cdot \frac{z^j - w^j}{z - w} \\ &= (z - w) \sum_{j=1}^{n-1} w^{n-1-j} \sum_{k=0}^{j-1} z^k w^{j-1-k} \end{aligned}$$

Da  $|z|, |w| < \rho$ , erhält man

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1} \right| &\leq |z - w| \sum_{j=1}^{n-1} \left( \rho^{n-1-j} \sum_{k=0}^{j-1} \rho^{j-1-k} \right) \\ &= |z - w| \sum_{j=1}^{n-1} j \rho^{n-2} = |z - w| \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2}. \end{aligned}$$

Damit

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| \leq |z - w| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow w).$$

Hier wurde verwendet, dass die letzte Reihe endlich ist. Also ist  $f$  komplex differenzierbar, und  $f' = g$ .

b) Wende Teil a) auf  $f', f''$  etc. an. □

**1.17 Beispiele.** a) Polynome  $P(z) = \sum_{n=0}^N c_n z^n$  sind in ganz  $\mathbb{C}$  holomorph, d.h. ganze Funktionen.

b) Die Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

hat Konvergenzradius  $\infty$ , ist also ebenfalls in ganz  $\mathbb{C}$  holomorph.

Wie im Reellen setzt man für  $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z$$

mit

$$\begin{aligned}\cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \\ \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.\end{aligned}$$

Es gilt somit  $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ ,  $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ . Definiere außerdem die hyperbolischen Funktionen

$$\begin{aligned}\cosh z &:= \cos(iz) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \\ \sinh z &:= -i \sin(iz) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).\end{aligned}$$

## b) Integration

Eine wesentliche Zutat der Funktionentheorie sind Kurvenintegrale in  $\mathbb{C}$ . Wie aus der Analysis II bekannt, sind Kurven Äquivalenzklassen von Wegen. Der Wertebereich  $\mathcal{R}(\Gamma)$  und Anfangs- und Endpunkt  $\mathcal{A}(\Gamma)$ ,  $\mathcal{E}(\Gamma)$  und die Länge  $\mathcal{L}(\Gamma)$  sind unabhängig von der Parametrisierung, also wohldefiniert.

**1.18 Definition.** Sei  $\Gamma = [\gamma]$  eine stückweise glatte Kurve in  $\mathbb{C}$  mit  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f: \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Definiere das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} f := \int_{\Gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \in \mathbb{C}.$$

(Bei stückweise glatten Kurven interpretiert man das Integral auf der rechten Seite wie üblich als Summe der Integrale auf den glatten Teilbereichen der Kurve.)

Im folgenden werden wir stets stückweise glatte Kurven betrachten. Daher sei ab sofort unter *Kurve* stets eine stückweise glatte Kurve in  $\mathbb{C}$  gemeint!

**1.19 Beispiele.** a) Sei  $\Gamma = [\gamma]$  eine Kurve. Dann ist

$$\int_{\Gamma} 1 = \int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a) = \mathcal{E}(\Gamma) - \mathcal{A}(\Gamma).$$

b) Sei  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  und  $\Gamma$  der positiv orientierte Kreis mit Radius  $r$  um  $a$ , d.h.  $\Gamma = [\gamma]$  mit  $\gamma(t) := a + re^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ). Sei  $f(z) := (z - a)^n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ . Dann ist

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) ire^{it} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} ir^{n+1} e^{i(n+1)t} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\
&= \begin{cases} 2\pi ir^{n+1}, & n = -1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

**1.20 Satz.** Sei  $\Gamma$  eine Kurve, und  $f: \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.

a) Es gilt

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \mathcal{R}(\Gamma)} |f(z)| \cdot \mathcal{L}(\Gamma),$$

wobei  $\mathcal{L}(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$  die Länge von  $\Gamma$  ist.

b) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet mit  $\mathcal{R}(\Gamma) \subset G$  und  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$  in  $G$ , d.h.  $F$  holomorph mit  $F' = f$ . Dann ist

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\mathcal{E}(\Gamma)) - F(\mathcal{A}(\Gamma)).$$

*Beweis.* a) Es gilt

$$\left| \int_{\Gamma} f \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq \max_{z \in \mathcal{R}(\Gamma)} |f(z)| \cdot \mathcal{L}(\Gamma).$$

b) zeigt man genauso durch direkte Rechnung:

$$\int_{\Gamma} f = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt = F(\mathcal{E}(\Gamma)) - F(\mathcal{A}(\Gamma)).$$

□

**1.21 Satz.** Sei  $\Gamma$  eine Kurve und  $g: \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Definiere

$$f(z) := \int_{\Gamma} \frac{g(w)}{w - z} dw \quad (z \in G := \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)).$$

Dann ist  $f$  auf  $G$  in Potenzreihen entwickelbar und insbesondere holomorph auf  $G$ .

*Beweis.* Sei  $a \in G$  und  $r > 0$  mit  $B(a, r) \subset G$ . Für  $z \in B(a, r)$  und  $w \in \mathcal{R}(\Gamma)$  ist

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - a) - (z - a)} = \left[ (w - a) \left( 1 - \frac{z - a}{w - a} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{w - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - a}{w - a} \right)^n.$$

Die Reihe konvergiert wegen  $|z - a| < r \leq |w - a|$ . Also ist

$$\frac{g(w)}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(w)}{(w - a)^{n+1}} (z - a)^n.$$

Für  $0 < \rho < r$  konvergiert die Reihe in  $\overline{B(a, \rho)} \subset B(a, r)$  gleichmäßig und absolut, und wir dürfen Integral und Summation vertauschen:

$$f(z) = \int_{\Gamma} \frac{g(w)}{w - z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

mit

$$c_n := \int_{\Gamma} \frac{g(w)}{(w - a)^{n+1}} dw.$$

□

**1.22 Definition und Satz.** Sei  $\Gamma$  eine geschlossene Kurve in  $\mathbb{C}$ . Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$  definiert man die Windungszahl von  $\Gamma$  um  $z$  durch

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw.$$

Dann ist  $\text{Ind}_{\Gamma}(z) \in \mathbb{Z}$ , und auf jeder Zusammenhangskomponente von  $G := \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$  ist  $\text{Ind}_{\Gamma}$  konstant. Auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von  $G$  ist  $\text{Ind}_{\Gamma} = 0$ .

Man beachte in obiger Aussage, dass  $\mathcal{R}(\Gamma)$  kompakt ist, d.h. es existiert ein  $R > 0$  mit  $\mathbb{C} \setminus B(0, R) \subset G$ . Da  $\mathbb{C} \setminus B(0, R)$  zusammenhängend ist, existiert genau eine Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $G$  mit  $\mathbb{C} \setminus B(0, R) \subset Z$ . Diese heißt die unbeschränkte Zusammenhangskomponente.

*Beweis.* Sei  $z \in G$ . Nach Definition ist

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

Setze

$$\varphi(s) := \exp \left( \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right) \quad (s \in [a, b]).$$

Dann ist  $\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}$  bis auf endlich viele Punkte, an denen  $\gamma'$  nicht existiert. Es folgt

$$\left( \frac{\varphi}{\gamma - z} \right)' = \frac{\varphi'(\gamma - z) - \gamma' \varphi}{(\gamma - z)^2} = 0.$$

Da  $\frac{\varphi}{\gamma-z}$  stetig ist, ist  $\frac{\varphi}{\gamma-z}$  konstant und damit

$$\frac{\varphi(b)}{\gamma(b)-z} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a)-z} = \frac{1}{\gamma(a)-z}.$$

Wegen  $\gamma(b) = \gamma(a)$  folgt  $\varphi(b) = 1$  und damit  $\exp(2\pi i \operatorname{Ind}_\Gamma(z)) = 1$ . Dies ist aber äquivalent zu  $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$ .

Nach Satz 1.21 ist  $\operatorname{Ind}_\Gamma$  holomorph auf  $G$  und insbesondere stetig. Also ist das Bild einer Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $G$  wieder zusammenhängend. Wegen  $\operatorname{Ind}_\Gamma(Z) \subset \mathbb{Z}$  ist  $\operatorname{Ind}_\Gamma$  konstant auf  $Z$ .

Für  $|z| \rightarrow \infty$  ist  $\sup_{w \in \mathcal{R}(\Gamma)} \left| \frac{1}{w-z} \right| \rightarrow 0$ . Nach Satz 1.20 a) ist  $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$ , also auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente.  $\square$

**1.23 Definition (Logarithmus).** a) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Eine stetige Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\exp(f(z)) = z$  ( $z \in G$ ) heißt ein stetiger Zweig des Logarithmus auf  $G$ .

b) Sei allgemeiner  $M \subset \mathbb{C}$  und  $g: M \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann heißt eine stetige Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\exp(f(z)) = g(z)$  ( $z \in M$ ) ein stetiger Logarithmus für  $g$ . In diesem Fall heißt  $\arg g(z) := \operatorname{Im} f: M \rightarrow \mathbb{R}$  die Argumentfunktion von  $g$ .

**1.24 Bemerkung.** a) Bekanntlich hat die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  den Wertebereich  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ist aber nicht injektiv. Auf dem Streifen  $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$  ist  $\exp$  bijektiv mit Wertebereich  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , die Umkehrfunktion ist aber nicht stetig.

b) Es gilt in 1.23 b):  $g(z) = \exp(f(z)) = |g(z)| \exp(i \operatorname{Im} f(z))$ . Dies rechtfertigt die Bezeichnung  $\arg g(z)$ . Man beachte, dass ebenso wie der Logarithmus die Argumentfunktion nicht eindeutig ist!

**1.25 Definition und Satz.** a) Sei  $S_0 := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ . Dann wird durch  $\ln := (\exp|_{S_0})^{-1}$  ein stetiger Zweig  $\ln: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow S_0 \subset \mathbb{C}$  definiert, der sog. Hauptzweig, und die zugehörige Argumentfunktion  $\arg: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow (-\pi, \pi)$ ,  $z \mapsto \operatorname{Im} \ln z$ . Für  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  und  $w \in \mathbb{C}$  sei  $z^w := \exp(w \ln z)$ . Speziell bezeichnet man  $\sqrt{z} := z^{1/2}$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ) als den Hauptzweig der Wurzel.

b) Falls  $G$  ein Gebiet ist, unterscheiden sich zwei stetige Zweige des Logarithmus auf  $G$  durch ein Vielfaches von  $2\pi i$ .

c) Jeder stetige Zweig  $f$  des Logarithmus auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist holomorph mit  $f'(z) = \frac{1}{z}$ .

*Beweis.* a) ist klar.

b) Seien  $f, g$  stetige Zweige. Für  $h := f - g$  folgt dann

$$\exp(h(z)) = \exp(f(z) - g(z)) = \frac{\exp(f(z))}{\exp(g(z))} = \frac{z}{z} = 1 \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

und damit  $h(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ . Da  $h$  stetig und  $G$  zusammenhängend ist, ist  $h$  auf  $G$  konstant.

c) folgt wie in Analysis I: Sei  $G \ni z_k \rightarrow z \in G$ ,  $y_k := \ln z_k$  und  $y := \ln z$ . Dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln z_k - \ln z}{z_k - z} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k - y}{\exp(y_k) - \exp(y)} = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{z}.$$

□

**1.26 Bemerkung.** Der letzte Satz zeigt, dass zumindest lokal ein stetiger Zweig des Logarithmus existiert: Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  stetig und  $t_0 \in [a, b]$ . Falls  $\gamma(t_0) \in (0, \infty)$ , so kann man den Hauptzweig  $f(t) := \ln \gamma(t)$  wählen. Für  $|t - t_0|$  hinreichend klein gilt dann  $\exp(f(t)) = \gamma(t)$ , denn für  $|t - t_0|$  klein gilt aufgrund der Stetigkeit  $\gamma(t) \notin (-\infty, 0]$ .

Falls  $\gamma(t_0) \notin (0, \infty)$ , so schreibe  $\gamma(t_0) = |\gamma(t_0)|e^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  und setze  $f(t) := \ln[|\gamma(t)|e^{-i\varphi}] + i\varphi$ .

Mit Hilfe eines Kompaktheitsarguments kann man somit leicht folgende Aussage beweisen: Es existiert zu  $\gamma$  eine stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\exp(f(t)) = \gamma(t)$  ( $t \in [a, b]$ ). Achtung: Im allgemeinen existiert *keine* stetige Funktion  $f: \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\exp(f(z)) = z$  ( $z \in \mathcal{R}(\Gamma)$ ).

**1.27 Bemerkung (Anschauliche Bedeutung der Windungszahl).** Sei  $\Gamma = [\gamma]$  eine Kurve,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $z \notin \mathcal{R}(\Gamma)$ . Wendet man Bemerkung 1.26 auf  $\tilde{\gamma} := \gamma - z$  an, so sieht man, dass ein stetiges  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  existiert mit  $\exp(f(t)) = \tilde{\gamma}(t)$ . Somit

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - z} &= \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \int_a^b \frac{(\tilde{\gamma}(t) + z)'}{(\tilde{\gamma}(t) - z) + z} dt = \int_a^b \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\tilde{\gamma}(t)} dt \\ &= \int_a^b \frac{\exp(f(t))f'(t)}{\exp(f(t))} dt = \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Sei nun  $\Gamma$  geschlossen. Für die Imaginärteile folgt

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi} [\text{Im}(f(b)) - \text{Im}(f(a))] = \frac{\arg \tilde{\gamma}(b) - \arg \tilde{\gamma}(a)}{2\pi}.$$

Die Windungszahl gibt also den Zuwachs des Arguments einer Parametrisierung an.

**1.28 Beispiele.** a) Sei  $\Gamma$  die positiv orientierte Kreislinie um  $a \in \mathbb{C}$  mit Radius  $r > 0$ . Dann ist

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \begin{cases} 1, & |z - a| < r, \\ 0, & |z - a| > r, \end{cases}$$

siehe Beispiel 1.19.

b) Sei  $\Gamma$  eine geschlossene Kurve,  $n \in \mathbb{Z}$  und  $0 \notin \mathcal{R}(\Gamma)$  falls  $n < 0$ . Dann ist

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i \text{Ind}_{\Gamma}(0), & n = -1. \end{cases}$$

Für  $n = -1$  ist dies gerade die Definition der Windungszahl, für  $n \neq -1$  ist  $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$  eine Stammfunktion von  $f$ , damit folgt die Aussage aus Satz 1.20 b).

**1.29 Satz.** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann sind äquivalent:

- (i)  $f$  hat auf  $G$  eine holomorphe Stammfunktion.
- (ii) Für jede geschlossene Kurve  $\Gamma$  in  $G$  ist  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .

Falls  $G$  zusätzlich konvex ist (und damit insbesondere ein Gebiet), so ist dies äquivalent zu

- (iii) Für jedes abgeschlossene Dreieck  $\Delta \subset G$  ist  $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ .

(Dabei ist  $\partial\Delta$  in positiver Orientierung zu durchlaufen.)

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Satz 1.20 b).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei  $Z$  eine Zusammenhangskomponente von  $G$ . Dann ist  $Z$  offen und zusammenhängend, also wegzusammenhängend. Wähle  $a \in Z$  fest und setze

$$F(z) := \int_{\Gamma_z} f(w) dw \quad (z \in Z),$$

wobei  $\Gamma_z$  eine Kurve von  $a$  nach  $z$  ist. Dann ist  $F$  wohldefiniert, da das Integral wegunabhängig ist.

Sei  $z_0 \in Z$ . Für  $|z - z_0|$  klein kann man folgenden Weg von  $a$  nach  $z$  wählen:  $\Gamma_z = \Gamma_{z_0} + s_{zz_0}$ , wobei  $s_{zz_0}$  die Strecke von  $z$  nach  $z_0$  sei. Damit

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{s_{zz_0}} f(w) dw - f(z_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt - f(z_0) \right| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \left| \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt - f(z_0) \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)| dt \\ &\leq \sup_{w \in s_{zz_0}} |f(w) - f(z_0)| \rightarrow 0 \quad (z_0 \rightarrow z). \end{aligned}$$

Also ist  $F$  holomorph in  $Z$  mit  $F' = f$ . Durch Zusammensetzen der Stammfunktionen auf den Zusammenhangskomponenten erhält man eine Stammfunktion auf  $G$  zu  $f$ .

Falls  $G$  konvex ist, sieht man an obigem Beweis, dass man den Weg  $\Gamma_z := s_{az}$  wählen kann. Man benötigt dann nur die Wegunabhängigkeit für Wege, die als Rand eines Dreiecks gegeben sind.  $\square$

## 2. Der Cauchysche Integralsatz und die Sätze von Morera und Liouville

**2.1 Worum geht's?** Nachdem wir nun schon erste Eigenschaften holomorpher Funktionen kennengelernt haben, können wir jetzt sehr schnell die Früchte ernten. In diesem Abschnitt werden sehr starke Eigenschaften holomorpher Funktionen untersucht, welche relativ einfach zu beweisen sind.

Grundlage ist das Lemma von Goursat bzw. der Cauchysche Integralsatz, welche besagen, dass das Integral einer holomorphen Funktion über einer geschlossenen Kurve den Wert Null hat. Dies führt sofort zu einer Darstellung holomorpher Funktionen als Integral, was wiederum eine Potenzreihendarstellung beweist. Potenzreihen sind aber unendlich oft differenzierbar, so dass wir ablesen können: Jede holomorphe Funktion ist unendlich oft komplex (und damit insbesondere reell) differenzierbar.

Die Darstellung als Potenzreihe lässt auch sofort beweisen, dass eine holomorphe Funktion nicht beschränkt sein kann, es sei denn, sie ist konstant. Das ist der berühmte Satz von Liouville. Als Korollar dieses Satzes beweisen wir den Fundamentalsatz der Algebra.

**2.2 Satz (Lemma von Goursat).** *Sei  $G$  ein Gebiet und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck  $\Delta \subset G$ :*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

*Beweis.* Teile  $\Delta$  in vier kleinere Dreiecke  $\Delta_1^j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , auf, die durch die Seitenmitten gebildet werden. Dann ist

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| = \left| \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta_1^j} f(z)dz \right| \leq 4 \max_{j=1,\dots,4} \left| \int_{\partial\Delta_1^j} f(z)dz \right|.$$

Das Maximum wird bei einem der vier Integrale angenommen, nenne das zugehörige Dreieck  $\Delta_1$ . Nun wird  $\Delta_1$  analog unterteilt etc. Man erhält eine Folge von Dreiecken  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Summen der Seitenlängen

$$\mathcal{L}(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(\partial\Delta_{n-1}) = \dots = 2^{-n} \mathcal{L}(\Delta).$$

Für die Integrale gilt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right|.$$

Die Dreiecke  $(\Delta_n)_n$  bilden eine Intervallschachtelung in  $\mathbb{C}$ . Da  $\Delta$  kompakt ist, existiert genau ein  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \{z_0\}$ .

Da  $f$  holomorph ist, gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$$

mit  $g(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow z_0$ . Nach Beispiel 1.28 ist

$$\int_{\partial \Delta_n} [f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)] dz = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial \Delta_n} (z - z_0)g(z) dz \right| \\ &\leq \mathcal{L}(\partial \Delta_n) \sup_{z \in \partial \Delta_n} |z - z_0| \cdot |g(z)| \\ &\leq [\mathcal{L}(\partial \Delta_n)]^2 \sup_{z \in \partial \Delta_n} |g(z)| = 4^{-n} [\mathcal{L}(\partial \Delta)]^2 \sup_{z \in \partial \Delta_n} |g(z)|. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\left| \int_{\partial \Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot 4^{-n} \cdot [\mathcal{L}(\partial \Delta)]^2 \sup_{z \in \partial \Delta_n} |g(z)| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow z_0).$$

□

**2.3 Bemerkung.** Es genügt in Satz 2.2, wenn  $f$  in  $G$  stetig und in  $G \setminus \{p\}$  holomorph ist für ein  $p \in G$ . Denn im Falle  $p \notin \Delta$  ändert sich nichts an obigem Beweis, falls  $p$  eine Ecke von  $\Delta$  ist, so ist  $f$  holomorph in einer Umgebung von drei der vier Teildreiecke des ersten Schrittes. Für diese Teildreiecke ist nach Satz 2.2 aber das Integral gleich Null, so dass  $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \int_{\partial \Delta_1} f(z) dz$ . Dieselbe Überlegung angewendet auf  $\Delta_1$  liefert eine Kette

$$\int_{\partial \Delta} f = \int_{\partial \Delta_1} f = \int_{\partial \Delta_2} f = \dots \int_{\partial \Delta_n} f \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Falls schließlich  $p \in \Delta$  beliebig ist, unterteilt man zunächst  $\Delta$  in drei Dreiecke, so dass  $p$  jeweils eine Ecke dieser Dreiecke ist. Nach dem soeben bewiesenen ist das Integral über diese Dreiecke gleich Null, so dass

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0.$$

Iterativ sieht man, dass im Lemma von Goursat die Voraussetzung „ $f$  holomorph“ ersetzt werden kann durch die Voraussetzung „ $f$  holomorph bis auf endlich viele Punkte“.

**2.4 Satz (Cauchyscher Integralsatz für konvexe Gebiete).** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  ein konvexes Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und holomorph mit Ausnahme endlich vieler Punkte. Dann gilt für jede geschlossene Kurve  $\Gamma \subset G$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

*Beweis.* Nach dem Lemma von Goursat (bzw. Bemerkung 2.3) ist Bedingung (iii) von Satz 1.29 erfüllt. Nach Satz 1.29 folgt die Behauptung.  $\square$

**2.5 Satz (Cauchysche Integralformel für konvexe Gebiete).** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  ein konvexes Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\Gamma$  eine geschlossene Kurve in  $G$ . Für  $z \in G \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$  gilt dann

$$f(z) \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Speziell gilt für den (positiv orientierten) Rand des Kreises  $B(z, r) \subset G$  um  $z$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

*Beweis.* Zu  $z \in G \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$  definiere

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z, \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Da  $f$  holomorph ist, ist  $g$  stetig in  $G$  und holomorph in  $G \setminus \{z\}$ . Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} g(w) dw = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\Gamma} \frac{1}{w-z} dw \\ &= \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) f(z). \end{aligned}$$

$\square$

Der nächste Satz ist zentral für die weiteren Überlegungen (auch wenn kein berühmter Name mit ihm verbunden ist).

**2.6 Satz (Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen).** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann ist  $f$  in  $G$  durch Potenzreihen darstellbar und insbesondere unendlich oft komplex (und damit auch reell) differenzierbar.

Genauer gilt für  $a \in G$  und  $r_0 > 0$  mit  $B(a, r_0) \subset G$  die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

mit

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

wobei  $0 < r < r_0$ .

Es ist

$$|c_n| \leq r^{-n} \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

*Beweis.* Da  $B(a, r)$  konvex ist, können wir die Cauchy-Integralformel auf die Kreislinie, d.h. die Kurve  $\Gamma_{a,r} := [\gamma_{a,r}]$  mit  $\gamma_{a,r}(t) := a + re^{it}$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ) anwenden. Wir erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,r}} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (z \in B(a, r)).$$

Nach Satz 1.21 ist  $f$  durch Potenzreihen darstellbar, und es gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,r}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

(siehe Beweis von Satz 1.21). Man beachte, dass dieses Integral für  $0 < r < r_0$  unabhängig von  $r$  ist, da es nur durch die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$  bestimmt ist.

Wir schätzen  $c_n$  ab und erhalten

$$|c_n| \leq \mathcal{L}(\Gamma_{a,r}) \cdot \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \mathcal{R}(\Gamma_{a,r})} |f(w)| \cdot r^{-n-1} = r^{-n} \max_{|w-a|=r} |f(w)|.$$

□

Der letzte Satz hat viele wichtige Folgerungen.

**2.7 Satz (von Morera).** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig mit  $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$  für jedes abgeschlossene Dreieck  $\Delta \subset G$ . Dann ist  $f$  holomorph in  $G$ .

*Beweis.* Betrachte wie im Beweis von Satz 2.6  $f|_{B(a,r)}$ . Nach Satz 1.29 hat  $f|_{B(a,r)}$  eine Stammfunktion  $F$ . Nach Satz 2.6 ist aber  $F' = f$  holomorph in  $B(a, r)$ . □

**2.8 Satz (von Liouville).** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

*Beweis.* Sei  $f$  in holomorph in  $\mathbb{C}$ . Nach Satz 2.6 existiert eine in ganz  $\mathbb{C}$  konvergente Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Ebenfalls nach Satz 2.6 gilt für alle  $r > 0$

$$|c_n| \leq r^{-n} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq r^{-n} \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|.$$

Da  $f$  beschränkt ist, konvergiert die rechte Seite gegen 0 für  $r \rightarrow \infty$ , falls  $n \geq 1$ . Damit ist  $c_n = 0$  für alle  $n \geq 1$ , d.h.  $f(z) = c_0$ .  $\square$

**2.9 Satz (Fundamentalsatz der Algebra).** *Jedes komplexe Polynom  $P$  vom Grad  $n \geq 1$  hat  $n$  komplexe Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt). Jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  besitzt  $n$  Eigenwerte.*

*Beweis.* (i) Für  $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  mit  $a_n \neq 0$  gilt

$$|P(z)| \geq |z|^n \cdot \left| |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right| \geq \frac{|z|^n \cdot |a_n|}{2},$$

falls  $|z| \geq R$  mit einem geeignet gewählten  $R > 0$ . Falls  $P$  keine komplexe Nullstelle besitzt, so ist  $\frac{1}{P}$  eine ganze Funktion. Wählt man  $R$  so groß, dass  $|P(z)| \geq 1$  für  $|z| \geq R$  gilt, so ist

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{1}{|P(z)|} \leq \max \left\{ 1, \max_{|z| \leq R} \frac{1}{|P(z)|} \right\} < \infty,$$

da  $\frac{1}{P}$  als stetige Funktion auf der kompakten Menge  $\{|z| \leq R\}$  beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist  $\frac{1}{P}$  konstant, Widerspruch.

(ii) Nach (i) hat  $P$  mindestens eine Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $P(z) = (z - \lambda)P_1(z)$  mit  $\deg P_1 = n - 1$ . Falls  $n - 1 > 0$ , wende wieder (i) an und erhalte iterativ  $n$  (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen von  $P$ .

(iii) Die Aussage über Matrizen folgt, da die Eigenwerte einer Matrix die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind.  $\square$

### 3. Isolierte Singularitäten und Laurentreihen

**3.1 Worum geht's?** Die Nullstellenmenge einer holomorphen Funktion ist (falls es sich nicht um die Nullfunktion handelt) höchstens abzählbar. Eine wichtige Folgerung aus dieser Eigenschaft ist der Identitätssatz für holomorphe Funktionen, der in Anwendungen recht nützlich ist. Eine isolierte Singularität ist ein Punkt, so dass die Funktion in einer Umgebung dieses Punktes mit Ausnahme des Punktes selbst holomorph ist. Die Klassifikation isolierter Singularitäten leitet über zu den Laurentreihen, welche eine Verallgemeinerung der Taylorreihen darstellen und später für den Residuensatz wichtig sein werden.

**3.2 Definition.** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen.

- a) Die Menge der in  $G$  holomorphen Funktionen wird mit  $\mathcal{H}(G)$  bezeichnet.
- b) Die Menge  $\mathcal{N}(f) := \{a \in G : f(a) = 0\}$  heißt die Nullstellenmenge von  $f$ .

**3.3 Satz.** Sei  $G$  ein Gebiet und  $f \in \mathcal{H}(G)$ . Dann gilt entweder  $\mathcal{N}(f) = G$ , d.h.  $f = 0$ , oder  $\mathcal{N}(f)$  ist abzählbar und hat keinen Häufungspunkt in  $G$ . In diesem Fall gibt es zu  $a \in \mathcal{N}(f)$  eine eindeutig bestimmte Zahl  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

für eine geeignete Funktion  $g \in \mathcal{H}(G)$  mit  $g(a) \neq 0$ . Die Zahl  $m$  heißt die Nullstellenordnung von  $f$  an der Stelle  $a$ .

Im Beweis verwenden wir folgendes Lemma.

**3.4 Lemma.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen. Dann ist  $G$  abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.

*Beweis.* Setze  $A_k := \{z \in G : |z| \leq k \text{ und } \text{dist}(z, \partial G) \geq \frac{1}{k}\}$ . Dann gilt  $A_k = \overline{G} \cap \varphi_1^{-1}([0, k]) \cap \varphi_2^{-1}([\frac{1}{k}, \infty))$  für die zwei stetigen Funktionen  $\varphi_1: z \mapsto |z|$  und  $\varphi_2: z \mapsto \text{dist}(z, \partial G)$ . Damit ist  $A_k$  abgeschlossen und somit, da beschränkt, sogar kompakt. Offensichtlich gilt  $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ .  $\square$

*Beweis von Satz 3.3.* Sei  $H := \{z \in G : z \text{ ist Häufungspunkt von } \mathcal{N}(f)\}$ .

(i) Da die Menge der Häufungspunkte von  $\mathcal{N}(f)$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\overline{G} \subset \mathbb{C}$  ist, ist  $H$  abgeschlossen in  $G$  (d.h. in der Relativtopologie von  $G$ ).

(ii) Wir zeigen, dass  $H$  auch offen in  $G$  ist. Da  $f$  stetig ist, gilt  $f(a) = 0$  für alle

$a \in H$ . Sei  $a \in \mathcal{N}(f)$  und  $r > 0$  so gewählt, dass  $B(a, r) \subset G$ . Nach Satz 2.6 gilt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (z \in B(a, r)).$$

Entweder sind alle  $c_n = 0$ , d.h.  $f = 0$  in  $B(a, r)$ , oder es gibt eine kleinste Zahl  $m \in \mathbb{N}$  mit  $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$  und  $c_m \neq 0$ . In diesem Fall setze

$$g(z) := \begin{cases} (z - a)^{-m} f(z), & z \in G \setminus \{a\}, \\ c_m, & z = a. \end{cases}$$

Offensichtlich ist  $g$  holomorph in  $G \setminus \{a\}$ . Nach Definition von  $m$  gilt

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^{n-m} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m} (z - a)^k.$$

Damit konvergiert die Potenzreihe für  $g$  in  $B(a, r)$ , also ist  $g$  holomorph an der Stelle  $a$  mit  $g(a) = c_m \neq 0$ .

Da  $g$  stetig ist, folgt  $g(z) \neq 0$  (und damit  $f(z) \neq 0$ ), falls  $z \neq a$  hinreichend nahe bei  $a$  liegt. Damit ist  $a$  die einzige Nullstelle von  $f$  in einer Umgebung von  $a$ , d.h.  $a$  ist kein Häufungspunkt von  $\mathcal{N}(f)$ .

Für  $a \in H$  folgt somit in obiger Potenzreihe  $c_n = 0$  für alle  $n$ , d.h. es gilt  $f = 0$  in  $B(a, r)$ . Somit ist  $H$  auch offen in  $G$ .

(iii) Da  $G$  zusammenhängend ist, folgt aus (i) und (ii) entweder  $H = G$ , d.h.  $f = 0$  in  $G$ , oder  $H = \emptyset$ , d.h.  $\mathcal{N}(f)$  hat keinen Häufungspunkt in  $G$ .

(iv) Falls  $f \neq 0$  und  $K \subset G$  kompakt, so kann  $K \cap \mathcal{N}(f)$  nur endlich sein, denn jede unendliche kompakte Menge in  $\mathbb{C}$  besitzt einen Häufungspunkt. Da  $G$  nach Lemma 3.4 abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist, ist  $\mathcal{N}(f) \cap G$  abzählbar.  $\square$

**3.5 Korollar (Identitätssatz).** Seien  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f, g \in \mathcal{H}(G)$  mit  $f(z) = g(z)$  auf einer Menge, die in  $G$  einen Häufungspunkt besitzt. Dann ist  $f = g$ .

*Beweis.* Wende Satz 3.3 auf  $f - g$  an.  $\square$

**3.6 Bemerkung.** Außerhalb von  $G$  kann  $\mathcal{N}(f)$  einen Häufungspunkt besitzen. Für  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \sin(1/z)$ , gilt  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ , aber  $\mathcal{N}(f)$  besitzt in 0 einen Häufungspunkt.



**3.7 Definition.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen. Ein Punkt  $a \in G$  heißt eine isolierte Singularität von  $f$ , falls  $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$  für eine offene Umgebung  $U \subset G$  von  $a$ . Falls  $f$  zu einer in einer offenen Umgebung von  $a$  holomorphen Funktion fortgesetzt werden kann, heißt  $a$  eine hebbare Singularität von  $f$ .

Z.B. hat die Funktion  $\frac{\sin z}{z}$  eine (durch den Wert 1) hebbare Singularität an der Stelle 0.

**3.8 Satz (Hebbarkeitssatz).** Sei  $G$  offen und  $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$  beschränkt in einer Umgebung von  $a$ . Dann hat  $f$  in  $a$  eine hebbare Singularität.

*Beweis.* Definiere

$$h(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z), & z \neq a, \\ 0, & z = a. \end{cases}$$

Da  $f$  in einer Umgebung von  $a$  beschränkt ist, folgt  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$ . Also ist  $h$  komplex differenzierbar an der Stelle  $a$ . Da offensichtlich  $h$  holomorph in  $G \setminus \{a\}$  ist, folgt  $h \in \mathcal{H}(G)$ .

Sei  $B(a, r) \subset G$ . Dann besitzt  $h$  eine Potenzreihenentwicklung  $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  in  $B(a, r)$ . Es gilt  $c_0 = h(a) = 0$  und  $c_1 = h'(a) = 0$ , d.h.

$$f(z) = (z-a)^{-2} h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2} (z-a)^k \quad (z \in B(a, r) \setminus \{a\}).$$

Durch  $f(a) := c_2$  wird  $f$  holomorph auf  $B(a, r)$  fortgesetzt. □

**3.9 Satz (Casorati-Weierstraß).** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $a \in G$  und  $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ . Dann liegt einer der drei folgenden Fälle vor:

(1)  $f$  hat eine hebbare Singularität an der Stelle  $a$ . In diesem Fall ist  $f$  beschränkt in einer Umgebung von  $a$ .

(2) Es gibt  $m \in \mathbb{N}$  und  $c_{-1}, \dots, c_{-m} \in \mathbb{C}$ , so dass

$$f - \sum_{n=1}^m c_{-n} (z-a)^{-n}$$

eine hebbare Singularität an der Stelle  $a$  hat. In diesem Fall gilt  $|f(z)| \rightarrow \infty$  für  $z \rightarrow a$ .

(3) Für jedes  $r > 0$  ist der Wertebereich  $f(B(a, r) \setminus \{a\})$  dicht in  $\mathbb{C}$ .

**3.10 Definition.** a) In obiger Situation liege Fall (2) vor. Dann heißt  $a$  ein Pol der Ordnung  $m$  von  $f$  und  $\sum_{n=1}^m c_{-n}(z-a)^{-n}$  der Hauptteil von  $f$  in  $a$ . Der Koeffizient  $c_{-1}$  von  $(z-a)^{-1}$  heißt das Residuum von  $f$  an der Stelle  $a$ . Wir schreiben

$$\operatorname{res}(f, a) := \operatorname{res}_{z=a} f(z) := c_{-1}.$$

b) Wenn Fall (3) vorliegt, heißt  $a$  eine wesentliche Singularität von  $f$ .

*Beweis von Satz 3.9.* Wir nehmen an, dass nicht Fall (3) vorliegt. Dann existieren ein  $r > 0$ , ein  $\delta > 0$  und ein  $w \in \mathbb{C}$  mit

$$|f(z) - w| > \delta \quad (z \in \dot{B} := B(a, r) \setminus \{a\}).$$

Wir definieren

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w} \quad (z \in \dot{B}). \quad (3-1)$$

Es gilt  $g \in \mathcal{H}(\dot{B})$  mit  $|g| \leq 1/\delta$  auf  $\dot{B}$ . Nach dem Hebbarkeitssatz 3.8 hat  $g$  eine holomorphe Fortsetzung auf  $B(a, r)$ .

(i) Falls  $g(a) \neq 0$ , so ist nach (3-1) die Funktion  $f$  in einer Umgebung von  $a$  beschränkt, und nach dem Hebbarkeitssatz 3.8 liegt Fall (1) des Satzes 3.9 vor.

(ii) Sei nun  $g(a) = 0$ . Nach Satz 3.3 hat  $g$  an der Stelle  $a$  eine Nullstelle der Ordnung  $m$ , d.h. es existiert ein  $\tilde{g} \in \mathcal{H}(B(a, r))$  mit  $g(z) = (z-a)^m \tilde{g}(z)$  und  $\tilde{g}(a) \neq 0$ .

Da  $f$  holomorph in  $\dot{B}$  ist, hat  $g$  nach (3-1) keine Nullstelle in  $\dot{B}$ . Daher gilt  $\tilde{g} \neq 0$  in  $B(a, r)$ . Die Funktion  $h := \frac{1}{\tilde{g}}$  ist somit holomorph in  $B(a, r)$  und hat dort keine Nullstelle. Es ist

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w = (z-a)^{-m} h(z) + w \quad (z \in \dot{B}).$$

Da  $h$  holomorph ist, existiert eine Darstellung als Potenzreihe:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k \quad (z \in B(a, r))$$

mit  $h_0 = h(a) \neq 0$ . Somit ist

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} b_{k+m} (z-a)^k + w,$$

d.h. Fall (2) des Satzes liegt vor. □

Die Abbildung 1 zeigt ein Beispiel einer wesentlichen Singularität. Gezeigt wird  $\operatorname{Re}(\exp(\frac{1}{z}))$ . Die komplexe exp-Funktion selbst wird in Abbildung 2 dargestellt. Eine typische Funktion mit Polen ist  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ , siehe Abbildung 3. Man beachte, dass dies ein Beispiel einer Funktion ist, die im Reellen  $C^\infty$  ist, deren Potenzreihe aber (z.B. bei Entwicklung um 0) keinen unendlichen Konvergenzradius hat. Geht man ins Komplexe über, erkennt man die Pole bei  $\pm i$ , und der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe wird ersichtlich. Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß sind die Polstellen durch die Bedingung  $|f(z)| \rightarrow \infty$  charakterisiert, was man schön an der Zeichnung sehen kann.

Ein Sonderrolle nimmt der Logarithmus ein: Beim ersten Hinsehen glaubt man, einen Pol an der Stelle 0 zu erkennen (da  $|\ln(z)| \rightarrow \infty$  ( $z \rightarrow 0$ )). Aber tatsächlich handelt es sich hier gar nicht um eine isolierte Singularität, denn  $\ln$  ist in  $B(0, r) \setminus \{0\}$  nicht holomorph. Der Satz von Casorati-Weierstraß greift hier also nicht. Die Abbildung 4 zeigt den Realteil des Logarithmus, die Abbildung 5 den Imaginärteil. Es handelt sich hierbei um den Hauptzweig. Man sieht, dass der Imaginärteil gleich dem Argument der komplexen Zahl ist (eigentlich ist das ja die Definition des Arguments), während der Realteil rotationssymmetrisch ist. Dies wird anschaulich klar aus der Formel  $\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$ .

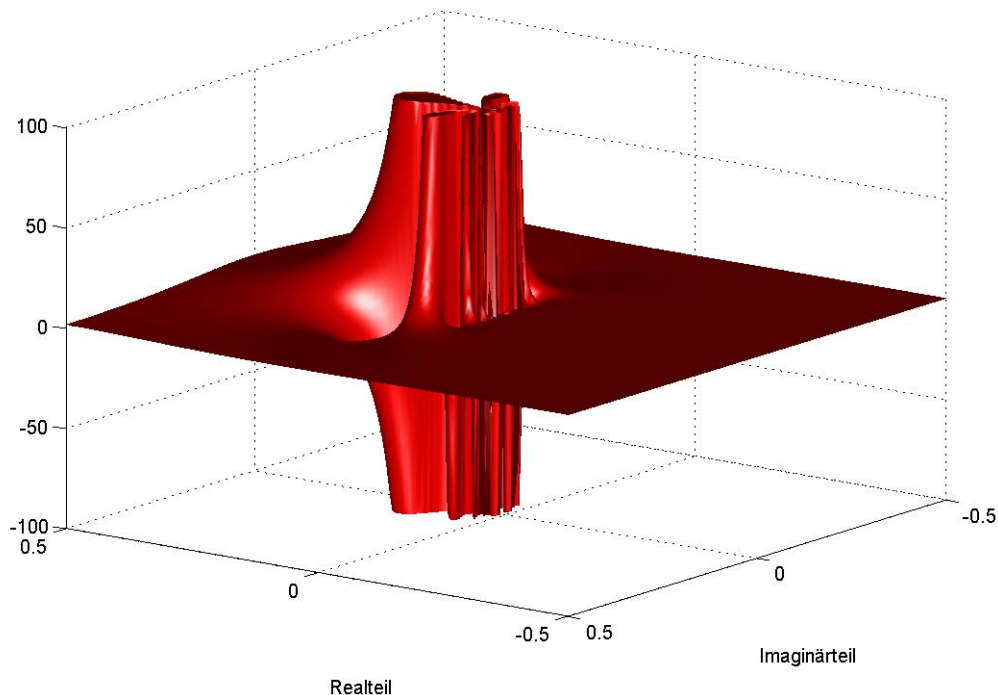


Abbildung 1: Eine wesentliche Singularität, dargestellt ist  $\operatorname{Re}(\exp(\frac{1}{z}))$ .

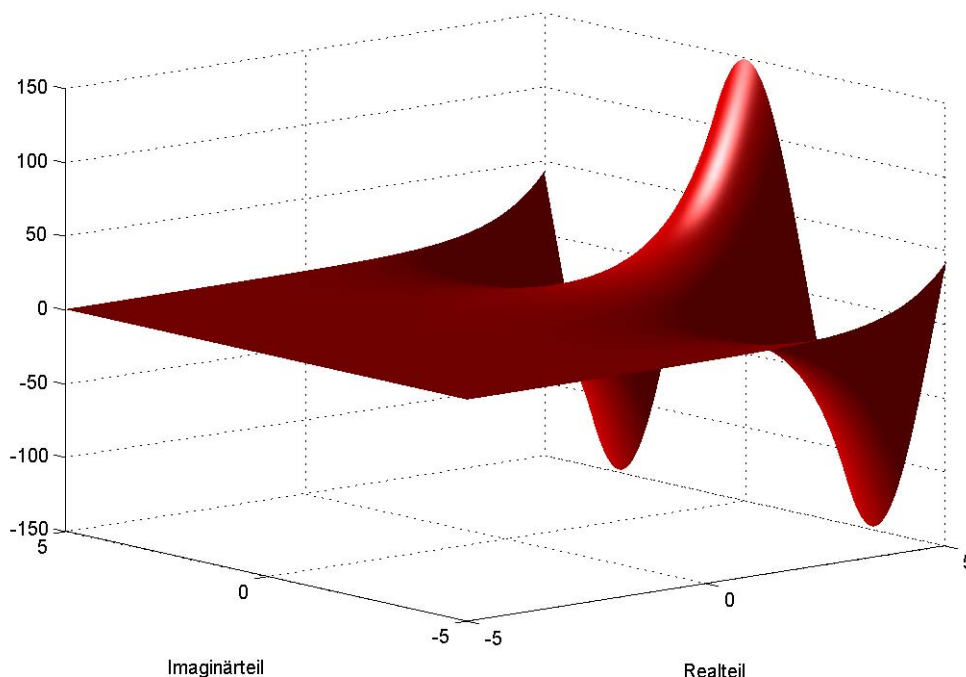


Abbildung 2: Die komplexe Exponentialfunktion, dargestellt ist  $\operatorname{Re}(\exp(z))$ .

**3.11 Definition.** Für  $a \in \mathbb{C}$  und  $0 \leq r < R \leq \infty$  definiere den Kreisring  $B(a, r, R) \subset \mathbb{C}$  durch

$$B(a, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}.$$

**3.12 Lemma.** Seien  $a \in \mathbb{C}$  und  $f \in \mathcal{H}(B(a, r, R))$ . Dann ist  $\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz$  unabhängig von  $\rho \in (r, R)$ .

*Beweis.* Betrachte für  $r < \rho_1 < \rho_2 < R$  die Differenz

$$\int_{|z-a|=\rho_1} f(z)dz - \int_{|z-a|=\rho_2} f(z)dz.$$

Zerlegt man den Kreisring  $B(a, \rho_1, \rho_2)$  in Sektoren, so kann man diese Differenz darstellen als Summe der Form  $\sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f(z)dz$ , wobei die Kurven  $\Gamma_j$  in konvexen Teilbereichen von  $B(a, r, R)$  verlaufen. Nach dem Cauchyschen Integralsatz für konvexe Gebiete ist jedes Integral über  $\Gamma_j$  gleich Null, also ist die Differenz gleich 0.  $\square$

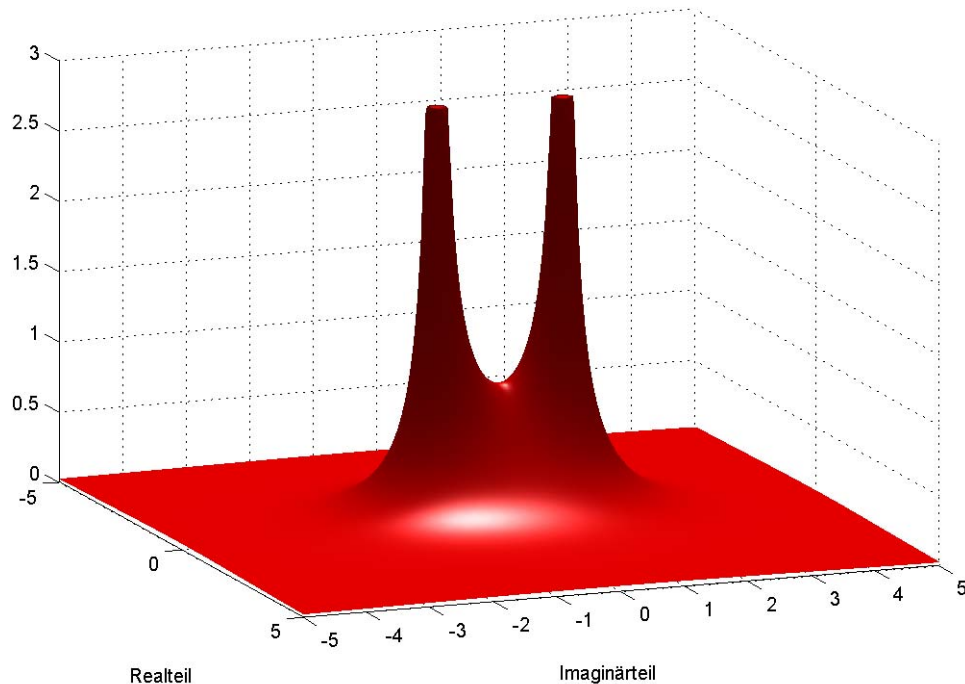


Abbildung 3: Eine Funktion mit zwei Polstellen, dargestellt ist  $|(1+z^2)^{-1}|$ .

**3.13 Satz** (Cauchysche Integralformel für Kreistringe). Seien  $a \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq r < r' < R' < R \leq \infty$ ,  $f \in \mathcal{H}(B(a, r, R))$  und  $z \in B(a, r', R')$ . Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

*Beweis.* Wie oben zerlege den Kreisring  $B(a, r', R')$  in Sektoren, welche in konvexen Teilbereichen von  $B(a, r, R)$  verlaufen. Dabei wähle man die Sektoren so, dass  $z$  auf keiner Trennlinie liegt. Dann liegt  $z$  in genau einem der Sektoren. Der Rand der Sektoren sei durch die Kurven  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  gegeben, wobei o.E.  $z \in \Gamma_1$  sei. Da  $z$  im Äußeren von  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  liegt, folgt

$$\text{Ind}_{\Gamma_j}(z) = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach der Cauchyschen Integralformel für konvexe Gebiete gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\Gamma_j}(z) f(z) = \sum_{j=1}^n \delta_{1j} f(z) = f(z). \end{aligned}$$

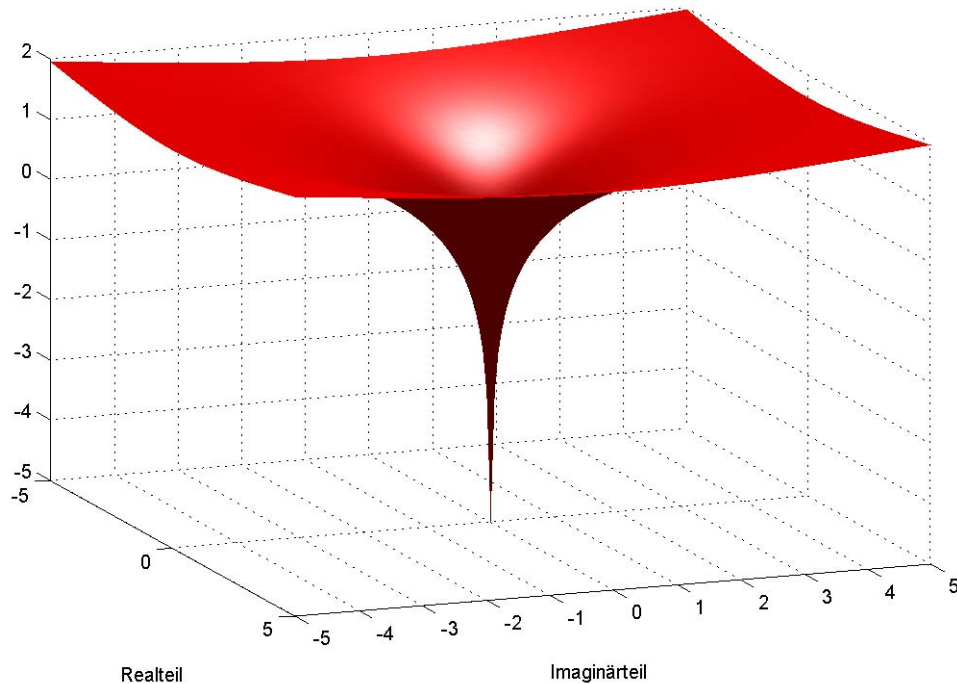


Abbildung 4: Der Realteil der Logarithmus-Funktion.

□

**3.14 Satz (Laurent-Reihen).** Sei  $f \in \mathcal{H}(B(a, r, R))$ . Dann gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k \quad (z \in B(a, r, R)),$$

wobei für beliebiges  $\rho \in (r, R)$  der Koeffizient gegeben ist durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw.$$

Beide Reihen  $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - a)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$  konvergieren gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $B(a, r, R)$ .

*Beweis.* Sei  $z \in B(a, r, R)$ . Wähle  $r', R'$  mit  $z \in B(a, r', R') \subset B(a, r, R)$ . Nach Satz 3.13 ist  $f(z) = F(z) + H(z)$  mit

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

$$H(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

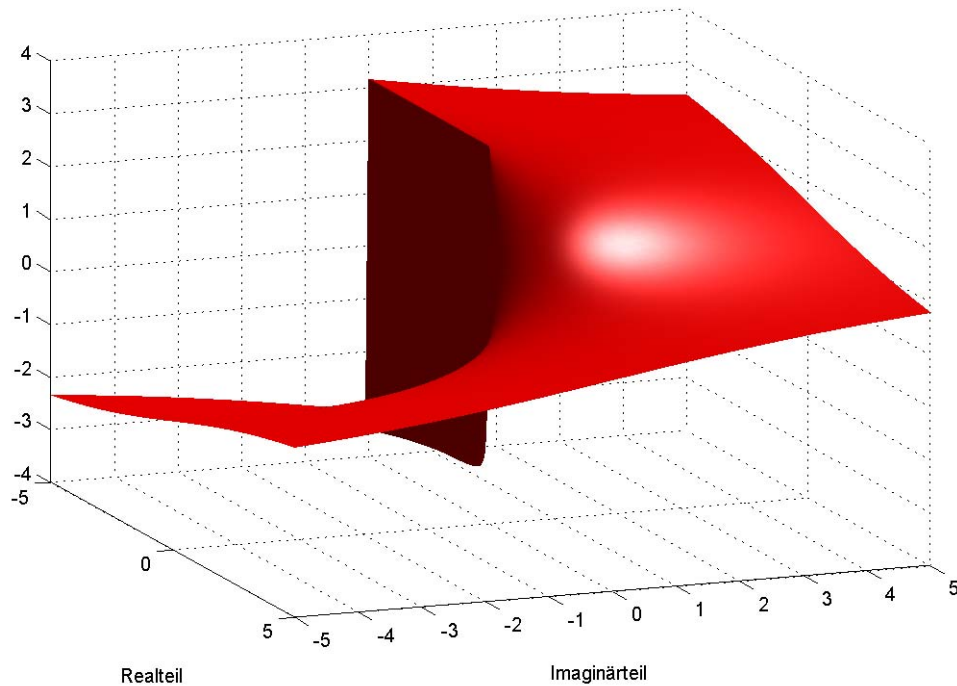


Abbildung 5: Der Imaginärteil der Logarithmus-Funktion (Hauptzweig).

Dabei ist  $F$  holomorph in  $B(a, r, R)$  und lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln. Es gilt  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$  mit

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw$$

unabhängig von  $\rho \in (r, R)$  (siehe Lemma 3.12).

Für  $H(z)$  verwenden wir

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-a} \left[ 1 - \frac{w-a}{z-a} \right]^{-1} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{w-a}{z-a} \right)^n.$$

Dabei konvergiert die rechte Seite wegen  $r' = |w-a| < |z-a|$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} H(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} f(w) (w-a)^n (z-a)^{-(n+1)} dw \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k, \end{aligned}$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r'} f(w)(w-a)^{-k-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} f(w)(w-a)^{-k-1} dw$$

unabhängig von  $\rho \in (r, R)$ . □

**3.15 Bemerkung.** Die Laurent-Reihe einer Funktion ist die Verallgemeinerung der Taylorreihe. Falls die Funktion  $f$  in einer Kreisscheibe  $B(a, R)$  holomorph ist, so lässt sich  $f$  dort in eine Potenzreihe entwickeln, in die Taylorreihe an der Stelle  $a$ . Falls aber  $f$  nur in einem Kreisring  $B(a, r, R)$  holomorph ist, so hat man die Taylorreihe durch die Laurent-Reihe zu ersetzen, in der auch negative Potenzen  $(z-a)^k$  für  $k < 0$  auftreten. Besonders interessant ist der Fall  $r = 0$ , d.h.  $f$  hat an der Stelle  $a$  eine isolierte Singularität.

Die Reihe mit negativen Potenzen  $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k$  heißt der Hauptteil der Laurentreihe oder der Hauptteil von  $f$  an der Stelle  $a$ . Damit können wir die drei Fälle des Satzes von Casorati-Weierstraß durch den Hauptteil beschreiben:

- (i)  $f$  hat in  $a$  eine hebbare Singularität genau dann, wenn der Hauptteil gleich Null ist.
- (ii)  $f$  hat in  $a$  einen Pol genau dann, wenn der Hauptteil nur eine endliche Summe ist, die Reihe also abbricht.
- (iii)  $f$  hat in  $a$  genau dann eine wesentliche Singularität, falls der Hauptteil unendlich viele Terme hat.

Man beachte, dass durch die Laurent-Entwicklung einer Funktion auch das Residuum durch  $\text{res}(f, a) = c_{-1}$  gegeben ist.

**3.16 Bemerkung.** Falls  $f \in \mathcal{H}(a, r, \infty)$ , so sagt man, dass  $f$  einen Pol  $m$ -ter Ordnung in  $\infty$  besitzt, falls  $g(z) := f(\frac{1}{z})$  einen Pol  $m$ -ter Ordnung bei 0 hat. Analog wesentliche Singularität.

So hat  $f(z) := z^2 + 2z - 1$  einen Pol 2. Ordnung in  $\infty$  und  $\exp$  eine wesentliche Singularität in  $\infty$ .



## 4. Der Residuensatz

**4.1 Worum geht's?** In diesem Abschnitt werden die Überlegungen über Kurvenintegrale nochmal vertieft und ausgebaut. Dazu wenden wir den Cauchyschen Integralsatz nicht auf eine geschlossene Kurve an, sondern auf eine Summe endlich vieler geschlossener Wege. Dies erlaubt es, die isolierten Singularitäten einer Funktion zu umgehen. Erlaubt sind daher nicht nur holomorphe Funktionen, sondern meromorphe Funktionen, d.h. Funktionen mit isolierten Singularitäten (wobei keine wesentlichen Singularitäten auftreten dürfen).

Wir werden sehen, dass das entsprechende Kurvenintegral über  $f$  nicht mehr notwendig gleich Null ist, sondern durch die Residuen der Funktion gegeben ist. Dabei werden alle Pole gezählt, welche von der Kurve bzw. der Kette eingeschlossen werden. Man erhält statt des Cauchyschen Integralsatzes den Residuensatz.

In dieser Form ist der Residuensatz hinreichend allgemein, um für Anwendungen brauchbar zu sein. Insbesondere die Berechnung bestimmter Integrale lässt sich oft auf den Residuensatz zurückführen.

### a) Homologie und Homotopie

Ab sofort werden wir den formalen Unterschied zwischen Kurven und ihren Repräsentanten (Wegen) fallenlassen. Für einen Weg  $\gamma$  ist das Integral  $\int_{\gamma} f(z)dz$  ab sofort stets zu verstehen als das Integral  $\int_{[\gamma]} f(z)dz$ . Der Vorteil, mit Wegen zu arbeiten, liegt darin, dass wir Repräsentanten mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften auswählen können. Nach wie vorher verstehen wir unter einem Weg, falls nichts anderes erwähnt wird, einen stückweise glatten Weg. Anfangs- und Endpunkt und Länge eines Wegs sind analog über die zugehörigen Kurven definiert.

**4.2 Lemma.** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen und  $f \in \mathcal{H}(G)$ . Definiere  $g: G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z \neq w, \\ f'(z), & z = w. \end{cases} \quad (4-1)$$

Dann ist  $g$  stetig.

*Beweis.* Zu zeigen ist nur die Stetigkeit an den Stellen  $(a, a)$  mit  $a \in G$ . Da  $f'$  stetig ist, existiert zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\rho > 0$  mit  $B(a, \rho) \subset G$  und

$$|f'(\xi) - f'(a)| < \varepsilon \quad (\xi \in B(a, \rho)). \quad (4-2)$$

Sei nun  $(z, w) \in B(a, \rho) \times B(a, \rho)$  und  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z + t(w - z)$  die Verbindungsstrecke von  $z$  nach  $w$ . Dann ist

$$f(w) - f(z) = \int_{\gamma} f'(\xi) d\xi = \int_0^1 f'(\gamma(t)) dt (w - z).$$

Damit

$$g(z, w) - g(a, a) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(a) = \int_0^1 (f'(\gamma(t)) - f'(a)) dt.$$

Wegen (4-2) folgt  $|g(z, w) - g(a, a)| < \varepsilon$ . □

**4.3 Definition.** a) Seien  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  Wege in  $\mathbb{C}$  und  $K := \mathcal{R}(\gamma_1) \cup \dots \cup \mathcal{R}(\gamma_n)$ . Betrachte die zugehörigen linearen Funktionalen  $T_j: C(K) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int_{\gamma_j} f(z) dz$ . Eine Kette  $\gamma$  ist eine formale Summe

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n,$$

welche die Summe der linearen Funktionalen induziert. D.h. wir setzen

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

Wir setzen  $\mathcal{R}(\gamma) := K$ . Eine Kette in  $G$  ist eine Kette  $\gamma$  mit  $\mathcal{R}(\gamma) \subset G$ . Ein Zyklus ist eine Kette geschlossener Wege.

Man beachte, dass eine Kette auf verschiedene Weise dargestellt werden kann. Es gilt  $\gamma_1 + \dots + \gamma_n = \mu_1 + \dots + \mu_m$ , falls gilt:  $\mathcal{R}(\gamma_1) \cup \dots \cup \mathcal{R}(\gamma_n) = \mathcal{R}(\mu_1) \cup \dots \cup \mathcal{R}(\mu_m) =: K$  und

$$\sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \int_{\mu_j} f(z) dz \quad (f \in C(K)).$$

Falls  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$  eine Kette ist, schreiben wir  $-\gamma$  für die Kette, die entsteht, wenn man jeden Weg  $\gamma_j$  durch den entgegengesetzten Weg  $-\gamma_j$  ersetzt.

b) Die Summe von Ketten ist in offensichtlicher Weise definiert. Für zwei Ketten  $\gamma$  und  $\mu$  ist die Summe bestimmt durch die Gleichheit

$$\int_{\gamma+\mu} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\mu} f(z) dz \quad f \in C(\mathcal{R}(\gamma) \cup \mathcal{R}(\mu)).$$

c) Sei  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$  ein Zyklus und  $z \notin \mathcal{R}(\gamma)$ . Dann ist die Windungszahl von  $\gamma$  um  $z$  definiert durch

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw = \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\gamma_j}(z).$$

Damit können wir nun die Cauchysche Integralformel auf allgemeinere Gebiete und auf Zyklen verallgemeinern.

**4.4 Satz.** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen,  $\gamma$  ein Zyklus in  $G$  mit  $\text{Ind}_\gamma(w) = 0$  ( $w \in \mathbb{C} \setminus G$ ). Sei  $f \in \mathcal{H}(G)$ .

a) **(Cauchyscher Integralsatz)** Es gilt  $\int_\gamma f(w)dw = 0$ .

b) **(Cauchysche Integralformel)** Es gilt

$$f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)). \quad (4-3)$$

*Beweis.* b) Wie in Lemma 4.2 definiere die Funktion  $g$  durch (4-1) und setze  $h(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z, w)dw$ .

(i)  $h$  ist holomorph in  $G$ : Als Integral über eine stetige Funktion (Lemma 4.2) ist  $h$  stetig. Wir rechnen die Voraussetzung des Satzes von Morera nach. Sei  $\Delta \subset G$  ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} h(z)dz = \int_{\partial\Delta} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z, w)dw dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \int_{\partial\Delta} g(z, w)dz \right) dz,$$

wobei der Satz von Fubini benutzt wurde.

Die Funktion  $z \mapsto g(z, w)$  ist holomorph für  $z \neq w$  und beschränkt. Nach Satz 3.8 hat  $g$  also eine hebbare Singularität, ist also in  $G$  holomorph. Damit ist

$$\int_{\partial\Delta} g(z, w)dz = 0.$$

und somit  $\int_{\partial\Delta} h(z)dz = 0$ . Nach dem Satz von Morera ist  $h$  holomorph in  $G$ .

(ii)  $h$  kann zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden: Definiere  $G_0 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\gamma) : \text{Ind}_\gamma(z) = 0\}$  und

$$h_0(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (z \in G_0).$$

Nach Voraussetzung gilt  $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$  für alle  $z \notin G$ , d.h.  $G_0 \supset \mathbb{C} \setminus G$ . Für  $z \in G \cap G_0$  gilt

$$h_0(z) - h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dw = f(z) \text{Ind}_\gamma(z) = 0.$$

Damit ist

$$\tilde{h}(z) := \begin{cases} h(z), & z \in G, \\ h_0(z), & z \in G_0 \end{cases}$$

wohldefiniert auf ganz  $\mathbb{C}$  und eine ganze Funktion.

(iii) Anwendung des Satzes von Liouville: Da  $G_0$  auch die unbeschränkte Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\gamma)$  enthält, gilt  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \tilde{h}(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} h_0(z) = 0$  (der Integrand konvergiert gegen Null). Nach dem Satz von Liouville ist also  $\tilde{h} = 0$  und damit  $h = 0$ . Nach Definition von  $h$  bedeutet dies

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z).$$

a) Wähle  $z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)$  und wende Teil b) an auf die Funktion  $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $w \mapsto f(w)(w - z)$ . Nach Teil a) ist

$$\int_{\gamma} f(w) dw = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w - z} dw = 2\pi i g(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = 0,$$

wobei  $g(z) = 0$  verwendet wurde. □

**4.5 Bemerkung.** a) Falls  $G \subset \mathbb{C}$  konvex ist und  $\gamma$  ein Weg in  $G$  ist, so ist  $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$  für alle  $z \notin G$ , und Satz 4.4 ist anwendbar. Wir erhalten den Cauchyschen Integralsatz bzw. die Cauchysche Integralformel für konvexe Gebiete.

b) Analog folgt der Cauchysche Integralsatz für Kreisringe, wenn man Satz 4.4 auf  $G := B(a, r, R)$  und den Zyklus  $\gamma_1 - \gamma_2$  mit  $\mathcal{R}(\gamma_1) = \{z : |z - a| = R\}$ ,  $\mathcal{R}(\gamma_2) = \{z : |z - a| = r\}$  anwendet.

c) Aus Teil a) des Satzes folgt für zwei Zyklen  $\gamma_1, \gamma_2$  mit  $\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = \text{Ind}_{\gamma_2}(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus G$  die Gleichheit  $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$ .

**4.6 Lemma.** In der Situation von Satz 4.4 gilt

$$f^{(n)}(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw \quad (n \in \mathbb{N}).$$

*Beweis.* Das folgt induktiv sofort aus der Cauchyschen Integralformel durch Differentiation unter dem Integral. Beachte, dass  $\text{Ind}_{\gamma}$  lokal konstant ist. □

**4.7 Definition (Homologie und Homotopie).** a) Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen und seien  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei Zyklen in  $G$ . Dann heißen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  homolog in  $G$ , falls

$$\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = \text{Ind}_{\gamma_2}(z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus G).$$

Ein Zyklus  $\gamma$  in  $G$  heißt nullhomolog in  $G$ , falls  $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C} \setminus G)$ .

b) Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen und seien  $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow G$  zwei Wege in  $G$  mit gleichem Anfangspunkt  $A \in G$  und Endpunkt  $E \in G$ . Dann heißen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  homotop in  $G$ , falls es eine stetige Funktion  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$  gibt mit  $H(\cdot, 0) = \gamma_0$ ,  $H(\cdot, 1) = \gamma_1$ ,  $H(0, \tau) = A$  und  $H(1, \tau) = B$  ( $\tau \in [0, 1]$ ). Ein Weg  $\gamma$  heißt nullhomotop, falls  $\gamma$  homotop zum konstanten Weg  $\tilde{\gamma}(t) := c$  ( $t \in [0, 1]$ ) für ein  $c \in G$  ist.

Sowohl die Homologie als auch die Homotopie definiert eine Äquivalenzrelation.

c) Die Menge der Äquivalenzklassen geschlossener Wege bzgl. Homotopie in  $G$  heißt die Fundamentalgruppe von  $G$ . Ein Gebiet  $G$  heißt einfach zusammenhängend, falls jeder geschlossene Weg nullhomotop ist.

**4.8 Lemma.** Seien  $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  zwei geschlossene Wege und  $z \in \mathbb{C}$ . Es gelte

$$|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |z - \gamma_0(t)| \quad (t \in [0, 1]). \quad (4-4)$$

Dann folgt  $\text{Ind}_{\gamma_0}(z) = \text{Ind}_{\gamma_1}(z)$ .

*Beweis.* Wegen (4-4) gilt  $z \notin \mathcal{R}(\gamma_j)$  für  $j = 0, 1$ . Für den Weg  $\gamma(t) := \frac{\gamma_1(t) - z}{\gamma_0(t) - z}$  gilt

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - z} - \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - z}$$

und

$$|1 - \gamma(t)| = \frac{|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)|}{|\gamma_0(t) - z|} < 1.$$

Damit gilt  $\mathcal{R}(\gamma) \subset B(1, 1)$  und damit  $\text{Ind}_{\gamma}(0) = 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi i \text{Ind}_{\gamma}(0) = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - 0} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - z} dt - \int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - z} dt \\ &= 2\pi i (\text{Ind}_{\gamma_1}(z) - \text{Ind}_{\gamma_0}(z)). \end{aligned}$$

□

**4.9 Bemerkung.** a) Seien  $G \subset \mathbb{C}$  offen und  $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  geschlossene Wege in  $G$ . Unter Verwendung von Lemma 4.8 kann zeigen: Falls  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  homotop sind, so sind sie auch homolog.

b) Der Satz von Cauchy gilt somit für nullhomologe Zyklen. Insbesondere gilt dieser Satz für jeden geschlossenen Weg, falls das Gebiet einfach zusammenhängend ist.

## b) Der Residuensatz

**4.10 Definition.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen. Eine Funktion  $f$  heißt auf  $G$  meromorph, falls eine Menge  $P_f \subset G$  existiert, so dass  $f$  holomorph ist in  $G \setminus P_f$ , an jeder Stelle  $p \in P_f$  einen Pol besitzt und  $P_f$  keinen Häufungspunkt in  $G$  hat. Wir schreiben  $f \in \mathcal{M}(G)$  und  $P_f := \{z \in G : f \text{ besitzt einen Pol an der Stelle } z\}$ .

Da jede beschränkte unendliche Menge in  $\mathbb{C}$  einen Häufungspunkt besitzt, kann  $P_f$  höchstens abzählbar sein. Auf dem Rand von  $G$  können Häufungspunkte von  $P_f$  auftreten. Wir erinnern daran, dass eine meromorphe Funktion an jeder Stelle  $p \in P_f$  eine Laurent-Entwicklung mit dem zugehörigen Residuum  $\text{res}(f, p)$  besitzt.

**4.11 Satz (Residuensatz).** a) Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen und  $f \in \mathcal{M}(G)$  mit Polmenge  $P_f$ . Sei  $\gamma$  ein nullhomologer Zyklus in  $G$  mit  $\mathcal{R}(\gamma) \subset G \setminus P_f$ . Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{p \in P_f} \text{res}(f, p) \text{Ind}_{\gamma}(p). \quad (4-5)$$

b) Insbesondere gilt für einen geschlossenen Integrationsweg in  $G \setminus P_f$ : Das Integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$  ist die Summe aller Residuen in den von  $\gamma$  umschlossenen Polstellen von  $f$ .

*Beweis.* (i) Wir zeigen, dass die Menge  $P_f^0 := \{p \in P_f : \text{Ind}_{\gamma}(p) \neq 0\}$  endlich ist. Angenommen, es existieren unendlich viele Polstellen  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P_f$  mit  $\text{Ind}_{\gamma}(p_n) \neq 0$ . Da auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente  $\text{Ind}_{\gamma} = 0$  gilt, ist  $(p_n)_n$  beschränkt, besitzt also einen Häufungspunkt  $p \in \partial G$ . Wegen  $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$  in  $\mathbb{C} \setminus G$  folgt  $\text{Ind}_{\gamma}(p) = 0$ . Da  $\text{Ind}_{\gamma}$  auf jeder Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  konstant ist, folgt  $\text{Ind}_{\gamma}(p_n) = 0$  für große  $n$ , Widerspruch. Sei  $P_f^0 = \{p_1, \dots, p_m\}$ .

(ii) Nach (i) ist die Summe in (4-5) endlich. Seien  $h_1, \dots, h_m$  die Hauptteile von  $f$  an den Stellen  $p_1, \dots, p_m$ . Dann ist  $g := f - h_1 - \dots - h_m$  holomorph auf  $G$  fortsetzbar. Nach dem Cauchyschen Integralsatz 4.4 gilt

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{j=1}^m \int_{\gamma} h_j(z) dz.$$

Sei  $h_j(z) = \sum_{\ell=-M_j}^{-1} c_{\ell}^{(j)} (z - p_j)^{\ell}$ . Dann folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h_j(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=-M_j}^{-1} c_{\ell}^{(j)} \int_{\gamma} (z - p_j)^{\ell} dz = c_{-1}^{(j)} \text{Ind}_{\gamma}(p_j) = \text{res}(f, p_j) \text{Ind}_{\gamma}(p_j).$$

(Beachte, dass für  $\ell \neq -1$  eine Stammfunktion zu  $(z - p_j)^{\ell}$  existiert.)

(iii) Die Aussage b) folgt sofort aus a), da  $\text{Ind}_{\gamma}(p) = 1$  für die von  $\gamma$  eingeschlossenen Pole und  $\text{Ind}_{\gamma}(p) = 0$  für die Pole, die außerhalb von  $\gamma$  liegen.  $\square$

**4.12 Beispiel.** Es gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$ . Dazu setze  $f(z) := \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$ . Es gilt  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  mit den beiden Polen  $p = \pm i$ . Das Residuum an der Stelle  $i$  ist  $\text{res}(f, i) = \frac{1}{2i}$ .

Betrachte als Integrationsweg den Rand von  $H_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \text{Im } z > 0\}$  für  $R > 1$ . Es gilt

$$\int_{\partial H_R} f(z) dz = 2\pi i \text{res}(f, i) = \pi.$$

Für  $R \rightarrow \infty$  schätze das Integral über den Halbkreis ab: Wir parametrisieren  $z = \gamma(\varphi) := Re^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in [0, \pi]$ . Dann ist  $|\gamma'(\varphi)| = |iRe^{i\varphi}| \leq R$  und

$$|1+z^2| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1.$$

Damit

$$\left| \int_{|z|=R, \text{Im } z > 0} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2 - 1} d\varphi = \frac{R\pi}{R^2 - 1} \rightarrow 0.$$

Andererseits gilt  $\int_{-R}^R f(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$  für  $R \rightarrow \infty$ . Insgesamt erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial H_R} f(z) dz = \pi.$$

**4.13 Beispiel.** Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Dabei ist das Integral als uneigentliches Riemann-Integral zu verstehen, d.h. als  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$ . Beachte, dass an der Stelle  $x = 0$  keine Singularität vorliegt.

Setze  $f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$ . Dann ist  $f$  meromorph in  $\mathbb{C}$  mit einzigem Pol an der Stelle 0. Als Integrationsweg wählen wir  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_4$  mit

$$\begin{aligned} \gamma_1: [0, R] &\rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto R + it, \\ \gamma_2: [-R, R] &\rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto -t + iR, \\ \gamma_3: [0, R] &\rightarrow \mathbb{C}, & t &\mapsto -R + i(1-t). \end{aligned}$$

Der Weg  $\gamma_4$  durchlaufe  $[-R, -\varepsilon] \cup \{z = \varepsilon e^{i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq \pi\} \cup [\varepsilon, R]$  in Richtung von „-“ nach „+“.

Da  $f$  im von  $\gamma$  umschlossenen Bereich holomorph ist, gilt  $\int_\gamma f(z) dz = 0$ .

(i) Auf  $\gamma_1$  schätzen wir den Integranden durch  $\frac{e^{-t}}{R}$  ab und erhalten

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| \leq \int_0^R \frac{e^{-t}}{R} dt \leq \frac{1}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

Analog folgt  $\int_{\gamma_3} f(z)dz \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$ .

(ii) Auf  $\gamma_2$  schätzen wir den Integranden durch  $\frac{e^{-R}}{R}$  ab und erhalten

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| \leq \int_{-R}^R \frac{e^{-R}}{R} dt = 2e^{-R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

(iii) Auf dem Halbkreis (in negativer Richtung durchlaufen) ist das Integral gegeben durch

$$- \int_0^\pi f(\varepsilon e^{i\varphi}) i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi = - \int_0^\pi i \exp(i\varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi \rightarrow -i\pi \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Dabei haben wir die Abschätzung  $|\exp(i\varepsilon e^{i\varphi})| \leq \exp(|\varepsilon|) \leq e$  für  $\varepsilon \in (0, 1)$  und majorisierte Konvergenz verwendet. Die Integrale auf der reellen Achse sind

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx &= \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\ &= 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx \\ &= i \int_{[-R, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, R]} \frac{\sin x}{x} dx \\ &\rightarrow i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

(iv) Insgesamt erhalten wir

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = i\pi.$$

**4.14 Bemerkung.** Sei  $G$  ein Gebiet und  $a \in G$  eine Polstelle von  $f$ . Nach dem Residuensatz gilt dann für kleines  $r$

$$\operatorname{res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} f(w) dw.$$

Falls  $f = \frac{g}{h}$  und  $h(z) = (z-a)^m \varphi(z)$  mit  $\varphi \in \mathcal{H}(G)$ ,  $\varphi(a) \neq 0$ , so folgt

$$\operatorname{res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{\frac{g}{\varphi}(w)}{(w-a)^m} dw = \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{g}{\varphi} \right)^{(m-1)}(a)$$

(siehe Lemma 4.6). Dies ist eine Möglichkeit, Residuen zu berechnen. Wir fassen einige Berechnungsmöglichkeiten zusammen:

- Man kann das Residuum direkt über die Potenzreihenentwicklung (Laurentreihe) bestimmen, indem man den Koeffizienten bei  $(z-a)^{-1}$  abliest.



- Sei wie oben  $f = g/h$ , wobei  $h$  eine  $m$ -fache Nullstelle an der Stelle  $a$  habe. Dann gilt  $\operatorname{res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{g}{\varphi}\right)^{(m-1)}(a)$ .
- Falls  $f = \frac{g}{h}$  und  $h$  an der Stelle  $a$  eine einfache Nullstelle hat, so gilt

$$\operatorname{res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z).$$

Man beachte hierbei, dass  $h'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{h(z)}{z-a}$  wegen  $h(a) = 0$  gilt.

- Falls  $a$  einfacher Pol von  $f$  ist und  $g \in \mathcal{H}(G)$ , so ist

$$\operatorname{res}(f \cdot g, a) = g(a) \operatorname{res}(f, a).$$

- Das Residuum ist linear. Speziell gilt: Falls  $a$  Polstelle von  $f$  ist und  $g \in \mathcal{H}(G)$ , so ist

$$\operatorname{res}(\alpha f + g, a) = \alpha \operatorname{res}(f, a).$$

**4.15 Satz (Satz vom Nullstellen und Polstellen zählenden Integral).** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f \in \mathcal{M}(G)$  und  $\gamma$  ein nullhomologer geschlossener Weg in  $G \setminus P_f$  mit  $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \{0, 1\}$  für alle  $z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)$  und  $f(z) \neq 0$  ( $z \in \mathcal{R}(\gamma)$ ). Sei  $N$  bzw.  $P$  die Anzahl der von  $\gamma$  eingeschlossenen Nullstellen bzw. Polstellen von  $f$  (entsprechend der Vielfachheit gezählt). Dann gilt

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

*Beweis.* Sei  $p$  eine Nullstelle der Ordnung  $m$  von  $f$ . Schreibe  $f(z) = (z - p)^m g(z)$  mit  $g(z) \neq 0$  in der Nähe von  $p$ . Dann folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - p)^{m-1} g(z) + (z - p)^m g'(z)}{(z - p)^m g(z)} = \frac{m}{z - p} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Da  $\frac{g'}{g}$  in der Nähe von  $p$  holomorph ist, folgt  $\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) = m$ . Analog erhält man  $\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) = -m$  bei einem Pol der Ordnung  $m$ . Die Behauptung folgt nun aus dem Residuensatz.  $\square$

**4.16 Korollar (Fundamentalsatz der Algebra).** Ein Polynom  $P$  von Grad  $n$  besitzt genau  $n$  komplexe Nullstellen.

*Beweis.* Wähle  $R > 0$  mit  $|P(z)| \geq 1$  für alle  $|z| \geq R$ . Für  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$  mit  $a_n \neq 0$  folgt

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{na_n z^{n-1} + \dots + a_1}{a_n z^n + \dots + a_0} = \frac{n}{z} + \sum_{j=2}^{\infty} c_j z^{-j}$$

(Laurent-Entwicklung um  $\infty$ ). Die Anzahl der Nullstellen von  $P$  ist nach Satz 4.15

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = n.$$

□

**4.17 Satz.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $\gamma$  ein nullhomologer Weg in  $G$  mit  $\text{Ind}_\gamma(z) \in \{0, 1\}$  für alle  $z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)$ . Zu  $f \in \mathcal{H}(G)$  sei  $N_f$  die Anzahl der von  $\gamma$  eingeschlossenen Nullstellen inklusive Vielfachheit.

a) Falls  $f \in \mathcal{H}(G)$  mit  $f(z) \neq 0$  für  $z \in \mathcal{R}(\gamma)$ , so gilt

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0).$$

b) (**Satz von Rouché**) Falls  $f, g \in \mathcal{H}(G)$  mit

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad (z \in \mathcal{R}(\gamma)), \quad (4-6)$$

so gilt  $N_f = N_g$ .

*Beweis.* a) Die erste Gleichheit folgt direkt aus Satz 4.15. Es gilt

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{(f(\gamma(t)))} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

b) Wegen (4-6) gilt  $f(z) \neq 0$  und  $g(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathcal{R}(\gamma)$ . Nach a) gilt  $N_f = \text{Ind}_{f \circ \gamma}(0)$  und  $N_g = \text{Ind}_{g \circ \gamma}(0)$ . Wegen (4-6) können wir Lemma 4.8 auf  $\gamma_0 := f \circ \gamma$  und  $\gamma_1 := g \circ \gamma$  mit  $z = 0$  anwenden und erhalten  $\text{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \text{Ind}_{g \circ \gamma}(0)$ . □

## 5. Der Wertebereich holomorpher Funktionen

**5.1 Worum geht's?** Die Frage der Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen wurde in den bisherigen Abschnitten noch nicht vollständig beantwortet. Wir wissen zwar schon einiges über die Nullstellen holomorpher Funktionen und über die singulären Stellen, jetzt kommen aber einige wichtige Aussagen dazu. So ist eine holomorphe Funktion offen, d.h. sie bildet offene Mengen auf offene Mengen ab. Lokal verhält sich jede Funktion wie eine Potenzfunktion.

Aus diesen Eigenschaften lassen sich wichtige Prinzipien wie etwa das Maximumprinzip ableiten. Eine holomorphe Funktion kann in einem Gebiet kein lokales Betragsmaximum besitzen, die Maxima liegen alle auf dem Rand des Gebietes.

Holomorphe Funktionen sind winkeltreu und erhalten die Orientierung. Hier ist der Begriff einer konformen Abbildung wichtig. Es gibt eine ganze Klasse konformer Abbildungen, welche hier aber nicht im Detail diskutiert werden.

**5.2 Satz (Satz von der lokalen Umkehrbarkeit).** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f \in \mathcal{H}(G)$  und  $z_0 \in G$  mit  $f'(z_0) \neq 0$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $V \subset G$  von  $z_0$ , so dass  $f|_V$  biholomorph ist d.h.  $f|_V$  ist bijektiv,  $f(V)$  ist offen, und  $(f|_V)^{-1}$  ist holomorph. Es ist  $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$  für alle  $w \in f(V)$ .

*Beweis.* Das zeigt man genauso wie in Analysis II. □

**5.3 Definition.** Seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt offen, falls  $f(U) \subset Y$  offen ist für jede offene Teilmenge  $U \subset X$ .

**5.4 Beispiel.** Für  $m \in \mathbb{N}$  betrachte die Potenzfunktion  $\pi_m: z \mapsto z^m$ . Dann ist  $\pi_m: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  offen: Falls  $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  offen ist, so ist  $\pi_m(U)$  offen nach Satz 5.2. Im Falle  $0 \in U$  müssen wir nur zeigen, dass  $f(0) = 0$  ein innerer Punkt von  $f(U)$  ist. Dies gilt aber, da  $f(B(0, r)) = B(0, r^m)$ .

Beachte, dass  $z^m = w$  genau die  $m$  Lösungen  $z_j = \sqrt[m]{r} \exp(i \frac{\theta + 2\pi j}{m})$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ , hat, wobei  $w = re^{i\theta}$ .

**5.5 Satz.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f \in \mathcal{H}(G)$  nicht konstant,  $z_0 \in G$  und  $w_0 := f(z_0)$ . Es sei  $m$  die Nullstellenordnung von  $z \mapsto f(z) - w_0$  bei  $z_0$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $z_0$  und ein  $\varphi \in \mathcal{H}(G)$  mit  $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$  in  $U$ , wobei  $\varphi(z_0) = 0$ ,  $\varphi'(z) \neq 0$  ( $z \in U$ ) und  $\varphi(U) = B(0, r)$  für  $r > 0$  geeignet. Somit gilt  $f(z) = w_0 + (\varphi(z))^m$  ( $z \in U$ ).

*Beweis.* Sei  $\tilde{U} \subset G$  eine konvexe offene Umgebung von  $z_0$ , so dass  $f(z) \neq w_0$  ( $z \in$

$\tilde{U} \setminus \{z_0\}$ . Die Existenz von  $\tilde{U}$  folgt, da die Nullstellen von  $f - w_0$  keinen Häufungspunkt in  $G$  besitzen.

Schreibe  $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$  mit  $g \in \mathcal{H}(\tilde{U})$  und  $g(z) \neq 0$  ( $z \in \tilde{U}$ ). Da  $\frac{g'}{g} \in \mathcal{H}(\tilde{U})$ , besitzt  $\frac{g'}{g}$  eine Stammfunktion  $h$  in  $\tilde{U}$ . Es gilt

$$(g \exp(-h))' = g' \exp(-h) - gh' \exp(-h) = g \exp(-h) \left( \frac{g'}{g} - h' \right) = 0.$$

Damit ist  $g = c \exp(h)$  mit einer Konstanten  $c$ . Ersetzt man  $h$  durch  $h + \tilde{c}$  mit einer geeigneten Konstante  $\tilde{c}$ , so können wir  $g = \exp(h)$  annehmen.

Setze  $\varphi(z) := (z - z_0) \exp\left(\frac{h(z)}{m}\right)$ . Dann folgt

$$\pi_m \circ \varphi(z) = (z - z_0)^m \exp(h(z)) = (z - z_0)^m g(z) = f(z) - w_0.$$

Weiter gilt  $\varphi(z_0) = 0$  und  $\varphi'(z_0) = \exp(h(z_0)/m) \neq 0$ . Damit ist nach Satz 5.2  $\varphi|_V$  biholomorph für eine offene Umgebung  $V$ , und für hinreichend kleines  $r > 0$  gilt  $B(0, r) \subset \varphi(V)$ . Setze nun  $U := \varphi^{-1}(B(0, r))$ .  $\square$

**5.6 Satz (Satz von der offenen Abbildung, Satz von der Gebietstreue).** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in \mathcal{H}(G)$  nicht konstant. Dann ist  $f$  offen, und  $f(G)$  ist ein Gebiet.

*Beweis.* Sei  $w_0 \in f(G)$ . Schreibe  $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$  nach Satz 5.5. Da  $\varphi'(z) \neq 0$  für alle  $z \in V$ , ist  $\varphi$  offen nach Satz 5.2. Nach Beispiel 5.4 ist  $\pi_m$  offen, und damit ist  $f - w_0$  als Verknüpfung offener Abbildungen offen. Somit ist  $f$  offen.

Da das stetige Bild zusammenhängender Mengen zusammenhängend ist, ist mit  $G$  auch  $f(G)$  ein Gebiet.  $\square$

**5.7 Korollar.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in \mathcal{H}(G)$  injektiv. Dann gilt  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in G$ , und  $f: G \rightarrow f(G)$  ist biholomorph.

*Beweis.* Angenommen, es ist  $f'(z_0) = 0$  für ein  $z_0 \in G$ . Dann hat die Funktion  $f - w_0$  mit  $w_0 := f(z_0)$  an der Stelle  $z_0$  eine  $m$ -fache Nullstelle mit  $m \geq 2$ . Schreibe  $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$  nach Satz 5.5. Aber nach Beispiel 5.4 ist  $\pi_m$  nicht injektiv für  $m \geq 2$ , Widerspruch zur Injektivität von  $f$  (man beachte, dass  $\varphi$  lokal bijektiv ist). Die Holomorphie von  $f^{-1}: f(G) \rightarrow G$  folgt nun aus dem Satz von der lokalen Umkehrbarkeit, Satz 5.2.  $\square$

**5.8 Satz (Maximumprinzip).** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in \mathcal{H}(G)$ .

a) Falls  $|f|$  an der Stelle  $z_0 \in G$  ein lokales Maximum hat, so ist  $f$  konstant.

b) Falls  $G$  beschränkt und  $f$  stetig in  $\overline{G}$ , so gilt

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)| \quad (z \in \overline{G}).$$

*Beweis.* Sei  $f$  nicht konstant und  $z_0 \in G$  lokales Maximum, d.h. es existiert eine Umgebung  $U \subset G$  von  $z_0$ , so dass

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad (z \in U).$$

Dann folgt  $f(U) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq |f(z_0)|\}$ . Damit ist  $f(z_0)$  kein innerer Punkt von  $f(U)$ , und  $f(U)$  ist nicht offen, im Widerspruch zum Satz von der offenen Abbildung. Dies zeigt a), und Teil b) folgt direkt aus a), wenn man noch beachtet dass  $\overline{G}$  kompakt ist und damit wegen der Stetigkeit von  $z \mapsto |f(z)|$  das Maximum von  $|f(z)|$  auf  $\overline{G}$  angenommen wird.  $\square$

**5.9 Satz (Minimum-Prinzip).** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f \in \mathcal{H}(G)$ .

a) Falls  $|f|$  an der Stelle  $z_0 \in G$  ein lokales Minimum hat, so ist  $f(z_0) = 0$  oder  $f$  konstant.

b) Falls  $G$  beschränkt und  $f$  stetig in  $\overline{G}$ , so gilt

$$|f(z)| \geq \min_{w \in \partial G} |f(w)| \quad (z \in \overline{G}),$$

oder  $f$  besitzt eine Nullstelle in  $G$ .

*Beweis.* Wende Satz 5.8 auf  $\frac{1}{f}$  an.  $\square$

**5.10 Definition.** a) Seien  $\gamma_1, \gamma_2: [-a, a] \rightarrow \mathbb{C}$  zwei glatte Wege mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) =: z_0$ . Dann heißt

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0} := \arg \left( \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \right)$$

der (orientierte) Schnittwinkel von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  an der Schnittstelle  $z_0$ .

b) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen. Eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt winkeltreu und orientierungserhaltend, falls für alle glatten Wege  $\gamma_1, \gamma_2: [-a, a] \rightarrow G$  mit  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) =: z_0$  gilt:

$$\sphericalangle(f(\gamma_1)_{f(z_0)}, f(\gamma_2))_{f(z_0)} = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0}.$$

c) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen. Eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt konform, falls  $f$  injektiv, winkeltreu und orientierungserhaltend ist. Falls  $f$  nur statt injektiv nur lokal injektiv ist, heißt  $f$  lokal konform.

**5.11 Bemerkung.** a) Man vergleiche die Definition des Schnittwinkels mit Definition 1.4. Für die Argumentfunktion muss man einen geeigneten Zweig wählen.

b) Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen und  $f \in \mathcal{H}(G)$  mit  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in G$ . Dann ist  $f$  winkeltreu und orientierungserhaltend. Denn

$$\begin{aligned} \sphericalangle(f(\gamma_1), f(\gamma_2))_{f(z_0)} &= \arg \left( \frac{f \circ \gamma_1(0)}{f \circ \gamma_2(0)} \right) = \arg \left( \frac{f'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0)}{f'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0)} \right) \\ &= \arg \left( \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \right) = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0}. \end{aligned}$$

**5.12 Beispiele.** a) Die exp-Funktion ist lokal konform, aber nicht konform.

b) Die Potenzfunktionen  $\pi_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^n$ ,  $n \geq 1$ , ist lokal konform in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Für  $k = 0, \dots, n-1$  betrachte den Sektor

$$S_k := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{2\pi}{n}k < \arg z < \frac{2\pi}{n}(k+1)\}.$$

Dann ist  $\pi_n: S_k \rightarrow \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  konform.

Insbesondere ist  $f|_{S_k}$  injektiv, d.h. die Umkehrabbildung

$$f_k := (\pi_n|_{S_k})^{-1}: \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \rightarrow S_k$$

existiert. Man spricht vom  $k$ -ten Zweig der Wurzel. Dabei ist der 0-te Zweig oder Hauptzweig  $f_0$  auch für  $z \in [0, \infty)$  definiert. Man erhält eine Bijektion

$$\sqrt[n]{\cdot} := f_0: \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : 0 \leq \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Für  $z = re^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in [0, 2\pi)$  gilt  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n}$ .

**5.13 Satz (Schwarzsches Lemma).** Sei  $f: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  holomorph mit  $f(0) = 0$ .

a) Es gilt  $|f(z)| \leq |z|$  ( $z \in B(0, 1)$ ) und  $|f'(0)| \leq 1$ .

b) Es gelte  $|f'(0)| = 1$  oder  $|f(z_0)| = |z_0|$  für ein  $z_0 \in \dot{B}(0, 1) := B(0, 1) \setminus \{0\}$ . Dann existiert ein  $\varphi \in [0, 2\pi)$  mit  $f(z) = e^{i\varphi}z$  ( $z \in B(0, 1)$ ), d.h.  $f$  ist eine Drehung.

*Beweis.* a) Betrachte

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Dann ist  $g \in \mathcal{H}(\dot{B}(0, 1))$  und stetig in  $B(0, 1)$ , also nach dem Hebbbarkeitssatz holomorph in  $B(0, 1)$ . Nach dem Maximumprinzip folgt für  $|z| \leq r < 1$

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r},$$

wobei  $|f| \leq 1$  verwendet wurde. Für  $r \rightarrow 1$  folgt  $|g(z)| \leq 1$  ( $z \in B(0,1)$ ) und damit a).

b) Falls  $|f'(0)| = 1$  oder  $|f(z_0)| = |z_0|$  für ein  $z_0 \neq 0$ , so nimmt  $|g(z)|$  sein Maximum (nämlich 1) in  $B(0,1)$  an. Nach dem Maximumprinzip ist  $g$  konstant mit  $|g(z)| = 1$ , d.h. es existiert ein  $\varphi \in [0, 2\pi)$  mit  $g(z) = e^{i\varphi}$ . Nach Definition von  $g$  folgt b).  $\square$

## 6. Folgen holomorpher Funktionen und der Riemannsche Abbildungssatz

**6.1 Worum geht's?** In diesem Abschnitt werden verschiedene Konvergenzbegriffe für Folgen holomorpher Funktionen betrachtet. Die wichtigste Konvergenzart ist dabei die lokal gleichmäßige Konvergenz, d.h. die gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen des Gebietes. Ein Satz von Weierstraß besagt in diesem Fall, dass auch die Ableitungen lokal gleichmäßig konvergieren. Nach dem Satz von Hurwitz gehen bei lokal gleichmäßiger Konvergenz keine Nullstellen im Grenzwert verloren bzw. kommen keine neuen dazu. Das wichtigste Kriterium für lokal gleichmäßige Konvergenz (einer Teilfolge) liefert der Satz von Montel.

Diese Sätze bilden das Werkzeug, um das Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen zu studieren. Wir kennen bereits den Satz von der offenen Abbildung, nach dem eine holomorphe Funktion offen ist und Gebiete auf Gebiete abbildet. Aus dem Cauchyschen Integralsatz wissen wir bereits, dass einfach zusammenhängende Gebiete eine besondere Rolle spielen. Das Standardbeispiel eines einfach zusammenhängenden Gebietes ist die offene Einheitskugel  $B(0, 1)$ . Der Riemannsche Abbildungssatz, einer der stärksten Sätze der Funktionentheorie, besagt, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet biholomorph auf  $B(0, 1)$  abgebildet werden kann.

### a) Folgen holomorpher Funktionen

**6.2 Bemerkung.** In diesem Abschnitt wird es um die Konvergenz einer Folge holomorpher Funktionen gehen. Daher fassen wir die wichtigen Konvergenzbegriffe zusammen. Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen  $f_n: G \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ .

a) Sei  $M \subset G$ . Dann heißt  $f_n$  gleichmäßig konvergent gegen  $f$  auf  $M$ , falls  $\sup_{z \in M} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Die Folge  $(f_n)_n$  heißt lokal gleichmäßig konvergent gegen  $f$ , falls zu jedem  $z \in G$  eine Umgebung  $U$  von  $z$  existiert, so dass  $(f_n)_n$  gleichmäßig in  $U$  gegen  $f$  konvergiert.

b) Die Folge  $(f_n)_n$  heißt gleichmäßig auf Kompakta konvergent gegen  $f$ , falls  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig in jeder kompakten Menge  $K \subset G$ . Offensichtlich ist die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz.

Sei nun  $\mathcal{F}$  eine Familie von Funktionen  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $M \subset G$ .

c)  $\mathcal{F}$  heißt beschränkt in  $M \subset G$ , falls  $\sup\{|f(z)| : z \in M, f \in \mathcal{F}\} < \infty$ .

$\mathcal{F}$  heißt lokal beschränkt in  $G$ , falls zu jedem  $z \in G$  eine Umgebung  $U$  existiert, so dass  $\mathcal{F}$  beschränkt in  $U$  ist.



d)  $\mathcal{F}$  heißt gleichgradig stetig in  $M \subset G$ , falls

$$\forall z \in G \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z' \in M, |z - z'| < \delta, \forall f \in \mathcal{F} : |f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

Wieder heißt  $\mathcal{F}$  lokal gleichgradig stetig in  $G$ , falls zu jedem  $z \in G$  eine Umgebung  $U$  von  $z$  existiert, so dass  $f$  gleichgradig stetig in  $U$  ist.

e)  $\mathcal{F}$  heißt gleichmäßig gleichgradig stetig in  $M$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z, z' \in M, |z - z'| < \delta, \forall f \in \mathcal{F} : |f(z) - f(z')| < \varepsilon.$$

Analog definiert man lokal gleichmäßig gleichgradig stetig.

f) Die Folge  $(f_n)_n$  konvergiert auf  $U$  lokal gleichmäßig gegen  $\infty$ , falls für alle kompakten Mengen  $K \subset U$  und für alle  $R > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$|f_n(z)| \geq R \quad (n \geq n_0, z \in K).$$

**6.3 Satz (von Weierstraß).** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  offen und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(G)$  eine Folge von Funktionen, welche lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$  konvergiert. Dann ist  $f \in \mathcal{H}(G)$  und jede Folge der Ableitungen  $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert lokal gleichmäßig gegen  $f^{(j)}$  in  $G$  für  $j \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Nach den Sätzen über gleichmäßige Konvergenz wissen wir, dass  $f$  stetig ist. Sei  $\Delta \subset G$  ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0,$$

wobei das Lemma von Goursat und ein Satz über Integration gleichmäßig konvergenter Funktionen verwendet wurde. Nach dem Satz von Morera folgt  $f \in \mathcal{H}(G)$ .

Sei  $\overline{B(a, r)} \subset G$ . Nach der Cauchy-Integralformel (Lemma 4.6) gilt für  $z \in B(a, \frac{r}{2})$  die Darstellung

$$\begin{aligned} |f_n^{(j)}(z) - f^{(j)}(z)| &= \left| \frac{j!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{j+1}} dw \right| \\ &\leq \frac{j!}{2\pi} 2\pi r \left(\frac{r}{2}\right)^{-j-1} \cdot \max_{|w-a|=r} |f_n(w) - f(w)| \\ &= j! 2^{j+1} r^{-j} \cdot \max_{|w-a|=r} |f_n(w) - f(w)|. \end{aligned}$$

Da  $f_n$  gleichmäßig auf Kompakte gegen  $f$  konvergiert, folgt  $|f_n(w) - f(w)| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gleichmäßig auf  $|w - a| = r$ . Damit konvergiert  $|f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$  gleichmäßig für  $z \in B(a, \frac{r}{2})$ , d.h.  $f_n^{(j)}$  konvergiert lokal gleichmäßig gegen  $f^{(j)}$ .  $\square$

Der folgende Satz besagt, dass der lokal gleichmäßige Grenzwert einer Folge holomorpher Funktionen genauso viele Nullstellen besitzt wie die Folge selbst. Es gehen also beim Grenzübergang keine Nullstellen verloren und es kommen keine dazu.

**6.4 Satz (von Hurwitz).** Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(G)$  eine Folge von Funktionen, welche lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $f \neq 0$  konvergiert. Für  $a \in G$  sind äquivalent:

- (i)  $f$  hat an der Stelle  $a$  eine Nullstelle der Ordnung  $m \geq 0$ .
- (ii) Es existiert eine offene Umgebung  $U \subset G$  von  $a$ , so dass für alle  $B(a, r)$  mit  $\overline{B(a, r)} \subset U$  ein  $n_0(r)$  existiert mit folgender Eigenschaft: Für  $n \geq n_0(r)$  hat die Funktion  $f_n$  in  $B(a, r)$  genau  $m$  Nullstellen (inklusive Vielfachheit gezählt).

*Beweis.* Wegen  $f \neq 0$  ist die Nullstellenmenge von  $f$  diskret, es existiert also eine Umgebung  $U$  von  $a$ , in der  $a$  die einzige Nullstelle von  $f$  ist.

Sei nun  $\overline{B(a, r)} \subset U$ . Wir definieren  $\varepsilon(r) := \max_{|z-a|=r} |f(z)|$ . Da  $(f_n)_n$  gleichmäßig gegen  $f$  auf Kompakta konvergiert, existiert ein  $n_0(r)$  mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon(r) \leq |f(z)| \quad (|z - a| = r, n \geq n_0(r)).$$

Nach dem Satz von Rouché haben  $f$  und  $f_n$  dieselbe Anzahl von Nullstellen in  $B(a, r)$ . □

**6.5 Korollar.** In der Situation von Satz 6.4 gilt:

- a) Ist jedes  $f_n$  nullstellenfrei, so ist auch  $f$  nullstellenfrei oder  $f = 0$ .
- b) Ist jedes  $f_n$  injektiv, so ist auch  $f$  injektiv oder konstant.

*Beweis.* a) Satz von Hurwitz mit  $m = 0$ .

b) Zu  $a \in G$  betrachte  $g_n(z) := f_n(z) - f_n(a)$  und wende a) auf die Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Gebiet  $G \setminus \{a\}$  an. □

**6.6 Definition.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen. Eine Familie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$  heißt normal, falls jede Folge in  $\mathcal{F}$  eine Teilfolge besitzt, die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion oder gegen  $\infty$  konvergiert.

**6.7 Satz (von Montel).** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen und  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$  eine lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen. dann ist  $\mathcal{F}$  normal.

Ist insbesondere  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(G)$  eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen, so besitzt  $(f_n)_n$  eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

*Beweis.* Wie in Lemma 3.4 schreiben wir  $G$  als Vereinigung kompakter Mengen,  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_k$ , wobei nach Konstruktion der Mengen  $A_k$  gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists r = r(k) > 0 \forall z \in A_k B(z, 2r) \subset A_{k+1}.$$

(i) Sei  $K \subset G$  kompakt. Wir zeigen, dass  $\mathcal{F}$  gleichmäßig gleichgradig stetig auf  $K$  ist. Wegen  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $K \subset A_k$ . Da  $f$  lokal beschränkt ist, existiert ein  $C > 0$  mit

$$|f(z)| \leq C \quad (f \in \mathcal{F}, z \in A_{k+1}).$$

Wähle  $r = r(k)$  wie oben. Für  $f \in \mathcal{F}$  und  $z, z' \in K$  gilt

$$\overline{B(w, r)} \subset A_{k+1} \quad (w \in s_{zz'}).$$

Hier ist wieder  $s_{zz'}$  die Strecke von  $z$  nach  $z'$ .

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &= \left| \int_{s_{zz'}} f'(w) dw \right| \leq |z - z'| \cdot \max_{w \in s_{zz'}} |f'(w)| \\ &\leq |z - z'| \cdot \max_{w \in s_{zz'}} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-w|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^2} d\zeta \right| \\ &\leq |z - z'| \cdot \frac{2\pi r}{2\pi} \max_{w \in A_{k+1}} |f(w)| \cdot \frac{1}{r^2} \leq \frac{C}{r} |z - z'|. \end{aligned}$$

Damit ist  $f$  Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten  $\frac{C}{r}$ , welche nicht von  $f$  abhängt. Somit ist  $\mathcal{F}$  gleichmäßig gleichgradig stetig in  $K$ .

(ii) Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ . Sei  $K \subset G$  kompakt. Dann ist  $(f_n)_n$  in  $K$  beschränkt und nach (i) gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli besitzt  $(f_n)_n$  eine auf  $K$  gleichmäßig konvergente Teilfolge.

(iii) Sei wieder  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ . Dann besitzt  $(f_n)_n$  nach (ii) eine auf  $A_1$  gleichmäßig konvergente Teilfolge  $(f_{n,1})_n$ . Davon existiert wiederum eine Teilfolge  $(f_{n,2})_n$ , die auf  $A_2$  gleichmäßig konvergent ist etc. Dann ist die Diagonalfolge  $(f_{n,n})_n$  auf jedem Kompaktum  $A_k$  gleichmäßig konvergent. Da für jede kompakte Menge  $K \subset G$  gilt  $K \subset A_k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ , ist  $(f_{n,n})_n$  auf jeder kompakten Menge gleichmäßig konvergent, d.h. lokal gleichmäßig konvergent. Somit ist die Familie  $\mathcal{F}$  normal.  $\square$

## b) Der Riemannsche Abbildungssatz

**6.8 Definition und Satz.** Für  $a \in B(0, 1)$  definiere die Möbius-Transformation  $\mu_a: \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\mu_a(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Dann gilt

- (i)  $\mu_a \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\})$  mit  $\mu_a(a) = 0$ .
- (ii)  $\mu_a^{-1} = \mu_{-a}$ .
- (iii) Es gilt  $\mu'_a(z) = \frac{(1-\bar{a}z)+\bar{a}(z-a)}{(1-\bar{a}z)^2}$ . Insbesondere ist  $\mu'_a(0) = 1 - |a|^2$  und  $\mu'_a(a) = (1 - |a|^2)^{-1}$ .
- (iv) Es ist  $\mu_a(B(0, 1)) = B(0, 1)$  und  $|\mu_a(z)| = 1 \quad (|z| = 1)$ .

*Beweis.* Die Aussagen (i)–(iii) folgen durch direktes Nachrechnen. Sei nun  $|z| = 1$ , d.h.  $z = e^{i\varphi}$  mit  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Dann ist

$$|\mu_a(z)| = \left| \frac{e^{i\varphi} - a}{1 - \bar{a}e^{i\varphi}} \right| = \left| e^{-i\varphi} \frac{e^{i\varphi} - a}{e^{-i\varphi} - \bar{a}} \right| = 1.$$

Somit ist  $\mu_a(\partial B(0, 1)) \subset \partial B(0, 1)$ . Nach (ii) ist  $\mu_a^{-1} = \mu_{-a}$  und damit  $\mu_a^{-1}(\partial B(0, 1)) \subset \partial B(0, 1)$ . Somit ist  $\mu_a$  eine Bijektion von  $\partial B(0, 1)$  nach  $\partial B(0, 1)$ . Nach dem Maximumprinzip Satz 5.8 folgt  $\mu_a(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$  und, genauso wie vorher,  $\mu_a^{-1}(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ . Dies zeigt (iv).  $\square$

**6.9 Lemma.** Sei  $G \subsetneq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $f \in \mathcal{H}(G)$  mit  $f(z) \neq 0 \quad (z \in G)$ . Dann existiert ein  $g \in \mathcal{H}(G)$  mit  $g^2 = f$  in  $G$ .

*Beweis.* Wegen  $f(z) \neq 0 \quad (z \in G)$  ist  $\frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(G)$ . Nach dem Cauchyschen Integralsatz (siehe Bemerkung 4.9 b)) gilt für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $G$

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

Nach Satz 1.29 besitzt  $\frac{f'}{f}$  eine Stammfunktion  $F$  in  $G$ . Somit ist  $(f \exp(-F))' = f' \exp(-F) - f \exp(-F) \frac{f'}{f} = 0$ , d.h. es existiert eine Konstante  $c \neq 0$  mit  $f = c \exp(F)$ . Setze  $g := c^{1/2} \exp(F/2)$ , wobei  $c^{1/2}$  eine der beiden Wurzeln von  $c$  ist.  $\square$

**6.10 Satz (Riemannscher Abbildungssatz).** Jedes einfach zusammenhängende Gebiet  $G \subsetneq \mathbb{C}$  ist biholomorph auf  $B(0, 1)$  abbildbar.

*Beweis.* Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte:

- (i) Es existiert ein biholomorphes  $f \in \mathcal{H}(G)$  mit  $0 \in f(G) \subset B(0, 1)$ .
- (ii) Es existiert ein  $g \in \mathcal{F} := \{h: f(G) \rightarrow B(0, 1) \mid h \text{ biholomorph mit } h(0) = 0\}$  mit  $|g'(0)| = \sup_{h \in \mathcal{F}} |h'(0)|$ .
- (iii) Die Funktion  $g: f(G) \rightarrow B(0, 1)$  ist surjektiv.

Wenn wir (i)–(iii) gezeigt haben, so ist  $g \circ f: G \rightarrow B(0, 1)$  die gesuchte biholomorphe Abbildung von  $G$  nach  $B(0, 1)$ .

Zu (i): Sei  $a \in \mathbb{C} \setminus G$ . Dann ist  $z \mapsto z - a$  eine holomorphe Funktion auf  $G$  ohne Nullstelle und besitzt daher nach Lemma 6.9 eine Wurzel  $q \in \mathcal{H}(G)$  mit  $q^2(z) = z - a$  ( $z \in G$ ). Wegen  $a \notin G$  ist  $q(z) \neq 0$  ( $z \in G$ ).

Es gilt

$$q(w) \neq \pm q(z) \quad (w, z \in G \text{ mit } w \neq z). \quad (6-1)$$

Denn sonst wäre  $w - a = q^2(w) = q^2(z) = z - a$ , d.h.  $w = z$ . Insbesondere ist  $q$  injektiv.

Wähle nun  $c \in q(G)$ . Nach dem Satz von der offenen Abbildung 5.6 ist  $q(G)$  offen, d.h. es existiert ein  $r > 0$  mit  $B(c, r) \subset q(G)$ . Es gilt

$$|q(z) + c| \geq r \quad (z \in G). \quad (6-2)$$

Denn sonst existiert ein  $z \in G$  mit  $q(z) \in B(-c, r)$ , d.h.  $-q(z) \in B(c, r) \subset q(G)$ . Damit gibt es  $z, w \in q(G)$  mit  $q(z) = -q(w)$ , Widerspruch zu (6-1).

Nach (6-2) gilt  $q(G) \subset \mathbb{C} \setminus B(-c, r)$ . Da  $q(G)$  offen ist, folgt sogar  $q(G) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B(-c, r)}$ , d.h. man kann in (6-2) das „ $\geq$ “ durch „ $>$ “ ersetzen. Definiere  $\tilde{f}$  durch

$$\tilde{f}(z) := \frac{r}{q(z) + c} \quad (z \in G).$$

Da  $|q(z) + c| > r$  ( $z \in G$ ), ist  $\tilde{f} \in \mathcal{H}(G)$  mit  $|\tilde{f}(z)| < 1$  ( $z \in G$ ) und damit  $\tilde{f}(G) \subset B(0, 1)$ . Da  $q$  injektiv ist, ist auch  $\tilde{f}$  injektiv.

Sei  $z_0 \in G$  beliebig. Definiere  $f(z) := \frac{1}{2}(\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0))$ . Dann ist  $f \in \mathcal{H}(G)$  injektiv mit  $f(G) \subset B(0, 1)$  und  $0 \in f(G)$ . Nach Korollar 5.7 ist  $f: G \rightarrow f(G)$  biholomorph.

Zu (ii): Wegen  $\text{id}_{f(G)} \in \mathcal{F}$  ist  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . Sei  $\alpha := \sup_{h \in \mathcal{F}} |h'(0)|$ . Wegen  $\text{id}_{f(G)} \in \mathcal{F}$  ist  $\alpha \geq 1$ .

Nach der Cauchy-Integralformel gilt für  $h \in \mathcal{H}(B(0, 1))$  und  $r \in (0, 1)$  mit  $\overline{B(0, r)} \subset f(G)$  die Gleichheit

$$h'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{h(z)}{z^2} dz.$$

Für  $h \in \mathcal{F}$  ist somit  $|h'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r}$ , d.h.  $\alpha < \infty$ . Also existiert eine Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  mit  $|g'_n(0)| \rightarrow \alpha$ .

Wegen  $|g_n(z)| < 1$  ( $z \in f(G), n \in \mathbb{N}$ ) ist die Folge  $(g_n)_n$  gleichmäßig beschränkt. Nach dem Satz von Montel 6.7 existiert eine konvergente Teilfolge, die wieder mit  $(g_n)_n$  bezeichnet sei. Setze  $g := \lim_n g_n \in \mathcal{H}(f(G))$ .

Nach dem Maximumprinzip gilt  $|g(z)| < 1$  ( $z \in f(G)$ ). Nach dem Satz von Weierstraß 6.3 gilt  $g'_n \rightarrow g'$  gleichmäßig in  $f(G)$  und damit insbesondere  $g'_n(0) \rightarrow g'(0)$ ,

d.h.  $|g'(0)| = \alpha \geq 1$ . Außerdem ist  $g(0) = \lim_n g_n(0) = 0$ . Da jedes  $g_n$  injektiv ist und  $g$  nicht konstant ist (wegen  $g'(0) \neq 0$ ), ist nach Korollar 6.5 auch  $g$  injektiv. Nach Korollar 5.7 ist  $g$  biholomorph. Insgesamt folgt  $g \in \mathcal{F}$ .

Zu (iii): Wir nehmen an, dass  $g: f(G) \rightarrow B(0, 1)$  nicht surjektiv ist. Wähle  $a \in B(0, 1) \setminus g(f(G))$  und betrachte  $\mu_a \circ g$ , wobei  $\mu_a$  die Möbius-Transformation zu  $a$  ist (siehe Definition 6.8). Dann ist  $\mu_a \circ g \in \mathcal{H}(f(G))$  injektiv (da  $g$  und  $\mu_a$  injektiv sind), und wegen  $\mu_a(a) = 0$  und  $a \notin g(f(G))$  gilt  $(\mu_a \circ g)(z) \neq 0 \quad (z \in f(G))$ .

Nach Lemma 6.9 existiert eine Wurzel  $h_1 \in \mathcal{H}(f(G))$  von  $\mu_a \circ g$  in  $f(G)$  mit  $h_1^2 = \mu_a \circ g$ . Die Funktion  $h_1$  ist wieder injektiv, da für  $h_1(z_1) = h_1(z_2)$  folgt  $(\mu_a \circ g)(z_1) = (\mu_a \circ g)(z_2)$  und damit  $z_1 = z_2$ , da  $\mu_a \circ g$  injektiv ist.

Definiere  $h: f(G) \rightarrow B(0, 1)$  durch  $h := \mu_{h_1(0)} \circ h_1$ . Dann ist  $h \in \mathcal{H}(f(G))$  injektiv mit  $h(0) = \mu_{h_1(0)}(h_1(0)) = 0$  nach Definition 6.8. Somit ist  $h \in \mathcal{F}$ .

Wir werden zeigen, dass  $|h'(0)| > |g'(0)|$  gilt, was einen Widerspruch zu (ii) darstellt. Dazu setze

$$w(z) := \mu_{-a}(\mu_{-h_1(0)}(z)^2) = \mu_{-a} \circ z^2 \circ \mu_{-h_1(0)}.$$

Es ist

$$w \circ h = \mu_{-a} \circ z^2 \circ \mu_{-h_1(0)} \circ \mu_{h_1(0)} \circ h_1 = \mu_{-a} \circ (h_1)^2 = g.$$

Damit folgt

$$g'(0) = (w \circ h)'(0) = w'(h(0))h'(0) = w'(0)h'(0).$$

Da  $w \in \mathcal{H}(B(0, 1))$  mit  $w(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ ,  $w(0) = 0$  und  $w$  nicht bijektiv ist, folgt nach dem Schwarzschen Lemma 5.13 die Abschätzung  $|w'(0)| < 1$ . Somit ist  $|g'(0)| < |h'(0)|$ . Da  $h \in \mathcal{F}$ , ist dies ein Widerspruch zu Eigenschaft (ii) von  $g$ .

Somit ist  $g$  surjektiv auf  $B(0, 1)$ , was Teil (iii) zeigt und den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes beendet.  $\square$

## Literatur

- [FH1] Forst, W., Hoffmann, D.: Gewöhnliche Differentialgleichungen - Theorie und Praxis. Springer Berlin 2005.
- [FH2] Forst, W., Hoffmann, D.: Funktionentheorie erkunden mit Maple. Springer Berlin 2002.
- [Fi] Fischer, W., Lieb I.: Funktionentheorie. Vieweg, Wiesbaden 1994.
- [Fo] Forster, O.: Analysis 2. Vieweg-Verlag 1979.
- [FB] Freitag, E., Busam, R.: Funktionentheorie. Springer Berlin 1995.
- [Heu] Heuser, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3. Aufl., Teubner Stuttgart 1995.
- [Jä] Jänich, K.: Funktionentheorie. Springer Berlin 1999.
- [Re] Remmert, R.: Funktionentheorie I. Springer Berlin 1995.
- [Wa] Walter W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 7. Aufl., Springer Berlin 2000.

## Index

Argumentfunktion, 14

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen,  
7

cos-Funktion, 11

cosh-Funktion, 11

Darstellung durch Potenzreihen, 9

exp-Funktion, 10

Exponentialfunktion, 10

Gebiet, 5

holomorph, 6

hyperbolische Funktionen, 11

Integral in  $\mathbb{C}$ , 12

komplex differenzierbar, 6

Kurve, 11

Kurvenintegral, 11

ln-Funktion, 14

Logarithmus, 14

    Hauptzweig, 14

sin-Funktion, 11

sinh-Funktion, 11

Stammfunktion, 12

wegäquivalent, 6

Windungszahl, 13

winkeltreu, 4

Zusammenhangskomponente, 6