Skript zur Vorlesung

Funktionalanalysis

Sommersemester 2022

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 22.07.2022

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische und metrische Räume, Kompaktheit 1

a) Topologie und Metrik 1

b) Kompaktheit 7

2 Normierte Räume und Hilberträume 10

a) Normierte Räume und Banachräume 10

b) Hilberträume 17

c) Der Approximationssatz und der Satz von Riesz für Hilberträume . 19

d) Orthonormalbasen 22

3 Hahn-Banach-Sätze und Reflexivität 27

a) Hahn–Banach-Sätze 27

b) Dualräume und Reflexivität 30

4 Lineare Operatoren: Grundbegriffe 33

a) Operatoren und Spektrum 33

b) Eigenschaften der Resolventenabbildung 36

5 Distributionen und Sobolevräume 42

a) Distributionen 42

b) Sobolevräume: Definition und erste Eigenschaften 45

c) Wichtige Sätze aus der Theorie der Sobolevräume 47

Literatur 50

Index 51

1. Topologische und metrische Räume, Kompaktheit

1.1 Worum geht's? Aus der Analysis sind viele Begriffe bekannt, welche mit Konvergenz und Stetigkeit zusammenhängen. Auftretende Strukturen sind hier z.B. metrische Räume, normierte Räume oder Hilberträume. Der gemeinsame Begriff für diese Räume sind topologische Räume. Die Topologie ist eines Raums beschreibt das System aller offenen Mengen und ist axiomatisch ähnlich wie eine σ-Algebra definiert. Einer der wichtigsten Begriffe bei topologischen Räumen ist die Kompaktheit. Bekannte Sätze wie „Bilder kompakter Mengen bei stetigen Funktionen sind kompakt" übertragen sich ohne Schwierigkeiten auf allgemeine topologische Räume.

a) Topologie und Metrik

Wir starten mit der Definition einiger grundlegender Begriffe der Topologie. Eine Topologie ist ähnlich wie eine σ-Algebra ein Mengensystem.

1.2 Definition. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge; $\mathscr{P}(X)$ bezeichne die Potenzmenge von X.

a) Ein Mengensystem $\mathcal{T} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt eine Topologie auf X, falls gilt

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(ii) Falls $A, B \in \mathcal{T}$, so ist auch $A \cap B \in \mathcal{T}$,

(iii) Falls I eine Indexmenge ist und $A_i \in \mathcal{T} \quad (i \in I)$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

In diesem Falls heißt $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

b) Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ stetig, falls $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$. Die Abbildung f heißt offen, falls für alle $U \in \mathcal{T}_1$ gilt $f(U) \in \mathcal{T}_2$. Die Abbildung f heißt ein Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und f und f^{-1} beide stetig sind.

c) Sei $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann heißt die kleinste Topologie, die $\mathscr{U}$ enthält, die von $\mathscr{U}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}(\mathscr{U})$. In diesem Fall heißt $\mathscr{U}$ eine Subbasis der Topologie.

d) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt ein Mengensystem $\mathscr{U} \subset \mathcal{T}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, falls sich jedes Element von $\mathcal{T}$ als Vereinigung von Elementen aus $\mathscr{U}$ schreiben lässt.

e) Sei I eine Menge und $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ topologischer Raum für $i \in I$. Sei $F = \{f_i\colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen. Dann heißt die kleinste (gröbste) Topologie auf X, für die alle $f \in F$ stetig sind, die F-schwache Topologie $\mathcal{T}(F)$ auf X.

f) Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ das kartesische Produkt, wobei $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ein topologischer Raum für $i \in I$ ist. Sei $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$ die Projektion auf die i-te Komponente. Dann heißt $\mathcal{T}(\{\mathrm{pr}_i\colon i \in I\})$ die Produkttopologie auf X.

g) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Das Mengensystem $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y\colon U \in \mathcal{T}\} \subset \mathscr{P}(Y)$ heißt Spurtopologie auf Y (auch Teilraumtopologie oder relative Topologie oder induzierte Topologie genannt). Dies ist die gröbste Topologie auf Y, für die die Inklusionsabbildung $Y \to X$, $y \mapsto y$, stetig ist.

1.3 Bemerkung. a) Die kleinste (gröbste) Topologie auf einer Menge X ist gegeben durch $\mathcal{T}_1 := \{\emptyset, X\}$. Die größte (feinste) Topologie ist gegeben durch $\mathcal{T}_2 := \mathcal{P}(X)$.

b) In der Situation von 1.2 d) gilt

$$\mathcal{T}(F) = \mathcal{T}\Big(\big\{f_i^{-1}(U_i)\colon U_i \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\big\}\Big).$$

[[Sei $\mathscr{U} := \{f_i^{-1}(U_i)\colon U_i \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\}$.

$\mathcal{T}(F) \supset \mathcal{T}(\mathscr{U})$: Da jedes f_i stetig ist, gilt $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}(F)$ $(U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I)$, d.h. $\mathscr{U} \subset \mathcal{T}(F)$. Da $\mathcal{T}(F)$ eine Topologie ist, welche $\mathscr{U}$ enthält, gilt $\mathcal{T}(F) \supset \mathcal{T}(\mathscr{U})$.

$\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}(\mathscr{U})$: Wegen $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}(\mathscr{U})$ ist jedes f_i stetig. Damit ist $\mathcal{T}(\mathscr{U})$ eine Obermenge der kleinsten Topologie, in welcher jedes f_i stetig ist.]]

c) Die erzeugte Topologie $\mathcal{T}(\mathscr{U})$ ist das System aller Mengen der Form $\bigcup_{i\in I}\bigcap_{n=1}^{N_i} U_{in}$ mit $U_{in} \in \mathscr{U}$, $N_i \in \mathbb{N}_0$, I eine Indexmenge. Dabei ist $\bigcap_{n=1}^{0} U_{in} = \bigcap_{n\in\emptyset} U_{in} = X$. Insbesondere ist eine Subbasis einer Topologie bereits eine Basis, falls sie durchschnittstabil ist, d.h. falls der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus der Subbasis wieder Element der Subbasis ist.

[[Jede Menge dieser Form muss nach Definition einer Topologie in $\mathcal{T}(\mathscr{U})$ enthalten sein. Zu zeigen ist daher, dass das System all dieser Mengen eine Topologie ist. Sei $\mathscr{B} := \{\bigcap_{n=1}^{N} U_n : U_n \in \mathscr{U}, N \in \mathbb{N}_0\}$. Dann gilt $X \in \mathscr{B}$ und zu $V_1, V_2 \in \mathscr{B}$ und $x \in V_1 \cap V_2$ existiert ein $V \in \mathscr{B}$ mit $x \in V \subset V_1 \cap V_2$ (denn man kann $V := V_1 \cap V_2$ wählen). Dann ist $\mathscr{B}$ Basis einer Topologie, und (nach Definition einer Basis) das oben angegebene System ist gleich $\mathcal{T}(\mathscr{B})$, also insbesondere eine Topologie.]]

d) Zur Erinnerung: das kartesische Produkt X einer (eventuell überabzählbaren) Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Mengen X_i ist definiert als die Menge aller Abbildungen $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ mit $f(i) \in X_i$ für jedes $i \in I$. Falls jedes X_i nichtleer ist, dann ist auch das kartesische Produkt nichtleer — dies ist äquivalent zum Auswahlaxiom, welches wir in dieser Vorlesung immer annehmen wollen.

e) Man beachte die Ähnlichkeit zur Definition einer σ-Algebra. Bei einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ gilt statt a) (iii) nur

$$A_n \in \mathcal{A} \quad (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A},$$

dafür ist mit einer Menge A auch $X \setminus A$ in der σ-Algebra. Viele Begriffe wie die erzeugte σ-Algebra und die Produkt-σ-Algebra sind analog definiert. Es gibt allerdings keine so einfache Darstellung der erzeugten σ-Algebra wie in a).

1.4 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.

a) Eine Menge $U \subset X$ heißt offen, falls $U \in \mathcal{T}$, und abgeschlossen, falls $X \setminus U \in \mathcal{T}$. Das Innere $\mathring{A}$ einer Menge $A \subset X$ ist definiert als die größte offene Menge U mit $U \subset A$. Der Abschluss $\overline{A}$ ist definiert als die kleinste abgeschlossene Menge V mit $A \subset V$.

b) Seien $A \subset B \subset X$. Dann heißt A dicht in B, falls $\overline{A} \supset B$ gilt.

c) Der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt separabel, falls eine abzählbare Teilmenge $A \subset X$ existiert, welche dicht in X ist.

d) Eine (nicht notwendig offene) Menge $V \subset X$ heißt eine Umgebung eines Punktes $x \in X$, falls eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ existiert mit $x \in U \subset V$. Eine Familie $\mathcal{N}$ von Teilmengen von X heißt eine Umgebungsbasis des Punktes $x \in X$, wenn jedes $N \in \mathcal{N}$ eine Umgebung von x ist und für jede Umgebung M von x ein $N \in \mathcal{N}$ existiert mit $N \subset M$.

e) $(X, \mathcal{T})$ heißt Hausdorff-Raum (oder T_2-Raum), falls für jedes $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ existieren mit $x \in U_x$, $y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$.

f) $(X, \mathcal{T})$ heißt normal (oder T_4-Raum), falls $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffsch ist und für alle abgeschlossenen Mengen A_1, A_2 mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ offene Mengen $U_1 \supset A_1$, $U_2 \supset A_2$ existieren mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Die beiden folgenden Sätze werden hier nicht bewiesen.

1.5 Satz (Lemma von Urysohn)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ normaler topologischer Raum, und seien $A_1, A_2 \subset X$ abgeschlossen mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dann existiert ein $f \in C(X; \mathbb{R})$ mit $0 \le f \le 1$ und $f|_{A_1} = 0$, $f|_{A_2} = 1$.*

1.6 Satz (Erweiterungslemma von Tietze)**.** *Sei (X, τ) ein normaler topologischer Raum. Sei $M \subset X$ abgeschlossen, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \colon M \to [a, b]$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $F \colon X \to [a, b]$ von f.*

Um hierbei die Stetigkeit der Abbildung f erklären zu können, wird M mit der Spurtopologie ausgestattet.

Bei topologischen Räumen kann man einige Begriffe definieren, die schon aus dem ersten Studienjahr bekannt sind. Hier einige Beispiele:

1.7 Definition. Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge.

a) Ein Element $x \in X$ heißt Häufungspunkt der Menge A, falls für jede Umgebung U von x ein $a \in A$ existiert mit $a \in U$ und $a \neq x$.

Ein Element $x \in X$ heißt Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen.

b) Ein Element $x \in X$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls in jeder offenen Menge, die x enthält, alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen. Man schreibt $\lim_{n\to\infty} x_n := x$, oder $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

Und auch für die Stetigkeit einer Abbildung $f\colon X \to Y$ gibt es eine Beschreibung, die dem bereits bekannten ε–δ–Zugang entspricht:

1.8 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Dann ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ stetig genau dann, wenn zu jedem $x_0 \in X$ und jeder Umgebung V_Y von $y_0 := f(x_0)$ eine Umgebung U_X von x_0 existiert mit $f(U_X) \subset V_Y$.*

[[(i) Sei f stetig. Wähle $W \subset Y$ offen mit $y_0 \in W \subset V_Y$ (Definition Umgebung). Dann ist $U_X := f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_X$ mit $f(U_X) \subset W \subset V_Y$.

(ii) Es gelte die Bedingung des Lemmas, und sei $B \subset Y$ offen. Für jedes $x \in f^{-1}(B)$ ist B eine Umgebung von $f(x)$, und nach Voraussetzung existiert eine Umgebung V_x von x mit $f(V_x) \subset B$. Damit existiert eine offene Menge U_x mit $x \in U_x \subset V_x$ und $f(U_x) \subset B$, also ist $f^{-1}(B) = \bigcup_{x\in f^{-1}(B)} U_x$ offen.]]

1.9 Definition. Sei X eine Menge und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann heißt d eine Metrik und (X, d) ein metrischer Raum, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(i) $d(x, y) = d(y, x)$

(ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

1.10 Beispiele. Einige Beispiele von metrischen Räumen sind:

a) Sei X beliebig und

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y \end{cases}$$

(diskrete Metrik).

b) Die Standardmetrik auf $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist gegeben durch $d(x, y) = |x - y|$.

c) Sei $X = C([0, 1]; \mathbb{R})$. Dann sind

$$d_1(f, g) := \|f - g\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|,$$

$$d_2(f,g) := \|f-g\|_{L^1} := \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

zwei Metriken auf X.

1.11 Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum.

a) Die (offene) Kugel um x_0 mit Radius $r > 0$ ist definiert als $B(x_0,r) := \{x \in X\colon d(x_0,x) < r\}$.

b) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt offen, falls für alle $u \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(u,\varepsilon) \subset U$. Dies definiert die Topologie $\mathcal{T}_d$, d.h. jeder metrische Raum ist damit ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T}_d)$.

c) Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt metrisierbar, falls es eine Metrik d gibt mit $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

[[Zu b): Man sieht direkt aus der Definition, dass

$$\mathcal{T}_d := \{U \subset X:\ \forall\, u \in U\ \exists\, \varepsilon > 0:\ B(u,\varepsilon) \subset U\}$$

eine Topologie ist: Offensichtlich ist $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$. Für $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$ und $u \in U_1 \cap U_2$ existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $B(u,\varepsilon_1) \subset U_1$ und $B(u,\varepsilon_2) \subset U_2$. Damit ist $B(u,\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$ für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.

Falls $U_\lambda \in \mathcal{T}_d$ für $\lambda \in \Lambda$ und $u \in \bigcup_\lambda U_\lambda$, so existiert ein λ_0 mit $u \in U_{\lambda_0}$. Damit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(u,\varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$ und damit $B(u,\varepsilon) \subset \bigcup_\lambda U_\lambda$.]]

1.12 Beispiel. Das folgende Beispiel zeigt, dass nicht jeder topologischer Raum metrisierbar ist: Sei X ein Menge mit mindestens zwei Elementen und $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$. Falls $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar mit Metrik d wäre, so wäre für zwei Elemente $x \neq y \in X$ der Abstand $\gamma := d(x,y)$ positiv und es folgt $B(x,\frac{\gamma}{2}) \in \mathcal{T}_d$. Wegen $\emptyset \subsetneq B(x,\frac{\gamma}{2}) \subsetneq X$ erhalten wir einen Widerspruch.

Metrische Räume sind zwar weniger allgemein als topologische Räume, aber sie verfügen über einige nützliche Eigenschaften, wie in den beiden folgenden Bemerkungen ausgeführt:

1.13 Bemerkung. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann sind äquivalent:
(i) Die Menge A enthält alle ihre Häufungspunkte.
(ii) Es gilt $A = \overline{A}$.
(iii) Die Menge A ist abgeschlossen.

Beweis: Übung (Aufgabe 2.1).

1.14 Bemerkung. Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum: Betrachte

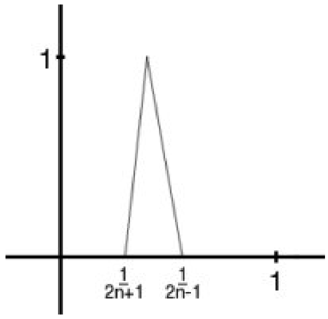
$$U_x = B\Big(x, \frac{d(x,y)}{2}\Big), \quad U_y = B\Big(y, \frac{d(x,y)}{2}\Big).$$

1.15 Beispiel. Wir greifen das Beispiel 1.10 c) noch einmal auf. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X\colon f \mapsto f$ ist zwar bijektiv, aber die Stetigkeit hängt von der gewählten Metrik ab:

So ist $\mathrm{id}\colon (C([0,1]), d_1) \to (C([0,1]), d_2)$ stetig, denn es gilt

$$d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = d_1(f,g).$$

Hingegen ist $\mathrm{id}\colon (C([0,1]), d_2) \to (C([0,1]), d_1)$ nicht stetig: Definiere zu $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n wie in folgender Abbildung:



Dann gilt

$$d_2(f_n, 0) = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \longrightarrow 0,$$

aber: $d_1(f_n, 0) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1$.

1.16 Definition. Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ eine Isometrie, falls

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y) \quad (x, y \in X) \tag{1-1}$$

gilt. Eine bijektive Isometrie heißt isometrischer Isomorphismus.

1.17 Beispiel. Versieht man $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik, so sind die durch orthogonale Matrizen gegebenen Abbildungen Isometrien von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$.

1.18 Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt eine Cauchyfolge, falls gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n, m \ge n_0\colon d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Der Raum heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergent ist.

b) Eine Menge $A \subset X$ heißt beschränkt, falls ein $r > 0$ und ein $x_0 \in X$ existieren mit $A \subset B(x_0, r)$.

1.19 Beispiel. Sei (X, d) ein metrischer Raum mit diskreter Metrik, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Dann existiert ein $x_0 \in X$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $x_n = x_0$.

1.20 Satz. *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

a) Es existiert ein beschränkter metrischer Raum (X, d'), welcher homöomorph zu (X, d) ist.

b) Es existiert ein vollständiger metrischer Raum (Y, d_Y) und ein dichter Teilraum $Y_0 \subset Y$ so, dass (X, d) und (Y_0, d_Y) isometrisch isomorph sind.

Beweis. a) Man wählt $d'(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ $(x, y \in X)$.

b) wird hier nicht bewiesen. □

Auch der folgende Satz, der aus der Analysis bekannt sein sollte, wird hier nicht bewiesen.

1.21 Satz (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und $T \colon X \to X$ eine Kontraktion, d.h. es existiere ein $k \in [0, 1)$ mit*

$$d(Tx, Ty) \leq k \cdot d(x, y) \quad (x, y \in X).$$

Dann existiert genau ein Fixpunkt von T, d.h. genau ein $x^* \in X$ mit $Tx^* = x^*$. Für alle $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x^*, und es gilt die Abschätzung

$$d(x^*, T^n x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(Tx_0, x_0).$$

b) Kompaktheit

1.22 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$.

a) Eine offene Überdeckung von A ist eine Familie $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (wobei Λ eine beliebige Indexmenge ist) mit $U_\lambda \in \mathcal{T}$ und $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Eine endliche Teilüberdeckung der offenen Überdeckung $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist eine Überdeckung der Form $A \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\lambda_j}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_j \in \Lambda$.

b) Die Menge $A \subset X$ heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

1.23 Satz. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Falls X kompakt ist und $f \colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, so ist der Wertebereich $f(X)$ kompakt.*

Beweis. Sei $f(X) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ mit $V_\lambda \in \mathcal{T}_Y$. Setze $U_\lambda := f^{-1}(V_\lambda)$. Da f stetig ist, folgt $U_\lambda \in \mathcal{T}_X$, und $X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ ist eine offene Überdeckung von X. Wegen der Kompaktheit von X existiert eine endliche Teilüberdeckung $X \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\lambda_j}$. Dann ist aber $f(X) \subset \bigcup_{j=1}^n V_{\lambda_j}$ ebenfalls eine endliche Teilüberdeckung, und $f(X)$ ist kompakt. □

1.24 Bemerkung. a) In $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ gilt: Eine Teilmenge A ist genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist. In beliebigen metrischen Räumen (X,d) gilt nur eine Richtung: Jede kompakte Teilmenge A ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht umgekehrt, wie das unten stehende Beispiel 1.25 b) zeigt.

b) Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Falls X kompakt ist und $A \subset X$ abgeschlossen ist, so ist auch A kompakt. Falls X Hausdorffsch ist und $K \subset X$ kompakt ist, so ist K abgeschlossen. Diese beiden Aussagen werden in den Übungen bewiesen (Aufgabe 2.2). Ohne die Hausdorff-Bedingung folgt im Allgemeinen aus der Kompaktheit nicht die Abgeschlossenheit, wie die kofinite Topologie (Übungsaufgabe 1.2) zeigt.

1.25 Beispiele. a) Sei X eine unendliche Menge mit diskreter Metrik. Dann ist X beschränkt und abgeschlossen, aber $X = \bigcup_{x\in X} B(x,\frac12)$ ist eine offene Überdeckung von X, zu welcher keine endliche Teilüberdeckung existiert.

b) Sei $p \in [1,\infty]$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ und sei

$$X := \ell^p := \Big\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \|x\|_{\ell^p} < \infty\Big\}$$

mit

$$\|(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} := \begin{cases} \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^p\Big)^{1/p}, & \text{falls } p \in [1,\infty),\\ \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|, & \text{falls } p = \infty.\end{cases}$$

Dann wird durch $d(x,y) := \|x-y\|_{\ell^p}$ eine Metrik auf ℓ^p definiert. Für die Einheitsvektoren

$$e_j = (0,0,\ldots,0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \ldots)$$

gilt für alle $i,j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$

$$d(e_i,e_j) = \begin{cases} 2^{1/p}, & \text{falls } p \in [1,\infty),\\ 1, & \text{falls } p = \infty.\end{cases}$$

Die Einheitssphäre $S := \{x\colon d(x,0) = 1\}$ ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt. Denn $S \subset \bigcup_{x\in S} B(x,\frac12)$ ist eine offene Überdeckung von S. Angenommen, es gibt eine endliche Teilüberdeckung $S \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j,\frac12)$. Dann kann jede Umgebung $B(x_j,\frac12)$ höchstens einen Einheitsvektor enthalten, da für alle Vektoren $z_1, z_2 \in B(x_j,\frac12)$ gilt:

$$d(z_1,z_2) \le d(z_1,x_j) + d(x_j,z_2) < \tfrac12 + \tfrac12 = 1.$$

Da es unendliche viele Einheitsvektoren gibt, kann keine endliche Teilüberdeckung existieren, und S ist nicht kompakt.

c) Wäre in einem metrischen Raum jede abgeschlossene, beschränkte Menge automatisch kompakt, so wäre jeder metrische Raum kompakt, da jeder metrische Raum homöomorph zu einem beschränkten, metrischen Raum ist.

1.26 Definition. Sei X ein topologischer Raum.

a) Der Raum X heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

b) Eine Menge $A \subset X$ heißt relativ kompakt, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

c) Sei nun X sogar ein metrischer Raum mit Metrik d. Der Raum X heißt totalbeschränkt oder präkompakt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $E \subset X$ gibt mit

$$X = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon). \tag{1-2}$$

E heißt (endliches) ε-Netz für X.

1.27 Bemerkung. a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist eine Teilmenge $A \subset X$ (mit der induzierten Metrik) genau dann präkompakt, wenn eine endliche Teilmenge $E \subset X$ existiert mit $A \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$. Denn mit Hilfe der Dreiecksungleichung kann man sich dann ein ε-Netz in A konstruieren.

b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann kann man leicht zeigen, dass X genau dann kompakt ist, wenn X folgenkompakt ist.

Der folgende Satz ist einer der wichtigsten Sätze der Topologie; der Beweis (der etwa mit Hilfe von Ultrafiltern geführt werden kann) ist aber zu aufwändig für diese Vorlesung.

1.28 Satz (Tychonov)**.** *Sei I eine Menge und $X = \prod_{i \in I} X_i$ das kartesische Produkt der topologischen Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Falls jedes $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt ist, dann ist auch X in der Produkttopologie kompakt.*

2. Normierte Räume und Hilberträume

2.1 Worum geht's? Unter den topologischen Räumen haben die Hilberträume die meiste Struktur: Sie besitzen ein Skalarprodukt, d.h. man kann von Orthogonalität und auch von Winkeln sprechen. In Kombination mit der Vollständigkeit ergeben sich eine Vielzahl von in Anwendungen wichtigen Sätzen, wie etwa die Existenz des orthogonalen Komplements und eine einfache Darstellung des Dualraums. Jeder nichttriviale Hilbertraum besitzt zudem eine Orthonormalbasis, bezüglich welcher alle Elemente des Hilbertraums als Reihe geschrieben werden können. Dies verallgemeinert den Begriff eines linearen Erzeugendensystems, wie er aus der linearen Algebra für endlich-dimensionale Vektorräume bekannt ist.

Im folgenden sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

a) Normierte Räume und Banachräume

2.2 Definition. Eine Norm ist eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0 \ (x \in X)$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \ (\alpha \in \mathbb{K},\ x \in X)$

(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \ (x, y \in X)$

In diesem Fall heißt $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Falls in (i) nur die Richtung „$\Leftarrow$" gilt, so heißt $\|\cdot\|$ eine Halbnorm oder Seminorm.

2.3 Bemerkung. a) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ wird mit $d(x, y) := \|x - y\|$ zu einem metrischen Raum (X, d). Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

b) Sei (X, d) ein metrischer Vektorraum, so ist $\widehat{d}\colon X \to \mathbb{R},\ \widehat{d}(x) := d(x, 0)$ eine Norm genau dann, wenn gilt

(i) $d(x + z, y + z) = d(x, y),\ \forall x, y, z \in X$

(ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y),\ \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$

Wenn dies gilt, dann ist die von der Norm $\widehat{d}$ induzierte Metrik wieder d.

2.4 Definition. Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Raum.

2.5 Beispiele. a) Der Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|),\ \|\cdot\| = |\cdot|$ ist ein Banachraum.

b) Sei A kompakter, metrischer Raum und Y Banachraum. Dann ist der Raum $C(A; Y)$ aller stetigen Funktionen von A nach Y, versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{a \in A} \|f(a)\|_Y$, ein Banachraum.

2.6 Definition und Satz. *a) Sei $p\colon X \to [0,\infty)$ eine Seminorm. Dann ist das System*

$$\Big\{U \subset X : \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon\ B(x,\varepsilon) \subset U\Big\}$$

eine Topologie auf X und heißt die von p erzeugte Topologie (vgl. Definition 1.11). Dabei ist $B(x,\varepsilon) := \{y \in X : p(x-y) < \varepsilon\}$.

b) Diese von einer Seminorm p erzeugte Topologie ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Seminorm sogar eine Norm ist. Die Menge $\{B(x,\varepsilon) : x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ bildet eine Basis der Topologie. Die von p erzeugte Topologie ist die gröbste Topologie auf X, bezüglich der alle Abbildungen $x \mapsto p(x-x_0)$ mit $x_0 \in X$ stetig sind.

[[Das das System $\mathcal{T}_p := \{U \subset X : \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon\ B(x,\varepsilon) \subset U\}$ eine Topologie ist, sieht man sofort wie in 1.11. Falls die Seminorm eine Norm ist, ist X Hausdorffsch nach Bem. 1.14. Ansonsten existiert ein $x \in X \setminus \{0\}$ mit $p(x) = 0$, und für die Punkte 0 und x ist die Bedingung eines Hausdorff-Raums verletzt.

Aufgrund der Dreiecksungleichung ist $B(x,\varepsilon) \in \mathcal{T}_p$ für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Andererseits lässt sich jedes $U \in \mathcal{T}_p$ in der Form $U = \bigcup_{x\in U} B(x,\varepsilon_x)$ schreiben, d.h. die Menge aller $B(x,\varepsilon)$ bildet eine Basis der Topologie.

Sei $\mathcal{T}_1$ die von allen Abbildungen $p_{x_0} : x \mapsto p(x-x_0)$ erzeugte Topologie auf X. Dann gilt $B(x_0,\varepsilon) = p_{x_0}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) \in \mathcal{T}_1$ und damit $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_1$.

Für die Richtung $\mathcal{T}_p \supset \mathcal{T}_1$ ist zu zeigen, dass jedes $p_{x_0}\colon (X,\mathcal{T}_p) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Dazu verwendet man Lemma 1.8: Sei $x \in X$ und $W \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von $p_{x_0}(x) = p(x-x_0)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $V := (p_{x_0}(x) - \varepsilon, p_{x_0}(x) + \varepsilon) \subset W$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung sieht man, dass $U := B(x,\varepsilon)$ eine Umgebung von x ist mit $p_{x_0}(U) \subset V \subset W$.]]

Der Beweis des folgenden Satzes sollte aus der Analysis bekannt sein.

2.7 Satz. *Seien X, Y normierte Räume, $T\colon X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) *T ist beschränkt, d.h. $\exists\, c > 0\colon\ \|Tx\|_Y \le c\,\|x\|_X \quad (x \in X)$.*

(ii) *$T\colon X \to Y$ ist stetig.*

(iii) *$T\colon X \to Y$ ist stetig an der Stelle $0 \in X$.*

2.8 Definition. Seien X, Y Vektorräume, ausgestattet mit Topologien. Der Raum

$$L(X,Y) := \{T\colon X \to Y \ :\ T \text{ linear, stetig}\}$$

heißt der Raum der linearen stetigen Operatoren von X nach Y (im Falle von normierten Räumen X und Y sind diese Operatoren dann auch beschränkt). Wir setzen $L(X) := L(X,X)$. Der Raum $X' := L(X,\mathbb{K})$ heißt der (topologische) Dualraum von X. Oft schreibt man Tx statt $T(x)$.

Für $T \in L(X,Y)$ (mit normierten Räumen X und Y) definiert man

$$\|T\| := \sup_{x\in X,\ \|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X},$$

wobei die zweite Gleichheit für $X \neq \{0\}$ gilt. $\|T\|$ heißt die Operatornorm von T. Sei

$$\begin{aligned} \ker T &:= N(T) := \{x \in X \colon Tx = 0\}, \\ \operatorname{im} T &:= R(T) := T(X) := \{Tx \colon x \in X\} \end{aligned}$$

der Kern (englisch „kernel“ oder „null space“) bzw. der Wertebereich (englisch „image“ oder „range“) von T.

2.9 Bemerkung. Es gilt

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X \quad (x \in X)$$

und

$$\|T\| = \inf \{C > 0 \colon \; \forall\, x \in X \colon \; \|Tx\|_Y \leq C \, \|x\|_X\} \,.$$

2.10 Definition und Satz. *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $L = \{p_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von Seminormen $p_\lambda \colon X \to [0, \infty)$. Definiere $\mathcal{T}$ als das System aller Mengen $U \subset X$, für welche gilt*

$$\forall\, x \in U \;\exists\, r \in \mathbb{N} \;\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda \;\exists\, \varepsilon > 0 \colon \; B^{(\lambda_1)}(x, \varepsilon) \cap \dots \cap B^{(\lambda_r)}(x, \varepsilon) \subset U.$$

Dabei sei $B^{(\lambda_j)}(x, \varepsilon) := \{y \in X : p_{\lambda_j}(x - y) < \varepsilon\}$ die Kugel um x mit Radius ε bzgl. der Seminorm p_{λ_j}. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, die sog. lokalkonvexe Topologie zu L auf X. Dies ist die gröbste Topologie auf X, für die jede der Abbildungen $p_\lambda(\cdot - x_0)$ mit $\lambda \in \Lambda$ und $x_0 \in X$ stetig von X nach $\mathbb{R}$ ist, vgl. Definition 1.2. Eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist gegeben durch

$$\{B^{(\lambda)}(x, r) \colon \lambda \in \Lambda, \; x \in X, \; r > 0\}.$$

[[Das zeigt man analog zum Beweis von Satz 2.6.]]

2.11 Definition. Sei X $\mathbb{K}$-VR und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Dann heißt $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum , falls die Abbildungen

$$\begin{aligned} s \colon X \times X &\to X, & (x_1, x_2) &\mapsto x_1 + x_2 \\ m \colon \mathbb{K} \times X &\to X, & (\alpha, x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

beide stetig sind.

2.12 Bemerkung. Normierte Räume sind topologische Vektorräume.

2.13 Definition. a) Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $X^* := \{f\colon X \to \mathbb{K},\ f \text{ linear }\}$ der algebraische Dualraum von X. Für $Y \subset X^*$ bezeichnet man die Y-schwache Topologie $\mathcal{T}(Y)$ (vgl. Definition 1.2) auf X auch mit $\sigma(X, Y)$.

b) Sei X topologischer Vektorraum und $X' \subset X^*$ der topologische Dualraum. Dann heißt $\sigma(X, X')$ die schwache Topologie auf X und $\sigma(X', X)$ die schwach-*-Topologie auf X'. (Wir werden später sehen, dass man X als Teilmenge von X'' auffassen kann.) Für die schwache Konvergenz schreibt man $x_n \rightharpoonup x$ oder $x_n \xrightarrow{w} x$, für die schwach-*-Konvergenz schreibt man $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ oder $f_n \xrightarrow{w^*} f$ in X'.

Als Warnung vermerken wir, dass die schwache Topologie eines unendlichdimensionalen Raumes im Allgemeinen nicht metrisierbar ist. Wir können in Zukunft also nicht davon ausgehen, dass jeder von uns benötigte Raum eine Metrik besitzt, die zu seiner Topologie passt.

2.14 Bemerkung. Sei X ein topologischer Vektorraum. Dann gilt:

a) Die Verschiebung einer in X offenen Menge um einen konstanten Vektor ergibt in X wieder eine offene Menge.

b) Wenn $A \subset X$ eine offene Teilmenge ist und $B \subset X$ eine beliebige Teilmenge, dann ist $A + B$ offen in X.

2.15 Definition (Quotientenraum für topologische Vektorräume)**.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum (nicht unbedingt Hausdorffsch), und $M \subset X$ ein Untervektorraum, sowie $X/M := \{[x] = x + M\colon x \in X\}$ der algebraische Quotientenraum. Wir schreiben Φ für die (lineare) Quotientenabbildung,

$$\Phi\colon x \mapsto [x], \qquad \Phi\colon X \to X/M,$$

und wir statten X/M mit der feinsten Topologie aus, für die $\Phi\colon X \to X/M$ stetig ist.

2.16 Bemerkung. Die oben definierte Topologie auf X/M ist gegeben durch

$$\mathcal{T}_M := \{V \subset X/M : \Phi^{-1}(V) \subset X \text{ offen}\}.$$

Somit besteht diese Topologie aus genau jenen Mengen $H + M \subset X/M$, für die $H + M$ eine in X offene Menge ist. Und aus Bemerkung 2.14 bekommen wir dann: wenn $H \subset X$ offen in X ist, dann ist $\Phi(H)$ offen in X/M, d.h. die Abbildung Φ ist offen.

[[Man sieht direkt aus der Definition, dass $\mathcal{T}_M$ eine Topologie auf X/M ist und dass Φ bzgl. dieser Topologie stetig ist. Falls andererseits $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (X/M, \mathcal{T}')$ für eine beliebige Topologie $\mathcal{T}'$ stetig ist, so folgt für alle $V \in \mathcal{T}'$ schon $\Phi^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ und damit $V \in \mathcal{T}_M$, d.h. $\mathcal{T}_M$ ist die maximale Topologie mit dieser Eigenschaft.]]

Wie benötigen noch eine Eigenschaft dieser Quotientenräume, welche hier nicht bewiesen wird.

2.17 Bemerkung. Sei X ein Vektorraum mit einer Seminorm $p(\cdot)$, ausgestattet mit der davon gemäß Definition 2.6 erzeugten Topologie; und es sei $M \subset X$ ein Untervektorraum. Dann ist der Quotientenraum X/M Hausdorffsch genau dann, wenn M eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

2.18 Definition und Satz (Quotientenraum für normierte Räume)**.** *Sei X normierter Raum, $M \subset X$ ein Untervektorraum, und X/M der Quotientenraum. Dann ist*

$$\|[x]\| := \operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

eine Seminorm auf X/M. Falls M abgeschlossen ist, so ist $\|[\cdot]\|$ eine Norm und $(X/M, \|[\cdot]\|)$ ein normierter Raum. Falls X Banachraum ist und M abgeschlossen ist, so ist auch X/M Banachraum.

Beweis. Nur die letzte Aussage folgt nicht durch direktes Nachrechnen. Sei $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X/M.

(i) Übergang zur Teilfolge: Da $\|([x_n]) - ([x_m])\| \longrightarrow 0 \quad (n, m \to \infty)$, existiert eine Teilfolge $([x_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$ von $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\| < 2^{-(k+1)}$. Schreibe wieder $[x_k]$ statt $[x_{n_k}]$.

(ii) Wahl einer Cauchyfolge in X: Wir wählen induktiv eine Folge von Repräsentanten $z_k \in [x_k]$, beginnend mit $z_1 := x_1$. Sei $z_k = x_k + m_k$ mit $m_k \in M$ bereits gewählt. Dann wählt man $\widetilde{m}_{k+1} \in M$ so, dass

$$\|x_{k+1} - x_k + \widetilde{m}_{k+1}\| \le \|[x_{k+1}] - [x_k]\| + 2^{-k}$$

gilt. Setzt man $z_{k+1} := x_{k+1} + m_{k+1} := x_{k+1} + \widetilde{m}_{k+1} + m_k$, so erhält man

$$\|z_{k+1} - z_k\| = \|x_{k+1} - x_k + \widetilde{m}_{k+1}\| \le \|[x_{k+1}] - [x_k]\|_{X/M} + 2^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Damit

$$\begin{aligned} \|z_{k+m} - z_k\|_X &\le \sum_{\ell=k+1}^{k+m} \|z_\ell - z_{\ell-1}\|_X \\ &\le \sum_{\ell=k+1}^{k+m} \Big(\|[x_\ell] - [x_{\ell-1}]\|_{X/M} + 2^{-\ell} \Big) \\ &\le \sum_{\ell=k+1}^{k+m} 2^{-\ell+1} \le 2^{-k+1}, \end{aligned}$$

d.h. $(z_k)_k \subset X$ ist eine Cauchyfolge. Setze $z := \lim_k z_k$. Wegen

$$\|[x_k] - [z]\|_{X/M} = \|[z_k] - [z]\|_{X/M} \leq \|z_k - z\|_X \to 0$$

gilt $[x_k] \to [z]$ in X/M. □

2.19 Definition und Satz (direkte Summe). *Seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Dann wird durch*

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 \quad ((x_1, x_2) \in X_1 \times X_2)$$

eine Norm auf $X = X_1 \times X_2$ definiert. Mit dieser Norm heißt X die direkte Summe von X_1 und X_2, Schreibweise $X = X_1 \oplus X_2$. Falls X_1 und X_2 beide Banachräume sind, so ist auch $X_1 \oplus X_2$ ein Banachraum.

Beweis. Nur die letzte Aussage ergibt sich nicht durch Nachrechnen. Falls die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $X_1 \oplus X_2$ ist, so sind auch die einzelnen Komponenten Cauchyfolgen und damit, falls X_1 und X_2 Banachräume sind, konvergent gegen x_1 bzw. x_2. Damit ist aber auch die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset X_1 \oplus X_2$ konvergent gegen $x := (x_1, x_2)$. □

2.20 Definition ($\mathscr{L}^p$-Räume). Sei $(Z, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

a) Sei $1 \leq p < \infty$. Definiere $\mathscr{L}^p(\mu)$ als die Menge aller messbaren Funktionen $f\colon Z \to \mathbb{C}$ mit

$$\|f\|_p := \Big(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} < \infty.$$

b) Für $p = \infty$ wird $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ definiert als die Menge aller messbarer Funktionen $f\colon Z \to \mathbb{C}$, für welche es ein $C_f > 0$ gibt mit $\mu(\{z \in Z\colon |f(z)| > C_f\}) = 0$. Man spricht von μ-fast überall beschränkten Funktionen. Für $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ definiert man

$$\|f\|_\infty := \inf\Big\{C \in \mathbb{R}\colon \mu(\{z \in Z\colon |f(z)| > C\}) = 0\Big\}.$$

c) Für Funktionen $f\colon Z \to \mathbb{R}$ werden die entsprechenden Funktionenräume mit $\mathscr{L}^p(\mu; \mathbb{R})$ bezeichnet. Manchmal schreiben wir auch $\mathscr{L}^p(\mu; \mathbb{C})$ statt $\mathscr{L}^p(\mu)$.

Der folgende Satz aus der Analysis wird hier nicht bewiesen.

2.21 Satz. *a)* **(Höldersche Ungleichung)** *Für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (f \in \mathscr{L}^p(\mu),\ g \in \mathscr{L}^q(\mu)).$$

b) **(Minkowskische Ungleichung)** *Für $1 \le p \le \infty$ gilt*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \quad (f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)).$$

c) Für $1 \le p \le \infty$ ist der Raum $\mathscr{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum, und $\|\cdot\|_p$ definiert eine Seminorm (Halbnorm) auf $\mathscr{L}^p(\mu)$.

2.22 Definition und Satz (L^p-Räume)**.** *Sei $(Z, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, und sei $1 \le p \le \infty$. Den Vektorraum $X := \mathscr{L}^p(\mu)$ versehen wir mit der Seminorm $\|\cdot\|_p$ und anschließend mit der sich daraus ergebenden Topologie. Definiere eine Menge $M \subset \mathscr{L}^p(\mu)$, bestehend aus all jenen Funktionen, für die die Seminorm den Wert Null annimmt. Dann ist M ein Untervektorraum, und auch eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathscr{L}^p(\mu)$, denn $\{0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|_p : \mathscr{L}^p(\mu) \to \mathbb{R}$ ist stetig per Definition.*

Dann definieren wir

$$L^p(\mu) := \mathscr{L}^p(\mu)/M$$

als Quotientenraum. Dieser besteht aus Äquivalenzklassen von Funktionen, die μ–fast überall übereinstimmen.

Mit dieser Konstruktion wird $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ zu einem Banachraum.

Falls das Maß durch das Lebesgue–Maß $\lambda|_\Omega$ auf einer messbaren Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gegeben ist, schreibt man auch $L^p(\Omega)$ statt $L^p(\lambda|_\Omega)$.

2.23 Beispiele. Die folgenden Beispiele sind Spezialfälle der oberen Definition.

a) Der Raum $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ wird mit jeder der Normen

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < \infty),$$
$$\|x\|_\infty := \max\left\{|x_j|, j = 1, \dots, n\right\}$$

zu einem Banachraum.

b) Für $1 \le p < \infty$ sind die ℓ^p-Räume definiert durch

$$\ell^p := \left\{x = (x_1, x_2, \dots) | x_j \in \mathbb{C}, \|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p} < \infty\right\},$$

und für $p = \infty$ den Raum ℓ^∞ durch

$$\ell^\infty := \left\{x = (x_1, x_2, \dots) | x_j \in \mathbb{C}, \|x\|_\infty := \sup\{|x_j|, j \in \mathbb{N}\} < \infty\right\}.$$

Dann ist ℓ^p für alle $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum. Hier ist jeweils $Z = \mathbb{N}$ und μ das Zählmaß.

b) Hilberträume

Im folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.24 Definition. a) Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum X, versehen mit einer Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$, heißt ein Vektorraum mit Skalarprodukt oder ein Prähilbertraum, falls gilt:

(i) Für alle $y \in X$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle x, y \rangle$ linear.
(ii) Für alle $x, y \in X$ gilt $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
(iii) Für alle $x \in X$ gilt $\langle x, x \rangle \geq 0$. Es gilt $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

b) Zwei Vektoren $x, y \in X$ heißen orthogonal (in Zeichen $x \perp y$), falls $\langle x, y \rangle = 0$ gilt. Eine Familie $\{x_i\}_{i \in I}$ von Vektoren heißt orthonormal, falls gilt:

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) In einem Prähilbertraum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wird durch $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ die kanonische Norm definiert. Ein vollständiger Prähilbertraum heißt Hilbertraum.

2.25 Beispiele. a) Mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$ werden $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ zu einem Hilbertraum.

b) Der Raum $C([0,1])$ wird mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}x$$

zu einem Prähilbertraum.

c) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann wird $L^2(\mu)$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_X f(x) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) \quad (f, g \in L^2(\mu))$$

zu einem Hilbertraum. Insbesondere ist $L^2(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Hilbertraum.

Auch die folgenden elementaren Eigenschaften von Prähilberträumen werden als bekannt vorausgesetzt, sie können aber auch leicht direkt nachgerechnet werden.

2.26 Satz. *Sei X Prähilbertraum.*

a) (Satz von Pythagoras) *Seien $x, y \in X$ orthogonal. Dann gilt*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

b) *Sei* $\{x_n\}_{n=1}^N$ *orthonormal. Dann gilt*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n\rangle|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n \right\|^2 .$$

c) (Besselsche Ungleichung). *Sei* $\{x_n\}_{n=1}^N$ *orthonormal. Dann ist*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n\rangle|^2 \quad (x \in X).$$

d) (Cauchy–Schwarz-Ungleichung). *Es gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in X).$$

e) (Parallelogramm-Identität) *Für* $x, y \in X$ *gilt*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

f) (Polarisationsformel) *Für* $x, y \in X$ *gilt*

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), & \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\,\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\,\|x-\mathrm{i}y\|^2), & \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Die Bedeutung der Polarisationsformel liegt daran, dass Identitäten nur für die Norm nachgerechnet werden müssen und dann automatisch für die Skalarprodukte gelten.

Die Summe von zwei Hilberträumen X und Y ist wieder ein Hilbertraum, wenn man das Skalarprodukt auf $X \oplus Y$ durch

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_{X\oplus Y} := \langle x_1, x_2\rangle_X + \langle y_1, y_2\rangle_Y$$

definiert. Man beachte, dass die zugehörige Norm gegeben ist durch

$$\|(x,y)\|_{X\oplus Y} = \Big(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2 \Big)^{1/2}.$$

Diese Norm ist äquivalent zur Norm aus Satz 2.19.

c) Der Approximationssatz und der Satz von Riesz für Hilberträume

Im folgenden sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum.

2.27 Definition. a)$M \subset X$ heißt konvex, falls gilt

$$\forall\, x, y \in M\; \forall\, \alpha \in [0,1] \colon \alpha x + (1-\alpha)y \in M.$$

b) Zu $M \subset X$ heißt

$$M^\perp := \{x \in X \;:\; \forall\, y \in M \colon \langle x, y\rangle = 0\}$$

das orthogonale Komplement von M in X.

2.28 Lemma. *Es ist $M^\perp$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von X.*

Beweis. Die Teilraumeigenschaft ist klar. Für die Abgeschlossenheit vermerken wir

$$M^\perp = \bigcap_{y^* \in M} \{y^*\}^\perp,$$

sodass es genügt nachzuweisen, dass jede Menge $\{y^*\}^\perp$ abgeschlossen ist. Wir definieren eine lineare Abbildung

$$T_{y^*} \colon X \to \mathbb{K}, \qquad T_{y^*} \colon x \mapsto \langle x, y^*\rangle\,.$$

Dann ist $\{y^*\}^\perp = \ker T_{y^*}$. Wegen der Ungleichung von Cauchy–Schwarz ist T_{y^*} eine beschränkte Abbildung vom normierten Raum X in den normierten Raum $\mathbb{K}^1$, und aufgrund von Satz 2.7 ist T_{y^*} stetig. Bei jeder stetigen Abbildung ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen. Nun ist aber $\{0\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{K}^1$, also ist auch $\ker T_{y^*} = T_{y^*}^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen in X. □

2.29 Bemerkung. a) Es ist $M^\perp = \overline{M}^\perp = (\operatorname{span} M)^\perp$.

b) Es gilt $M \cap M^\perp \subset \{0\}$. Denn sei $x \in M \cap M^\perp$. Dann ist $\langle x, x\rangle = 0$, d.h. $x = 0$. Insbesondere gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$, falls $0 \in M$ (z.B. falls M ein Untervektorraum von X ist).

2.30 Satz (Approximationssatz)**.** *Sei X ein Hilbertraum, $M \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen, sowie $z_0 \in X$. Dann existiert genau ein $x \in M$ mit $\|x - z_0\| =$* $\operatorname{dist}(z_0, M) := \inf\{\|y - z_0\| : y \in M\}$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$ (betrachte die verschobene Menge $M - z_0$). Sei $d := \inf\{\|y\| : y \in M\}$. Wähle eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\|y_n\| \longrightarrow d$.

Unter Verwendung der Parallelogrammgleichung folgt

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4 \cdot \Big\| \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in M} \Big\|^2 \\ &\le 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4d^2 \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

da $\|y_n\| \longrightarrow d$. Daher ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Da M vollständig ist, existiert $x := \lim_n y_n \in M$. Es gilt $\|x\| = \lim_n \|y_n\| = d$. Damit folgt $\|x\| \le \|y\|$ für alle $y \in M$.

Eindeutigkeit: Sei $\|x_1\| \le \|y\|, \|x_2\| \le \|y\|$ für jedes $y \in M$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^2 &= 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2 \\ &= 2\Big(\underbrace{\|x_1\|^2 - \Big\|\frac{x_1 + x_2}{2}\Big\|^2}_{\le 0}\Big) + 2\Big(\underbrace{\|x_2\|^2 - \Big\|\frac{x_1 + x_2}{2}\Big\|^2}_{\le 0}\Big) \le 0. \end{aligned}$$

□

2.31 Satz (Projektionssatz). *Seien X ein Hilbertraum und $M \subset X$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von X. Dann existiert für alle $x \in X$ eine eindeutige Zerlegung $x = m + m'$ mit $m \in M, m' \in M^\perp$. Somit ist $X = M \oplus M^\perp$. Es ist $\|x - m\| = \min_{y\in M} \|x - y\|$.*

Beweis. Nach dem Approximationssatz existiert genau ein $m \in M$ mit $\|m - x\| = \inf\{\|y - x\| : y \in M\}$. Setze $m' := x - m$. Für alle $y \in M$ ist dann $\|m'\| \le \|y - x\| = \|m' - (y - m)\|$.

(i) Wir zeigen $m' \in M^\perp$. Es gilt $\|m'\|^2 \le \|m' + ty\|^2 \quad (t \in \mathbb{K}, y \in M)$. Andererseits ist

$$\|m' + ty\|^2 = \|m'\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle m', ty\rangle + |t|^2\|y\|^2.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt somit

$$|t|^2\|y\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\,\langle m', y\rangle \ge 0,$$

also $\mathrm{Re}\,\langle m', y\rangle = 0$.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ersetzt man t durch it und erhält

$$|t|^2\|y\|^2 + 2t\,\mathrm{Im}\,\langle m', y\rangle \ge 0,$$

also $\mathrm{Im}\,\langle m', y\rangle = 0$.

(ii) Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $x = m + m' = z + z'$ mit $m, z \in M, m', z' \in M^\perp$. Dann ist $m - z = z' - m' \in M \cap M^\perp = \{0\}$, d.h. $m = z, m' = z'$. □

2.32 Satz (von Riesz). *Seien X ein Hilbertraum und $T \in X'$. Dann existiert genau ein $x_T \in X$ mit*

$$Tx = \langle x, x_T \rangle \quad (x \in X).$$

Es gilt $\|T\|_{X'} = \|x_T\|_X$. Die Abbildung $I_{\text{Riesz}} \colon X' \to X$, $T \mapsto x_T$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear.

Beweis. **(i)** Konstruktion von x_T: Der Raum $M := \ker T = T^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter der stetigen Abbildung T. Damit ist $X = M \oplus M^\perp$ nach Satz 2.31.

Falls $M = X$, so folgt $T = 0$, und wir wählen $x_T = I_{\text{Riesz}}(T) := 0$.

Sei jetzt $M \neq X$. Wähle $y \in M^\perp \setminus \{0\}$. Wegen $M \cap M^\perp = \{0\}$ ist dann $Ty \neq 0$. Setze $x_T = I_{\text{Riesz}}(T) := \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot y$. Dann gilt $\|x_T\| = \frac{|Ty|}{\|y\|}$, und wir merken uns, dass

$$Tx_T = \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot Ty = \|x_T\|^2 .$$

Um zu zeigen, dass $Tx = \langle x, x_T \rangle$ für jedes $x \in X$ gilt, zerlegen wir x gemäß $X = M^\perp \oplus M$:

$$x = \frac{Tx}{Tx_T} x_T + \left(x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T \right) =: x_\perp + x_\|.$$

Dies ist tatsächlich die angestrebte Zerlegung von x, denn es ist $x_\perp$ ein Vielfaches von $x_T \in M^\perp$, und es ist

$$Tx_\| = T\left(x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T \right) = Tx - \frac{Tx}{Tx_T} Tx_T = 0,$$

also $x_\| \in \ker T = M$.

Damit haben wir dann tatsächlich

$$\begin{aligned} \langle x, x_T \rangle &= \langle x_\perp, x_T \rangle + \langle x_\|, x_T \rangle = \frac{Tx}{Tx_T} \langle x_T, x_T \rangle + 0 = \frac{Tx}{Tx_T} \|x_T\|^2 \\ &= Tx, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

(ii) I_{Riesz} ist Isometrie: Nach Cauchy–Schwarz ist $\|T\|_{X'} = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |\langle x, x_T \rangle| \le \|x_T\|$. Andererseits haben wir $\|T\|_{X'} \ge |T(\frac{x_T}{\|x_T\|})| = \|x_T\|$.

(iii) $I_{\text{Riesz}}(T)$ ist eindeutig: Angenommen, es gäbe zusätzlich zu x_T noch ein $\widetilde{x}_T$ mit $Tx = \langle x, x_T \rangle = \langle x, \widetilde{x}_T \rangle \quad (x \in X)$. Dann gilt

$$0 = \langle x, x_T - \widetilde{x}_T \rangle \quad (x \in X).$$

Wähle $x = x_T - \widetilde{x}_T$ und erhalte $\|x_T - \widetilde{x}_T\| = 0$.

(iv) I_{Riesz} ist konjugiert linear: Sei $T = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$. Dann ist einerseits $Tx = \langle x, x_T\rangle$, und andererseits

$$\begin{aligned} Tx &= \alpha_1 T_1 x + \alpha_2 T_2 x = \alpha_1 \langle x, x_{T_1}\rangle + \alpha_2 \langle x, x_{T_2}\rangle \\ &= \langle x, \overline{\alpha}_1 x_{T_1}\rangle + \langle x, \overline{\alpha}_2 x_{T_2}\rangle = \langle x, \overline{\alpha}_1 x_{T_1} + \overline{\alpha}_2 x_{T_2}\rangle \,, \end{aligned}$$

also $I_{\text{Riesz}}(T) = x_T = \overline{\alpha_1} x_{T_1} + \overline{\alpha_2} x_{T_2} = \overline{\alpha_1} I_{\text{Riesz}}(T_1) + \overline{\alpha_2} I_{\text{Riesz}}(T_2)$.

(v) I_{Riesz} ist surjektiv: Zu $y \in X$ sei $T_y x := \langle x, y\rangle$. Dann ist $|T_y x| \leq \|y\| \cdot \|x\|$, d.h. T_y stetig und damit $T_y \in X'$ und $I_{\text{Riesz}}(T_y) = y$.

(vi) I_{Riesz} ist injektiv: Aus $\|T\|_{X'} = \|x_T\|_X$ ergibt sich direkt, dass der Kern der linearen Abbildung $I_{\text{Riesz}} \colon T \mapsto x_T$ nur das Nullfunktional enthalten kann. □

d) Orthonormalbasen

2.33 Definition. (i) Sei $\mathcal{M}$ eine Menge. Eine Relation $\prec$ auf $\mathcal{M}$ heißt Halbordnung, falls für A, B, $C \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\begin{gathered} A \prec A, \\ A \prec B,\ B \prec A \Longrightarrow A = B, \\ A \prec B,\ B \prec C \Longrightarrow A \prec C. \end{gathered}$$

Beachte, dass $A \prec B$ oder $B \prec A$ nicht für alle $A, B \in M$ gelten muss.

(ii) Eine Menge $Q \subset \mathcal{M}$ heißt total geordnet oder eine Kette, falls für alle $A, B \in Q$ gilt: $A \prec B$ oder $B \prec A$.

(iii) Ein Element $A \in \mathcal{M}$ heißt obere Schranke für $S \subset \mathcal{M}$, falls $B \prec A$ für alle $B \in S$.

(iv) Ein Element $M \in \mathcal{M}$ heißt maximal, falls aus $M \prec A$ folgt $M = A$.

2.34 Beispiel. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, und $\mathcal{M}$ eine nichtleere Teilmenge der Potenzmenge von X. Dann definieren wir, dass $A \prec B$ genau dann gilt, wenn A, $B \in \mathcal{M}$ und $A \subset B$.

2.35 Lemma (von Zorn)**.** *Sei $\mathcal{M}$ eine nichtleere Menge mit Halbordnung, für welche jede Kette eine obere Schranke in $\mathcal{M}$ besitzt. Dann besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element.*

Dieses Lemma ist eigentlich ein Axiom und äquivalent zum Wohlordnungssatz, welcher wiederum äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Die Formulierung dieser Axiome und der Beweis der Äquivalenz werden hier aber weggelassen.

2.36 Definition. Sei X ein Hilbertraum. Eine Teilmenge $S \subset X$ heißt Orthonormalbasis oder vollständiges orthonormales System, falls S eine maximale orthonormale Teilmenge von X ist (maximal bezüglich Mengeninklusion). Man spricht auch von Hilbertraumbasis.

2.37 Satz. *Jeder nichttriviale Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Sei $\mathscr{S}$ die Menge aller orthonormalen Teilmengen des Hilbertraumes X. Dann ist $\mathscr{S} \neq \emptyset$ da $\{\frac{x}{\|x\|}\} \in \mathscr{S}$ für jedes $x \in X \setminus \{0\}$.

Sei $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ eine Kette in $\mathscr{S}$, d.h. für $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ gilt $S_\alpha \subset S_\beta$ oder $S_\beta \subset S_\alpha$. Setze $S_0 := \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} S_\alpha \subset X$. Dann ist $S_0 \supset S_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$. Zu $x, y \in S_0$ existiert ein $\alpha \in \mathcal{A}$ mit $x, y \in S_\alpha$, d.h. S_0 ist orthonormal, also $S_0 \in \mathscr{S}$. Damit ist S_0 eine obere Schranke zu $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Nach dem Lemma von Zorn existieren maximale Elemente in $\mathscr{S}$. □

2.38 Lemma. *Seien X ein Prähilbertraum und $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}| < \infty \quad (x, y \in X).$$

Beweis. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt nach der Cauchy–Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{R}^N$ und der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}| \le \Big(\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{n=1}^{N} |\langle y, e_n\rangle|^2\Big)^{1/2} \le \|x\| \cdot \|y\| .$$

Mit $N \longrightarrow \infty$ erhält man die Behauptung. □

2.39 Satz. *Seien X ein Hilbertraum und $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein abzählbares Orthonormalsystem.*

a) Für alle $x \in X$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n$ in X.

b) Sei $c_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_n$ in X.

c) $x - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n \in S^\perp$.

Beweis. a) Nach der Besselschen Ungleichung (Satz 2.26 c)) gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2 .$$

Also ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty$. Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$\Big\| \sum_{n=N}^{M} \langle x, e_n\rangle\, e_n \Big\|^2 = \sum_{n=N}^{M} |\langle x, e_n\rangle|^2 \longrightarrow 0 \quad (N, M \longrightarrow \infty).$$

Also ist $\Big(\sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle\, e_n \Big)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und $y := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n \in X$ existiert.

b) wurde im Beweis von a) mitbewiesen.

c) Für $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Big\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n, e_m \Big\rangle = \langle x, e_m\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, \langle e_n, e_m\rangle = 0$$

wegen $\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{nm}$. Man beachte hier, dass nach a) und wegen der Stetigkeit der Abbildung $X \to \mathbb{K}$, $y \mapsto \langle y, e_m\rangle$ das Skalarprodukt in die Summe gezogen werden darf. □

2.40 Satz. *Seien X ein Hilbertraum und $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ ein abzählbares Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:*

(i) *S ist Orthonormalbasis.*

(ii) *$S^\perp = \{0\}$.*

(iii) *Für alle $y \in X$ gilt $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle y, e_n\rangle\, e_n$.*

(iv) *Für alle $x, y \in X$ gilt $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle\, \overline{\langle y, e_n\rangle}$.*

(v) *(Parsevalsche Gleichung) Es gilt*

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \quad (x \in X).$$

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii). Falls ein $x \in S^\perp \setminus \{0\}$ existiert, so ist $S \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ ein Orthonormalsystem.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Satz 2.39 c).

(iii)$\Longrightarrow$(iv). Die Reihen konvergieren absolut nach Lemma 2.38 und Satz 2.39 a), man darf also einsetzen.

(iv)$\Longrightarrow$(v). Setze $x = y$.

(v)$\Longrightarrow$(i). Falls S nicht maximal ist, wählen wir ein $x \in S^\perp$ mit $\|x\| = 1$. Es ergibt sich $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 = 0$, Widerspruch zu (v). □

2.41 Bemerkung. Ein topologischer Raum heißt nach Definition 1.4 separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Da jeder Hilbertraum ein metrischer Raum ist, ergibt sich der topologische Abschluss einer Menge durch Hinzufügen aller Häufungspunkte (vgl. Bemerkung 1.13), was in der Anwendung häufig praktischer ist.

Ein normierter Raum X ist genau dann separabel, wenn es ein abzählbares linear unabhängiges $S \subset X$ gibt mit $\overline{\operatorname{span} S} = X$. Insbesondere ist ein Hilbertraum genau dann separabel, wenn er eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

Um das zu sehen, betrachtet man alle Linearkombinationen der Form $\sum_{k=1}^n a_k s_k$, $a_k \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$, $s_k \in S$.

2.42 Satz. *Sei X ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum mit Hilbertraumbasis $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dann ist die Abbildung $X \to \ell^2$, $x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}}$ ein isometrischer Isomorphismus von Hilberträumen (d.h. linear, bijektiv und isometrisch).*

Beweis. Die Linearität ist klar, Isometrie und damit Injektivität nach Satz 2.40 (v), die Surjektivität nach Satz 2.39 b). □

2.43 Beispiele (Hilbertraumdimension)**.** a) Der Raum $L^2(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist ein separabler Hilbertraum. Speziell ist durch $e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ eine Hilbertraumbasis des Hilbertraums $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$ gegeben (Fourierreihen). In diesem Fall erhält man

$$\langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx =: \hat{f}(n) \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

die Fourier-Koeffizienten von f. Die Parsevalsche Gleichung besagt dann

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})},$$

und die Abbildung $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ein Hilbertraum-Isomorhpismus.

Eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ ist durch die Hermite-Funktionen gegeben, die die Form $\psi_n(x) = c_n(x - \frac{d}{dx})^n e^{-x^2/2}$ mit geeigneter Konstante c_n besitzen.

b) Es gibt auch Prähilberträume mit überabzählbaren Orthonormalsystemen.

[[Dies zeigt das folgende Beispiel: Sei Y die Menge aller Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f|_{(-T,T)} \in L^2(-T,T)$ für alle $T > 0$, für welche

$$\|f\|_1 := \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

existiert. Dann ist $\|\cdot\|_1$ eine Halbnorm auf Y, aber keine Norm (so gilt etwa für die charakteristische Funktion $f := \chi_{(-1,1)}$ zwar $\|f\|_1 = 0$, aber $f \neq 0$).

Sei $N := \{f \in Y\colon \|f\|_1 = 0\}$. Dann ist N ein abgeschlossener Unterraum. Sei $X := Y/N$ der Quotientenraum mit induzierter Norm $\|[f]\|_2 := \inf_{g\in N} \|f-g\|_1$ $(f \in Y)$. Durch

$$\langle [f],[g]\rangle_2 := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_1(x)g_1(x)\,\mathrm{d}x \quad (f_1 \in [f], g_1 \in [g])$$

wird X zu einem Prähilbertraum, und es gilt $\langle [f],[f]\rangle_2 = \|[f]\|_2$.

Zu $\alpha > 0$ definiere $v_\alpha(x) := \sin(\alpha x) (x \in \mathbb{R})$. Wegen

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} v_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\left(T - \frac{\sin(s\alpha T)}{2\alpha}\right) \stackrel{T\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

gilt $v_\alpha \in Y$ und $\|v_\alpha\|_1 = \|[v_\alpha]\|_2 = 1$. Andererseits erhält man für $\alpha \neq \beta$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \sin(\alpha r)\sin(\beta r)\,\mathrm{d}r &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \cos((\alpha-\beta)r) - \cos((\alpha+\beta)r)\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{2T}\left[\frac{\sin((\alpha-\beta)r)}{\alpha-\beta} - \frac{\sin((\alpha+\beta)r)}{\alpha+\beta}\right]_{r=-T}^{r=T}\\ &= \frac{1}{T}\left[\frac{\sin((\alpha-\beta)T)}{\alpha-\beta} - \frac{\sin((\alpha+\beta)T)}{\alpha+\beta}\right] \stackrel{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Daher gilt $\langle [v_\alpha],[v_\beta]\rangle_2 = 0$ für $\alpha \neq \beta$, d.h. $\{v_\alpha\}_\alpha$ ist ein überabzählbares Orthonormalsystem in X.]]

2.44 Beispiele (Separabilität)**.** a) Der Raum $C([a,b])$ mit $\|\cdot\|_\infty$-Norm ist ein separabler Banachraum, denn die Polynome mit rationalen Koeffizienten liegen dicht. Die Räume $\mathbb{R}^n$ und ℓ^2 sind separabel nach Bemerkung 2.41. Ebenso separabel ist der Raum $L^2(\Omega)$ für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

b) Der Banachraum ℓ^∞ ist ein Beispiel für einen nicht separablen Raum: Angenommen es existiert eine dichte Teilmenge $\{x^{(k)}\colon k \in \mathbb{N}\} \subset \ell^\infty$. Schreibe $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ und betrachte

$$y_k := \begin{cases} x_k^{(k)} + 1, & : |x_k^{(k)}| < 1,\\ 0 & : \text{ sonst.}\end{cases}$$

Dann gilt $|y_k| \leq 2$ und damit $y := (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Aber für alle $k \in \mathbb{N}$ haben wir $|y_k - x_k^{(k)}| \geq 1$ und damit $\|y - x^{(k)}\|_\infty \geq 1$, Widerspruch zur Dichtheit von $\{x^{(k)}\colon k \in \mathbb{N}\}$.

c) Auch der Raum $L^\infty(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist ein Beispiel für einen nicht separablen Banachraum.

3. Hahn-Banach-Sätze und Reflexivität

3.1 Worum geht's? Die Sätze von Hahn-Banach können auf zwei verschiedene Arten formuliert und interpretiert werden: Zum einen als Fortsetzungssätze, bei welchen Fortsetzungen von Funktionalen gesucht werden, zum anderen als Trennungssätze, bei welchen Teilmengen durch den Wert eines Funktionals getrennt werden. Beide Versionen sind für Anwendungen wichtig. Beiden Versionen gemeinsam ist die Aussage, dass der topologische Dualraum eines normierten Raums hinreichend viele Funktionale enthält, um ausreichend Information über den ursprünglichen Raum zu erhalten. Als ein Beispiel einer Anwendung des Satzes von Hahn-Banach wird hier auch die Injektivität der sogenannten kanonischen Einbettung auftauchen. Diese bettet einen normierten Raum in seinen Bidualraum ein. Falls diese Einbettung auch surjektiv ist, heißt der Raum reflexiv, ein Begriff, der unter anderem im Bereich der schwachen Topologien und entsprechender Konvergenz- bzw. Kompaktheitsaussagen wichtig ist.

a) Hahn–Banach-Sätze

3.2 Satz (Fortsetzungssatz von Hahn–Banach, reelle Version)**.** *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $p\colon X \to \mathbb{R}$ konvex, d.h. es gelte*

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) \quad (\alpha \in [0,1], x, y \in X).$$

Sei ferner $L \subset X$ ein linearer Teilraum und $\lambda\colon L \to \mathbb{R}$ linear mit

$$\lambda(x) \le p(x) \quad (x \in L).$$

Dann existiert ein lineares $\Lambda\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\Lambda|_L = \lambda$ und $\Lambda(x) \le p(x) \quad (x \in X)$.

Beweis. **(i)** Fortsetzung auf $L \oplus \mathbb{R}z$:

Sei $z \in X \setminus L$ fest gewählt, und definiere $\widetilde{L} := \operatorname{span}\{L, z\} = L \oplus \mathbb{R}z$. Wir setzen jetzt λ auf $\widetilde{L}$ fort.

Für $y_1, y_2 \in L$ und $\alpha, \beta > 0$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned}
\beta\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2) &= \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) = (\alpha+\beta)\cdot\lambda\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y_1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, y_2\Big)\\
&\le (\alpha+\beta)p\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(y_2 + \beta z)\Big)\\
&\le \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{\alpha}\left[\lambda(y_1) - p(y_1 - \alpha z)\right] \le \frac{1}{\beta}\left[p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)\right] \tag{3-1}$$

Wähle

$$\widetilde{\lambda}(z) := \alpha_0 \in \left[\sup_{y_1 \in L,\, \alpha > 0} \frac{\lambda(y_1) - p(y_1 - \alpha z)}{\alpha}, \inf_{y_2 \in L,\, \beta > 0} \frac{p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)}{\beta}\right]$$

und definiere $\widetilde{\lambda}(\mu z + y) := \mu \widetilde{\lambda}(z) + \lambda(y)$ auf $\widetilde{L} = L \oplus \mathbb{R} \cdot z$.

$\widetilde{\lambda}$ ist linear auf $\widetilde{L}$ nach Definition, und es gilt

$$\widetilde{\lambda}(\mu z + y) = \mu \alpha_0 + \lambda(y) \le p(\mu z + y).$$

Denn für $\mu > 0$ gilt nach Wahl von α_0 die Abschätzung

$$p\,(y_2 + \beta z) \ge \lambda(y_2) + \beta \alpha_0.$$

Setze nun $y_2 := y$ und $\beta := \mu$. Den Fall $\mu < 0$ sieht man analog.

(ii) Fortsetzung auf X:

Sei $\mathscr{M}$ die Menge aller Abbildungen $m\colon M \to \mathbb{R}$ auf einem linearen Unterraum $M \supset L$, welche linear sind und für welche gilt $m|_L = \lambda$ und $m \le p|_M$.

Durch

$$m_1 \prec m_2 :\Longleftrightarrow M_1 \subset M_2,\ m_2|_{M_1} = m_1$$

wird $\mathscr{M}$ partiell geordnet. Sei $\{m_k\}$ eine Kette in $\mathscr{M}$. Deshalb ist dann $M := \bigcup_k M_k$ ein linearer Unterraum, und durch

$$m(x) := m_k(x) \quad (x \in M_k)$$

wird eine obere Schranke $m \in \mathscr{M}$ der Kette definiert. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element $\Lambda \in \mathscr{M}$.

Da Λ maximal ist, ist Λ auf ganz X definiert, denn sonst existiert nach Schritt 1 eine Fortsetzung auf $D(\Lambda) \oplus \mathbb{R} \cdot z$ mit $z \in X \setminus D(\Lambda)$. □

3.3 Satz (Hahn–Banach, komplexe Version)**.** *Sei X ein $\mathbb{C}-$ Vektorraum und $p\colon X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit*

$$p(\alpha x + \beta y) \le |\alpha|\, p(x) + |\beta|\, p(y) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\alpha| + |\beta| = 1).$$

Sei $L \subset X$ linearer Teilraum und $\lambda\colon L \to \mathbb{C}$ sei $\mathbb{C}$–linear mit $|\lambda(x)| \le p(x)$ $(x \in L)$. Dann existiert ein $\mathbb{C}$–lineares $\Lambda\colon X \to \mathbb{C}$ mit $\Lambda|_L = \lambda$ und $|\Lambda(x)| \le p(x) \quad (x \in X)$.

Beweis. Setze $\ell(x) := \operatorname{Re}\lambda(x)$. Dann ist $\ell\colon L \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung mit

$$\ell(x) \le |\lambda(x)| \le p(x) \quad (x \in L).$$

Weil λ $\mathbb{C}$–linear ist, haben wir $\ell(\mathrm{i}x) = -\operatorname{Im}\lambda(x)$, und somit ist $\lambda(x) = \ell(x) - \mathrm{i}\ell(\mathrm{i}x)$. Setze ℓ nach Satz 3.2 fort zu einem $\mathbb{R}$−linearen $\mathcal{L}\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{L}(x) \le p(x) \quad (x \in X)$. Dann ist

$$\Lambda(x) := \mathcal{L}(x) - \mathrm{i}\mathcal{L}(\mathrm{i}x)$$

$\mathbb{R}$–linear. Wegen

$$\Lambda(\mathrm{i}x) = \mathcal{L}(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}\mathcal{L}(-x) = \mathcal{L}(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\mathcal{L}(x) = \mathrm{i}\Lambda(x)$$

ist Λ tatsächlich $\mathbb{C}$–linear.

Für $\theta := \arg\Lambda(x)$ gilt:

$$|\Lambda(x)| = e^{-\mathrm{i}\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-\mathrm{i}\theta}x) = \mathcal{L}(e^{-\mathrm{i}\theta}x) \le p(e^{-\mathrm{i}\theta}x) \le p(x).$$

Hier wurde $\operatorname{Re}\Lambda = \mathcal{L}$ und $\Lambda(e^{-\mathrm{i}\theta}x) = |\Lambda(x)| \in \mathbb{R}$ verwendet. □

3.4 Korollar. *Sei X normiert, $L \subset X$ linearer Teilraum und $\lambda \in L'$. Dann existiert ein $\Lambda \in X'$ mit $\|\Lambda\|_{X'} = \|\lambda\|_{L'}, \Lambda|_L = \lambda$.*

Beweis. Sei $p(x) := \|\lambda\|_{L'} \cdot \|x\|$. Dann ist $|\lambda(x)| \le p(x) \quad (x \in L)$.

Nach Satz 3.3 existiert eine Fortsetzung Λ mit

$$|\Lambda(x)| \le \|\lambda\|_{L'} \cdot \|x\| \quad (x \in X),$$

d.h. $\Lambda \in X'$ und $\|\Lambda\|_{X'} \le \|\lambda\|_{L'}$. Wegen $\Lambda|_L = \lambda$ ist $\|\Lambda\|_{X'} = \|\lambda\|_{L'}$. □

3.5 Korollar. *Sei X normiert, $x_0 \in X \setminus \{0\}$ fest. Dann existiert ein $\Lambda \in X'$ mit $\Lambda(x_0) = \|x_0\|$ und $\|\Lambda\|_{X'} = 1$.*

Beweis. Definiere $L := \operatorname{span}(x_0)$, $\lambda\colon L \to \mathbb{K}$, $\lambda(\alpha x_0) := \alpha\|x_0\|$, und setze nach Korollar 3.4 fort. □

3.6 Korollar. *Sei X normiert, $M \subset X$ linearer Teilraum und $x_0 \in X$. Sei*

$$d := \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| > 0.$$

Dann existiert ein $\Lambda \in X'$ mit $\|\Lambda\| = 1$, $\Lambda(x_0) = d$ und $\Lambda|_M = 0$.

Beweis. Definiere λ auf $L := M \oplus \operatorname{span}(x_0)$ durch $\lambda(y + \alpha x_0) := \alpha d$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda\|_{L'} &= \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{K}\\ y\in M}} \frac{|\alpha d|}{\|y+\alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0\neq\alpha\in\mathbb{K}\\ y\in M}} \frac{|\alpha d|}{\|y+\alpha x_0\|}\\ &= \sup_{\substack{0\neq\alpha\in\mathbb{K}\\ z\in M}} \frac{|\alpha d|}{\|-\alpha z+\alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0\neq\alpha\in\mathbb{K}\\ z\in M}} \frac{d}{\|x_0 - z\|} = \frac{d}{\inf_{z\in M}\|x_0 - z\|} = \frac{d}{d} = 1.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Korollar 3.4. □

Die letzte Aussage kann bereits als Trennungseigenschaft gesehen werden: Der Vektor x_0 wird durch das Funktional Λ vom Unterraum M getrennt. Etwas allgemeiner gilt z.B. folgender Trennungssatz, der hier nicht bewiesen werden soll. (Der Beweis verwendet das sogenannte Minkowski-Funktional.)

3.7 Satz (Hahn–Banach, Trennungssatz-Version)**.** *Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge, und sei $x_0 \in X \setminus M$. Dann existieren ein $\Lambda \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit*

$$\operatorname{Re}\Lambda(y) < \alpha < \operatorname{Re}\Lambda(x_0) \quad (y \in M).$$

b) Dualräume und Reflexivität

3.8 Satz. *Seien X normierter Raum und Y Banachraum. Dann ist $L(X,Y)$ Banachraum. Insbesondere ist X' Banachraum.*

Beweis. Nur die Vollständigkeit ist nichttrivial. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ eine Cauchyfolge. Wegen $\|A_n x - A_m x\|_Y \le \|A_n - A_m\|\|x\|_X$ ist $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ für jedes $x \in X$ ebenfalls eine Cauchyfolge. Da Cauchyfolgen beschränkt sind, existiert ein $C \ge 0$ mit $\|A_n\| \le C$ für jedes n.

Setze $Ax := \lim_n A_n x \in Y$. Dann ist A offensichtlich linear. Wegen

$$\|Ax\|_Y = \lim_n \|A_n x\|_Y \le \lim_n \|A_n\| \cdot \|x\|_X \le C\,\|x\|_X$$

ist $A \in L(X,Y)$. Da $\|(A - A_n)x\|_Y = \lim_{m\to\infty} \|(A_m - A_n)x\|_Y$, erhalten wir

$$\|A - A_n\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A-A_n)x\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\neq 0} \lim_{m\to\infty} \frac{\|(A_m - A_n)x\|_Y}{\|x\|_X} \le \underbrace{\lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\|}_{<\varepsilon}$$

für $n \ge n_0$, d.h. es gilt $A_n \longrightarrow A$ in $L(X,Y)$. □

3.9 Lemma. *Sei X ein normierter Raum. Die Abbildung $X \to X''$, $x \mapsto \widetilde{x}$ mit*

$$\widetilde{x}(\lambda) := \lambda(x) \quad (\lambda \in X')$$

ist linear und isometrisch. Insbesondere gilt

$$\|x\|_X = \sup_{\lambda \in X',\, \|\lambda\|_{X'}=1} |\lambda(x)| \quad (x \in X).$$

Beweis. Es gilt

$$(\widetilde{\alpha x + \beta y})(\lambda) = \lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda(x) + \beta\lambda(y) = \alpha\widetilde{x}(\lambda) + \beta\widetilde{y}(\lambda),$$

d.h. die Abbildung $x \mapsto \widetilde{x}$ ist linear. Weiter ist

$$\|\widetilde{x}\|_{X''} = \sup_{\|\lambda\|\le 1} |\widetilde{x}(\lambda)| = \sup_{\|\lambda\|\le 1} |\lambda(x)| \le \sup_{\|\lambda\|\le 1} \|\lambda\| \cdot \|x\|_X \le \|x\|_X\,.$$

Nach Lemma 3.5 existiert zu jedem $x \in X$ ein $\lambda_0 \in X'$ mit $\|\lambda_0\|_{X'} = 1$ und $\lambda_0(x) = \|x\|_X$. Damit gilt $\|\widetilde{x}\|_{X''} = \sup_{\|\lambda\|_{X'}\le 1} |\lambda(x)| \ge |\lambda_0(x)| = \|x\|_X$. □

3.10 Definition. Ein normierter Raum X heißt reflexiv, falls die kanonische Einbettung $X \hookrightarrow X''$ aus Lemma 3.9 surjektiv ist.

3.11 Beispiele. a) Jeder Hilbertraum ist reflexiv nach dem Satz von Riesz.

b) Sei $1 < p < \infty$ und $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Nach einem Satz von Riesz ist die Abbildung

$$T\colon L^q(\mu) \to (L^p(\mu))', \quad (Tg)(f) := \int fg\,\mathrm{d}\mu \tag{3-2}$$

ein isometrischer Isomorphismus von Banachräumen, wobei $q \in (1, \infty)$ definiert ist durch $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Damit ist $L^p(\mu)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv.

[[Sei $\Lambda \in (L^p(\mu))''$. Definiere das Funktional $\Lambda_1 := \Lambda \circ T \in (L^q(\mu))'$. Nach dem Satz von Riesz, angewendet auf den Raum $(L^q(\mu))'$, existiert genau eine Funktion $h \in L^p(\mu)$, so dass für alle $g \in L^q(\mu)$ der Wert $\Lambda_1(g)$ gegeben ist durch

$$\Lambda_1(g) = \int g \cdot h\,\mathrm{d}\mu. \tag{3-3}$$

Somit gilt für jedes $\lambda \in (L^p(\mu))'$

$\Lambda(\lambda) = \Lambda_1(T^{-1}\lambda)$	$\Lambda = \Lambda_1 \circ T^{-1}$
$= \int (T^{-1}\lambda) \cdot h\,\mathrm{d}\mu$	wegen (3-3)
$= \lambda(h)$	wegen (3-2)

$$= \widetilde{h}(\lambda).$$

Wir haben gesehen, dass $\Lambda = \widetilde{h}$ gilt, d.h. dass die Abbildung $h \mapsto \widetilde{h},\ X \to X''$, surjektiv ist. Die $L^p(\mu)$-Räume sind für $1 < p < \infty$ also reflexiv.]]

c) In der Situation von b) gilt die Isomorphie $\big(L^1(\mu)\big)' = L^\infty(\mu)$, aber andererseits $L^1(\mu) \subsetneq \big(L^\infty(\mu)\big)'$, d.h. $L^1(\mu)$ ist nicht reflexiv. Diese Aussage wird nicht bewiesen.

4. Lineare Operatoren: Grundbegriffe

4.1 Worum geht's? Eine der zentralen Begriffe der Funktionalanalysis ist der eines linearen Operators. Während im Endlich-Dimensionalen alle linearen Abbildungen stetig und damit beschränkt sind (und durch Matrizen dargestellt werden können), treten gerade in vielen Anwendungen wie etwa bei Differentialgleichungen unbeschränkte Operatoren auf. Ein typisches Beispiel ist - bei geeigneter Wahl der Räume - der Ableitungsoperator. In diesem Abschnitt geht es um grundlegende Begriffe und Eigenschaften wie das Spektrum eines Operators und Eigenschaften der Resolvente.

a) Operatoren und Spektrum

Im folgenden sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

4.2 Beispiel (Shift-Operatoren)**.** a) Definiere den Rechtsshift $S_R \in L(\ell^2)$ durch

$$S_R\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad y_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 1, \\ x_{n-1} & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Dann ist S stetig mit Norm 1 (sogar eine Isometrie, d.h. es gilt $\|Sx\|_2 = \|x\|_2 \quad (x \in \ell^2)$), injektiv aber nicht surjektiv. Analog ist der Linksshift

$$S_L\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

stetig mit Norm 1, surjektiv aber nicht injektiv.

b) Sei $\ell^2(\mathbb{Z}) := \{x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \ \|x\|_2 := (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2)^{1/2} < \infty\}$ und S_R der Rechtsshift

$$S_R\big((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) := (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Dann ist S_R ein Norm-Isomorphismus, d.h. S_R ist bijektiv, linear, S_R und S_R^{-1} sind stetig, und S_R ist eine Isometrie.

4.3 Beispiel (Ableitungsoperator)**.** a) Sei $X := C^1([0,1])$ mit Norm $\|f\|_X := \sup\{|f(t)| + |f'(t)| \colon t \in [0,1]\}$ und $Y := C([0,1])$, versehen mit der Norm $\|f\|_Y := \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| \colon t \in [0,1]\}$. Dann sind X, Y Banachräume, und der Ableitungsoperator

$$T\colon X \to Y,\ f \mapsto f'$$

ist ein linearer stetiger Operator mit Norm 1.

b) Wählt man in a) für X die Supremumsnorm $\|f\|_\infty$, so ist der Ableitungsoperator T nicht mehr stetig, denn für $f_n(t) := t^n$ gilt $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\|Tf_n\|_\infty = n$, d.h. $\|T\| = \infty$. Jetzt ist X nur noch normierter Vektorraum, aber nicht mehr vollständig.

Das letzte Beispiel (Teil b)) ist typisch: Hier ist der Definitionsbereich $D(T)$ des Operators T ein linearer dichter Teilraum eines Banachraums X, und T bildet nach X ab. In diesem Sinn ist T ein Operator „in“ X.

4.4 Definition. Seien X, Y normierte Räume.

a) Ein linearer Operator $T\colon X \supset D(T) \to Y$ ist eine lineare Abbildung vom Definitionsbereich $D(T) \subset X$ nach Y, wobei $D(T)$ ein linearer Unterraum von X ist. Die Menge $G(T) := \{(x, Tx)\colon x \in D(T)\}$ heißt der Graph von T.

b) Der Operator T heißt abgeschlossen, wenn $G(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \oplus Y$ ist.

c) Der Operator T heißt abschließbar, wenn es einen abgeschlossenen linearen Operator $\overline{T}$ gibt mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Der Operator $\overline{T}$ heißt Abschließung oder der Abschluss von T.

4.5 Bemerkung. a) Wie üblich bei Abbildungen, ist die Stetigkeit eines linearen Operators $T\colon X \supset D(T) \to Y$ unter Verwendung der Relativtopologie auf $D(T)$ erklärt. Damit ist T genau dann stetig, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \longrightarrow 0$ gilt $Tx_n \longrightarrow 0$ (hierbei haben wir benutzt, dass eine Abbildung zwischen metrischen Räumen genau dann stetig ist, wenn sie folgenstetig ist).

b) Ein linearer Operator T ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \longrightarrow x \in X$ und $Tx_n \longrightarrow y \in Y$ gilt $x \in D(T)$ und $Tx = y$.

4.6 Lemma. *Seien X, Y normierte Räume und $T \in L(X, Y)$. Dann ist T abgeschlossen.*

Beweis. Wir verwenden Bemerkung 4.5 b). Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \longrightarrow x$ in X und $Tx_n \longrightarrow y$ in Y. Dann gilt trivialerweise $x \in D(T) = X$, und da T stetig ist, folgt $Tx_n \longrightarrow Tx$, d.h. $Tx = y$. □

4.7 Lemma. *Seien X, Y Banachräume und $T\colon X \supset D(T) \to Y$ ein linearer Operator. Dann definiert*

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y \quad (x \in D(T))$$

eine Norm auf $D(T)$, die sog. Graphennorm. Der normierte Raum $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist genau dann ein Banachraum, wenn der Operator T abgeschlossen ist.

Beweis. (i) Sei T abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ eine Cauchyfolge bzgl. der Norm $\|\cdot\|_T$. Dann ist nach Definition der Norm $\|\cdot\|_T$ sowohl die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset$

X bzgl. der Norm $\|\cdot\|_X$ als auch die Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_Y$ eine Cauchyfolge. Da X und Y Banachräume sind, existieren $x \in X$ und $y \in Y$ mit $\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0$ und $\|Tx_n - y\|_Y \longrightarrow 0$. Da T abgeschlossen ist, folgt nach Bemerkung 4.5 b) $x \in D(T)$ und $Tx = y$. Insbesondere folgt $\|x_n - x\|_T \longrightarrow 0$. Also ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum.

(ii) Die andere Richtung der Äquivalenz zeigt man analog. □

Im folgenden schreiben wir für einen Operator $T\colon X \supset D(T) \to X$ statt $T - \lambda\,\mathrm{id}_X$ einfach $T - \lambda$.

4.8 Definition. Sei X ein Banachraum und $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein linearer Operator.

a) $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{R(T-\lambda)} = X, (T-\lambda)$ injektiv, $(T-\lambda)^{-1}\colon R(T-\lambda) \to X$ stetig$\}$ heißt die Resolventenmenge von T.

b) $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt das Spektrum von T.

c) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon T - \lambda$ nicht injektiv$\}$ heißt das Punktspektrum von T (die Menge aller Eigenwerte von T).

d) $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon T-\lambda$ injektiv, $\overline{R(T-\lambda)} = X$, $(T-\lambda)^{-1}\colon R(T-\lambda) \to X$ nicht stetig$\}$ heißt das kontinuierliche Spektrum von T.

e) $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon T-\lambda$ injektiv, $\overline{R(T-\lambda)} \neq X\}$ heißt das residuelle Spektrum (oder Restspektrum) von T.

4.9 Bemerkung. a) Nach Definition gilt

$$\mathbb{C} = \rho(T) \,\dot\cup\, \sigma(T) = \rho(T) \,\dot\cup\, \sigma_p(T) \,\dot\cup\, \sigma_c(T) \,\dot\cup\, \sigma_r(T),$$

wobei $\dot\cup$ die disjunkte Vereinigung bezeichnet.

b) Nach dem Satz vom stetigen Inversen (wird später bewiesen) folgt für abgeschlossene Operatoren T aus der Bijektivität von $(T-\lambda)\colon D(T) \to X$ bereits die Stetigkeit von $(T-\lambda)^{-1}\colon X \to X$. Somit gilt für T abgeschlossen

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T-\lambda\colon D(T) \to X \text{ bijektiv}\}, \\ \sigma_c(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T-\lambda\colon D(T) \to X \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} = X,\ R(T-\lambda) \neq X\}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt: Falls $T-\lambda\colon D(T) \to X$ bijektiv ist und $(T-\lambda)^{-1}\colon X \to X$ stetig ist, so folgt bereits die Abgeschlossenheit von T. Denn nach Lemma 4.6 ist $(T-\lambda)^{-1}$ abgeschlossen, und damit ist auch $T-\lambda$ abgeschlossen (wie man z.B. mit Bemerkung 4.5 b) sieht). Somit ist auch T abgeschlossen (wieder mit Bemerkung 4.5 b)).

c) Falls $\dim X < \infty$, so ist $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$.

4.10 Definition. Sei $T\colon X\supset D(T)\to X$ ein abgeschlossener linearer Operator.

a) Für $\lambda\in\rho(T)$ heißt $R_\lambda(T):=(T-\lambda)^{-1}$ die Resolvente von T. Die Abbildung $\rho(T)\to L(X), \lambda\mapsto R_\lambda(T)$, heißt Resolventenabbildung.

b) Für $\lambda\in\sigma_p(T)$ heißt $\ker(T-\lambda)$ der geometrische Eigenraum von T zu λ und

$$\{x\in D(T)\,:\,\exists\, n\in\mathbb{N}\colon x\in D(T^n) \text{ und } (T-\lambda)^n x=0\}$$

der algebraische Eigenraum von T zu λ.

Hierbei haben wir den Definitionsbereich für die Verknüpfung von Operatoren (insbesondere den Definitionsbereich von $(T-\lambda)^n$) auf naheliegende Weise definiert:

4.11 Definition. Seien X, Y, Z normierte Räume. Seien ferner $S, \widetilde{S}$ lineare Operatoren von X nach Y und T ein linearer Operator von Y nach Z.

a) Der Operator $S+\widetilde{S}$ ist definiert durch

$$D(S+\widetilde{S}):=D(S)\cap D(\widetilde{S}) \text{ und } (S+\widetilde{S})x:=Sx+\widetilde{S}x \quad (x\in D(S+\widetilde{S})).$$

b) Der Operator $TS\colon X\to Z$ ist definiert durch

$$D(TS):=\{x\in D(S)\colon Sx\in D(T)\} \text{ und } (TS)x:=T(Sx) \quad (x\in D(TS)).$$

c) Wir schreiben $S\subset\widetilde{S}$, falls $D(S)\subset D(\widetilde{S})$ und $\widetilde{S}|_{D(S)}=S$ gilt.

4.12 Beispiel. Sei $X=\ell^2$ und $S=S_R\in L(X)$ der Rechts-Shift aus Beispiel 4.2, d.h. $S(x_1,x_2,\dots):=(0,x_1,x_2,\dots)$. Dann ist $D(S)=\ell^2$, $\ker S=\{0\}$ und $\|e_1-y\|\ge 1$ für alle $y\in R(S)$, wobei $e_1:=(1,0,0,\dots)$. Daher ist $\overline{R(S)}\ne X$ und damit $0\in\sigma_r(S)$.

b) Eigenschaften der Resolventenabbildung

4.13 Lemma (Neumannsche Reihe)**.** *Sei X ein Banachraum und $T\in L(X)$ mit $\|T\|<1$. Dann existiert $(1-T)^{-1}\in L(X)$, und es gilt $(1-T)^{-1}=\sum_{n=0}^\infty T^n$ und $\|(1-T)^{-1}\|\le\frac{1}{1-\|T\|}$.*

Beweis. Es gilt

$$\sum_{n=0}^N \|T^n\| \le \sum_{n=0}^N \|T\|^n \le \sum_{n=0}^\infty \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|}\,,$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut. Damit existiert $S := \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in L(X)$, und es gilt $\|S\| \le \frac{1}{1-\|T\|}$.

Es gilt $ST = TS = \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = S - 1$, d.h. $S(1-T) = (1-T)S = 1$ und damit $S = (1-T)^{-1}$. □

4.14 Satz. *Sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann ist $\rho(T)$ offen und somit $\sigma(T)$ abgeschlossen.*

Beweis. Falls $\rho(T) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\lambda_0 \in \rho(T)$. Es gilt

$$T - \lambda = T - \lambda_0 - (\lambda - \lambda_0) = (T - \lambda_0)\big[1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}\big].$$

Nach Definition der Resolventenmenge ist $(T - \lambda_0)^{-1}$ beschränkt. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| \cdot \|(T - \lambda_0)^{-1}\| < 1$ existiert

$$\big[1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}\big]^{-1} \in L(X)$$

nach Lemma 4.13. Damit existiert

$$(T - \lambda)^{-1} = \big[1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}\big]^{-1}(T - \lambda_0)^{-1} \in L(X).$$

Somit gilt

$$\Big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda - \lambda_0| < \big\|(T - \lambda_0)^{-1}\big\|^{-1}\Big\} \subset \rho(T),$$

also ist $\rho(T)$ offen. □

4.15 Korollar. a) *Für $\lambda_0 \in \rho(T)$ gilt*

$$\|R_{\lambda_0}(T)\| \ge \big[\mathrm{dist}\,(\lambda_0, \sigma(T))\big]^{-1}.$$

b) *Für $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ gilt*

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}.$$

Beweis. a) folgt aus der letzten Zeile im Beweis von Satz 4.14, b) aus der Darstellung von $R_\lambda(T)$ im Beweis von Satz 4.14 und der Neumann–Reihe. □

4.16 Satz. *Sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T \in L(X)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer.*

Beweis. (i) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ ist $T - \lambda = (-\lambda)(1 - \lambda^{-1}T)$ nach Lemma 4.13 in $L(X)$ invertierbar, d.h. $\lambda \in \rho(T)$. Also ist $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| \le \|T\|\}$ und damit kompakt.

(ii) Angenommen, es gilt $\rho(T) = \mathbb{C}$. Nach Korollar 4.15 b) gilt für jedes $x \in X$ und jedes $f \in X'$

$$g(\lambda) := f(R_\lambda(T)x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n f(R_{\lambda_0}(T)^{n+1}x),$$

falls $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$. Also ist g eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Für $|\lambda| \ge 2\|T\|$ gilt

$$\|R_\lambda(T)\| = \|(-\lambda)^{-1}(1 - \lambda^{-1}T)^{-1}\| \le \frac{2}{|\lambda|} \to 0 \quad (|\lambda| \to \infty),$$

damit ist $g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville aus der Funktionentheorie folgt, dass g konstant ist, und wegen $|g(\lambda)| \to 0$ $(|\lambda| \to \infty)$ erhalten wir $g(\lambda) = 0$. Insbesondere gilt $f(R_{\lambda_0}(T)x) = 0$ für alle $f \in X'$ und $x \in X$ und damit $R_{\lambda_0}(T) = 0$ im Widerspruch zur Bijektivität von $T - \lambda_0$. □

4.17 Beispiel. Die folgenden Beispiele zeigen, dass für unbeschränkte Operatoren sehr wohl die Fälle $\sigma(T) = \mathbb{C}$ und $\sigma(T) = \emptyset$ auftreten können.

a) Sei $X = C([0,1])$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := C^1([0,1])$. Dann ist T unbeschränkt, da $\|Tf_n\| = n$ und $\|f_n\| = 1$ gilt für $f_n(t) := t^n$.

Wir zeigen, dass T abgeschlossen ist: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit Konvergenzen $f_n \longrightarrow f$ in X und $Tf_n = f_n' \longrightarrow g$ in X. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergieren, gilt $f \in C^1([0,1])$ und $f_n' \longrightarrow f'$. Somit ist $f \in D(T)$ und $g = f' = Tf$.

Weil für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion $f(t) := e^{\lambda t}$ in $\ker(T - \lambda)$ liegt, gilt gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$.

b) Sei $X := C_0([0,1]) := \{f \in C([0,1]) \colon f(0) = 0\}$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := \{f \in X \colon f' \in X\}$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, und seien $f, g \in X$. Betrachte die Gleichung $(T - \lambda)f = g$, d.h. $f' - \lambda f = g$. Versehen mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ hat diese gewöhnliche Differentialgleichung die eindeutige Lösung

$$f(t) = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} g(s)\, \mathrm{d}s.$$

Es gilt $f'(0) = g(0) + \lambda f(0) = 0$, d.h. $f' \in X$ und damit $f \in D(T)$. Somit ist $T - \lambda \colon D(T) \to X$ bijektiv für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $\rho(T) = \mathbb{C}$.

Der Vergleich von a) und b) zeigt, dass eine kleine Änderung des Grundraums X das Spektrum eines unbeschränkten Operators erheblich beeinflussen kann.

4.18 Definition und Satz (Adjungierte beschränkter Operatoren). *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$. Für jedes $f \in Y'$ wird durch $f_1 := f \circ T$, d.h. $f_1(x) := f(Tx)$ $(x \in X)$ ein beschränktes lineares Funktional $f_1 \in X'$ definiert. Die Abbildung $T' \colon Y' \to X'$, $f \mapsto f \circ T$ heißt (Banachraum-)adjungierter Operator zu T. Es gilt $T' \in L(Y', X')$. Die Abbildung $T \mapsto T'$, $L(X,Y) \to L(Y', X')$ ist eine Isometrie.*

Manchmal schreibt man $\langle x, g\rangle_{X \times X'} := g(x)$ für $x \in X$ und $g \in X'$. In dieser Schreibweise wird die Gleichung $f(Tx) = (T'f)(x)$ zu

$$\langle Tx, f\rangle_{Y \times Y'} = \langle x, T'f\rangle_{X \times X'}.$$

Beweis. Wegen $f_1 = f \circ T$ ist die Linearität und die Stetigkeit von f_1 klar. Wegen

$$|f_1(x)| = |f(Tx)| \le \|f\|_{Y'} \cdot \|T\| \cdot \|x\|, \qquad x \in X,$$

ist $\|f_1\|_{X'} \le \|T\| \cdot \|f\|_{Y'}$, d.h. $\|T'\| \le \|T\|$. Der Operator T' ist linear wegen

$$T'(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)(Tx) = \alpha f(Tx) + \beta g(Tx).$$

Ebenso ist die Abbildung $T \mapsto T'$ linear.

Zu zeigen ist noch, dass $\|T\| \le \|T'\|$ gilt. Nach Lemma 3.5 a) existiert zu $x \in X$ ein $f_x \in Y'$ mit $\|f_x\|_{Y'} = 1$ und $f_x(Tx) = \|Tx\|_Y$. Damit ist

$$\|Tx\|_Y = |f_x(Tx)| = |(T'f_x)(x)| \le \|T'\| \cdot \|x\|_X. \qquad \square$$

4.19 Bemerkung. Es gelten die üblichen Rechenregeln für den adjungierten Operator: Falls $T \in L(X,Y)$ und $S \in L(Y,Z)$, so ist $(ST)' = T'S'$. Denn es gilt $((ST)'f)(x) = f(STx) = (S'f)(Tx) = [T'(S'f)](x)$ $(x \in X)$, also $(ST)'f = T'S'f$ für jedes $f \in Z'$.

Falls $T \in L(X,Y)$ invertierbar ist, so gilt $(T^{-1})' = (T')^{-1}$. Dies folgt aus $(T^{-1})'T' = (TT^{-1})' = \mathrm{id}_Y' = \mathrm{id}_{Y'}$ und $T'(T^{-1})' = (T^{-1}T)' = \mathrm{id}_X' = \mathrm{id}_{X'}$.

4.20 Definition (Adjungierte unbeschränkter Operatoren). Seien X, Y Banachräume und $T \colon X \to Y$ ein linearer dicht definierter Operator (d.h. $\overline{D(T)} = X$). Definiere

$$D(T') := \{f \in Y' \colon \exists\, f_1 \in X' \text{ mit } f(Tx) = f_1(x) \quad (x \in D(T))\}$$

und

$$T'f := f_1 \quad (f \in D(T')).$$

Kurz kann man auch schreiben: $D(T') = \{f \in Y' \colon x \mapsto f(Tx) \in X'\}$. Die Abbildung $T' \colon Y' \to X'$ mit Definitionsbereich $D(T')$ heißt (Banachraum-)Adjungierte von T.

4.21 Bemerkung. a) $T'f$ ist eindeutig definiert. Denn seien $f_1, f_2 \in X'$ mit $f_1(x) = f(Tx) = f_2(x) \quad (x \in D(T))$. Da $\overline{D(T)} = X$ und f_1, f_2 stetig sind, folgt $f_1 = f_2$ auf ganz X. Aus der Eindeutigkeit von $T'f$ folgt dann auch die Linearität von T'.

b) Es gilt $(f, g) \in G(T')$ genau dann, wenn $g(x) = f(Tx)$ $(x \in D(T))$.

c) Der Operator T' ist abgeschlossen. Denn sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T')$ mit Konvergenzen $f_n \longrightarrow f$ in Y' und $T'f_n \longrightarrow g$ in X'. Dann gilt für $x \in D(T)$:

$$f(Tx) = \lim_{n\to\infty} f_n(Tx) = \lim_{n\to\infty} (T'f_n)(x) = g(x).$$

Damit haben wir $f \in D(T')$ und $(f, g) \in G(T')$ nach b).

Hilberträume sind Spezialfälle von Banachräumen, daher übertragen sich die obigen Definitionen auch auf Hilberträume. Man verwendet aber meistens den Begriff der Hilbertraum-Adjungierten. Grundlage dafür ist die Beschreibung des Dualraums durch den Satz von Riesz (Satz 2.32).

4.22 Definition und Satz. *Seien X, Y Hilberträume, und $T \in L(X, Y)$. Dann existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x^* \in X$ mit*

$$\langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, x^*\rangle_X \quad (x \in X).$$

Setze $T^*y := x^*$. Die Abbildung $T^* \in L(Y, X)$ heißt (Hilbertraum-)Adjungierte zu T.

Beweis. Das folgt sofort aus Satz 4.18 und dem Satz von Riesz. Man beachte, dass die Abbildung aus dem Satz von Riesz

$$i_X : X \to X', \; x \mapsto \langle \cdot, x\rangle$$

isometrisch aber konjugiert linear ist. Damit hängen Hilbertraum- und Banachraum-adjungierte über $T^* = i_X^{-1} \circ T' \circ i_Y$ zusammen. □

4.23 Definition. Seien X, Y Hilberträume und $T : X \to Y$ ein linearer dicht definierter Operator. Definiere

$$\begin{aligned} D(T^*) &:= \big\{ y \in Y : \; \exists x^* \in X : \langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, x^*\rangle_X \quad (x \in D(T)) \big\}, \\ T^*x &:= x^* \quad (x \in D(T^*)). \end{aligned}$$

Der Operator T^* heißt (Hilbertraum-)Adjungierte von T.

4.24 Definition. a) Seien X, Y Hilberträume und $T \in L(X, Y)$. Dann heißt T unitär, falls $TT^* = \mathrm{id}_Y$ und $T^*T = \mathrm{id}_X$ gilt.

b) Sei X ein Hilbertraum und T ein linearer dicht definierter Operator in X. Dann heißt T

(i) selbstadjungiert, falls $T = T^*$,

(ii) normal, falls $TT^* = T^*T$,

(iii) wesentlich selbstadjungiert, falls T abschließbar ist und $\overline{T}$ selbstadjungiert ist,

(iv) symmetrisch, falls $T \subset T^*$ gilt.

Bei dieser Definition ist zu beachten, dass zwei Operatoren genau dann gleich sind, falls sie gleiche Definitionsbereiche haben und darauf gleiche Werte annehmen.

5. Distributionen und Sobolevräume

5.1 Worum geht's? In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist es oftmals sinnvoll, den Begriff der bekannten klassischen Differenzierbarkeit aufzulockern. Dies ermöglicht es etwa, Lösungsbegriffe zu definieren, die zwar schwächer sind als bereits bekannte, trotzdem aber für viele Anwendungen ausreichend sind. Die Theorie der Distributionen stellt nun Begriffsbildungen zur Verfügung, die es uns im Folgenden erlauben werden gewisse Sachverhalte elegant zu beschreiben. Insbesondere werden wir in der Lage sein, der Diracschen δ-„Funktion" einen präzisen Sinn zu geben. Dies wiederum wird von großer Wichtigkeit für die darauf folgende Potentialtheorie sein. Zu erwähnen ist, dass der Name „Distributionen" von Laurent Schwartz eingeführt wurde.

a) Distributionen

In diesem Kapitel werden wir die praktische Multiindex-Schreibweise verwenden:

5.2 Definition (Multiindex-Schreibweise)**.** Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} x\xi &:= \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \\ |x| &:= \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{1/2}, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}, \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Für $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(x).$$

5.3 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen.

a) Für eine Funktion $\varphi\colon G \to \mathbb{C}$ heißt $\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in G\colon \varphi(x) \neq 0\}}$ der Träger von φ.

Die Menge $C_c^\infty(G) := \{\varphi \in C^\infty(G)\colon \operatorname{supp}\varphi \subset G, \operatorname{supp}\varphi \text{ kompakt}\}$ heißt die Menge der Testfunktionen auf G (oder die Menge der C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger). Manchmal sieht man auch die Bezeichnung $C_0^\infty(G) := C_c^\infty(G)$.

b) Sei $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(G)$, dann definieren wir die Konvergenz wie folgt: Es gilt $\varphi_\ell \xrightarrow{\mathscr{D}(G)} 0$ $(\ell \to \infty)$, falls eine kompakte Teilmenge $K \subset G$ existiert mit $\operatorname{supp}\varphi_\ell \subset K$ $(\ell \in \mathbb{N})$

und

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \colon \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_\ell(x)| \to 0 \quad (\ell \to \infty).$$

c) Die Menge $\mathscr{D}'(G)$ wird definiert als die Menge aller Abbildungen $u\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

(i) $u\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}$ ist linear,

(ii) für alle Folgen $(\varphi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $\varphi_\ell \xrightarrow{\mathscr{D}(G)} 0$ $(\ell \to \infty)$ gilt $u(\varphi_\ell) \to 0$.

$\mathscr{D}'(G)$ heißt Menge der Distributionen von G.

5.4 Bemerkung. a) Es existiert eine Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathscr{D}(G)$ (in Form einer lokalkonvexen Topologie), so dass die oben definierte Konvergenz in $\mathscr{D}(G)$ gerade der Konvergenz bzgl. $\mathcal{T}$ entspricht und eine lineare Abbildung $u\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}$ genau dann stetig ist, wenn c) (ii) gilt. Versieht man $\mathscr{D}(G)$ mit dieser Topologie, so ist $\mathscr{D}'(G) = \{u\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C} \mid u \text{ linear und stetig}\}$.

b) Es existieren ausreichend viele Testfunktionen; ein Beispiel einer Testfunktion lässt sich mit Hilfe der exp-Funktion konstruieren. Tatsächlich liegen die Testfunktionen sogar dicht in $L^p(G)$ für $1 \le p < \infty$ (aber nicht in $L^\infty(G)$). Der Beweis dieser Aussage verwendet etwa den sogenannten Friedrichsschen Glättungsoperator.

5.5 Beispiel (reguläre Distributionen)**.** Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(G) := \{f\colon G \to \mathbb{C}\colon \forall K \subset G,$ K kompakt: $f|_K \in L^1(K)\}$. Dann definiert

$$[f]\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi \mapsto [f](\varphi) := \int_G f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Distribution, denn

(i) $[f]$ ist offensichtlich linear.

(ii) Sei $(\varphi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{D}(G)$ mit $\varphi_\ell \xrightarrow{\mathscr{D}(G)} 0$ für $\ell \to \infty$, dann folgt:

$$|[f]\varphi_\ell| \le \int_G |f\varphi_\ell|\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^1(K)} \cdot \sup_{x \in K} |\varphi_\ell(x)| \to 0$$

für $\ell \to \infty$ und ein passendes $K \subset G$, K kompakt. In diesem Zusammenhang spricht man auch davon, dass $[f]$ eine von f erzeugte Distribution ist. Eine von einer L^1_{loc}-Funktion erzeugte Distribution heißt *reguläre* Distribution.

5.6 Beispiel (Dirac-Distribution)**.** Ein Beispiel für eine nicht-reguläre Distribution ist die sog. Dirac-Distribution (Diracsche „Deltafunktion“), die für festes $x_0 \in G$ definiert ist durch

$$\delta_{x_0}\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0).$$

Offensichtlich ist $\delta_{x_0}\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}$ linear. Sei $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(G)$ eine Folge mit $\varphi_\ell \xrightarrow{\mathscr{D}(G)} 0$. Dann gilt

$$|\delta_{x_0}(\varphi_\ell)| = |\varphi_\ell(x_0)| \le \sup_{x\in K} |\varphi_\ell(x)| \to 0$$

für $\ell \to \infty$ und jedes kompakte $K \subset G$ mit $x_0 \in K$.

Die Dirac-Distribution ist jedoch nicht regulär. Denn sonst existiert ein $f \in L^1_{\text{loc}}(G)$ existiert mit

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \int_G f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad (\varphi \in \mathscr{D}(G)).$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, dass $\overline{B(x_0,\varepsilon)} \subset G$ und $\int_{B(x_0,\varepsilon)} |f(x)|\,\mathrm{d}x < 1$ gilt. Weiter wählen wir eine Testfunktion φ, für die einerseits $\operatorname{supp}\varphi \subset B(x_0,\varepsilon)$ und andererseits $\forall x \in G\colon \varphi(x_0) \ge \varphi(x) \ge 0$ sowie $\varphi(x_0) > 0$ gilt. Damit ergibt sich dann aber

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = |\varphi(x_0)| = \Big|\int_G f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big| \le \varphi(x_0)\int_{B(x_0,\varepsilon)} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varphi(x_0),$$

Widerspruch.

Wie zu Anfang dieses Kapitels bereits erwähnt wurde, haben wir das Ziel, den klassischen Ableitungsbegriff aufzulockern oder zu verallgemeinern. Das bedeutet aber, dass sich dieser Ableitungsbegriff bei klassisch differenzierbaren Funktionen nicht von dem klassischen Begriff unterscheiden sollte. Es sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $[f]$ die von f erzeugte reguläre Distribution. Offenbar gilt dann für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le k$

$$[\partial^\alpha f](\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)\varphi\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f\partial^\alpha\varphi\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}[f](\partial^\alpha\varphi).$$

Dies motiviert die folgende

5.7 Definition. Für beliebiges $u \in \mathscr{D}'(G)$ sei für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\partial^\alpha u\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha\varphi).$$

$\partial^\alpha u$ heißt Ableitung der Distribution u vom Grad $|\alpha|$.

Es ist klar, dass $\partial^\alpha u \in \mathscr{D}'(G)$ ist, da mit $\varphi_\ell \xrightarrow{\mathscr{D}(G)} 0$ auch $\partial^\alpha\varphi_\ell \xrightarrow{\mathscr{D}(G)} 0$ gilt. Also ist jede Distribution beliebig oft differenzierbar.

5.8 Beispiel (Heaviside-Funktion)**.** Sei

$$h(x) := \chi_{[0,\infty)}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dann ist $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, und für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$ mit $a \leq 0 \leq b$ gilt

$$[h]'(\varphi) = -\int_a^b h(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^b \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

Also erhalten wir $[h]' = \delta_0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Für die zweite Ableitung gilt direkt nach Definition

$$[h]''(\varphi) = \delta_0'(\varphi) = -\delta_0(\varphi') = -\varphi'(0) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})).$$

b) Sobolevräume: Definition und erste Eigenschaften

Im Folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $1 \leq p < \infty$.

Für eine Distribution $u \in \mathscr{D}'(G)$ und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ schreiben wir

$$\partial^\alpha u \in L^p(G),$$

falls eine Funktion $f \in L^p(G)$ existiert mit $\partial^\alpha u = [f]$ in $\mathscr{D}'(G)$. Hier ist $[f]$ wieder die zu f gehörige reguläre Distribution.

5.9 Definition (Sobolevräume)**.** a) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere

$$W_p^s(G) := \{u \in \mathscr{D}'(G) \colon\ \partial^\alpha u \in L^p(G) \quad (0 \leq |\alpha| \leq s)\}.$$

Als Norm in $W_p^s(G)$ definiert man

$$\|u\|_{W_p^s(G)} := \|u\|_{s,p,G} := \Bigg(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(G)}^p \Bigg)^{1/p}.$$

b) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere $H_p^s(G)$ als die Vervollständigung von $\{u \in C^s(G) \colon\ \|u\|_{s,p,G} < \infty\}$. Im Falle $p = 2$ schreiben wir auch $H^s(G)$ statt $H^{s,2}(G)$.

c) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere $H_{p,0}^s(G)$ als den Abschluss von $C_c^\infty(G)$ im Raum $H_p^s(G)$.

5.10 Bemerkung. a) In der Definition von $W_p^s(G)$ wird insbesondere $u \in L^p(G)$ gefordert. Daher kann man auch schreiben

$$W_p^s(G) = \{u \in L^p(G) \colon\ \partial^\alpha u \in L^p(G) \quad (0 \leq |\alpha| \leq s)\}.$$

b) Die Vervollständigung eines metrischen Raums kann abstrakt definiert werden. Im Fall von $H_p^s(G)$ ist aber wegen $\|\cdot\|_{L^p(G)} \le \|\cdot\|_{s,p,G}$ offensichtlich $H_p^s(G) \subset L^p(G)$, d.h. ein Element der abstrakten Vervollständigung kann mit einer Funktion in $L^p(G)$ identifiziert werden.

c) Im Fall $p = 2$ erhält man das Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{H^s(G)} := \sum_{|\alpha|\le s} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L^2(G)}\,.$$

5.11 Lemma. *Die Räume $H_p^s(G)$ und $W_p^s(G)$ sind Banachräume.*

Beweis. Der Raum $H_p^s(G)$ ist als Vervollständigung eines normierten Raumes konstruktionsgemäß ein Banachraum. Sei also $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset W_p^s(G)$ eine Cauchyfolge. Nach Definition der Norm ist für $0 \le |\alpha| \le s$ auch $(\partial^\alpha u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset L^p(G)$ eine Cauchyfolge, daher existiert ein $u_\alpha \in L^p(G)$ mit $\partial^\alpha u_\ell \longrightarrow u_\alpha$ in $L^p(G)$. Setze $u := u_{(0,\dots,0)}$.

Für die zugehörigen regulären Distributionen gilt mit der Hölder-Ungleichung für alle $\varphi \in \mathscr{D}(G)$

$$\begin{aligned}|[\partial^\alpha u_\ell](\varphi) - [u_\alpha](\varphi)| &= \left|\int_G (\partial^\alpha u_\ell - u_\alpha)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \|\partial^\alpha u_\ell - u_\alpha\|_{L^p(G)} \cdot \|\varphi\|_{L^q(G)} \longrightarrow 0 \quad (\ell \longrightarrow \infty),\end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Also gilt

$$(\partial^\alpha [u])(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}[u](\partial^\alpha\varphi) = \lim_{\ell\to\infty} (-1)^{|\alpha|}[u_\ell](\partial^\alpha\varphi) = \lim_{\ell\to\infty} [\partial^\alpha u_\ell](\varphi) = [u_\alpha](\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(G)$. Somit ist $\partial^\alpha u = u_\alpha$ in $\mathscr{D}'(G)$, d.h. $u \in W_p^s(G)$.

Es folgt

$$\|u_\ell - u\|_{s,p,G}^p = \sum_{0\le|\alpha|\le s} \|\partial^\alpha u_\ell - \partial^\alpha u\|_{L^p(G)}^p \longrightarrow 0 \quad (\ell \longrightarrow \infty),$$

also haben wir $u_\ell \longrightarrow u$ in $W_p^s(G)$, und $W_p^s(G)$ ist ein Banachraum. □

Die beiden Definitionen von Sobolevräumen sind für allgemeine Gebiete äquivalent. Der folgende Satz wurde erst 1964 bewiesen (während die ersten Definitionen bereits 1938 formuliert wurden).

5.12 Satz („$H = W$“)**.** *Für $1 \le p < \infty$ und $s \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$W_p^s(G) = H_p^s(G).$$

Beweisskizze. **(i)** Es gilt $H_p^s(G) \subset W_p^s(G)$: Sei $u \in H_p^s(G)$ und $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C^s(G)$ eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_{s,p,G}$, welche gegen u konvergiert. Nach Definition der $\|\cdot\|_{s,p,G}$-Norm gilt wieder $\partial^\alpha u_\ell \longrightarrow u_\alpha$ mit $u_\alpha \in L^p(G)$. Wie im letzten Beweis sieht man $\partial^\alpha u = u_\alpha$ in $\mathscr{D}'(G)$ und damit $u \in W_p^s(G)$.

(ii) Für die Inklusion $W_p^s(G) \subset H_p^s(G)$ ist zu zeigen, dass $C^s(G) \cap H_p^s(G)$ dicht in $W_p^s(G)$ liegt. Unter Verwendung des Friedrichsschen Glättungsoperators kann man sogar zeigen, dass

$$\{\varphi \in C^\infty(G) \colon \|\varphi\|_{s,p,G} < \infty\}$$

dicht in $W_p^s(G)$ liegt. Dies geschieht über eine kompakte Ausschöpfung von G und eine zugehörige Partition der Eins. Die Details sind z.B. im Buch von Adams [1] beschrieben. □

5.13 Bemerkung. Statt mit distributionellen Ableitungen zu arbeiten, kann man auch schwache Ableitungen betrachten. Zu $u \in L^2(G)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ heißt eine Funktion $f_\alpha \in L^2(G)$ die schwache α-fache Ableitung von u, falls

$$\int_G u(x)(\partial^\alpha \varphi)(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_G f_\alpha(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \quad (\varphi \in \mathscr{D}(G))$$

gilt. Man beachte, dass wegen $u, \varphi, \partial^\alpha\varphi, f_\alpha \in L^2(G)$ alle Integrale existieren. Direkt anhand der Definitionen sieht man, dass die schwache α-fache Ableitung f_α mit der distributionellen Ableitung $\partial^\alpha u$ übereinstimmt, und dass der Raum $H^s(G)$ genau aus allen $u \in L^2(G)$ besteht, für welche alle schwachen α-fachen Ableitungen mit $|\alpha| \le s$ existieren. Das Konzept der schwachen Ableitung hat den Vorteil, ohne den Begriff der Distributionen auszukommen, ist aber weniger allgemein, da z.B. die Heaviside-Funktion keine schwache Ableitung besitzt.

c) Wichtige Sätze aus der Theorie der Sobolevräume

Die folgenden Ergebnisse aus der Theorie der Sobolevräume werden nicht bewiesen.

5.14 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz)**.** *Seien $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le p < \infty$, und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1-Gebiet.*

Falls $s > \frac{n}{p} + k$, dann gilt

$$W_p^s(G) \hookrightarrow C_b^k(G).$$

Insbesondere existiert ein $C > 0$, so dass für alle $u \in W_p^s(G)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C_b^k G)} \le C\,\|u\|_{W_p^s(G)}$$

gilt.

5.15 Definition. Seien X und Y normierte Räume und $K\colon X \longrightarrow Y$ eine (nicht unbedingt lineare) Abbildung. Dann heißt K kompakt, falls für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ die Folge $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

5.16 Satz (Rellich–Kondrachov). *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet.*

a) Für $1 \le p < \infty$ und $s \in \mathbb{N}$ ist die Einbettung

$$W_p^s(G) \hookrightarrow L^p(G)$$

kompakt.

b) Für $1 \le p < \infty$ und $s \in \mathbb{N}$ mit $sp > n$ ist die Einbettung

$$W_p^s(G) \hookrightarrow C_b(\overline{G})$$

kompakt.

Die folgende Ungleichung ist sehr wichtig, um Abschätzungen beweisen zu können.

5.17 Satz (Erste Poincarésche Ungleichung). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, welches in eine Richtung beschränkt ist. Dann existiert eine Konstante $b > 0$ so, dass*

$$\|u\|_{L^2(G)} \le b\,\|\nabla u\|_{L^2(G;\mathbb{C}^n)} \quad (u \in H_0^1(G)).$$

Damit ist durch

$$|u|_{H^1(G)} := \Big(\sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(G)}\Big)^{1/2}$$

auf $H_0^1(G)$ eine Norm gegeben, welche zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(G)}$ äquivalent ist.

Beweis. Es sei G ohne Einschränkung in x_n-Richtung beschränkt, d.h. es gelte

$$G \subset \{x \in \mathbb{R}^n \colon 0 \le x_n \le b\}$$

für ein $b > 0$. Wir beweisen die Aussage zunächst für $u \in \mathscr{D}(G)$, wobei wir $u(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus G$ setzen. Offenbar gilt nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$u(x) = \int_0^{x_n} 1 \cdot \partial_n u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)dt.$$

Damit können wir unter Verwendung der Cauchy–Schwarz–Ungleichung wie folgt abschätzen:

$$|u(x)|^2 \le b \int_0^{x_n} |\partial_n u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|^2 dt \le b \int_0^b |\nabla u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|^2 dt.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(G)}^2 &\le b\int_0^b \left\{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^b |\nabla u(x_1,\dots,x_{n-1},t)|^2 dt dx_1\cdots dx_{n-1}\right\} dx_n\\ &\le b^2\,\|\nabla u\|_{L^2(G)}^2\,,\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. Da $\mathscr{D}(G)\subset H_0^1(G)$ dicht liegt, folgt die Abschätzung für beliebige $u\in H_0^1(G)$ durch Approximation in der $\|\cdot\|_{H^1(G)}$-Norm. □

5.18 Satz (Zweite Poincarésche Ungleichung)**.** *Sei $G\subset\mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Dann existiert ein $c>0$ mit*

$$\|u\|_{L^2(G)} \le c\left(\|\nabla u\|_{L^2(G)^n} + \left|\int_G u(x)\,\mathrm{d}x\right|\right) \quad (u\in H^1(G)).$$

Damit ist durch

$$\|u\|_{H_*^1(G)} := \Big(\,\|\nabla u\|_{L^2(G)^n}^2 + \big|\,\langle u,1\rangle_{L^2(G)}\big|^2\Big)^{1/2}$$

eine Norm auf $H^1(G)$ gegeben, welche zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(G)}$ äquivalent ist.

Beweis. Wir nehmen indirekt an, dass eine Folge $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}\subset H^1(G)$ existiert mit $\|u_\ell\|_{L^2(G)}=1$ und

$$\|\nabla u_\ell\|_{L^2} + \big|\,\langle u_\ell,1\rangle_{L^2(G)}\big| \to 0 \quad (\ell\to\infty).$$

Nach dem Satz von Rellich–Kondrachov existiert eine Teilfolge $(\widetilde{u}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, die etwa gegen $u_0\in L^2(G)$ konvergiert. Wegen $\|\nabla\widetilde{u}_\ell\|_{L^2}\to 0$ folgt, dass $(\widetilde{u}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}\subset H^1(G)$ eine Cauchyfolge ist. Da $H^1(G)$ vollständig ist, existiert ein $\overline{u}_0\in H^1(G)$ mit $\widetilde{u}_\ell\to\overline{u}_0$ in $H^1(G)$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes ist $u_0=\overline{u}_0$. Wegen $\langle\widetilde{u}_\ell,1\rangle\longrightarrow 0$ folgt $\langle u_0,1\rangle=0$. Andererseits gilt $\nabla u_0=\lim_{n\to\infty}\nabla\widetilde{u}_\ell=0$, also $u_0=\text{const}$. Insgesamt folgt also $u_0=0$, was im Widerspruch zu

$$\|u_0\|_{L^2} = \lim_{\ell\to\infty}\|\widetilde{u}_\ell\|_{L^2} = 1$$

steht. □

Literatur

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York 1975.

[2] Diestel, J., Uhl, J. J.: Vector measures. Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[3] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators. I. General Theory. Interscience Publishers, New York 1963.

[4] Edwards, R. E.: Functional analysis. Theory and applications. Dover, New York 1995.

[5] Gohberg, I., Goldberg, S.: Basic operator theory. Birkhäuser Boston 1981.

[6] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: Classes of linear operators. Vol. I. Birkhäuser Basel 1990.

[7] Halmos, P.: A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin 1974.

[8] Heuser, H.: Funktionalanalysis. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart 1986.

[9] Hirzebruch, F., Scharlau, W.: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibliogr. Inst. Mannheim 1971.

[10] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer Berlin 1976.

[11] Pazy, A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, Berlin et al. 1983.

[12] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Academic Press San Diego 1980.

[13] Rudin, W.: Functional analysis. McGraw-Hill New York 1973.

[14] Rudin, W.: Real and complex analysis. McGraw-Hill New York 1986.

[15] Schaefer, H.H., Wolff, M.P.: Topological vector spaces. Springer Berlin, 1999.

[16] Schröder, H.: Funktionalanalysis. Akademie Verlag Berlin, 1997.

[17] Werner, D.: Funktionalanalysis (5., erw. Aufl.). Springer Berlin 2005.

[18] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin et al. 1965.

Index

Abbildung
offene, 1
stetige, 1
abgeschlossen (Menge), 3
abgeschlossen (Operator), 34
Ableitung einer Distribution, 44
Ableitungsoperator, 33
abschließbar, 34
Abschließung (Operator), 34
Abschluss
einer Menge, 3
adjungierter Operator
beschränkte Operatoren, 39, 40
unbeschränkte Operatoren, 39, 40

Banachraum, 10
Banachscher Fixpunktsatz, 7
Basis der Topologie, 1
beschränkt, 6

Cauchyfolge, 6

Dirac-Distribution, 44
direkte Summe von Banachräumen, 15
Distribution, 43
Dirac-, 44
reguläre, 43
Dualraum
algebraischer, 13
topologischer, 11

Eigenraum
algebraischer, 36
geometrischer, 36
ε-Netz, 9
Erweiterungslemma von Tietze, 3

folgenkompakt, 9

Gleichung
Parsevalsche, 24
Graphennorm, 34
Grenzwert, 4

Häufungspunkt, 4
Halbnorm, 10
Halbordnung, 22
Heaviside-Funktion, 45
Hilbertraum, 17
Hilbertraumbasis, 23
Hilbertraumdimension, 25
Homöomorphismus, 1

Inneres einer Menge, 3
Isometrie, 6
Isomorphismus
isometrischer, 6

Kern, 12
Kette, 22
kompakt, 7
folgen-, 9
prä-, 9
kontinuierliches Spektrum, 35
konvex, 19
Kugel, 5

Lemma
von Urysohn, 3
von Zorn, 22
L^p-Raum, 16
ℓ^p-Raum, 16

maximales Element, 22
Metrik, 4
diskrete, 4
Standard-, 4
metrisierbar, 5
Multiindex-Schreibweise, 42

Neumannsche Reihe, 36
Norm, 10
Supremums-, 10

obere Schranke, 22

offen (Menge), 3
    in metrischen Räumen, 5
offene Überdeckung, 7
Operator
    Ableitungs-, 33
    kompakter, 48
    linearer, 34
    Shift-, 33
Operatornorm, 12
orthogonal, 17
orthogonales Komplement, 19
Orthonormalbasis, 23

Parallelogramm-Identität, 18
Personen
    Hausdorff, Felix, 3
    Hilbert, David, 17
Poincarésche Ungleichung, 48, 49
Polarisationsformel, 18
Prähilbertraum, 17
präkompakt, 9
Produkttopologie, 2
Punktspektrum, 35

Quotientenraum, 13, 14

Raum
    Hausdorff-, 3
    Hilbert-, 17
    metrischer, 4
    normaler, 3
    normierter, 10
    Prä-Hilbert-, 17
    topologischer, 1
reflexiv, 31
reguläre Distribution, 43
Resolvente, 36
Resolventenabbildung, 36
Resolventenmenge, 35
Restspektrum, 35

Satz
    Approximations-, 19
    Banachscher Fixpunktsatz, 7
    Erweiterungslemma von Tietze, 3
    Lemma von Urysohn, 3
    Projektions-, 20
    Sobolevscher Einbettungs-, 47
    von Hahn-Banach, komplex, 28
    von Hahn-Banach, reell, 27
    von Hahn-Banach, Trennungssatz, 30
    von Pythagoras, 18
    von Rellich-Kondrachov, 48
    von Riesz, 21
    von Tychonov, 9
schwache Ableitung, 47
Seminorm, 10
separabel, 3
Shift-Operator, 33
Skalarprodukt, 17
Sobolevraum, 45
Spektrum, 35
    kontinuierliches, 35
    Punkt-, 35
    Rest-, 35
Spurtopologie, 2
stetig, 1
Subbasis der Topologie, 1
Supremumsnorm, 10

Teilraumtopologie, 2
Testfunktion, 42
Topologie, 1
    F-schwache, 1
    erzeugte, 1
    induzierte, 2
    lokalkonvexe, 12
    Produkt-, 2
    schwach-*-, 13
    schwache, 13
topologischer Vektorraum, 12
total geordnet, 22
totalbeschränkt, 9
Träger einer Funktion, 42
Trennungssatz, 30

Umgebung, 3
Umgebungsbasis, 3
Ungleichung

Besselsche, 18
Cauchy–Schwarz-, 18
Erste Poincarésche, 48
Höldersche, 15
Minkowskische, 16
Zweite Poincarésche, 49

vollständig, 6

Wertebereich, 12