# Skript zur Vorlesung

# Funktionalanalysis (Operatortheorie)

**Wintersemester 2006/07**

**Robert Denk**

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 15. 2. 2007

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Lineare Operatoren: Grundbegriffe

## a) Operatoren und Spektrum

Im folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**1.1 Definition.** Seien $E, F$ normierte Räume. Der Raum

$$L(E,F) := \{T : E \to F \mid T \text{ linear, stetig}\}$$

heißt der Raum der linearen stetigen Operatoren von $E$ nach $F$. Wir setzen $L(E) := L(E,E)$. Der Raum $E' := L(E,\mathbb{K})$ heißt der (topologische) Dualraum von $E$. Die Elemente $f \in E'$ heißen die stetigen linearen Funktionale auf $E$. Oft schreibt man $Tx$ statt $T(x)$.

Für eine lineare Abbildung $T\colon E \to F$ definiert man

$$\|T\| := \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\in E,\, \|x\|_E \le 1} \|Tx\|_F = \sup_{x\in E,\, \|x\|_E = 1} \|Tx\|_F.$$

$\|T\|$ heißt die Operatornorm von $T$. Sei

$$\begin{aligned} \ker T &:= N(T) := \{x \in E : Tx = 0\},\\ \operatorname{Im} T &:= R(T) := T(E) := \{Tx : x \in E\}. \end{aligned}$$

**1.2 Bemerkung.** Seien $E, F$ normierte Vektorräume. 2.2.4-2.2.6

a) Eine lineare Abbildung $T\colon E \to F$ ist genau dann stetig, wenn $T$ stetig an der Stelle 0 ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\|T\| < \infty$. Daher heißt $L(E,F)$ auch die Menge der beschränkten linearen Operatoren.

b) Der Raum $(L(E,F), \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum. Falls $F$ Banachraum ist, so auch $L(E,F)$. Speziell ist $E'$ ein Banachraum.

**1.3 Beispiel** (Shift-Operatoren)**.** a) Sei 1.1.6

$$\ell_2 := \{x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K} \mid \|x\|_2 := \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2\Big)^{1/2} < \infty\}$$

der $\ell_2$-Raum. Definiere den Rechtsshift $S_R \in L(\ell_2)$ durch

$$S_R\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad y_n := \begin{cases} 0, & n = 1,\\ x_{n-1}, & n > 1. \end{cases}$$

Dann ist $S$ stetig mit Norm 1 (sogar eine Isometrie, d.h. es gilt $\|Sx\|_2 = \|x\|_2 \quad (x \in \ell_2)$), injektiv aber nicht surjektiv. Analog ist der Linskshift

$$S_L\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

stetig mit Norm 1, surjektiv aber nicht injektiv.

b) Sei $\ell_2(\mathbb{Z};\mathbb{K}) := \{x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K} \mid \|x\|_2 := (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2)^{1/2} < \infty\}$ und $S_R$ der Rechtsshift

$$S_R\big((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) := (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Dann ist $S_R$ ein Norm-Isomorphismus, d.h. $S_R$ ist bijektiv, linear, $S_R$ und $S_R^{-1}$ sind stetig und $S_R$ ist eine Isometrie.

**1.4 Beispiel** (Ableitungsoperator)**.** a) Sei $E := C^1([0,1])$ mit Norm $\|f\|_E := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + |f'(t)|$ und $F := C([0,1])$ mit Norm $\|f\|_F := \|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Dann sind $E, F$ Banachräume, und der Ableitungsoperator

$$T\colon E \to F,\ f \mapsto f'$$

ist linearer stetiger Operator mit Norm 1.

b) Wählt man in a) für $E$ die Supremumsnorm $\|f\|_\infty$, so ist der Ableitungsoperator $T$ nicht mehr stetig, denn für $f_n(t) := t^n$ gilt $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\|Tf_n\|_\infty = n$, d.h. $\|T\| = \infty$. Jetzt ist $E$ nur noch normierter Vektorraum, aber nicht mehr vollständig.

Das letzte Beispiel (Teil b)) ist typisch: Hier ist der Definitionsbereich $D(T)$ des Operators $T$ ein linearer dichter Teilraum eines Banachraums $E$, und $T$ bildet nach $E$ ab. In diesem Sinn ist $T$ ein Operator „in“ $E$.

Teil I

**1.5 Bemerkung.** Seien $E, F$ normierte Vektorräume. Dann wird das kartesische Produkt $E \times F$ durch übliche Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum, und

$$\|(x,y)\|_{E\oplus F} := \|x\|_E + \|y\|_F \quad ((x,y) \in E \times F)$$

definert eine Norm auf $E\times F$. Man schreibt $E\oplus F$ für diesen normierten Vektorraum. Falls $E$ und $F$ beide Banachräume sind, so ist auch $E \oplus F$ ein Banachraum.

**1.6 Definition.** Seien $E, F$ normierte Räume.

a) Ein linearer Operator $T\colon E \to F$ ist eine lineare Abbildung vom Definitionsbereich $D(T) \subset E$ nach $F$, wobei $D(T)$ ein linearer Unterraum von $E$ ist. Die Menge $G(T) := \{(x,Tx) : x \in D(T)\}$ heißt der Graph von $T$.

b) Der Operator $T$ heißt abgeschlossen, wenn $G(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $E \oplus F$ ist.

c) Der Operator $T$ heißt abschließbar, wenn es einen abgeschlossenen linearen Operator $\overline{T}$ gibt mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Der Operator $\overline{T}$ heißt Abschließung oder der Abschluss von $T$.

**1.7 Bemerkung.** a) Wie üblich bei Abbildungen, ist die Stetigkeit eines linearen Operators $T\colon E \supset D(T) \to F$ unter Verwendung der Relativtopologie auf $D(T)$ erklärt. Damit ist $T$ genau dann stetig, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \to 0$ gilt $Tx_n \to 0$.

b) Seien nun $E, F$ Banachräume. Ein linearer Operator $T$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \to x \in E$ und $Tx_n \to y \in F$ gilt $x \in D(T)$ und $Tx = y$.

**1.8 Lemma.** *Seien $E, F$ Banachräume und $T \in L(E, F)$. Dann ist $T$ abgeschlossen.*

*Beweis.* Wir verwenden Bemerkung 1.7 b). Sei $(x_n)_n \subset D(T)$ mit $x_n \to x$ in $E$ und $Tx_n \to y$ in $F$. Dann gilt trivialerweise $x \in D(T) = E$, und da $T$ stetig ist, folgt $Tx_n \to Tx$, d.h. $Tx = y$. □

**1.9 Lemma.** *Seien $E, F$ Banachräume und $T\colon E \to F$ ein linearer Operator. Dann definiert*

$$\|x\|_T := \|x\|_E + \|Tx\|_F \quad (x \in D(T))$$

*eine Norm auf $D(T)$. Der normierte Raum $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist genau dann ein Banachraum, wenn der Operator $T$ abgeschlossen ist.*

*Beweis.* (i) Sei $T$ abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ eine Cauchyfolge bzgl. der Norm $\|\cdot\|_T$. Dann ist nach Definition der Norm $\|\cdot\|_T$ sowohl die Folge $(x_n)_n \subset E$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_E$ als auch die Folge $(Tx_n)_n \subset F$ bzgl. der norm $\|\cdot\|_F$ eine Cauchyfolge. Da $E$ und $F$ Banachräume sind, existieren $x \in E$ und $y \in F$ mit $\|x_n - x\|_E \to 0$ und $\|Tx_n - y\|_F \to 0$. Da $T$ abgeschlossen ist, folgt nach Bemerkung 1.7 b) $x \in D(T)$ und $Tx = y$. Insbesondere folgt $\|x_n - x\|_T \to 0$. Also ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum.

(ii) Die andere Richtung der Äquivalenz zeigt man analog. □

Teil I

**1.10 Satz** (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien $E, F$ Banachräume, $T : E \to F$ abgeschlossener linearer Operator. Falls $D(T)$ abgeschlossen ist, so ist $T$ stetig.*

**1.11 Korollar.** *Seien $E, F$ Banachräume, $T : E \to F$ linearer Operator. Falls $D(T)$ abgeschlossen ist, so ist $T$ genau dann stetig, wenn $T$ abgeschlossen ist.*

**1.12 Satz** (Prinzip der offenen Abbildung)**.** *Seien $E, F$ Banachräume und $T \in L(E, F)$ surjektiv. Dann ist $T$ offen, d.h. das Bild einer offenen Menge ist offen.* Teil I

**1.13 Satz** (Stetigkeit des Inversen)**.** *Seien $E, F$ Banachräume und $T : E \to F$ ein abgeschlossener linearer Operator mit $\ker T = \{0\}$ und $R(T)$ abgeschlossen. Dann ist $T^{-1} : R(T) \to E$ stetig.* Teil I

Im folgenden schreiben wir für einen Operator $T : E \to E$ statt $T - \lambda\,\mathrm{id}_E$ einfach $T - \lambda$.

**1.14 Definition.** Sei $E$ ein Banachraum und $T : E \to E$ ein linearer Operator mit $\overline{D(T)} = E$ (d.h. $T$ ist dicht definiert).

a) $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda : D(T) \to E \text{ ist bijektiv }\}$ heißt die Resolventenmenge von $T$.

b) $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt das Spektrum von $T$.

c) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ nicht injektiv }\}$ heißt das Punktspektrum von $T$ (die Menge aller Eigenwerte von $T$).

d) $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ injektiv, } \overline{R(T - \lambda)} = E,\ R(T - \lambda) \neq E\}$ heißt das kontinuierliche Spektrum von $T$.

e) $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ injektiv, } \overline{R(T - \lambda)} \neq E\}$ heißt das residuelle Spektrum (oder Restspektrum) von $T$.

**1.15 Bemerkung.** a) Direkt aufgrund der Definition haben wir

$$\mathbb{C} = \rho(T) \,\dot{\cup}\, \sigma(T) = \rho(T) \,\dot{\cup}\, \sigma_p(T) \,\dot{\cup}\, \sigma_c(T) \,\dot{\cup}\, \sigma_r(T),$$

wobei $\dot{\cup}$ die disjunkte Vereinigung bezeichnet.

b) Falls $\dim E < \infty$, so ist $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$.

c) Sei $T$ abgeschlossen und $\lambda \in \rho(T)$. Dann ist die Inverse $(T - \lambda)^{-1} : E \to D(T)$ stetig. Denn $T - \lambda$ ist ebenfalls abgeschlossen, der Wertebereich $R(T - \lambda) = E$ ist abgeschlossen. Damit folgt die Aussage aus dem Satz vom stetigen Inversen.

**1.16 Definition.** Sei $T : E \to E$ ein linearer Operator mit Definitionsbereich $D(T)$.

a) Für $\lambda \in \rho(T)$ heißt $R_\lambda(T) := (T - \lambda)^{-1}$ die Resolvente von $T$.

b) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ heißt $\ker(T-\lambda)$ der geometrische Eigenraum von $T$ zu $\lambda$ und

$$N_\lambda^{(a)}(T) := \{x \in D(T) \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : (T-\lambda)^n x = 0\}$$

der algebraische Eigenraum von $T$ zu $\lambda$.

**1.17 Beispiel.** Sei $E = \ell^2$ und $S = S_R \in L(E)$ der Rechts-Shift aus Beispiel 1.3, d.h. $S(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$. Dann ist $D(S) = \ell^2$, $\ker S = \{0\}$ und $\|e_1 - y\| \geq 1$ für alle $y \in R(S)$, wobei $e_1 := (1, 0, 0, \dots)$. Daher ist $\overline{R(S)} \neq E$ und damit $0 \in \sigma_r(S)$.

## b) Eigenschaften der Resolventenabbildung

**1.18 Lemma** (Neumannsche Reihe)**.** *Sei $E$ ein Banachraum und $T \in L(E)$ mit $\|T\| < 1$. Dann existiert $(1-T)^{-1} \in L(E)$, und es gilt $(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty T^n$ und $\|(1-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.*

*Beweis.* Es gilt

$$\sum_{n=0}^{N} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|T\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|}\,,$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut. Damit existiert $S := \sum_{n=0}^\infty T^n \in L(E)$, und es gilt $\|S\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.

Es gilt $ST = TS = \sum_{n=0}^\infty T^{n+1} = S - 1$, d.h. $S(1-T) = (1-T)S = 1$ und damit $S = (1-T)^{-1}$. □

**1.19 Satz.** *Sei $E$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T$ ein abgeschlossener lineare Operator in $E$ mit $\overline{D(T)} = E$. Dann ist $\rho(T)$ offen und somit $\sigma(T)$ abgeschlossen.*

*Beweis.* Falls $\rho(T) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\lambda_0 \in \rho(T)$. Es gilt

$$T - \lambda = T - \lambda_0 - (\lambda - \lambda_0) = (T-\lambda_0)\big[1 - (\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\big].$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| \cdot \|(T-\lambda_0)^{-1}\| < 1$ existiert

$$\big[1 - (\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\big]^{-1} \in L(E)$$

nach Lemma 1.18. Damit existiert

$$(T-\lambda)^{-1} = \big[1 - (\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\big]^{-1} \in L(E).$$

Somit gilt

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \big\|(T-\lambda_0)^{-1}\big\|^{-1} \subset \rho(T),$$

also ist $\rho(T)$ offen. □

**1.20 Korollar.** a) *Für $\lambda_0 \in \rho(T)$ gilt*

$$\|R_{\lambda_0}(T)\| \geq \big[\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T))\big]^{-1}.$$

b) *Für $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ gilt*

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}.$$

*Beweis.* a) folgt aus der letzten Zeile im Beweis von Satz 1.19, b) aus der Darstellung von $R_\lambda(T)$ im Beweis von Satz 1.19 und der Neumann-Reihe. □

**1.21 Definition** (schwache Konvergenz)**.** Sei $E$ ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen ein $x \in E$, falls für alle stetigen Funktionale $f \in E'$ gilt $|f(x_n) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty)$. Man schreibt $x_n \rightharpoonup x$ oder auch $x_n \xrightarrow{w} x$. Teil I

**1.22 Definition** (Konvergenz von Operatoren)**.** Seien $E, F$ normierte Räume. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(E,F)$ und $T \in L(E,F)$. Teil I

a) $T_n$ konvergiert gleichmäßig oder in der Norm gegen $T$, wenn $\|T_n - T\|_{L(E,F)} \to 0$.

b) $T_n$ konvergiert stark (in der starken Operatortopologie) gegen $T$, wenn gilt

$$\forall\, x \in E : \; \|T_n x - Tx\|_F \to 0.$$

Man schreibt $T_n \xrightarrow{s} T$.

c) $T_n$ konvergiert schwach (in der schwachen Operatortopologie) gegen $T$, wenn gilt

$$\forall\, x \in E \; \forall\, f \in F' : \; |f(T_n x) - f(Tx)| \to 0.$$

Man schreibt $T_n \xrightarrow{w} T$.

Man beachte, dass das Symbol $T_n \xrightarrow{w} T$ für Operatoren eine doppelte Bedeutung hat. Im Normalfall versteht man aber die Konvergenz nach Definition 1.22 darunter.

Eine Umgebungssubbasis der $0 \in L(E,F)$ in der starken Operatortopologie ist gegeben durch

$$\Big\{T \in L(E,F) : \|Tx\|_E < \frac{1}{n}, \; x \in E, \; n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Analog ist eine Umgebungssubbasis der $0 \in L(E,F)$ in der schwachen Operatortopologie gegeben durch

$$\Big\{ T \in L(E,F) : f(Tx) < \frac{1}{n},\ f \in F',\ x \in E,\ n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Offensichtlich gilt

$$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T \implies T_n \xrightarrow{s} T \implies T_n \xrightarrow{w} T.$$

Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht.

Die beiden folgenden Aussagen sind Korollare zum Satz von Hahn-Banach.

**1.23 Lemma.** *a) Sei $E$ normierter Raum und $x \in E \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $f \in E'$ mit $f(x) = \|x\|_E$ und $\|f\|_{E'} = 1$.* Teil I

*b) Sei $E$ normierter Raum. Dann ist die Abbildung $x \mapsto \widetilde{x}$, $E \to E''$, definiert durch*

$$\widetilde{x}(f) := f(x) \quad (f \in E')$$

*wohldefiniert, linear und isometrisch.*

Als erste Folgerung lassen sich Cauchyfolgen in einem Banachraum im Dualraum beschreiben.

**1.24 Lemma.** *Sei $E$ ein normierter und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in $E$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge in $E$, falls $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine gleichmäßige Cauchyfolge für alle $f \in E'$ mit $\|f\| \le 1$ ist.*

*Beweis.* (i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ Cauchyfolge. Dann ist

$$\sup_{f\in E',\, \|f\|\le 1} |f_n(x) - f_m(x)| \le \sup_{f\in E',\, \|f\|\le 1} \|f\| \cdot \|x_n - x_m\| = \|x_n - x_m\|.$$

(ii) Es gelte

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n,m \ge N\ \forall\, f \in E',\ \|f\| \le 1 :\ |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Dann folgt unter Verwendung der Einbettung $E \hookrightarrow E''$, $x \mapsto \widetilde{x}$ die Abschätzung

$$\|x_n - x_m\| = \|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_m\| = \sup_{f\in E',\, \|f\|\le 1} |(\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_m)(f)| \le \varepsilon$$

für $n, m \ge N$. $\square$

**1.25 Definition** (holomorphe Funktionen in Banachräumen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $x\colon \Omega \to E$. Dann heißt $x$ holomorph [schwach holomorph] in $z_0 \in \Omega$, falls $\lim_{z\to z_0} \frac{x(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ in der Norm von $E$ [in der schwachen Topologie] existiert.

**1.26 Satz.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $E$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $x : \Omega \to E$. Dann ist $x$ genau dann schwach holomorph, wenn $x$ holomorph ist.*

*Beweis.* Sei $x$ schwach holomorph und $z \in \Omega$. Sei $\Gamma_z := K_\varepsilon(z) \subset \Omega$ mit positiver Orientierung. Nach dem Cauchy-Integralsatz gilt für alle $f \in E'$

$$f(x(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \frac{f(x(\mu))}{\mu - z}\, d\mu.$$

Damit erhält man für $0 < |h| < \varepsilon$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\big[f(x(z+h)) - f(x(z))\big] - \frac{d}{dz} f(x(z)) \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \Big( \frac{1}{h}\Big[\frac{1}{\mu - z - h} - \frac{1}{\mu - z}\Big] - \frac{1}{(\mu - z)^2}\Big) f(x(\mu)) d\mu \\ &\qquad = \frac{h}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \frac{f(x(h))}{(\mu - z - h)(\mu - z)^2}\, d\mu. \end{aligned}$$

Da $\mu \mapsto f(x(\mu))$ holomorph und damit stetig ist, gilt

$$|f(x(\mu))| \le C_f \quad (\mu \in \Gamma_z,\ f \in E').$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus folgt

$$\|x(\mu)\| \le C \quad (\mu \in \Gamma_z)$$

Teil I

und damit

$$\Big|\frac{1}{h}\big[f(x(z+h)) - f(x(z))\big] - \frac{d}{dz} f(x(z))\Big| \le C'\,|h| \cdot \|f\|.$$

Wir erhalten

$$\frac{1}{h}\big[f(x(z+h)) - f(x(z))\big] \to \frac{d}{dz} f(x(z)) \quad (|h| \to 0)$$

schwach gleichmäßig für alle $f \in E'$ mit $\|f\| \le 1$. Nach Lemma 1.24 folgt die Konvergenz in der Norm, d.h. $x$ ist holomorph.

Die andere Richtung des Satzes ist direkt aus den Definitionen klar. $\square$

**1.27 Korollar.** *Sei $E$ ein Banachraum, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Es gelte*

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

*mit $a_n \in E$ und*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot |z - z_0|^n < \infty \quad \text{für } |z - z_0| < \varepsilon.$$

*Dann ist $x$ holomorph an der Stelle $z_0$.*

*Beweis.* Für $f \in E'$ ist

$$\begin{aligned} f(x(z)) &= f\Big(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_0)^n\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f(a_n)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(a_n)(z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Stetigkeit von $f$ verwendet. Wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(a_n)| \cdot |z - z_0|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \|f\| \cdot \|a_n\|_E \cdot |z - z_0|^n < \infty \quad (|z - z_0| < \varepsilon)$$

lässt sich $f(x(z))$ um $z_0$ in eine absolut konvergente Potenzreihe entwickeln, ist also holomorph an der Stelle $z_0$. Somit ist $x$ schwach holomorph an der Stelle $z_0$ und damit nach Satz 1.26 holomorph. □

**1.28 Satz.** *Sei $E$ ein Banachraum, $T$ ein abgeschlossener linearer Operator in $E$ mit $\overline{D(T)} = E$. Dann ist die Resolvente $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$, $\rho(T) \to L(E)$, holomorph in $\rho(T)$.*

*Beweis.* Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$. Nach Korollar 1.20 b) lässt sich $R_\lambda(T)$ in eine absolut konvergente Potenzreihe

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}$$

entwickeln. Nach Korollar 1.27 ist $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ holomorph an der Stelle $\lambda_0$. □

**1.29 Satz.** *Sei $E$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T \in L(E)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer.*

*Beweis.* Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ ist $T - \lambda = (-\lambda)(1 - \lambda^{-1}T)$ nach Lemma 1.18 in $L(E)$ invertierbar, d.h. $\lambda \in \rho(T)$. Also ist $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ und damit kompakt.

Für $|\lambda| \geq \|T\|$ gilt

$$\|R_\lambda(T)\| = \Big\| \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^\infty \frac{T^n}{\lambda^n} \Big\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \to 0 \quad (|\lambda| \to \infty).$$

Angenommen, es wäre $\rho(T) = \mathbb{C}$. Dann ist $\|R_\lambda(T)\| \leq C \quad (\lambda \in \mathbb{C})$. Für $x \in E$ und $f \in E'$ ist die Abbildung $\lambda \mapsto f(R_\lambda(T)x)$ holomorph in ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt, also nach dem Satz von Liouville konstant. Wegen

$$|f(R_\lambda(T)x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|R_\lambda(T)\| \to 0 \quad (|\lambda| \to \infty)$$

folgt $f(R_\lambda(T)x) = 0 \quad (f \in E', x \in E, \lambda \in \mathbb{C})$. Nach Lemma 1.23 b) folgt daraus $R_\lambda(T)x = 0 \quad (x \in E)$, d.h. $R_\lambda(T) = 0$, Widerspruch. □

**1.30 Beispiel.** Die folgenden Beispiele zeigen, dass für unbeschränkte Operatoren sehr wohl die Fälle $\sigma(T) = \mathbb{C}$ und $\sigma(T) = \emptyset$ auftreten können.

a) Sei $E = C([0,1])$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := C^1([0,T])$. Dann ist $T$ unbeschränkt, da $\|Tf_n\| = n$ und $\|f_n\| = 1$ gilt für $f_n(t) := t^n$.

Wir zeigen, dass $T$ abgeschlossen ist: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $f_n \to f$ in $E$ und $Tf_n = f_n' \to g$ in $E$. Da $(f_n)_n$ und $(f_n')_n$ gleichmäßig konvergieren, gilt $f \in C^1([0,1])$ und $f_n' \to f'$. Somit ist $f \in D(T)$ und $g = f' = Tf$.

Es gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$, denn die Funktion $f(t) := e^{\lambda t}$ liegt in $\ker(T - \lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Sei $E := C_0([0,1]) := \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := \{f \in E : f' \in E\}$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, und seien $f, g \in E$. Betrachte die Gleichung $(T - \lambda)f = g$, d.h. $f' - \lambda f = g$. Versehen mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ hat diese gewöhnliche Differentialgleichung die eindeutige Lösung

$$f(t) = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} g(s) ds.$$

Es gilt $f'(0) = g(0) + \lambda f(0) = 0$, d.h. $f' \in E$ und damit $f \in D(T)$. Somit ist $T - \lambda : D(T) \to E$ bijektiv für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $\rho(T) = \mathbb{C}$.

Das letzte Beispiel zeigt, dass man bei unbeschränkten Operatoren sehr genau auf den Definitionsbereich achten muss. Für die Verknüpfung von Operatoren ergeben sich dabei natürliche Definitionsbereiche.

**1.31 Definition.** Seien $E, F, G$ normierte Räume. Seien ferner $S, \widetilde{S}$ lineare Operatoren von $E$ nach $F$ und $T$ ein linearer Operator von $F$ nach $G$.

a) Der Operator $S + \widetilde{S}$ ist definiert durch

$$D(S+\widetilde{S}) := D(S) \cap D(\widetilde{S}) \text{ und } (S+\widetilde{S})x := Sx + \widetilde{S}x \quad (x \in D(S+\widetilde{S})).$$

b) Der Operator $TS\colon E \to G$ ist definiert durch

$$D(TS) := \{x \in D(S) : Sx \in D(T)\} \text{ und } (TS)x := T(Sx) \quad (x \in D(TS)).$$

c) Wir schreiben $S \subset \widetilde{S}$, falls $D(S) \subset D(\widetilde{S})$ und $\widetilde{S}|_{D(S)} = S$ gilt.

# 2. Adjungierte Operatoren

**2.1 Worum geht's?** Dieser Abschnitt behandelt einen zentralen Begriff der Operatortheorie, nämlich den Adjungierten eines Operators. Am einfachsten ist dieser Begriff im Fall eines Hilbertraums bei beschränkten Operatoren. Für unbeschränkte Operatoren ist der Definitionsbereich des Adjungierten von entscheidender Bedeutung. Beispiele zeigen, dass bei unbeschränkten Operatoren der Definitionsbereich des Operators fast genauso wichtig ist wie der Wert.

## a) Adjungierte Operatoren in Banachräumen

**2.2 Definition und Satz** (Adjungierte beschränkter Operatoren)**.** *Seien $E, F$ Banachräume und $T \in L(E,F)$. Dann wird durch $f_1(x) := f(Tx)$ für jedes $f \in F'$ ein beschränktes lineares Funktional $f_1 \in E'$ definiert. Die Abbildung $T' : F' \to E'$, $f \mapsto f_1$ heißt (Banachraum-)adjungierter Operator zu $T$. Es gilt $T' \in L(F', E')$. Die Abbildung $T \mapsto T'$, $L(E,F) \to L(F', E')$ ist eine Isometrie.*

*Beweis.* Wegen $f_1 = f \circ T$ ist die Linearität und die Stetigkeit von $f_1$ klar. Wegen

$$|f_1(x)| = |f(Tx)| \le \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$$

ist $\|f_1\| \le \|T\| \cdot \|f\|$, d.h. $\|T'\| \le \|T\|$. Der Operator $T'$ ist linear wegen

$$T'(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(Tx) = \alpha f(Tx) + \beta g(Tx).$$

Ebenso ist die Abbildung $T \mapsto T'$ linear.

Zu zeigen ist noch, dass $\|T\| \le \|T'\|$ gilt. Nach Lemma 1.23 a) existiert zu $x \in E$ ein $f_x \in E'$ mit $\|f_x\| = 1$ und $f_x(Tx) = \|Tx\|$. Damit ist

$$\|Tx\| = |f_x(Tx)| = |(T'f_x)(x)| \le \|T'\| \cdot \|x\|. \qquad \square$$

**2.3 Bemerkung.** a) Für $T \in L(E,F)$ ist $T'' \in L(E'',F'')$ und $T''|_E = T$. Denn es gilt $(T''\widetilde{x})(f) = \widetilde{x}(T'f) = (T'f)(x) = f(Tx) = \widetilde{Tx}(f)$.

b) Falls $T \in L(E,F)$ und $S \in L(F,G)$, so ist $(ST)' = T'S'$. Denn $((ST)'f)(x) = f(STx) = (S'f)(Tx) = [T'(S'f)](x)$.

c) Falls $T \in L(E,F)$ invertierbar ist, so gilt $(T^{-1})' = (T')^{-1}$. Dies gilt wegen $(T^{-1})'T' = (TT^{-1})' = \mathrm{id}' = \mathrm{id}$ und $(T'(T^{-1})' = (T^{-1}T)' = \mathrm{id}' = id$.

**2.4 Definition** (Adjungierte unbeschränkter Operatoren)**.** Seien $E, F$ Banachräume und $T : E \to F$ ein linearer dicht definierter Operator (d.h. $\overline{D(T)} = E$). Definiere

$$D(T') := \{f \in F' : \exists\, f_1 \in E' \text{ mit } f(Tx) = f_1(x) \quad (x \in D(T))\}$$

und

$$T'f := f_1 \quad (f \in D(T')).$$

Kurz kann man auch schreiben: $D(T') = \{f \in F' : \; x \mapsto f(Tx) \in E'\}$. Die Abbildung $T' : F' \to E'$ mit Definitionsbereich $D(T')$ heißt (Banachraum-)Adjungierte von $T$.

**2.5 Bemerkung.** a) $T'f$ ist eindeutig definiert. Denn seien $f_1, f_2 \in E'$ mit $f_1(x) = f(Tx) = f_2(x) \quad (x \in D(T))$. Da $\overline{D(T)} = E$ und $f_1, f_2$ stetig sind, folgt $f_1 = f_2$ auf ganz $E$.

b) Es gilt $(f,g) \in G(T')$ genau dann, wenn $g(x) = f(Tx) \quad (x \in D(T))$.

c) Der Operator $T'$ ist abgeschlossen. Denn sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T')$ mit $f_n \to f$ in $F'$ und $T'f_n \to g$ in $E'$. Dann gilt für $x \in D(T)$:

$$f(Tx) = \lim_{n\to\infty} f_n(Tx) = \lim_{n\to\infty} (T'f_n)(x) = g(x).$$

Damit gilt $f \in D(T')$ und $(f,g) \in G(T')$ nach b).

## b) Adjungierte Operatoren in Hilberträumen

Hilberträume sind Spezialfälle von Banachräumen, daher übertragen sich die obigen Definitionen auch auf Hilberträume. Man verwendet aber meistens den Begriff der Hilbertraum-Adjungierten. Grundlage dafür ist eine Beschreibung des Dualraums durch den Satz von Riesz (siehe unten).

Die Summe von zwei Hilberträumen $E$ und $F$ ist wieder ein Hilbertraum, wenn man das Skalarprodukt auf $E \oplus F$ durch

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle_{E\oplus F} := \langle x_1,x_2\rangle_E + \langle y_1,y_2\rangle_F$$

definiert. Man beachte, dass die zugehörige Norm gegeben ist durch

$$\|(x,y)\|_{E\oplus F} = \Big(\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2\Big)^{1/2}.$$

Diese Norm ist äquivalent zur Norm aus Bemerkung 1.5.

Ein weiterer wichtiger Begriff in Hilberträumen ist der Begriff des Orthogonalraums. Zu einem Hilbertraum $H$ und einer Teilmenge $A \subset H$ definiert man $A^\perp := \{x \in H : \forall\, a \in A : \langle a, x\rangle = 0\}$. Es gilt $A^\perp = \overline{A}^\perp$, $A^\perp$ ist stets abgeschlossen, und $A \subset H$ ist genau dann dicht in $H$, falls $A^\perp = \{0\}$. Teil I

**2.6 Satz** (von Riesz). *Sei $E$ Hilbert-Raum. Dann ist die Abbildung* Teil I

$$i_E : E \to E',\; x \mapsto \langle \cdot, x\rangle$$

*wohldefiniert, bijektiv, isometrisch und konjugiert linear (d.h. $i_E(\alpha x+\beta y) = \overline{\alpha} i_E(x) + \overline{\beta} i_E(y)$).*

**2.7 Definition und Satz.** *Seien $E, F$ Hilberträume, und $T \in L(E,F)$. Dann existiert zu jedem $y \in F$ genau ein $y^* \in E$ mit*

$$\langle Tx, y\rangle_F = \langle x, y^*\rangle \quad (x \in E).$$

*Setze $T^*y := y^*$. Die Abbildung $T^* \in L(F,E)$ heißt (Hilbertraum-)Adjungierte zu $T$.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus Satz 2.2 und dem Satz von Riesz. Man beachte, dass Hilbertraum- und Banachraumadjungierte über $T^* = i_E^{-1} \circ T' \circ i_F$ zusammenhängen. □

**2.8 Definition.** Seien $E, F$ Hilberträume und $T : E \to F$ ein linearer dicht definierter Operator. Definiere

$$D(T^*) := \{y \in F : \; x \mapsto \langle Tx, y\rangle \text{ ist stetiges lineares Funktional auf } D(T)\}.$$

Für $y \in D(T^*)$ existiert ein eindeutiges $y^* \in E$ mit

$$\langle Tx, y\rangle_F = \langle x, y^*\rangle_E \quad (x \in D(T)).$$

Definiere $T^* : F \to E$ durch $T^*y := y^* \quad (y \in D(T^*))$. Der Operator $T^*$ heißt (Hilbertraum-)Adjungierte von $T$.

**2.9 Definition.** a) Seien $E, F$ Hilberträume und $T \in L(E,F)$. Dann heißt $T$ unitär, falls $TT^* = \mathrm{id}_F$ und $T^*T = \mathrm{id}_E$ gilt.

b) Sei $E$ ein Hilbertraum und $T$ ein linearer dicht definierter Operator in $E$. Dann heißt $T$

(i) selbstadjungiert, falls $T = T^*$,

(ii) normal, falls $TT^* = T^*T$,

(iii) wesentlich selbstadjungiert, falls $T$ abschließbar ist und $\overline{T}$ selbstadjungiert ist,

(iv) symmetrisch, falls $T \subset T^*$ gilt.

Man beachte, dass zwei lineare Operatoren nur dann gleich sind, falls sie die gleichen Definitionsbereiche besitzen und darauf die gleichen Werte annehmen.

**2.10 Lemma.** *Betrachte in der Situation von Definition* 2.8 *den unitären Isomorphismus*

$$U : E \oplus F \to F \oplus E,\ (x, y) \mapsto (y, -x).$$

*Dann gilt*

$$G(T^*) = U(G(T)^\perp) = [U(G(T))]^\perp.$$

*Beweis.* Sei $(y, y^*) \in G(T^*)$. Nach Definition von $T^*$ gilt

$$\langle Tx, y\rangle_F = \langle x, y^*\rangle_E \quad (x \in D(T)),$$

d.h.

$$0 = \langle x, y^*\rangle_E + \langle Tx, y\rangle_F = \langle (x, Tx), (-y^*, y)\rangle_{E\oplus F} = \langle (x, Tx), U^{-1}(y, y^*)\rangle_{E\oplus F}.$$

Beachte dabei, dass $U^{-1}(y, x) = (-x, y)$ gilt. Somit ist $U^{-1}(y, y^*) \in G(T)^\perp$, d.h.

$$(y, y^*) \in U(G(T)^\perp) = [U(G(T))]^\perp.$$

Bei der letzten Gleichheit wurde verwendet, dass $U$ unitär ist. □

**2.11 Satz.** *Seien $E, F$ Hilberträume und $T : E \to F$ ein dicht definierter linearer Operator. Dann ist $T^*$ abgeschlossen. Falls $T$ abschließbar ist, so ist $T^*$ dicht definiert und $T^{**} = \overline{T}$.*

*Beweis.* Wegen $G(T^*) = [U(G(T))]^\perp$ (siehe Lemma 2.10) ist $T^*$ abgeschlossen.

Sei $T$ abschließbar und $y_0 \in D(T^*)^\perp$. Dann ist

$$\langle y_0, y\rangle = 0 \quad (y \in D(T^*)).$$

Damit folgt

$$\langle (0, y_0), (-z, y)\rangle_{E\oplus F} = 0 \quad ((y, z) \in G(T^*)).$$

Somit ist unter Verwendung von Lemma 2.10 und nach Definition des Abschlusses

$$(0, y_0) \in \big[U^{-1}(G(T^*))\big]^\perp = G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)} = G(\overline{T}).$$

Daher ist $y_0 = \overline{T}0 = 0$, also $\overline{D(T^*)} = F$. Wir wenden Lemma 2.10 nun an auf den adjungierten Operator $T^* : F \to E$ und erhalten

$$G(\overline{T}) = \big[U^{-1}(G(T^*))\big]^\perp = \big[-U^{-1}(G(T^*))\big]^\perp = G(T^{**}).$$

Also gilt $T^{**} = \overline{T}$. □

**2.12 Korollar.** *Seien $E, F$ Hilberträume und $T : E \to F$ ein dicht definierter und abgeschlossener Operator. Dann ist $T^*$ dicht definiert und abgeschlossen, und $T^{**} = \overline{T}$.*

**2.13 Satz.** *Seien $E, F$ Hilberträume und $T : E \to F$ ein abgeschlossener und dicht definierter Operator. Dann gilt*

a) $R(T)^\perp = \overline{R(T)}^\perp = \ker T^*$.

b) $\overline{R(T)} = (\ker T^*)^\perp$.

c) $R(T^*)^\perp = \ker T$.

d) $\overline{R(T^*)} = (\ker T)^\perp$.

*Beweis.* a) Es gilt $y \in R(T)^\perp$ genau dann, wenn für alle $x \in D(T)$ gilt $\langle Tx, y\rangle = 0$. Dies ist äquivalent zu $y \in D(T^*)$ und $T^*y = 0$, also zu $y \in \ker T^*$.

b) Nach a) gilt $\overline{R(T)} = (R(T))^{\perp\perp} = (\ker T^*)^\perp$.

c) Nach Satz 2.11 ist $T^*$ abgeschlossen, dicht definiert, und es gilt $T^{**} = T$. Wende a) auf $T^*$ an und erhalte $R(T^*)^\perp = \ker T^{**} = \ker T$.

d) Wende b) auf $T^*$ an. □

**2.14 Beispiel.** Sei $E = L_2([0,1])$. Definiere die Operatoren $T_1, T_2, T_3$ durch

$$\begin{aligned} D(T_1) &:= \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ absolutstetig}, f' \in L_2([0,1])\},\\ D(T_2) &= D(T_1) \cap \{f : f(0) = f(1)\},\\ D(T_3) &= D(T_1) \cap \{f : f(0) = f(1) = 0\} \end{aligned}$$

und $T_k f := if' \quad (f \in D(T_k))$ für $k = 1, 2, 3$. Offensichtlich ist $D(T_k)$ dicht in $E$.

Sei $f \in D(T_1)$ und $g \in D(T_1)$. Dann gilt

$$\langle T_1 f, g\rangle = \int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= if(x)\overline{g(x)}\Big|_0^1 - \int_0^1 if(x)\overline{g'(x)}dx \\
&= if(1)g(1) - if(0)g(0) + \langle f, T_1 g\rangle.
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
\langle T_1 f, g\rangle &= \langle f, T_1 g\rangle \quad \text{für } f \in D(T_1),\ g \in D(T_3), \\
\langle T_1 f, g\rangle &= \langle f, T_1 g\rangle \quad \text{für } f, g \in D(T_2).
\end{aligned}
$$

Also haben wir $D(T_1) \subset D(T_3^*)$, $D(T_2) \subset D(T_2^*)$ und $D(T_3) \subset D(T_1^*)$.

Sei $g \in D(T_1^*)$ und $\varphi := T_1^* g$. Definiere $\Phi(x) := \int_0^x \varphi(t)dt$. Dann ist $\Phi$ absolutstetig mit $\Phi' = \varphi$. Für $f \in D(T_1)$ gilt

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx = \langle T_1 f, g\rangle = \langle f, \varphi\rangle =) &\int_0^1 f(x)\overline{\varphi(x)}dx \\
&= f(x)\Phi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)\overline{\Phi(x)}dx \\
&f(1)\Phi(1) - \int_0^1 f'(x)\overline{\Phi(x)}dx.
\end{aligned}
$$

Wählt man für $f$ eine konstante Funktion, so erhält man $\Phi(1) = 0$. Damit gilt

$$
\int_0^1 if'(x)\overline{(g(x) + i\Phi(x))}dx = 0 \quad (f \in D(T_1)),
$$

d.h. $g + i\Phi \in R(T_1)^\perp = \{0\}$. Also ist $g$ absolutstetig und $g(0) = -i\Phi(0) = 0$, $g(1) = -i\Phi(1) = 0$, d.h. $g \in D(T_3)$.

Insgesamt haben wir $D(T_1^*) = D(T_3)$, $T_1^* g = T_3 g \quad (g \in D(T_3))$, also $T_1^* = T_3$. Genauso zeigt man $T_3^* = T_1$ und $T_2^* = T_2$. Insbesondere folgt, dass $T_k$ abgeschlossen ist für $k = 1, 2, 3$.

# 3. Nützliches über das Spektrum

**3.1 Worum geht's?** In vielen Anwendungen ist es wichtig, das Spektrum eines Operators gut zu kennen. So kann man etwa am Spektrum ablesen, ob die Lösung einer Differentialgleichung für große Zeiten gegen Null konvergiert (Stabilität). Es gibt eine ganze Reihe kleiner Aussagen über das Spektrum, welche bei der Bestimmung des Spektrum helfen können. Am einfachsten (aus der Sicht des Spektrums gesehen) sind selbstadjungierte Operatoren. Zum Glück sind das auch die Operatoren, welche am häufigsten vorkommen. Für Anwendungen sehr nützlich ist auch der Begriff des approximativen Spektrums.

**3.2 Lemma.** *Sei $E$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(E)$. Dann ist $T$ genau dann selbstadjungiert, falls $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in E$.*

*Beweis.* (i) Sei $T = T^*$. Dann ist $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $x, y \in E$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Nach Voraussetzung ist

$$\langle T(x + \alpha y), x + \alpha y\rangle = \overline{\langle T(x + \alpha y), x + \alpha y\rangle}$$

und damit

$$\alpha\langle Ty, x\rangle + \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle = \alpha\langle y, Tx\rangle + \overline{\alpha}\langle x, Ty\rangle.$$

Für $\alpha = 1$ erhält man

$$\langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle.$$

Für $\alpha = i$ erhält man

$$\langle Ty, x\rangle - \langle Tx, y\rangle = \langle y, Tx\rangle - \langle x, Ty\rangle.$$

Somit folgt

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad (x, y \in E).$$

Nach Definition von $T^*$ gilt also $T = T^*$. □

**3.3 Bemerkung.** Sei $E$ Banachraum, $F$ normierter Raum und $T\colon E \to F$ ein Isomorphismus normierter Räume, d.h. $T$ linear, bijektiv und $T, T^{-1}$ stetig. Dann ist auch $F$ ein Banachraum. Denn falls $(y_n)_n \subset F$ ein Cauchyfolge ist, so auch $x_n := T^{-1}y_n$. Damit existiert $x := \lim_n x_n \in E$, und für $y := Tx \in F$ gilt $y_n \to y$.

Man beachte, dass hier die Linearität entscheidend ist, vergleiche $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$.

**3.4 Lemma.** *Seien $E, F$ Banachräume und $T\colon E \to F$ abgeschlossener linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es existiert ein $C > 0$ mit $\|Tx\| \geq C\|x\| \quad (x \in D(T))$.*

(ii) *$T$ ist injektiv und $R(T)$ ist abgeschlossen.*

*Beweis.* (i)⇒(ii). Offensichtlich ist $T$ injektiv. Der Operator $T\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (R(T), \|\cdot\|)$ ist nach (i) Isomorphismus von normierten Räumen. Da $(D(T), \|\cdot\|_T)$ Banachraum ist, ist $R(T)$ abgeschlossen nach Bemerkung 3.3.

(ii)⇒(i) folgt aus dem Satz vom stetigen Inversen. □

**3.5 Satz** (Spektrum selbstadjungierter Operatoren)**.** *Sei $E$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T$ ein selbstadjungierter linearer (nicht notwendig beschränkter) Operator. Dann gilt*

(i) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(ii) $\|(T-\lambda)^{-1}\| \le |\operatorname{Im}\lambda|^{-1} \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$.

(iii) *Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ ist $\ker(T-\lambda) = N_\lambda^{(a)}(T)$, d.h. geometrischer und algebraischer Eigenraum sind identisch.*

(iv) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

(v) $\sigma_r(T) = \emptyset$.

*Beweis.* (i) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $x \in D(T)$. Es gilt mit Lemma 3.2

$$\|(T-\lambda)x\| \cdot \|x\| \ge |\langle (T-\lambda)x, x\rangle| \ge \left|\operatorname{Im}\langle (T-\lambda)x, x\rangle\right| = |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|x\|^2. \tag{3-1}$$

Nach Lemma 3.4 ist $T-\lambda$ injektiv und $R(T-\lambda)$ abgeschlossen.

$T-\lambda$ ist surjektiv: Nach Satz 2.13 a) gilt $R(T-\lambda)^\perp = \ker(T-\lambda)^* = \ker(T-\overline{\lambda})$. Nach dem bisher Bewiesenen ist $T-\overline{\lambda}$ injektiv und es folgt $R(T-\lambda)^\perp = \{0\}$. Da $R(T-\lambda)$ abgeschlossen ist, erhalten wir die Surjektivität von $T-\lambda$.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ der Operator $T-\lambda$ bijektiv ist.

(ii) Setze $y := (T-\lambda)x$ in (3-1) und erhalte

$$\|y\| \ge |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|(T-\lambda)^{-1}y\|.$$

(iii) Die Inklusion $\ker(T-\lambda) \subset N_\lambda^{(a)}(T)$ gilt immer. Sei also $x \in N_\lambda^{(a)}(T) \setminus \ker(T-\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(T-\lambda)^n x = 0$ für ein $n \ge 2$, aber $(T-\lambda)x \ne 0$. Wegen $T = T^*$ ist dann

$$\|(T-\lambda)^{n-1}x\|^2 = \langle (T-\lambda)^n x, (T-\lambda)^{n-2}x\rangle = 0.$$

Induktiv folgt $(T-\lambda)^{n-2}x = 0, \dots, (T-\lambda)x = 0$, Widerspruch.

(iv) Das folgt wie in der linearen Algebra. Seien $x_1, x_2$ Eigenvektoren zu $\lambda_1 \ne \lambda_2$ mit $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle Tx_1, x_2\rangle = \langle x_1, Tx_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle.$$

Wegen $\lambda_1 \ne \lambda_2$ folgt $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

(v) Angenommen, es existiert ein $\lambda \in \sigma_r(T)$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$, $T-\lambda$ injektiv und $\overline{R(T-\lambda)} \ne E$. Wähle $y \in R(T-\lambda)^\perp \setminus \{0\}$. Dann ist

$$0 = \langle (T-\lambda)x, y\rangle = \langle x, (T-\lambda)y\rangle \quad (x \in D(T)),$$

d.h. $(T-\lambda)y = 0$ und, da $T-\lambda$ injektiv ist, $y = 0$, Widerspruch. □

Der folgende Satz wird genauso wie Satz 3.5 bewiesen.

**3.6 Satz** (Spektrum unitärer Operatoren). *Sei $E$ ein Hilbertraum und $T \in L(E)$ unitär. Dann gilt*

(i) $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

(ii) $\|(T-\lambda)^{-1}\| \le \frac{1}{\left||\lambda|-1\right|}$ *für* $|\lambda| \neq 1$.

*Die Aussagen* (iii)–(v) *von Satz 3.5 gelten analog.*

**3.7 Definition** (numerischer Wertebereich). Sei $H$ ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Der numerische Wertebereich ist definiert durch

$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}.$$

**3.8 Lemma.** *Sei $H$ ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Dann gilt $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.*

*Beweis.* Für $\lambda \notin \overline{W(T)}$ und $\|x\| = 1$ gilt

$$\begin{aligned} 0d := \operatorname{dist}(x, \overline{W(T)} &\le |\lambda - \langle Tx, x\rangle| = |\langle(\lambda - T)x, x\rangle| \\ &\le \|(T-\lambda)x\| \cdot \|x\| = \|(T-\lambda)x\|. \end{aligned}$$

Damit gilt $\|(T-\lambda)x\| \ge d\|x\| \quad (x \in H)$. Also ist nach Lemma 3.4 der Operator $T-\lambda$ injektiv und $R(T-\lambda)$ abgeschlossen. Falls $x_0 \in R(T-\lambda)^\perp$ mit $\|x_0\| = 1$, so ist

$$0 = \langle (T-\lambda)x_0, x_0\rangle = \langle Tx_0, x_0\rangle - \lambda,$$

Widerspruch zu $\lambda \notin \overline{W(T)}$. □

**3.9 Lemma** (approximative Eigenwerte). *Seien $E, F$ Banachräume und $T\colon E \to F$ ein abgeschlossener linearer Operator. Die Menge der approximativen Eigenwerte ist definiert als*

$$\sigma_{\text{app}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T), \|x_n\| = 1 : \|(T-\lambda)x_n\| \to 0\}.$$

*Dann gilt*

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{\text{app}}(T) \subset \sigma(T).$$

*Beweis.* (i) Sei $\lambda \in \sigma_{\text{app}}(T)$. Falls $\lambda \in \rho(T)$, so wäre $\|(T-\lambda)^{-1}\|$ stetig, d.h. für alle $x \in D(T)$ ist

$$\frac{\|x_n\|}{\|(T-\lambda)x_n\|} \le \|(T-\lambda)^{-1}\| < \infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Definition der approximativen Eigenwerte.

(ii) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ setze $x_n := x$ mit einem normierten Eigenvektor $x$ zum Eigenwert $\lambda$.

Sei $\lambda \in \sigma_c(T)$. Dann ist $T - \lambda$ injektiv und $R(T-\lambda)$ nicht abgeschlossen. Nach Lemma 3.4 existiert kein $C > 0$ mit $\|(T-\lambda)x\| \geq C\|x\|$. Somit existiert eine Folge $x_n$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(T-\lambda)x_n\| \to 0$. $\square$

**3.10 Lemma.** *Sei $H$ ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Für $m := \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ und $M := \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ gilt $\sigma(T) \subset [m, M]$ und $m, M \in \sigma(T)$.*

*Beweis.* Die Inklusion $\sigma(T) \subset \overline{W(T)} \subset [m, M]$ gilt nach Lemma 3.8.

Sei $(x_n)_n \subset H$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\langle Tx_n, x_n\rangle \to m$. Nach Definition von $m$ ist die Bilinearform $[x, y] := \langle (T-m)x, y\rangle$ positiv semidefinit, und nach Cauchy-Schwarz gilt

$$\begin{aligned}\|(T-m)x_n\|^2 &= [x_n, (T-m)x_n] \leq [x_n, x_n]^{1/2}[(T-m)x_n, (T-m)x_n]^{1/2}\\ &= \langle (T-m)x_n, x_n\rangle^{1/2} \cdot \langle (T-m)^2 x_n, (T-m)x_n\rangle^{1/2} \to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

da $\langle (T-m)x_n, x_n\rangle \to 0$ und $\langle (T-m)^2x_n, (T-m)x_n\rangle$ beschränkt ist. Also ist $m \in \sigma_{\text{app}}(T) \subset \sigma(T)$. Genauso zeigt man $M \in \sigma(T)$. $\square$

**3.11 Definition und Satz.** *Sei $H$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(H)$. Für den Spektralradius*

$$r(T) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$$

*gilt*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

*Beweis.* (i) Wir zeigen folgende Aussage: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $0 \leq a_{n+m} \leq a_n a_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(a_n)^{1/n} \to a := \inf_n (a_n)^{1/n} \quad (n \to \infty)$.

Um dies zu zeigen, sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $(a_N)^{1/N} < a + \varepsilon$ und setze $b(\varepsilon) := \max\{a_1, \ldots, a_N\}$. Schreibe nun $n \in \mathbb{N}$ in der Form $n = kN + r$ mit $0 \leq r < N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(a_n)^{1/n} &= (a_{kN+r})^{1/n} \leq (a_N^k a_r)^{1/n}\\ &\leq (a+\varepsilon)^{kN/n} b^{1/n} = (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^{-r/n} b^{1/n}\\ &= (a+\varepsilon)\Big(\frac{b}{(a+\varepsilon)^r}\Big)^{1/n}\end{aligned}$$

$$< a + 2\varepsilon,$$

falls $n$ hinreichend groß ist. Dies zeigt (i).

(ii) Setze in (i) nun $a_n := \|T^n\|$. Dann folgt $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$. Für $|\lambda| > r(T)$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \Big\| \Big(\frac{T}{\lambda}\Big)^n \Big\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|T^n\|^{1/n}}{|\lambda|} = \frac{r(T)}{|\lambda|} < 1.$$

Damit konvergiert

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{T}{\lambda}\Big)^n = \frac{1}{\lambda}\Big(1 - \frac{T}{\lambda}\Big)^{-1} = (\lambda 1 - T)^{-1}.$$

Also ist $\lambda \in \rho(x)$.

(iii) Sei $r_0 := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$. Sei $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| > r_0$, und $f \in [L(H)]'$. Betrachte die Funktion $F(\lambda) := f((\lambda 1 - T)^{-1})$. Dann ist $F$ holomorph in $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(T)\}$, da die Reihe

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} f(T^n)$$

absolut konvergent ist für $|\lambda| > r(T)$.

Andererseits ist $F$ holomorph in $\rho(T)$ und damit für alle $|\lambda| > r_0$. Eine Potenzreihe konvergiert aber im größten offenen Kreisring, in dem sie holomorph ist. Daher konvergiert die obige Reihe an der Stelle $\mu$ (wegen $|\mu| > r_0$).

Insbesondere folgt $\lim_{n\to\infty} |f(\mu^{-n-1}T^n)| \to 0$. Da $f \in [L(E)]'$ beliebig war, konvergiert die Folge $(\mu^{-n-1}T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der schwachen Topologie gegen 0.

Die Folge $(\mu^{-n-1}T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist normbeschränkt: Für jedes $f \in [L(E)]'$ die Folge

$$(f(\mu^{-n-1}T^n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$$

als konvergente Folge beschränkt, es existiert also eine Konstante $c_f$ mit $|\widetilde{T_n}(f)| = |f(T_n)| \leq c_f \quad (n \in \mathbb{N})$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus existiert ein $c > 0$ mit $\|\widetilde{T}_n\| \leq c$. Aber nach Lemma **??** gilt $\|\widetilde{T}_n\| = \|T_n\|$.

Damit gilt

$$\|T^n\|^{1/n} \leq \big(C|\mu|^{n+1}\big)^{1/n}.$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen $|\mu|$ konvergiert, folgt

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq |\mu|.$$

Da die Zahl $\mu$ beliebig mit $|\mu| > r_0$ war, folgt $r(T) \leq r_0$. Nach (ii) gilt jedoch auch $r(T) \geq r_0$ und damit $r(T) = r_0$. □

**3.12 Satz.** *Sei $H$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt*

$$r(T) = \|T\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x\in H,\, \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\in H,\, \|x\|=1} \Big(\langle Tx, Tx\rangle\Big)^{1/2} \\ &= \sup_{x\in H,\, \|x\|=1} \Big(\langle T^2x, x\rangle\Big)^{1/2} \\ &\le \|T^2\|^{1/2}, \end{aligned}$$

d.h. $\|T\|^2 \le \|T^2\|$. Die andere Richtung gilt, da $\|\cdot\|$ submultiplikativ ist. Iterativ folgt damit $\|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \|T\|$, und die Behauptung folgt aus Lemma 3.10 und Satz 3.11. □

**3.13 Bemerkung.** a) Für nicht selbstadjungierte Operatoren gilt die Aussage von Satz 3.12 i. allg. nicht, wie man an folgendem Beispiel sieht. Sei $E = L_2([0,1])$ und

$$(Ax)(t) := \int_0^t x(\tau)d\tau.$$

Der Operator $A$ ist ein Beispiel eines Volterra-Operators. Es gilt $\sigma(A) = \{0\}$.

b) Es gibt selbstadjungierte Operatoren, welche keinen Eigenwert besitzen. Betrachte dazu wieder $E = L_2([0,1])$ und $(Ax)(t) := tx(t)$ (Multiplikationsoperator). Dann ist $\sigma_p(A) = \emptyset$.

**3.14 Bemerkung.** Die meisten obigen Aussagen und Beweise gelten nicht nur für beschränkte Operatoren in Hilbert- bzw. Banachräumen, sondern allgemein für Elemente von Banachalgebren bzw. $C^*$-Algebren. Die sog. Gelfand-Theorie von $C^*$-Algebren ermöglicht es, einen abstrakten Zugang zu Spektrum und Spektralsatz zu finden. Hier sollen nur die Definitionen zitiert werden.

**3.15 Definition.** a) Eine Banachalgebra $A$ ist ein $\mathbb{C}$-Banachraum, auf der eine bilineare, assoziative Abbildung $A \times A \to A, \quad (x,y) \mapsto x \cdot y$ definiert ist (die Multiplikation), wobei

$$\|x \cdot y\| \le \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in A).$$

Wir schreiben wieder $xy := x \cdot y$. Die Banachalgebra $A$ heißt kommutativ, falls $xy = yx \quad (x, y \in A)$. Ein Element $e \in A$ heißt Einheit von $A$, falls $xe = ex = x \quad (x \in A)$ und $\|e\| = 1$.

b) Eine Abbildung $A \to A,\ x \mapsto x^*$ heißt Involution, falls gilt

(i) $(x+y)^* = x^* + y^* \quad (x, y \in A)$,

(ii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^* \quad (\lambda \in \mathbb{C}, x \in A)$,

(iii) $x^{**} = x \quad (x \in A)$,

(iv) $(xy)^* = y^* x^* \quad (x, y \in A)$.

c) Falls $A$ eine Involution mit

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad (x \in A)$$

besitzt, so heißt $A$ eine $C^*$-Algebra. Ein Algebrenhomomorphismus $\Phi : A \to B$ von $C^*$-Algebren heißt ein $*$-Homomorphismus, falls $\Phi(x^*) = (\Phi(x))^* \quad (x \in A)$.

**3.16 Beispiele.** a) Sei $E$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum. Dann sind $A = L(E)$ und $A = K(E) := \{T \in L(E) : T \text{ kompakt}\}$ Banachalgebren. Dabei hat $L(E)$ die Einheit $\mathrm{id}_E$, während $K(E)$ nur dann eine Einheit hat (nämlich ebenfalls $\mathrm{id}_E$), falls $E$ endlichdimensional ist.

b) Sei $T$ ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist $C(T)$ eine Banachalgebra mit der konstanten Funktion 1 als Einheit.

c) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L_\infty(\mu; \mathbb{C})$ eine Banachalgebra mit der konstanten Funktion 1 als Einheit.

# 4. Der Spektralsatz für selbstadjungierte beschränkte Operatoren

**4.1 Worum geht's?** Der Spektralsatz ist einer der wichtigsten Sätze der Operatortheorie. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes aus der Linearen Algebra, nach welchem selbstadjungierte Matrizen orthogonal diagonalisierbar sind, also zunächst einmal um eine Strukturaussage. Diese Darstellung linearer selbstadjungierter Operatoren kann nun verwendet werden, um etwa Funktionen von Operatoren zu definieren, was wichtige Anwendungen z.B. für partielle Differentialgleichungen besitzt. Man erhält einen Funktionalkalkül für Operatoren.

Tatsächlich kann man stetige Funktionen von Operatoren auf relativ einfache Weise definieren, indem man die Dichtheit der Polynome im Raum der stetigen Funktionen ausnützt. Polynomiale Abbildungen von Operatoren sind in natürlicher Weise definiert. Ein entscheidender Schritt auf dem Weg zum Spektralsatz liegt nun darin, den stetigen Funktionalkalkül zu einem messbaren Funktionalkalkül auszudehnen. Dies ist möglich, indem ein Satz von Riesz zur Darstellung der Dualraums der stetigen

Funktionen verwendet wird. Der messbare Funktionalkalkül erlaubt es uns schließlich, charakteristische Funktionen von Operatoren zu betrachten, was zur Definition und Darstellung des Spektralmaßes führt. Insgesamt erhält man eine Darstellung eines selbstadjungierten Operators als Integral über eine skalarwertige Funktion, wobei das Maß selbst operatorwertig ist.

In diesem Abschnitt werden nur beschränkte selbstadjungierte Operatoren betrachtet. In vielen Anwendungen sind die Operatoren unbeschränkt, und die Übertragung auf unbeschränkte Operatoren erfolgt später.

## a) Stetiger und messbarer Funktionalkalkül

Im folgenden sei stets $H$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum.

Wir wollen im folgenden Funktionen $f(T)$ eines selbstadjungierten Operators $T \in L(H)$ definieren. Die Definition ist noch klar, falls $f$ ein Polynom ist: Für $f(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ ist

$$f(T) := \sum_{n=0}^N a_n T^n \tag{4-1}$$

(mit $T^0 := \mathrm{id}_H$). Dieser sog. Funktionalkalkül kann mit Hilfe des Satzes von Weierstraß eindeutig auf stetige Funktionen ausgeweitet werden, wie wir später sehen werden. Zunächst eine Version eines Spektralabbildungssatzes.

**4.2 Lemma.** *Sei $T \in L(H)$, und für ein Polynom $f$ sei $f(T)$ durch* (4-1) *definiert. Dann gilt*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))\Big( = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}\Big).$$

*Beweis.* (i) Sei $\mu \in \sigma(f(T))$. Wir faktorisieren

$$f(t) - \mu = \beta_n \cdot \prod_{i=1}^n (t - \gamma_i)$$

und erhalten $f(T) - \mu = \beta_n \cdot \prod_{i=1}^n (T - \gamma_i)$. Falls $\gamma_i \in \rho(T)$ für alle $i$ gelten würde, so wäre $f(T) - \mu$ bijektiv, d.h. es gilt $\mu \in \rho(f(T))$. Also existiert ein $i_0$, so dass $T - \gamma_{i_0}$ nicht bijektiv ist. Das heißt aber $\gamma_{i_0} \in \sigma(T)$. Wegen $f(\gamma_{i_0}) - \mu = 0$ folgt $\mu \in f(\sigma(T))$.

(ii) Sei nun $\mu \in f(\sigma(T))$, d.h. es gilt $\mu = f(\gamma)$ mit einem $\gamma \in \sigma(T)$. Dann folgt $f(\gamma) - \mu = 0$, d.h.

$$f(t) - \mu = (t - \gamma)\widetilde{f}(t)$$

mit einem Polynom $\widetilde{f}$ von Grad nicht größer als $n-1$. Also gilt

$$f(T) - \mu = (T-\gamma)\widetilde{f}(T) = \widetilde{f}(T)(T-\gamma).$$

Da $\gamma \in \sigma(T)$, ist entweder $T-\gamma$ nicht surjektiv und damit auch $f(T)-\mu$ nicht surjektiv, oder es ist $T-\gamma$ nicht injektiv und damit $f(T)-\mu$ nicht injektiv. In beiden Fällen folgt $\gamma \in \sigma(f(T))$. □

Im folgenden sei $\mathbf{1}$ die konstante Funktion 1 und $P(\sigma(T)) := \{f \in C(\sigma(T)) : f \text{ ist Polynom}\}$.

**4.3 Definition und Satz** (Stetiger Funktionalkalkül)**.** *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert genau ein stetiger Homomorphismus von $C^*$-Algebren $\Phi\colon C(\sigma(T)) \to L(H)$ mit $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T$ und $\Phi(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_H$. Die Abbildung $\Phi$ heißt der stetige Funktionalkalkül von $T$. Wir schreiben $f(T) := \Phi(T) \quad (f \in C(\sigma(T)))$.*

*Beweis.* (i) Dichtheit der Polynome: Da $T = T^* \in L(H)$, existiert ein Intervall $[m, M] \supset \sigma(T)$. Zu $f \in C(\sigma(T))$ existiert eine stetige Fortsetzung $\widetilde{f} \in C([m, M])$. Nach dem Satz von Weierstraß liegen die Polynome dicht in $C([m, M])$ und damit auch dicht in $C(\sigma(T))$.

(ii) Eindeutigkeit: Da $\Phi$ stetig ist, ist $\Phi$ durch die Werte auf der Menge $P(\sigma(T))$ aller Polynome bereits festgelegt. Wegen $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ist $\Phi$ bereits durch die Werte $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)})$ und $\Phi(\mathbf{1})$ eindeutig bestimmt.

(iii) Existenz von $\Phi$: Für ein Polynom $f \in P(\sigma(T))$, $f\colon t \mapsto \sum_{j=0}^n c_j t^j$, setze $\Phi(f) := \sum_{j=0}^n c_j T^j$. Dann ist $\Phi\colon P(\sigma(T)) \to L(H)$ linear, multiplikativ und erfüllt $\Phi(\overline{f}) = (\Phi(f))^*$.

Wir zeigen, dass $\Phi$ stetig ist. Für $f \in P(\sigma(T))$ ist

$$\begin{aligned}\|\Phi(f)\|^2 &= \|\Phi(f)^*\Phi(f)\| = \|\Phi(\overline{f}f)\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\Phi(\overline{f}f))\} \\ &= \sup\{(\overline{f}f)(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\} = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |f(\lambda)|^2 = \|f\|_\infty^2.\end{aligned}$$

Hier wurden Satz 3.12 auf den selbstadjungierten Operator $\Phi(\overline{f}f)$ angewendet sowie der Spektralabbildungssatz für Polynome (Lemma 4.2).

Somit ist $\Phi$ eine Isometrie auf $P(\sigma(T))$, und es existiert eine eindeutige (wieder isometrische) stetige Fortsetzung auf $C(\sigma(T))$. Diese Fortsetzung ist wieder linear, multiplikativ und erfüllt $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$. Zum Beispiel kann man die letzte Eigenschaft folgendermaßen zeigen: Falls $f$ der Limes von Polynomen $f_n$ ist, so gilt

$$\begin{aligned}\Phi(\overline{f}) &= \Phi\big(\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n\big) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\overline{f}_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)^* \\ &= \big[\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)\big]^* = \Phi(\lim_{n\to\infty} f_n)^* = \Phi(f)^*.\end{aligned}$$

□

**4.4 Satz** (Eigenschaften des Funktionalkalküls). *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert.*

*a) Der Funktionalkalkül $C(\sigma(T)) \to L(H)$, $f \mapsto f(T)$, ist isometrisch, d.h. $\|f(T)\| = \|f\|_\infty$.*

*b) Falls $f \geq 0$, so ist $f(T) \geq 0$ ($:\Leftrightarrow\ \forall\, x \in H : \langle x, f(T)x\rangle \geq 0$).*

*c) Falls $Tx = \lambda x$, so ist $f(T)x = f(\lambda)x$ für $f \in C(\sigma(T))$.*

*d) (Spektralabbildungssatz). Es ist $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.*

*e) Die Menge $\{f(T) : f \in C(\sigma(T))\} \subset L(H)$ ist kommutative Unteralgebra. Der Operator $f(T)$ ist normal, und $f(T)^* = f(T)$ gilt genau dann, wenn $\overline{f} = f$.*

*Beweis.* a) wurde bereits im Beweis von Satz 4.3 gezeigt (für Polynome, welche dicht liegen).

e) ist nach a) klar.

b) Sei $0 \leq f = g^2$ mit $g \in C(\sigma(T)),\ g \geq 0$. Dann ist

$$\langle f(T)x, x\rangle = \langle g^2(T)x, x\rangle = \|g(T)x\|^2 \geq 0,$$

wobei die Selbstadjungiertheit von $g$ ausgenutzt wurde.

c) ist klar für Polynome und folgt für allgemeine Funktionen durch Approximation.

d) (i) Sei $\mu \notin f(\sigma(T))$, d.h. $g := \frac{1}{f-\mu} \in C(\sigma(T))$. Dann ist

$$g(T)(f(T) - \mu) = (g \circ (f - \mu))(T) = \mathbf{1}_{\sigma(T)}(T) = \mathrm{id}_H\,.$$

Genauso folgt $(f(T) - \mu)g(T) = \mathrm{id}_H$. Also ist $\mu \in \rho(f(T))$.

(ii) Sei nun $\mu \in f(\sigma(T))$, d.h. es gibt ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\mu = f(\lambda)$. Wähle Polynome $p_n \in P(\sigma(T))$ mit $\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ (und damit $\|f(T) - p_n(T)\|_{L(H)} \leq \frac{1}{n}$). Nach Lemma 4.2 ist $g_n(\lambda) \in \sigma(g_n(T))$, d.h. es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(g_n(T) - g_n(\lambda))x_n\| \leq \frac{1}{n}$ (approximative Eigenwerte). Somit ist

$$\begin{aligned}\|(f(T) - f(\lambda))x_n\| \leq \|(f(T) - p_n(T))x_n\| + \|(p_n(T) - p_n(\lambda))x_n\|\\ + |p_n(\lambda) - f(\lambda)| \cdot \|x_n\| \leq \frac{3}{n},\end{aligned}$$

d.h. $f(\lambda) \in \sigma(f(T))$. □

Der stetige Funktionalkalkül liefert uns z.B. die Resolvente $R_\lambda(T) := (T - \lambda)^{-1} = f(T)$ mit $f(t) := \frac{1}{t-\lambda} \in C(\sigma(T))$ für $\lambda \in \rho(T)$. Aber eine gute Beschreibung von $T$ erhält man erst über Maße, und dafür brauchen wir noch die charakteristischen Funktionen von $T$, z.B. $\chi_{[a,b]}(T)$. Dazu reicht der stetige Funktionalkalkül nicht aus, wir brauchen eine messbare Version.

**4.5 Lemma** (Stetige Bilinearformen)**.** *Sei $E$ Hilbertraum, $B : E \times E \to \mathbb{K}$ mit*

(i) $x \mapsto B(x, y)$ *linear* $(y \in E)$,

(ii) $y \mapsto B(x, y)$ *konjugiert linear* $(x \in E)$,

(iii) $|B(x, y)| \leq C\|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in E)$.

*Dann existiert genau ein $T \in L(E)$ mit*

$$B(x, y) = \langle x, Ty \rangle \quad (x, y \in E).$$

*Dabei ist $\|T\|$ die kleinste Konstante $C$, für die* (iii) *gilt.*

*Beweis.* Da $x \mapsto B(x, y)$ stetig und linear ist, existiert nach Riesz genau ein $\widetilde{y}$ mit $B(x, y) = \langle x, \widetilde{y} \rangle$. Setze $Ty := \widetilde{y}$. Es ist

$$\begin{aligned} \langle x, \widetilde{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2} \rangle &= B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 B(x, y_1) + \overline{\alpha}_2 B(x, y_2) \\ &= \overline{\alpha}_1 \langle x, \widetilde{y}_1 \rangle + \overline{\alpha}_2 \langle x, \widetilde{y}_2 \rangle = \langle x, \alpha_1 \widetilde{y}_1 + \alpha_2 \widetilde{y}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Also ist $T$ linear.

Wegen Eigenschaft (iii) ist $T$ stetig: $\|Ty\|^2 = B(Ty, y) \leq C \cdot \|Ty\| \cdot \|y\|$, d.h. $\|T\| \leq C$. □

**4.6 Definition.** a) Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung $\mu \colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ heißt ein signiertes Maß, falls für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ gilt:

$$\mu\Big( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Maße $\mu \colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ mit dieser Eigenschaft heißen komplexe Maße. Die Menge aller $\mathbb{K}$-wertigen (also signierten bzw. komplexen) Maße wird mit $M(X, \mathscr{A})$ bezeichnet. Falls $X$ ein topologischer Raum mit Borel-$\sigma$-Algebra $\mathscr{B}(X)$ ist, so schreibt man $M(X) := M(X, \mathscr{B}(X))$.

b) Zu $\mu \in M(X, \mathscr{A})$ definiert man die Variation (das Variationsmaß) $|\mu|$ durch

$$|\mu|(A) := \sup_{\mathscr{Z}} \sum_{E \in \mathscr{Z}} |\mu(E)|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathscr{Z}$ von $A$ in endlich viele paarweise disjunkten Mengen aus $\mathscr{A}$ gebildet wird. Die Totalvariation oder Variationsnorm von $\mu$ ist definiert durch $\|\mu\| := |\mu|(X)$.

**4.7 Bemerkung.** Man kann zeigen, dass $|\mu|$ ein endliches (positives) Maß auf $\mathscr{A}$ ist. Es gilt ferner: $M(X, \mathscr{A})$, versehen mit der Variationsnorm, ist ein Banachraum. Beweise finden sich z.B. in [13].

**4.8 Satz** (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Sei $X$ ein kompakter topologischer Raum. Dann ist die Abbildung*

$$T\colon M(X) \to C(X)', \quad \mu \mapsto T\mu \ \text{ mit } (T\mu)(f) := \int_X f d\mu$$

*ein isometrischer Isomorphismus von Banachräumen.*

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen, siehe z.B. [13].

**4.9 Lemma.** *Sei $X \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer. Sei $C(X) \subset U \subset B(X)$, wobei $B(X)$ der Raum der beschränkten messbaren Funktionen auf $M$ sei. Es sei $U$ abgeschlossen bzgl. punktweiser gleichmäßig beschränkter Konvergenz, d.h. falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n \to f \quad (n \to \infty)$ punktweise gilt, so folgt $f \in U$. Dann gilt bereits $U = B(X)$.*

*Beweis.* (a) Sei $V$ der Durchschnitt aller Mengen $S$ mit $C(X) \subset S \subset B(X)$, welche abgeschlossen sind bzgl. punktweiser gleichmäßig beschränkter Konvergenz. Wir werden zeigen, dass $V = B(X)$ gilt, damit folgt auch $U = B(X)$. Offensichtlich gilt $C(X) \subset V$.

Wir zeigen, dass $V$ ein Vektorraum ist. Sei zunächst $f \in C(X)$ fest. Dann gelten für $V_f := \{h \in B(X) : f + h \in V\}$ die Eigenschaften $C(X) \subset V_f$, und $V_f$ ist abgeschlossen bzgl. obiger Konvergenz. Damit folgt $V_f \supset V$.

Für jedes $g \in V$ und jedes $f \in C(X)$ gilt also $g \in V_f$, d.h. $f + g \in V$. Damit ist $V_g \supset C(X)$, und da $V_g$ ebenfalls abgeschlossen ist bzgl. obiger Konvergenz, folgt $V_g \supset V$. Insgesamt erhalten wir $f + g \in V$ für alle $f, g \in V$. Genauso zeigt man, dass $V$ bzgl. Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

(b) Wir zeigen, dass $V = B(X)$ gilt: Da die Stufenfunktionen im Raum $B(X)$ der beschränkten messbaren Funktionen dicht liegen, reicht es zu zeigen, dass jede Stufenfunktion in $V$ liegt. Dazu zeigen wir, dass jede Stufenfunktion durch stetige Funktionen approximiert werden kann. Dazu reicht es, die charakteristischen Funktionen zu approximieren.

Sei also $\mathscr{B}(X)$ die $\sigma$-Algebra der Borelmengen von $M$ und

$$\mathscr{F} := \{A \in \mathscr{B}(X) : \chi_A \in V\}.$$

Falls $A$ offen ist, existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X)$ mit $0 \le f \le 1$ und $f_n(t) \to \chi_A(t) \quad (n \to \infty)$ für alle $t \in X$. Also sind alle offenen Mengen in $\mathscr{F}$ enthalten.

Wir zeigen, dass folgende Aussagen gelten:

(i) Falls $A, B \in \mathscr{F}$ mit $A \subset B$, so ist auch $B \setminus A \in \mathscr{F}$. Denn es gilt $\chi_{B\setminus A} = \chi_B - \chi_A$, und da $U$ ein Vektorraum ist, folgt $\chi_{B\setminus A} \in U$.

(ii) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ paarweise disjunkt. Dann ist auch $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$. Denn es gilt $\chi_A = \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}$, d.h. $\chi_A$ ist punktweiser Limes von Funktionen in $V$ und damit selbst in $V$.

Die Eigenschaften (i) und (ii) sagen, dass $\mathscr{F}$ ein Dynkinsystem ist. Da die offenen Mengen ein durchschnittstabiles Erzeugendensystem dieses Dynkinsystems bilden, ist $\mathcal{F}$ eine $\sigma$-Algebra. Damit ist $\mathscr{F} = \mathscr{B}(X)$, d.h. jede Stufenfunktion liegt in $V$, was zu zeigen war. □

**4.10 Satz** (Messbarer Funktionalkalkül)**.** *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gibt es genau eine Abbildung $\Phi\colon B(\sigma(T)) \to L(H)$ mit*

(i) $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T,\ \Phi(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_H$.

(ii) *$\Phi$ ist ein stetiger Homomorphismus von $C^*$-Algebren.*

(iii) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\sigma(T))$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n(t) \to f(t) \quad (t \in \sigma(T))$. Dann folgt $\langle \Phi(f_n)x, y\rangle \to \langle \Phi(f)x, y\rangle \quad (x, y \in H)$.*

*Beweis.* (i) Eindeutigkeit: Durch (i)-(ii) wird $\Phi(f)$ für $f \in C(\sigma(T))$ bereits festgelegt (siehe Satz 4.3). Nach (iii) ist $\Phi$ eindeutig bestimmt für alle Funktionen, welche punktweiser Limes von stetige Funktionen sind. Nach Lemma 4.9 ist dies aber schon $B(\sigma(T))$.

(ii) Existenz: Seien $x, y \in H$. Dann definiert

$$\ell_{x,y}\colon C(\sigma(T)) \to \mathbb{C},\ f \mapsto \langle f(T)x, y\rangle$$

eine stetige Linearform. Dabei ist die Linearität klar, die Stetigkeit folgt aus

$$|\ell_{x,y}(f)| \le \|f(T)x\| \cdot \|y\| = \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Hier wurde der stetige Funktionalkalkül Satz 4.4 verwendet. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz 4.8 existiert ein komplexes Maß $\mu_{x,y} \in M(\sigma(T))$ mit

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} \quad (f \in C(\sigma(T))) \tag{4-2}$$

Ebenfalls nach Satz 4.8 gilt $\|\mu_{x,y}\| = \|\ell_{x,y}\| \le \|x\| \cdot \|y\|$. Die rechte Seite ist aber nicht nur für stetige $f$, sondern für beschränkte messbare $f \in B(\sigma(T))$ definiert. Für $f \in B(\sigma(T))$ betrachte also die Abbildung

$$(x, y) \mapsto \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y}.$$

Diese Abbildung ist bilinear, und wegen

$$\Big|\int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y}\Big| \le \|f\|_\infty \|\mu_{x,y}\| \le \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

auch stetig. Nach Lemma 4.5 über stetige Bilinearformen existiert also ein eindeutiger Operator $\Phi(f)$ mit $\|\Phi(f)\| \le \|f\|_\infty$ und

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle) \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} \quad (x, y \in H).$$

Wir müssen noch die Eigenschaften (i)–(iii) des eben definierten Funktionalkalküls nachweisen. Dabei ist (i) klar, da $\Phi(f) = f(T)$ für stetige Funktionen gilt. Auch die Stetigkeit von $\Phi$ ist nach Konstruktion klar.

Zu (iii): Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$\langle \Phi(f_n)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f_n d\mu_{x,y} \to \int_{\sigma(T)} f d\mu_{x,y} = \langle \Phi(f)x, y\rangle.$$

Zu (ii): Sei $g \in C(\sigma(T))$ fest. Setze

$$U := \{f \in B(\sigma(T)) : \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)\}.$$

Nach Satz 4.4 gilt $C(\sigma(T)) \subset U$. Wir zeigen, dass $U$ bzgl. punktweiser gleichmäßig beschränkter Konvergenz abgeschlossen ist. Seien $f_n \in U$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f = \lim_n f_n$ punktweise. Dann gilt nach (iii)

$$\langle \Phi(fg)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(f_n g)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(f_n)\Phi(g)x, y\rangle = \langle \Phi(f)\Phi(g)x, y\rangle.$$

Somit ist $f \in U$. Nach Lemma 4.9 folgt $U = B(\sigma(T))$ und damit ist $\Phi$ multiplikativ. Genauso zeigt man, dass $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$ gilt. □

Wir schreiben wieder $f(T)$ statt $\Phi(f)$. Das nächste Lemma zeigt, dass sogar Konvergenz in der starken Operatortopologie vorliegt.

**4.11 Lemma.** *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $C(\sigma(T)) \to B(H)$, $f \mapsto f(T)$ der messbare Funktionalkalkül. Falls $(f_n)_n \subset B(\sigma(T))$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty$ und $f_n \to f$ punktweise, so gilt $f_n(T)x \to f(T)x$ für alle $x \in H$.*

*Beweis.* In einem Hilbertraum gilt $z_n \to z$ in der Normtopologie genau dann, wenn $z_n \to z$ in der schwachen Topologie und $\|z_n\| \to \|z\|$ gilt. Dies folgt sofort aus

$$\|z_n - z\|^2 = \|z_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle z_n, z\rangle + \|z\|^2.$$

In der Situation von Satz 4.10 haben wir die schwache Konvergenz von $f_n(T)x$ gegen $f(T)x$ nach (iii). Die Konvergenz der Norm folgt aus

$$\begin{aligned}\|f_n(T)x\|^2 &= \langle f_n(T)x, f_n(T)x\rangle = \langle f_n(T)^* f_n(T)x, x\rangle = \langle (\overline{f}_n f_n)(T)x, x\rangle \\ &\to \langle (\overline{f} f)(T)x, x\rangle = \|f(T)x\|^2.\end{aligned}$$

□

## b) Orthogonale Projektionen

**4.12 Definition.** Sei $E$ ein Hilbertraum und $M \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann heißt $P : E \to E,\ x \mapsto x_1$ mit $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$, die orthogonale Projektion von $E$ auf $M$.

**4.13 Lemma.** a) *Sei $P$ eine orthogonale Projektion. Dann ist $P$ stetig mit*

$$\|P\| = \begin{cases} 1, & M \neq \{0\}, \\ 0, & M = \{0\}. \end{cases}$$

*Es gilt* $\ker P = M^\perp$ *und* $R(P) = M$.

b) *Ein Operator $P \in L(E)$ ist genau dann orthogonale Projektion, wenn $P^2 = P = P^*$.*

*Beweis.* a) Es gilt unter Verwendung des Satzes von Pythagoras

$$\|Px\|^2 = \|x_1\|^2 \le \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

d.h. $P \in L(E)$ und $\|P\| \le 1$. Für $M = \{0\}$ ist $P = 0$. Sonst gilt für $x \in M \setminus \{0\}$ die Gleichheit $x = Px$ und damit $\|P\| = 1$.

b) (i). Sei $P$ eine orthogonale Projektion. Die Gleichheit $P^2 = P$ ist klar nach Definition von $P$. Seien $x, y \in E$ mit $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, wobei $x_1, y_1 \in M$ und $x_2, y_2 \in M^\perp$. Dann gilt

$$\langle Px, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \underbrace{\langle x_1, y_2\rangle}_{=0} = \langle x, y_1\rangle = \langle x, Py\rangle,$$

d.h. es gilt $P = P^*$.

(ii). Es gilt $P^2 = P = P^*$. Setze $M := R(P)$. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_n \to x$ und $x_n = Py_n$, ist

$$Px_n = P^2 y_n = Py_n = x_n \tag{4-3}$$

und damit

$$\|x_n - Px\| = \|P(x_n - x)\| \le \|P\| \cdot \|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

d.h. $Px = x$. Somit ist $M$ abgeschlossen.

Sei $\widetilde{P}$ die orthogonale Projektion zum Unterraum $M$. Für $x \in E$ und $y \in M$ gilt

$$\langle \widetilde{P}x, y \rangle = \langle x, \widetilde{P}y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, Py \rangle = \langle Px, y \rangle.$$

Dabei wurde im zweiten Gleichheitszeichen $y \in M$ verwendet, für das dritte Gleichheitszeichen wurde (4-3) verwendet und für die letzte Gleichheit $P = P^*$. Setzt man $y := \widetilde{P}x - Px \in M$, so folgt

$$0 = \langle \widetilde{P}x - Px, y \rangle = \|(\widetilde{P} - P)x\|^2.$$

Also gilt $\widetilde{P} = P$, und $P$ ist eine orthogonale Projektion. □

**4.14 Lemma.** *Sei $E$ ein Hilbertraum, und seien $P_1, P_2$ orthogonale Projektionen auf $M_1$ bzw. $M_2$.*

a) *$P_1P_2$ ist genau dann orthogonale Projektion, falls $P_2P_1 = P_2P_1$ gilt. In diesem Fall ist $P_1P_2$ orthogonale Projektion auf den Unterraum $M_1 \cap M_2$.*

b) *Es sind äquivalent:*

(i) *$M_1 \subset M_2$.*

(ii) *Es gilt $\|P_1x\| \le \|P_2x\| \quad (x \in E)$.*

(iii) *Es gilt $P_1 \le P_2$, d.h. $\langle P_1x, x \rangle \le \langle P_2x, x \rangle \quad (x \in E)$.*

(iv) *Es gilt $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.*

*Beweis.* a) (i). Es gelte $P_1P_2 = P_2P_1$. Dann erhalten wir

$$(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2$$

und

$$(P_1P_2)^* = (P_2P_1)^* = P_1^*P_2^* = P_1P_2.$$

Also ist $P_1P_2$ eine orthogonale Projektion.

(ii). Sei $P_1P_2$ orthogonale Projektion. Dann gilt für $x, y \in E$

$$\langle x, P_2P_1y \rangle = \langle x, P_2^*P_1^*y \rangle = \langle P_1P_2x, y \rangle = \langle x, P_1P_2y \rangle.$$

Daher ist $P_1P_2 = P_2P_1$.

In diesem Fall gilt $R(P_2P_1) \subset R(P_2) = M_2$ und $R(P_2P_1) = R(P_1P_2) \subset M_1$. Zu $x \in M_1 \cap M_2$ ist $x = P_1x = P_2x$, d.h. $(P_2P_1)x = x$. Insgesamt erhalten wir $R(P_2P_1) = M_1 \cap M_2$.

Der Beweis von Teil b) wird dem Leser als Übung überlassen. $\square$

**4.15 Lemma.** *Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(E)$ eine Folge orthogonaler Projektionen in einem Hilbertraum $E$ mit $P_n \le P_m$ für $n \le m$. Dann konvergiert $P_n$ stark gegen eine orthogonale Projektion $P \in L(E)$.*

*Beweis.* Für $x \in E$ ist $(\|P_nx\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, monoton steigend (Lemma 4.14 b)), also konvergent. Für $m \le n$ ist

$$\begin{aligned}\|P_nx - P_mx\|^2 &= \underbrace{\langle P_nx, P_nx\rangle}_{=\|P_nx\|^2} - \underbrace{\langle P_nx, P_mx\rangle}_{=\langle P_mP_nx,x\rangle = \langle P_mx,x\rangle = \|P_mx\|^2} - \langle P_mx, P_nx\rangle + \underbrace{\langle P_mx, P_mx\rangle}_{=\|P_mx\|^2}\\ &= \|P_nx\|^2 + \|P_mx\|^2 - 2\|P_mx\|^2 \to 0 \quad (m,n\to\infty).\end{aligned}$$

Also existiert $Px := \lim_{n\to\infty} P_nx \quad (x \in E)$.

Es gilt $\langle Px, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle P_nx, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, P_ny\rangle = \langle x, Py\rangle$ und

$$\langle P^2x, y\rangle = \langle Px, Py\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle P_nx, P_ny\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle P_nx, y\rangle = \langle Px, y\rangle.$$

Somit gilt $P^2 = P = P^*$ und $P_n \xrightarrow{s} P$. $\square$

## c) Projektorwertige Maße und der Spektralsatz

**4.16 Definition.** Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung $E\colon \mathscr{A} \to L(H)$ heißt ein projektorwertiges Maß (PV-Maß), falls gilt:

(i) $E(A)$ ist orthogonale Projektion $(A \in \mathscr{A})$.

(ii) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ paarweise disjunkt. Dann gilt
$$\Big[E\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\Big]x = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(A_n)x \quad (x \in H).$$

(iii) Es gilt $E(X) = \mathrm{id}_H$.

Eine Menge $A \in \mathscr{A}$ heißt eine $E$-Nullmenge, falls $E(A) = 0$ (dabei ist die 0 auf der rechten Seite der Nulloperator in $H$).

Falls $X$ topologischer Raum ist und $\mathscr{A} = \mathscr{B}(X)$ die Borel-$\sigma$-Algebra, so besitzt das PV-Maß kompakten Träger, falls eine kompakte Menge $K \in \mathscr{B}(X)$ existiert mit $E(K) = \mathrm{id}_H$.

**4.17 Bemerkung.** Sei $E$ ein PV-Maß. Dann gilt

a) $E(\emptyset) = 0$.

b) $E(A \cup B) + E(A \cap B) = E(A) + E(B) \quad (A, B \in \mathscr{A})$.

c) $E(B \setminus A) = E(B) - E(A)$ für $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \subset B$.

d) Seien $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$. Dann ist $E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \text{s-lim}_{n\to\infty} E(A_n)$.

Analog gilt für $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \supset A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$ die Gleichheit $E(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \text{s-lim}_{n\to\infty} E(A_n)$.

e) $E(A \cap B) = E(A)E(B) = E(B)E(A) \quad (A, B \in \mathscr{A})$.

f) Seien $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $R(E(A)) \perp R(E(B))$.

g) Sei $x \in H$. Dann ist $E_x \colon \mathscr{A} \to [0, \infty)$ mit

$$E_x(A) := \langle E(A)x, x\rangle = \|E(A)x\|^2$$

ein endliches Maß mit $\|E_x\| = E_x(X) = \|x\|^2$.

h) Seien $x, y \in H$. Dann ist $E_{x,y} \colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ mit

$$E_{x,y}(A) := \langle E(A)x, y\rangle$$

ein komplexes Maß mit $\|E_{x,y}\| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

**4.18 Definition.** Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum, $E$ ein PV-Maß. Sei $f \colon X \to \mathbb{C}$ eine Stufenfunktion, d.h. es existiert eine Darstellung der Form $f = \sum_{i=1}^n f_i \chi_{A_i}$ mit $f_i \in \mathbb{C}$ und $A_i \in \mathscr{A}$ disjunkt. Dann heißt

$$\int f dE := \sum_{i=1}^n f_i E(A_i) \in L(H)$$

das Integral von $f$ bzgl. $E$.

**4.19 Lemma.** *Sei $E$ ein PV-Maß und seien $f, g$ Stufenfunktionen.*

*a) Die Abbildung $f \mapsto \int f dE$ ist linear.*

*b) Für $x \in H$ gilt $\|(\int f dE)x\|^2 = \int |f|^2 dE_x \le \|f\|_\infty^2 \|x\|^2$.*

*c) Es gilt $(\int f dE)(\int g dE) = \int fg dE$.*

*d) Es gilt $(\int f dE)^* = \int \overline{f} dE$.*

*Beweis.* a) ist klar.

b) Unter Verwendung des Satzes von Pythagoras erhalten wir

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\int f dE\Big)x\Big\|^2 &= \Big\|\sum_{i=1}^n f_i E(A_i)x\Big\|^2\\ &= \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \|E(A_i)x\|^2\\ &= \int |f|^2 dE_x\\ &\le \|f\|_\infty^2 \|E_x\| = \|f\|_\infty^2 \|x\|^2.\end{aligned}$$

c) Mit Bemerkung 4.17 gilt

$$\begin{aligned}\Big(\int f dE\Big)\Big(\int g dE\Big) &= \Big(\sum_{i=1}^n f_i E(A_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^m g_j E(B_j)\Big)\\ &= \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i)E(B_j)\\ &= \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i \cap B_j)\\ &= \int f g dE.\end{aligned}$$

d) folgt direkt aus der Definition des Integrals. □

**4.20 Definition.** Sei $E$ ein PV-Maß auf $(X, \mathscr{A})$ mit Werten in $L(H)$. Für $f \in B(X)$ sei $(f_n)_n \subset B(X)$ eine Folge von Stufenfunktionen, welche gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Definiere das Integral

$$\int f dE := \int f(\lambda) dE(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \int f_n dE \in L(H).$$

Für $A \in \mathscr{A}$ setzt man $\int_A f dE := \int \chi_A f dE$.

**4.21 Bemerkung.** a) Man beachte, dass das Integral wegen Lemma 4.19 b) wohldefiniert ist.

b) Die Eigenschaften von Lemma 4.19 übertragen sich in üblicher Weise auf messbare Funktionen.

c) Falls $K \in \mathscr{A}$ ist mit $E(K) = \mathrm{id}_H$, so ist $\int f dE = \int_K f dE$ für alle $f \in B(X)$ (denn $E(X \setminus K) = 0$).

**4.22 Satz.** *Sei $E\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to L(H)$ ein PV-Maß, und sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $E(K) = \mathrm{id}_H$.*

*a) Durch $T := \int \lambda dE(\lambda)$ wird ein selbstadjungierter Operator $T \in L(H)$ definiert.*

*b) Es gilt $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$.*

*c) Die Abbildung $\Psi\colon B(\sigma(T)) \to L(H),\ f \mapsto \int_{\sigma(T)} f dE$ ist der (nach Satz 4.10 eindeutig bestimmte) messbare Funktionalkalkül zu $T$.*

*Beweis.* a) ist klar nach Definition des Integrals und nach Lemma 4.19 d) (für messbare Funktionen).

b) Wähle ein Intervall $(a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $K \subset (a,b]$, d.h. $E((a,b]) = \mathrm{id}_H$.

(i) Wir zeigen zuerst: Zu $\mu \in \rho(T)$ existiert eine offene Umgebung $U_\mu$ von $\mu$ mit $E(U_\mu) = 0$. Dazu approximieren wir $\mathrm{id}_{(a,b]}$ eine Treppenfunktion mit äquidistanten Stufen, $f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{(a_{k-1},a_k]}$, wobei $a_k := a + k\delta \quad (k = 0,\dots,N)$ mit $\delta = \frac{b-a}{N}$. Damit ist

$$\Big\| T - \int f dE \Big\| \le \|\mathrm{id}_{(a,b]} - f\|_\infty \le \delta.$$

Wegen $\int f dE = \sum_{k=1}^N a_k E((a_{k-1},a_k])$ und $\sum_{k=1}^N E((a_{k-1},a_k]) = \mathrm{id}_H$ folgt

$$\Big\| (\mu - T) - \sum_{k=1}^N (\mu - a_k) E((a_{k-1},a_k]) \Big\| \le \delta.$$

Falls $\delta$ hinreichend klein ist (d.h. $N$ hinreichend groß), so ist der Operator $S := \sum_{k=1}^N (\mu - a_k) E((a_{k-1},a_k])$ invertierbar (da $\mu - T$ invertierbar ist), und für die Norm gilt $\|S^{-1}\| \le 1 + \|(\mu - T)^{-1}\|$.

Es gilt aber auch $\|S^{-1}\| = \max\{\frac{1}{|\mu - a_k|} : E((a_{k-1},a_k]) \ne 0\}$. Damit folgt $E((a_{k-1},a_k]) = 0$ für alle $k$ mit $|\mu - a_k| < \frac{1}{1+\|(\mu-T)^{-1}}\|$, d.h. es ist $E(U_\mu) = 0$ für eine offene Umgebung $U_\mu$ von $\mu$.

(ii) Falls $K \subset \rho(T)$ kompakt ist, ist $K \subset \bigcup_{\mu \in K} U_\mu$ eine offene Überdeckung mit $E(U_\mu) = 0$ für alle $\mu$. Wegen Kompaktheit existiert eine endliche Teilüberdeckung $K \subset \sum_{i=1}^n U_{\mu_i}$, und $E(K) \le \sum_{i=1}^n E(U_{\mu_i}) = 0$.

(iii) Schreibe $\rho(T)$ als abzählbare Vereinigung aufsteigender kompakter Mengen $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Dann folgt $E(\rho(T))x = \lim_{j\to\infty} E(K_j)x = 0$ für alle $x \in H$, d.h. $E(\rho(T)) = 0$ und damit $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$.

c) Wir rechnen die Eigenschaften von Satz 4.10 nach. Dabei ist $\Psi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T$ nach Definition von $T$, und $\Psi(\mathbf{1}_{\sigma(T)}) = \mathrm{id}_H$ gilt nach b). Dass $\Psi$ stetiger Homomorphismus von C*-Algebren ist, ist klar nach Lemma 4.19 für messbare Funktionen.

Für die letzte Eigenschaft in Satz 4.10 benutzen wir das Maß $E_{x,y}$ aus Bemerkung

4.17 h). Es gilt

$$\Big\langle \Big( \int f dE \Big) x, y \Big\rangle = \int f dE_{x,y}.$$

Dies ist klar für Treppenfunktionen und folgt durch Approximation für messbare Funktionen. Nun folgt 4.10 (iii) aus dem Satz über majorisierte Konvergenz.

Damit erfüllt $\Psi$ alle Eigenschaften aus Satz 4.10 und stimmt daher mit dem messbaren Funktionalkalkül überein. □

**4.23 Satz** (Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren)**.** *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes PV-Maß $E$ mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}$ mit $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$ und*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda).$$

*Die Abbildung $B(\sigma(T)) \to L(H)$, $f \mapsto f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE(\lambda)$ definiert den messbaren Funktionalkalkül zu $T$. Für $f \in B(\sigma(T))$ und $x, y \in H$ gilt*

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE_{x,y}(\lambda).$$

*Beweis.* (a) Definition des PV-Maßes: Sei $f \mapsto f(T)$ der messbare Funktionalkalkül nach Satz 4.10. Für $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ definiere

$$E(A) := \chi_A(T).$$

(i) Wegen $\chi_A = \chi_A^2 = \overline{\chi}_A$ gilt $E(A) = E(A)^2 = E(A)^*$, d.h. $E(A)$ ist eine orthogonale Projektion.

(ii) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}(\sigma(T))$ paarweise disjunkt. Die Funktionen $f_n := \sum_{j=1}^n \chi_{A_j}$ konvergieren punktweise gleichmäßig beschränkt gegen $f := \sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j} = \chi_A$ mit $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_n$. Nach Lemma 4.11 folgt

$$\sum_{j=1}^\infty E(A_n)x = \sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j}(T)x = \chi_A(T)x = E(A)x \quad (x \in H).$$

(iii) Nach Satz 4.10 gilt $E(\sigma(T)) = \mathbf{1}_{\sigma(T)}(T) = \mathrm{id}_H$.

Nach (i)–(iii) ist $E\colon \mathscr{B}(\sigma(T)) \to L(H)$ ein PV-Maß.

(b) Definiere den Operator $S := \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$ nach Satz 4.22. Sei $f \mapsto \Psi(f) := \int_{\sigma(T)} f dE$ der zugehörige messbare Funktionalkalkül nach Satz 4.22, und $f \mapsto f(T)$ der zu $T$ gehörige Funktionalkalkül nach Satz 4.10. Zu zeigen ist $S = T$.

Wähle dazu eine Treppenfunktion $f$ auf $\sigma(T)$ mit $\|f - \mathrm{id}_{\sigma(T)}\|_\infty \le \varepsilon$. Dann gilt

$$\|T - S\| \le \|T - f(T)\| + \|f(T) - \Psi(f)\| + \|\Psi(f) - S\|.$$

Nach Satz 4.10 ist

$$\|T - f(T)\| \le \|\mathrm{id}_{\sigma(T)} - f\|_\infty \le \varepsilon.$$

Ebenso ist nach Lemma 4.19 b)

$$\|S - \Psi(f)\| = \Big\| \int_{\sigma(T)} (\lambda - f(\lambda)) dE(\lambda) \Big\| \le \|\mathrm{id}_{\sigma(T)} - f\|_\infty \le \varepsilon.$$

Schließlich ist

$$f(T) - \Psi(f) = \sum_{j=1}^n f_i \chi_{A_i}(T) - \sum_{j=1}^n f_i E(A_i) = 0.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|T - S\| \le 2\varepsilon,$$

d.h. $T = S$. □

**4.24 Lemma.** *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $E$ das zugehörige PV-Maß. Ein Operator $S \in L(H)$ vertauscht genau dann mit $T$, falls $S$ mit allen Projektionen $E(A)$, $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$, vertauscht. Dies ist äquivalent dazu, dass $S$ mit allen Operatoren $f(T)$ mit $f \in B(\sigma(T))$ vertauscht.*

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass $E$ durch die Familie komplexer Maße $E_{x,y}$ mit $x, y \in H$ bestimmt ist. Nun vertauscht $S$ mit $T$ genau dann, falls $S$ mit allen $T^n$, $n \in \mathbb{N}$, vertauscht, d.h. genau dann, falls gilt

$$\langle ST^n x, y\rangle = \langle T^n Sx, y\rangle \quad (x, y \in H, n \ge 0). \tag{4-4}$$

Wegen $\langle SE(A)x, y\rangle = \langle E(A)x, S^*y\rangle$ ist auch $\langle SE(A)x, y\rangle$ ein komplexes Maß. Nach dem Spektralsatz ist (4-4) äquivalent zu

$$\int \lambda^n d\langle SE(\lambda)x, y\rangle = \int \lambda^n d\langle E(\lambda)Sx, y\rangle \quad (x, y \in H, n \ge 0). \tag{4-5}$$

Damit stimmen die beiden Maße $\langle SE(A)x, y\rangle$ und $\langle E(A)Sx, y\rangle$ als Funktionale überein auf den Polynomen $\lambda^n$ und damit auf den stetigen Funktionen $f \in C(\sigma(T))$ (Satz von Weierstraß). Nach dem Darstellungssatz von Riesz sind die Maße gleich. Damit ist (4-5) äquivalent zu

$$\langle SE(A)x, y\rangle = \langle E(A)Sx, y\rangle \quad (x, y \in H,\ A \in \mathscr{B}(\sigma(T)),$$

was wiederum äquivalent zu $SE(A) = E(A)S$ für alle $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ ist.

Wir haben bereits gesehen, dass aus $ST = TS$ folgt $Sf(T) = f(T)S$ für alle stetigen $f \in C(\sigma(T))$. Wie üblich folgt durch Approximation, dass $S$ mit allen $f(T)$, $f \in B(\sigma(T))$, vertauscht. □

**4.25 Beispiele.** a) Sei $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine selbstadjungierte Matrix mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\mu_1, \dots, \mu_m$. Sei $E(\{\mu_j\})$ die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum $\ker(\mu_j - T)$. Dann gilt

$$T = \sum_{j=1}^{m} \mu_j E(\{\mu_j\}) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda),$$

wobei das PV-Maß zu $T$ gegeben ist durch

$$E(A) = \sum_{j=1}^{m} E(A \cap \{\mu_j\}) = \sum_{\{j:\mu_j\in A\}} E(\{\mu_j\}) \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})).$$

b) Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und kompakt. Dann gilt

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j E(\{\mu_j\}),$$

wobei $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $T$ sind und $E(\{\mu_j\})$ die Orthogonalprojektion auf den zugehörigen Eigenraum. Das Spektralmaß ist jetzt eine abzählbare Summe von Punktmaßen:

$$E(A) = \sum_{\{j:\mu_j\in A\}} E(\{\mu_j\}) \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})).$$

**4.26 Beispiel** (Multiplikationsoperator)**.** Sei $H = L_2([0,1])$ und $T \in L(H)$ gegeben durch $(Tx)(t) := t \cdot x(t)$. Dann ist $T$ selbstadjungiert mit $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0,1]$.

Für $x, y \in L_2([0,1])$ gilt

$$\langle Tx, y\rangle = \int_0^1 tf(t)\overline{g(t)}dt = \int_0^1 \lambda dE_{x,y}(\lambda)$$

mit dem Maß $E_{x,y}(\lambda) = x(\lambda)\overline{y(\lambda)}d\lambda$. Das Maß $E_{x,y}$ besitzt also eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes. Für das Maß erhalten wir somit

$$E_{x,y}(A) = \int_{[0,1]\cap A} x(\lambda)\overline{y(\lambda)}d\lambda = \langle \chi_{[0,1]\cap A} \cdot x, y\rangle \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})),$$

d.h. $E(A)x = \chi_{[0,1]\cap A} \cdot x$. Die Projektion $E(A)$ ist damit gegeben als Multiplikationsoperator mit $\chi_{[0,1]\cap A}$.

**4.27 Lemma** (Transformationssatz)**.** *Sei $S \in L(H)$ selbstadjungiert, und seien $g \in B(\sigma(S);\mathbb{R})$ und $f \in B(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$(f \circ g)(S) = f(g(S)).$$

*Beweis.* Beachte, dass $f \circ g \in B(\sigma(\mathbb{R}); \mathbb{R})$ und (da $g$ reellwertig ist) $g(S) \in L(H)$ selbstadjungiert ist. Sei $E$ das zu $g(S)$ gehörige PV-Maß und $F$ das zu $S$ gehörige PV-Maß. Wir zeigen die Behauptung für charakteristische Funktionen $f = \chi_A$, die Verallgemeinerung auf Treppenfunktionen und messbare beschränkte Funktionen folgt wie üblich.

Zu zeigen ist $(\chi_A \circ g)(S) = \chi_A(g(S))$. Wegen $\chi_A \circ g = \chi_{g^{-1}(A)}$ und $\chi_A(g(S)) = E(A)$ ist zu zeigen:

$$F(g^{-1}(A)) = E(A) \quad (A \in \mathscr{B}(\sigma(\mathbb{R}))).$$

Wieder betrachten wir die zugehörigen komplexen Maße $\mu_{x,y} := \langle E(\cdot)x, y\rangle$ und $\widetilde{\nu}_{x,y} := \langle F(g^{-1}(\cdot)x, y\rangle$. Das Maß $\widetilde{\nu}_{x,y}$ ist das Bildmaß von $\nu_{x,y} := \langle F(\cdot)x, y\rangle$, d.h. es gilt $\widetilde{\nu}_{x,y} = \nu_{x,y} \circ g^{-1}$. Nach dem Transformationssatz gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int \lambda^n d\widetilde{\nu}_{x,y}(\lambda) &= \int \lambda^n d(\nu_{x,y} \circ g^{-1})(\lambda) = \int g(\lambda)^n d\nu_{x,y}(\lambda)\\ &= \langle g(S)^n x, y\rangle = \int \lambda^n d\mu_{x,y}(\lambda).\end{aligned}$$

Hier wurden die Definition von $\nu_{x,y}$ und die Tatsache verwendet, dass $F$ das PV-Maß zu $S$ ist Dies zeigt die Gleichheit der Maße als Funktionale auf dem Raum der Polynome und damit auf den stetigen Funktionen, also die Gleichheit der Maße. □

**4.28 Satz** (Spektrum und Spektralmaß)**.** *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $E$ das zugehörige PV-Maß.*

*a) Für $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda_0 \in \rho(T)$ genau dann, falls eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von $\lambda_0$ existiert mit $E(U) = 0$.*

*b) Es gilt $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ genau dann, wenn $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$. Für alle $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gilt $E(\{\lambda_0\}) = \ker(T - \lambda_0)$.*

*c) Es gilt $\lambda_0 \in \sigma_c(T)$ genau dann, wenn $E(\{\lambda_0\}) = 0$ und $E((\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)) \neq 0$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt.*

*Beweis.* a) Wir wissen bereits, dass $E(\rho(T)) = 0$. Sei andererseits $U \subset \mathbb{R}$ eine (o.E. offene) Umgebung von $\lambda_0$ mit $E(U) = 0$. Definiere $f, g \in B(\sigma(T))$ durch $f(\lambda) := \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \cdot \chi_{\sigma(T)\setminus U}$ und $g(\lambda) := (\lambda - \lambda_0)$. Dann gilt

$$f(T)(T - \lambda_0) = f(T)g(T) = (f \cdot g)(T) = \chi_{\sigma(T)\setminus U}(T) = E(\sigma(T) \setminus U) = \mathrm{id}_H\,.$$

Wegen $f(T)g(T) = g(T)f(T)$ folgt $g(T)f(T) = \mathrm{id}_H$, d.h. $f(T) = g(T)^{-1} = (T - \lambda_0)^{-1}$. Somit ist $\lambda_0 \in \rho(T)$.

b) Zu zeigen ist nur die letzte Gleichheit in b). Sei $x \in R(E(\{\lambda_0\})$, d.h. $x = E(\{\lambda_0\})x$. Dann gilt

$$\langle (T - \lambda_0)x, y\rangle = \langle (T - \lambda_0)E(\{\lambda_0\})x, y\rangle = \int (\lambda - \lambda_0) \cdot \chi_{\{\lambda_0\}}(\lambda) d\langle E(\lambda)x, y\rangle = 0.$$

(Beachte, dass $(\lambda-\lambda_0)\chi_{\lambda_0}(\lambda)=0$ für alle $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt.) Damit ist $(T-\lambda_0)x=0$, d.h. $x\in\ker(T-\lambda_0)$.

Falls andererseits $x\in\ker(T-\lambda_0)$, so folgt nach Satz 4.4 c) $f(T)x=f(\lambda_0)(x)$ für alle $f\in C(\sigma(T))$ und nach Lemma 4.11 für alle $f\in B(\sigma(T))$. Setzt man $f=\chi_{\{\lambda_0\}}$, so folgt $E(\{\lambda_0\})x=\chi_{\{\lambda_0\}}(T)x=\chi_{\{\lambda_0\}}(\lambda_0)x=x$, d.h. $x\in R(E(\{\lambda_0\}))$.

c) folgt aus a) und b) (beachte $\sigma_r(T)=\emptyset$). □

**4.29 Lemma.** a) *Seien $A,B\in L(H)$ mit $A\geq 0$, $B\geq 0$ und $AB=BA$. Dann ist $AB\geq 0$.*

b) *Sei $A\in L(H)$ mit $A\geq 0$. Dann existiert genau ein $B\in L(H)$ mit $B\geq 0$ und $B^2=A$. Der Operator $B$ heißt die Wurzel von $A$. Insbesondere existiert zu jedem Operator $A\in L(H)$ der Absolutbetrag $|A|:=\sqrt{A^*A}$.*

*Beweis.* a) Es gilt
$$AB=A\sqrt{B^2}=\sqrt{B}A\sqrt{B}\geq 0$$
wegen
$$\langle\sqrt{B}A\sqrt{B}x,x\rangle=\langle A\sqrt{B}x,\sqrt{B}x\rangle\geq 0\quad (x\in H).$$
Hier wurde verwendet, dass $A$ und $\sqrt{B}$ vertauschen (Lemma 4.24).

b) Der Operator $B:=\sqrt{A}$ erfüllt $B\geq 0$ und $B^2=A$ nach dem Spektralsatz. Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit. Sei also $\widetilde{B}\geq 0$ mit $\widetilde{B}^2=A$. Wähle $b\in\mathbb{R}$ mit $b>M:=\sup_{\|x\|=1}\langle Ax,x\rangle$ und $b>\|\widetilde{B}\|^2$.

Zur Funktion $g(t):=\sqrt{t}$ existiert nach dem Satz von Weierstraß eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen mit $\|p_n-g\|_\infty\to 0\quad (n\to\infty)$ im Intervall $[0,b]\supset[m,M]$. Damit gilt
$$\|p_n(A)-g(A)\|=\|p_n(A)-B\|\to 0\quad \text{in } L(H). \tag{4-6}$$
Setze $\widetilde{p}_n(t):=p_n(t^2)$ und $\widetilde{g}(t):=g(t^2)(=t)$. Dann ist
$$\|\widetilde{p}_n-\widetilde{g}\|_\infty\to 0\quad (n\to\infty) \text{ im Intervall } [0,\sqrt{b}]\supset[0,\|\widetilde{B}\|].$$
Nach dem Funktionalkalkül gilt
$$\|\widetilde{p}_n(\widetilde{B})-\widetilde{g}(\widetilde{B})\|=\|\widetilde{p}_n(\widetilde{B})-\widetilde{B}\|\to 0\quad (n\to\infty). \tag{4-7}$$
Aber es ist $\widetilde{p}_n(\widetilde{B})=p_n(\widetilde{B}^2)=p_n(A)$. Somit folgt aus (4-6) und (4-7) die Gleichheit $\widetilde{B}=g(A)=B$. □

**4.30 Bemerkung.** Aus dem Spektralsatz folgen eine ganze Reihe von Aussagen über Spektrum bzw. Norm von Operatoren. So gilt zum Beispiel:

a) Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $\lambda_0 \in \rho(T)$. Dann gilt

$$\|(T-\lambda_0)^{-1}\| = \big[\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T))\big]^{-1}.$$

Denn die rechte Seite ist $\|f\|_\infty$ für die Funktion $f \in C(\sigma(T))$ mit $f(\lambda) := \frac{1}{\lambda-\lambda_0}$. Vergleiche dazu Satz 3.5 bzw. Korollar **??**.

b) Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $f \in C(\sigma(T))$. Dann gilt $\|f(T)\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \|f\|_\infty$. Denn das Maximum ist der Spektralradius von $T$ und $\|f(T)\| = \|f\|_\infty$ nach dem stetigen Funktionalkalkül. (Vergleiche Satz 3.12.) Insbesondere folgt aus der Darstellung $T = \int_K \lambda dE(\lambda)$ bereits $\|T\| \le \max\{|\lambda| : \lambda \in K\}$.

**4.31 Bemerkung.** Der Spektralsatz wird häufig auch mit Hilfe von Spektralscharen definiert. Dabei heißt eine Familie $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \subset L(H)$ eine Spektralschar, falls gilt:

(i) $F_\lambda$ ist orthogonaler Projektor für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $F_\mu F_\lambda = F_\lambda F_\mu = F_\mu$ für alle $\mu \le \lambda$.

(iii) $F_\mu x \to F_\lambda x$ für $\mu \searrow \lambda$ $(x \in H)$ (Rechtsstetigkeit).

(iv) $F_\lambda x \to 0$ für $\lambda \to -\infty$ $(x \in H)$.

(v) $F_\lambda x \to x$ für $\lambda \to +\infty$ $(x \in H)$.

Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $E$ das zugehörige PV-Maß. Dann wird durch

$$F_\lambda := E((-\infty, \lambda]) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

eine Spektralschar definiert. Definiert man das Integral über Spektralscharen geeignet (etwa im Sinne eines Riemann-Stieltjes-Integrals), so gilt

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dF_\lambda.$$

Die Spektralscharen entsprechen den Verteilungsfunktionen in der Wahrscheinlichkeitstheorie, die Darstellung von $T$ durch Spektralscharen ist äquivalent zur Darstellung durch PV-Maße.

# 5. Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren

**5.1 Worum geht's?** Der in diesem Teil der Vorlesung allgemeinste Spektralsatz behandelt unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren. Um den Beweis kurz zu halten (und damit überhaupt noch im Rahmen dieser Vorlesung zu bleiben), wird auf einen systematischen Aufbau des entsprechenden Integralbegriffs verzichtet und stattdessen die Cayley-Transformierte verwendet. Diese Standardmethode erlaubt es, den Beweis des Spektralsatzes auf die Spektraldarstellung unitärer Operatoren zurückzuführen.

## a) Spektralzerlegung unitärer Operatoren

Wie bisher sei $H$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum. Zunächst wiederholen wir einige Aussagen über unitäre Operatoren, die wir bereits kennengelernt haben. Ein Operator $U \in L(H)$ heißt unitär, falls $UU^* = U^*U = \mathrm{id}_H$ gilt. Ein (nicht notwendig auf ganz $H$ definierter) Operator $U$ in $H$ heißt isometrisch, falls $\|Ux\| = \|x\| \quad (x \in D(U))$ gilt.

**5.2 Lemma.** *Sei $U \in L(H)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$U$ ist unitär.*

(ii) *$U$ ist surjektiv und es gilt $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in H)$.*

(iii) *$U$ ist surjektiv und isometrisch.*

*Beweis.* Sei $U \in L(H)$ unitär. Dann gilt $UU^* = \mathrm{id}_H$, d.h. $U$ ist surjektiv, und

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in H).$$

Aus dieser Gleichheit folgt sofort $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in H$.

Sei andererseits $U$ surjektiv und isometrisch. Dann folgt aus der Polarisationsformel (Satz 1.3) $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$ und damit $U^*U = \mathrm{id}_H$. Da $U$ bijektiv ist, folgt $U^* = U^*UU^{-1} = U^{-1}$, d.h. $U$ ist unitär. □

Wir wissen schon, dass für einen selbstadjungierten Operator $T = T^* \in L(H)$ der Operator $e^{iA}$ unitär ist. Wir werden nun zeigen, dass alle unitären Operatoren diese Form haben.

**5.3 Satz.** *Sei $U \in L(H)$ unitär. Dann existiert ein selbstadjungierter Operator $T \in L(H)$ mit $\|T\| \le \pi$ und $U = e^{iT}$.*

*Beweisskizze.* Setze $V := \frac{1}{2}(U + U^*) = \operatorname{Re} U$ und $W := \frac{1}{2i}(U - U^*) = \operatorname{Im} U$. Dann sind $V$ und $W$ selbstadjungiert, vertauschen, es gilt $V^2 + W^2 = 1$, $\|V\| \le 1$, $\|W\| \le 1$ und $U = V + iW$.

Die Idee besteht nun darin, einen Operator $T$ zu suchen, für welchen gilt

$$V + iW = U = e^{iT} = \cos T + i \sin T.$$

D.h. wir suchen $T$ mit $\cos T = V$ und $\sin T = W$. Grundsätzlich könnte man $T := \arccos V$ setzen. Aber die Gleichung $\sin T = W$ gilt dann nicht immer, es ist eine Modifikation nötig. Diese besteht in den folgenden Schritten:

(i) Setze $\widetilde{W} := \sin(\arccos V)$. Dann gilt $V^2 + \widetilde{W}^2 = 1$, $W$ ist selbstadjungiert und es gilt $W\widetilde{W} = \widetilde{W}W$.

(ii) Nach (i) gilt $W^2 = \widetilde{W}^2$, und beide Operatoren sind selbstadjungiert und vertauschen. Man rechnet direkt nach, dass

$$W = (2P - 1)\widetilde{W}$$

gilt, wobei $P := \chi_{\{0\}}(W - \widetilde{W})$ die orthogonale Projektion auf $\ker(W - \widetilde{W})$ ist. Beachte, dass $(2P - 1)^2 = 1$ gilt.

(iii) Setze nun $T := (2P - 1)\arccos V$. Da die cos-Reihe nur quadratische Terme enthält und $(2P - 1)^2 = 1$ gilt, erhalten wir $\cos T = V$. Die sin-Reihe enthält nur ungerade Potenzen, in jedem Summanden bleibt also ein Faktor $2P - 1$ stehen (hier braucht man, dass $2P - 1$ mit $T$ vertauscht). Damit haben wir

$$\sin T = \sin[(2P - 1)\arccos V] = (2P - 1)\sin(\arccos V) = (2P - 1)\widetilde{W} = W.$$

Damit ist $T$ der gesuchte Operator mit $U = e^{iT}$. Die Bedingung $\|T\| \le \pi$ folgt aus dem Spektralsatz, da $\|\arccos\|_\infty = \pi$. □

**5.4 Satz** (Spektralsatz für unitäre Operatoren)**.** *Sei $U \in L(H)$ unitär. Dann existiert ein PV-Maß $E$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ mit $E([-\pi, \pi]) = \mathrm{id}_H$ und*

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE(\lambda).$$

*Für jedes Polynom $p$ gilt*

$$p(U) = \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\lambda}) dE(\lambda).$$

*Durch $f(U) := \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\lambda}) dE(\lambda)$ wird der Operator $f(U) \in L(H)$ für jedes $f \in B([-\pi, \pi])$ definiert.*

*Beweis.* Sei $U = e^{iT}$ nach Satz 5.3 und $E$ die Spektralschar von $T$. Dann folgt die Behauptung aus dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren. Beachte $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|] \subset [-\pi, \pi]$. Für die letzte Aussage verwende den Transformationssatz 4.27. □

## b) Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren

**5.5 Definition.** Sei $T$ ein linearer Operator in $H$ mit $\overline{D(T} = H$.

a) $T$ heißt symmetrisch, wenn $T \subset T^*$ gilt, d.h. wenn $D(T) \subset D(T^*)$ und $T^*|_{D(T)} = T$.

b) $T$ heißt selbstadjungiert, falls $T = T^*$ gilt.

c) $T$ heißt wesentlich selbstadjungiert, falls der Abschluss $\overline{T}$ existiert und $\overline{T}$ selbstadjungiert ist.

**5.6 Bemerkung.** a) Es gilt $T \subset T^*$ genau dann, wenn $G(T) \subset G(T^*)$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \quad (x, y \in D(T)).$$

b) Falls $T$ symmetrisch ist, so gilt

$$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \quad (x \in D(T)).$$

Dies ist (da $H$ komplexer Hilbertraum ist) sogar äquivalent zur Symmetrie von $T$. Dies sieht man genauso wie im Beweis von Lemma 3.2

c) Falls $T$ symmetrisch ist, so ist $T$ abschließbar, und es gilt $\overline{T} \subset T^*$. Denn der Graph $G(T^*)$ ist abgeschlossen.

**5.7 Definition.** Sei $T$ ein linearer Operator in $H$. Dann heißt

$$r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, C_\lambda > 0 \,\forall\, x \in D(T) : \|(T-\lambda)x\| \geq C_\lambda \|x\|\}$$

die Menge der Punkte regulären Typs von $T$.

**5.8 Bemerkung.** Falls $T$ symmetrisch ist, so gilt $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset r(T)$. Dann für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt

$$\|(T-\lambda)x\| \cdot \|x\| \geq \big|\langle (T-\lambda)x, x\rangle\big| \geq \big|\operatorname{Im}\langle (T-\lambda)x, x\rangle\big| = |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|x\|^2.$$

Hier wurde verwendet, dass $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

**5.9 Definition.** Sei $T$ ein symmetrischer Operator in $H$. Dann heißen

$$n_+(T) := \dim R(T-i)^\perp$$

und

$$n_-(T) := \dim R(T+i)^\perp$$

die Defektindizes von $T$.

Es gilt $n_+ = \dim R(T-\lambda)^\perp$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Eine analoge Aussage gilt für $n_-$. Der Beweis dieser Tatsache wird hier weggelassen.

**5.10 Definition.** Sei $T$ ein symmetrischer linearer Operator in $H$. Dann heißt der Operator

$$U_T : R(T+i) \to H,\ U_T = (T-i)(T+i)^{-1}$$

die Cayley-Transformierte von $T$.

In obiger Definition ist zu beachten, dass $i \in r(T)$ und damit $T+i$ injektiv ist. Daher ist die Inverse $(T+i)^{-1}$ und somit $U_T$ wohldefiniert.

**5.11 Lemma.** *Sei $T$ ein symmetrischer dicht definierter Operator in $H$.*

a) *$T$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $R(T+i)$ und $R(T-i)$ beide abgeschlossen sind.*

b) *Die Cayley-Transformierte $U_T$ ist isometrisch, und es gilt $1 \notin \sigma_p(U_T)$.*

c) *$U_T$ ist genau dann ein unitärer Operator in $L(H)$, falls $T$ selbstadjungiert ist.*

*Beweis.* b) Zu zeigen ist $\|U_Ty\| = \|y\| \quad (y \in D(U_T))$, d.h.

$$\|(T+i)x\| = \|(T-i)x\| \quad (x \in D(T)).$$

Dies folgt leicht durch Ausmultiplizieren von $\langle (T\pm i)x, (T\pm i)x\rangle$ wegen $\langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle \quad (x \in D(T))$.

Angenommen es gelte $1 \in \sigma_p(U_T)$. Dann existiert ein $x \in D(T)$ mit

$$y = (T+i)x = U_Ty = (T-i)x.$$

Also ist $2ix = 0$ und somit $x = 0$ und $y = 0$, Widerspruch.

a) (i) Sei $T$ abgeschlossen und $(y_n)_n \subset R(T+i)$ eine Folge mit $y_n \to y$. Wegen $\|U_Ty_n\| = \|y_n\|$ ist auch $(U_Ty_n)_n$ konvergent, etwa $U_Ty_n \to \widetilde{y}$. Sei $x_n := (T+i)^{-1}y_n \in D(T)$. Dann gilt $y_n = (T+i)x_n$ und $U_Ty_n = (T-i)x_n$. Somit

$$x_n = \frac{1}{2i}(y_n - U_Ty_n), \quad Tx_n = \frac{1}{2}(y_n + U_Ty_n). \tag{5-1}$$

Also sind beide Folgen $(x_n)_n$ und $(Tx_n)_n$ konvergent. Sei $x := \lim x_n$ und $w := \lim Tx_n$. Da $T$ abgeschlossen ist, gilt $x \in D(T)$ und $w = Tx$.

Wegen $x = \frac{1}{2i}(y - \widetilde{y})$ und $Tx = \frac{1}{2}(y + \widetilde{y})$ folgt

$$y = Tx + ix \in D(U_T), \quad \widetilde{y} = Tx - ix \in R(T+i) = R(U_T).$$

Somit ist $D(U_T)$ abgeschlossen. Da $U_T : D(U_T) \to R(U_T)$ eine Isometrie ist, ist $U_T$ offen und damit $R(U_T)$ abgeschlossen.

(ii) Falls $R(T \pm i)$ abgeschlossen ist, folgt mit den gleichen Überlegungen unter Verwendung von (5-1), dass der Operator $T$ abgeschlossen ist.

c) (i) Sei $T$ selbstadjungiert. Dann ist $R(T \pm i)^\perp = \ker(T \mp i) = \{0\}$. Nach Teil b) ist $R(T \pm i)$ abgeschlossen. Damit ist $D(U_T) = H$ und $R(U_T) = H$. Nach Lemma 5.2 ist $U$ unitär.

(ii) Sei nun $U_T \in L(H)$ unitär. Dann folgt $R(T + i) = D(U_T) = H$ und $R(T - i) = R(U_T) = H$. Daraus folgt wie oben $\ker(T \pm i) = \{0\}$.

Sei $v \in D(T^*)$. Dann ist $\langle Tx, v\rangle = \langle x, T^*v\rangle \quad (x \in D(T))$. Es gilt

$$x = \frac{1}{2i}(y - U_T y), \quad Tx = \frac{1}{2}\,(y + U_T y) \tag{5-2}$$

mit $y = (T + i)x$ (vergleiche auch (5-1)). Also gilt

$$\left\langle \frac{1}{2}(y + U_T y), v \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2i}(y - U_T y), T^* v \right\rangle \quad (y \in H).$$

Bringt man den Operator $U_T$ durch Adjunktion auf eine Seite, erhält man

$$\langle y, -iv - iU_T^* v\rangle = \langle y, T^*v - U_T^* T^* v\rangle \quad (y \in H).$$

Also gilt

$$iv + iU_T^* v = -T^*v + U_T^* T^* v$$

und damit

$$T^*v - iv = U_T(T^*v + iv).$$

Setze $z := T^*v + iv$. Dann gelten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} T^*v + iv &= z, \\ T^*v - iv &= U_T z. \end{aligned} \tag{5-3}$$

Wir erhalten

$$v = \frac{1}{2i}(1 - U_T)z \in R(1 - U_T) = D(T)$$

und $Tv = \frac{1}{2}(1 + U_T)z = T^*v$.

Wir haben gezeigt, dass $T \supset T^*$ gilt. Da $T$ symmetrisch ist, folgt $T = T^*$, d.h. $T$ ist selbstadjungiert. □

**5.12 Bemerkung.** Im letzten Beweis haben wir gesehen, dass $D(T) = R(1 - U_T)$ und $T = i(1 + U_T)(1 - U_T)^{-1}$ gilt. Damit ist $T$ durch $U_T$ eindeutig festgelegt.

**5.13 Satz** (Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren)**.** *Sei $T$ ein selbstadjungierter (nicht notwendig beschränkter) Operator in einem $\mathbb{C}$-Hilbertraum $H$. Dann existiert ein PV-Maß $E\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to L(H)$ mit*

$$\langle Tx, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E(\lambda)x, x\rangle \quad (x \in D(T)).$$

*Beweis.* Sei $U_T$ die Cayley-Transformierte von $T$. Dann ist $U_T$ unitär nach Lemma 5.11, und es gilt nach Bemerkung 5.12

$$T = i(1 + U_T)(1 - U_T)^{-1}.$$

Sei $\widetilde{E}\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to L(H)$ die zu $-U_T$ gehörige Spektralschar, d.h. es gilt

$$-U_T = \int_{[-\pi,\pi]} e^{i\lambda} d\widetilde{E}(\lambda).$$

Es gilt $\widetilde{E}(\{\pm\pi\}) = 0$. Denn sonst ist nach Satz 4.28 die Zahl $\pm\pi$ ein Eigenwert des Operators $B := \int_{[-\pi,\pi]} \lambda d\widetilde{E}(\lambda)$. Aus $Bx = \pm\pi x$ folgt nach Satz 4.4 auch $f(B)x = f(\pm\pi)x$ für alle stetigen Funktionen $f$. Damit ist

$$-1 = e^{\pm i\pi} \in \sigma_p(e^{iB}) = \sigma_p(-U_T),$$

d.h. es gilt $1 \in \sigma_p(U_T)$ im Widerspruch zu Lemma 5.11.

Somit gilt

$$-U_T = \int_{(-\pi,\pi)} e^{i\lambda} d\widetilde{E}(\lambda).$$

Sei $x \in D(T) = R(1 - U_T)$ (siehe Bemerkung 5.12) und $y := (1 - U_T)^{-1}x$. Dann ist $Tx = i(1 + U_T)y$ und damit

$$\begin{aligned}\langle Tx, x\rangle &= \langle i(1 + U_T)y, (1 - U_T)y\rangle = i\langle U_T y, y\rangle - i\langle y, U_T y\rangle \\ &= i\langle (U_T - U_T^{-1})y, y\rangle = -i \int_{(-\pi,\pi)} (e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}) d\langle \widetilde{E}(\lambda)y, y\rangle.\end{aligned}$$

Betrachte nun die Transformation

$$\varphi\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R},\ \mu \mapsto \tan\frac{\mu}{2},$$

und definiere dazu das Bildmaß $E := \widetilde{E} \circ \varphi^{-1}$. Nach dem Tranformationssatz gilt für $x \in D(T)$

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E(\lambda)x, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle \widetilde{E} \circ \varphi^{-1}(\lambda)x, x\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{(-\pi,\pi)} \varphi(\lambda) d\langle \widetilde{E}(\lambda)x, x\rangle \\
&= \int_{(-\pi,\pi)} \varphi(\lambda) d\big\langle \widetilde{E}(\lambda)(1-U_T^*)(1-U_T)y, y\big\rangle \\
&= \Big\langle \Big[ \int_{(-\pi,\pi)} \varphi(\lambda) d\widetilde{E}(\lambda)\Big] (1-U_T^*)(1-U_T)y, y\Big\rangle \\
&= \langle \varphi(B)(1-U_T^*)(1-U_T)y, y\Big\rangle \\
&= \langle \varphi(B)(1+e^{-iB})(1+e^{iB})y, y\Big\rangle \\
&= \int_{(-\pi,\pi)} \tan\frac{\lambda}{2} \cdot (2+e^{-i\lambda}+e^{i\lambda}) d\langle \widetilde{E}(\lambda)y, y\rangle \\
&= -i \int_{(-\pi,\pi)} (e^{i\lambda}-e^{-i\lambda}) d\langle \widetilde{E}(\lambda)y, y\rangle \\
&= \langle Tx, x\rangle.
\end{aligned}
$$

□

# 6. Ein kurzer Ausflug in die Quantenmechanik

**6.1 Worum geht's?** Dieser kurze Abschnitt ist der letzte, der sich mit dem Spektralsatz im weiteren Sinne beschäftigt. Mit den bisher behandelten Begriffen und Methoden haben wir schon alles zur Verfügung, um die Quantentheorie zu formulieren. Die Operatortheorie ist das wichtigste Hilfsmittel, um quantenmechanische Aussagen zu beweisen. Hier findet auch das Spektrum eines Operators eine Interpretation. In diesem Abschnitt sollen vor allem Begriffe geklärt werden.

**6.2 Definition.** Ein quantenmechanisches System ist beschrieben durch folgende Größen:

(i) Der Zustandsraum ist ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum $H$. Die Menge

$$H_1 := \{\psi \in H : \|\psi\| = 1\}$$

heißt die Menge der reinen Zustände.

(ii) Eine Observable ist ein selbstadjungierter Operator in $H$ (oder äquivalent dazu, ein PV-Maß $E$). Beispiele sind der Ort $X$, der Impuls $P$, der Drehimpuls $J$, die Energie $H$ und der Spin $\sigma$.

(iii) Sei $S$ eine Observable mit Spektralmaß $E$. Falls das System im Zustand $\psi \in H_1 \cap D(S)$ ist, dann heißt $\langle \psi, S\psi\rangle \in \mathbb{R}$ der Erwartungswert der Observable $S$ im Zustand $\psi$.

Für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ist

$$\langle \psi, E(A)\psi \rangle = \|E(A)\psi\|^2 = E_\psi(A) \in [0,1]$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Messung von $S$ der gemessene Wert in der Menge $A$ liegt.

**6.3 Bemerkung.** Nach den obigen Definitionen und unter Verwendung des Spektralsatzes gilt

$$\langle \psi, S\psi \rangle = \Big\langle \psi, \int_{\sigma(S)} \mathrm{id}_{\sigma(S)}\, dE\psi \Big\rangle = \int_{\sigma(S)} \mathrm{id}_{\sigma(S)}\, dE_\psi = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\psi(\lambda).$$

Damit stimmt der Begriff des Erwartungswertes aus Definition 6.2 (iii) mit dem üblichen Begriff des Erwartungswertes aus der Stochastik überein (wobei hier das Maß durch $E_\psi$ gegeben ist).

**6.4 Beispiel** (Ortsobservable)**.** Hier ist $H = L_2(\mathbb{R})$. Die Ortsobservable $X$ ist definiert durch

$$(X\psi)(x) := x\psi(x),$$

d.h. $X$ ist der Multiplikationsoperator mit der Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Der natürliche Definitionsbereich dieses Multiplikationsoperators ist gegeben durch

$$D(X) = \Big\{ \psi \in L_2(\mathbb{R}) : \int x^2 |\psi(x)|^2 dx < \infty \Big\}.$$

Der Operator $X$ ist selbstadjungiert. Es gilt für das zugehörige Spektralmaß

$$(E(A)\psi)(x) = \chi_A(x) \cdot \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R};\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})).$$

Somit ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Gebiet $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$\langle \psi, E(A)\psi \rangle = E_\psi(A) = \int_A |\psi(x)|^2 dx.$$

Damit ist $|\psi(\cdot)|^2$ die Aufenthaltsdichte des Teilchens, d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung hat $|\psi(\cdot)|^2$ als Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes.

Man spricht von der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion in der Ortsdarstellung nach Schrödinger.

**6.5 Beispiel** (Impulsobservable)**.** Wieder ist $H = L_2(\mathbb{R})$. Definiere die Abbildung

$$U\colon \mathbb{R} \to L(H),\ (U(a)\psi)(x) = \psi(x-a).$$

Dann ist $U$ eine starkstetige unitäre Gruppe (die starke Stetigkeit müsste man noch nachrechnen). Nach dem Satz von Stone existiert ein eindeutiger Operator $P$ mit

$U(a) = e^{-iaP/\hbar}$. Dabei ist $\hbar$ eine Konstante, das Planksche Wirkungsquantum. Die Konstanten $\hbar$ und das Minus-Zeichen sind (aus mathematischer Sicht) nur Konvention.

Für $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\frac{1}{a}(U(a) - \mathrm{id}_H)\psi(x) = \frac{1}{a}(\psi(x-a) - \psi(x)) \to -\psi'(x) \quad (a \to 0)$$

punktweise und – mit majorisierter Konvergenz – auch in $L_2(\mathbb{R})$. Damit ist $P$ gegeben durch

$$\begin{aligned} D(P) &:= \Big\{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \psi' := \lim_{a\to 0} \frac{\psi(\cdot - a) - \psi(\cdot)}{a} \text{ existiert in } L_2(\mathbb{R})\Big\}, \\ P\psi &:= \frac{\hbar}{i}\,\psi' \quad (\psi \in D(P)). \end{aligned}$$

Wenn man den Begriff der Ableitung allgemeiner gefasst hat, so kann man sehen, dass

$$D(P) = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \psi' \in L_2(\mathbb{R})\} =: H^1(\mathbb{R}).$$

Dabei ist $H^1(\mathbb{R})$ der sogenannte Sobolevraum der Ordnung 1.

**6.6 Lemma** (Kanonische Vertauschungsrelationen nach Heisenberg)**.** *Für die Ortsvariable $X$ und die Impulsvariable $P$ gilt*

$$XP - PX \subset \hbar i \ \mathrm{id}_{L_2(\mathbb{R})}.$$

*Beweis.* Für $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$[(XP - PX)\psi](x) = x\,\frac{\hbar}{i}\,\psi'(x) - \frac{\hbar}{i}\,\psi(x) - \frac{\hbar}{i}\,x\psi'(x) = \hbar i\psi(x).$$

Damit gilt

$$XP - PX|_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} = \hbar i \ \mathrm{id}_{\mathscr{D}(\mathbb{R})}.$$

Sei $A := \frac{1}{\hbar i}(XP - PX)$. Dann ist $A$ symmetrisch, d.h. es gilt $A \subset A^*$, und $\mathrm{id}_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} = A|_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} \subset A \subset A^*$. Damit erhalten wir

$$A \subset \overline{A} = A^{**} \subset \Big(\mathrm{id}_{\mathscr{D}(\mathbb{R})}\Big)^* = \Big(\overline{\mathrm{id}_{\mathscr{D}(\mathbb{R})}}\Big)^* = (\mathrm{id}_{L_2(\mathbb{R})})^* = \mathrm{id}_{L_2(\mathbb{R})}.$$

□

Im folgenden vereinfachen wir die Darstellung, indem wir $\hbar = 1$ wählen.

**6.7 Lemma** (Kanonische Vertauschungsrelationen nach Weyl)**.** *Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$*

$$e^{iaP}e^{ibX} = e^{iba}\ e^{ibX}e^{iaP}.$$

*Beweis.* Der Operator $e^{ibX} \in L(H)$ ist der Multiplikationsoperator mit der Funktion $t \mapsto e^{ibt}$. Außerdem gilt $(e^{iaP}\psi)(x) = \psi(x+a)$. Somit gilt

$$(e^{iaP}e^{ibX}\psi)(x) = (e^{ibX}\psi)(x+a) = e^{ib(x+a)}\psi(x+a)$$

und

$$(e^{ibX}e^{iaP}\psi)(x) = e^{ibx}\psi(x+a).$$

□

**6.8 Definition.** Sei $S$ eine Observable und $\psi \in H_1 \cap D(S)$ ein reiner Zustand. Der Erwartungswert von $S$ im Zustand $\psi$ wird geschrieben als

$$\langle S \rangle_\psi := \langle \psi, S\psi \rangle \ \Big( = \int s dE_\psi(s) \Big).$$

Für $\psi \in D(S^2) \subset D(S)$ ist die Varianz von $S$ im Zustand $\psi$ definiert als

$$\operatorname{var}_\psi S := \Big\langle \psi, (S - \langle S \rangle_\psi \operatorname{id}_H)^2 \psi \Big\rangle \ \Big( = \int (s - \langle S \rangle_\psi)^2 dE_\psi(s) \Big).$$

Die Größe $(\Delta S)_\psi := \sqrt{\operatorname{var}_\psi S}$ heißt die Standardabweichung oder Unschärfe von $S$ im Zustand $\psi$.

**6.9 Lemma.** *In der Situation von Defintion 6.8 gilt $(\Delta S)_\psi = 0$ genau dann, wenn $\psi$ ein Eigenvektor von $S$ zum Eigenwert $\lambda_0 := \langle S \rangle_\psi$ ist.*

*Beweis.* Die folgenden Bedingungen sind alle äquivalent:

$$\begin{aligned}
&(\Delta S)_\psi = 0,\\
&\int (s - \lambda_0)^2 dE_\psi(s) = 0,\\
&E_\psi(\{\lambda_0\}) = 1,\\
&\psi \in R(E\{\lambda_0\}),\\
&\psi \in \ker(S - \lambda_0).
\end{aligned}$$

□

**6.10 Satz** (Heisenbergsche Unschärferelation)**.** *Seien $A$, $B$ Observable und sei $\psi \in D(A^2) \cap D(AB) \cap D(BA) \cap D(B^2)$. Dann gilt*

$$(\Delta A)_\psi (\Delta B)_\psi \geq \frac{1}{2} \langle C \rangle_\psi \qquad \textit{mit } C := \frac{1}{i}(AB - BA).$$

*Speziell folgt für die Orts- und Impulsobservable:*

$$(\Delta X)_\psi (\Delta P)_\psi \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\psi \in H_1 \cap D(X^2) \cap D(P^2)).$$

*Beweis.* Sei $a := \langle A\rangle_\psi$, $b := \langle B\rangle_\psi$, $A_0 := A - a$ und $B_0 := B - b$. Dann ist

$$A_0B_0 - B_0A_0 = AB - BA = iC$$

und

$$\|A_0\psi\| = \langle\psi, A_0^2\psi\rangle^{1/2} = (\Delta A)_\psi.$$

Analog gilt $\|B_0\psi\| = (\Delta B)_\psi$. Wir haben

$$2i\,\mathrm{Im}\langle A_0\psi, B_0\psi\rangle = \langle A_0\psi, B_0\psi\rangle - \langle B_0\psi, A_0\psi\rangle = \langle\psi, (A_0B_0 - B_0A_0)\psi\rangle = -i\langle\psi, C\psi\rangle.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(\Delta A)_\psi(\Delta B)_\psi &= \|A_0\psi\|\cdot\|B_0\psi\| \geq \big|\langle A_0\psi, B_0\psi\rangle\big| \\ &\geq \big|\,\mathrm{Im}\langle A_0\psi, B_0\psi\rangle\big| \geq \frac{1}{2}\big|\langle\psi, C\psi\rangle\big| \geq \frac{1}{2}\langle C\rangle_\psi.\end{aligned}$$

Der Spezialfall folgt aus Lemma 6.6. □

# Literatur

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York 1975.

[2] Diestel, J., Uhl, J. J.: Vector measures. Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[3] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators. I. General Theory. Interscience Publishers, New York 1963.

[4] Gohberg, I., Goldberg, S.: Basic operator theory. Birkhäuser Boston 1981.

[5] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: Classes of linear operators. Vol. I. Birkhäuser Basel 1990.

[6] Halmos, P.: A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin 1974.

[7] Heuser, H.: Funktionalanalysis. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart 1986.

[8] Hirzebruch, F., Scharlau, W.: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibliogr. Inst. Mannheim 1971.

[9] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer Berlin 1976.

[10] Pazy, A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, Berlin et al. 1983.

[11] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Academic Press San Diego 1980.

[12] Rudin, W.: Functional analysis. McGraw-Hill New York 1973.

[13] Rudin, W.: Real and complex analysis. McGraw-Hill New York 1986.

[14] Werner, D.: Funktionalanalysis (5., erw. Aufl.). Springer Berlin 2005.

[15] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin et al. 1965.