Skript zur Vorlesung

Funktionalanalysis II

Wintersemester 2004/2005

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 16. 3. 2010

Inhaltsverzeichnis

1. Die L_p-Räume

Geht man von der natürlichen Definition eines Skalarproduktes zweier Funktionen $\int f\bar{g}$ aus, so kommt man auf die L_p-Räume, welche in gewisser Weise die „besten“ Funktionenräume bilden. Die Grundlage dafür bildet die Maß- und Integrationstheorie. Daher werden in diesem Abschnitt nach einer kurzen Wiederholung der Maßtheorie die wichtigsten Sätze der Integrationstheorie formuliert und – der Vollständigkeit halber – zum großen Teil auch bewiesen. Dabei wird gleich das Bochner-Integral betrachtet, welches Banachraum-wertige Funktionen behandelt. Die wichtigsten Eigenschaften der L_p-Räume werden in Teil c) formuliert. Die L_p-Räume erlauben später eine natürlichere und allgemeinere Formulierung des Spektralsatzes als in Teil I der Vorlesung, sind aber auch die Basisräume für partielle Differentialgleichungen.

a) Wiederholung aus der Integrationstheorie

Im folgenden werden einige Begriffe aus der Maß- und Integrationstheorie kurz wiederholt.

Zu einer Menge X sei 2^X die Potenzmenge von X. Ein System $\mathcal{A} \subset 2^X$ heißt eine σ-Algebra, falls

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) $X \setminus A \in \mathcal{A}$ falls $A \in \mathcal{A}$,

(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ falls $A_n \in \mathcal{A} \quad (n \in \mathbb{N})$.

In diesem Fall heißt $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum.

1.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum.

a) Ein (positives) Maß μ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{falls } (A_n)_n \text{ disjunkt.}$$

In diesem Fall heißt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

b) Ein vektorwertiges Maß μ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to B$, wobei B ein Banachraum ist und

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{falls } (A_n)_n \text{ disjunkt.}$$

Dabei konvergiert die rechte Seite in der Normtopologie von B. (Zum Teil werden auch schwache Topologien betrachtet, siehe später PV-Maße.)

μ heißt

- signiertes Maß, falls $B = \mathbb{R}$,
- komplexes Maß, falls $B = \mathbb{C}$.

Auf $[-\infty, \infty]$ wird durch

$$\{(a,b) : a < b\} \cup \{[-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty] : a \in \mathbb{R}\}$$

eine Umgebungsbasis und damit eine Topologie definiert. Zu einem topologischen Raum (Y, τ) sei $\mathcal{B}(Y) := \sigma(\tau)$ die von τ erzeugte σ-Algebra. $\mathcal{B}(Y)$ heißt Borel-σ-Algebra. Falls nichts anderes erwähnt wird, wird zu $Y = \mathbb{R}$, $Y = [-\infty, \infty]$ etc. stets die Borel-σ-Algebra gewählt.

Eine Funktion $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ zwischen zwei Messräumen heißt messbar, falls

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}.$$

Falls $B = \sigma(\tau)$, d.h. die Borel-σ-Algebra ist, so ist f genau dann messbar, wenn $f^{-1}(\tau) \subset \mathcal{A}$ gilt.

Es folgen noch einige Wiederholungen aus der Maßtheorie.

1.2 Definition und Satz. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist*

$$\hat{\mathcal{A}} := \{A \subset X : \exists\, B \in \mathcal{A}, \widetilde{N} \subset X, N \in \mathcal{A} : A = B \cup \widetilde{N},\ \widetilde{N} \subset N,\ \mu(N) = 0\}$$

eine σ-Algebra. Die Abbildung $\hat{\mu}(A) := \mu(B)$ ist wohldefiniert und ein Maß. Der Maßraum $(X, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ heißt die Vervollständigung von $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

1.3 Definition und Satz. *a) Seien μ und ν Maße auf $\mathcal{A}$. Dann heißt μ absolutstetig bzgl. ν, in Zeichen $\mu \ll \nu$, falls gilt*

$$\forall\, A \in \mathcal{A} : \Big(\nu(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0\Big).$$

b) Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume. Dann existiert genau ein Maß μ auf der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \quad (A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2).$$

Das Maß $\mu =: \mu_1 \otimes \mu_2$ heißt das Produktmaß von μ_1 und μ_2.

1.4 Definition und Satz. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ ein Messraum und $f\colon X \to X'$ messbar. Dann ist durch*

$$A' \mapsto \mu(f^{-1}(A')) \quad (A' \in \mathcal{A}')$$

ein Maß auf $\mathcal{A}'$ definiert, das Bildmaß von μ unter f. Bezeichnung $\mu \circ f^{-1}$ oder $f(\mu)$.

Die obigen Aussagen werden hier nicht bewiesen, Beweise finden sich in der Literatur der Maßtheorie, z. B. im Buch von H. Bauer [2].

1.5 Definition. Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ Messräume. Eine Abbildung $s\colon X \to X'$ heißt Stufenfunktion (oder Treppenfunktion oder elementar), falls s $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar ist und $s(X)$ endlich ist.

1.6 Definition. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $s\colon X \to [0, \infty]$ Stufenfunktion. Schreibe

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$$

mit $a_i \in [0, \infty]$ und $A_i \in \mathcal{A}$. Dann heißt

$$\int s d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

das Integral von s bzgl. μ.

1.7 Satz. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f\colon X \to [0, \infty]$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist messbar.

(ii) Es existiert eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit $s_n\colon X \to [0, \infty)$, $s_1 \leq s_2 \leq \ldots$ und $s_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)$ für alle $x \in X$.

Falls f beschränkt ist, ist die Konvergenz in (ii) gleichmäßig.

Beweis. (ii)$\Rightarrow$ (i). Der punktweise Limes messbarer Funktionen ist messbar.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Zu $t \in [0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$ wähle $k = k_n(t) \in \mathbb{N}$ mit

$$k \cdot 2^{-n} \leq t < (k+1) \cdot 2^{-n}.$$

Setze

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} k_n(t) \cdot 2^{-n}, & \text{falls } t \in [0, n), \\ n, & \text{falls } t \in [n, \infty]. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_n\colon [0,\infty] \to [0,\infty)$ Stufenfunktion mit $\varphi_1 \le \varphi_2 \le \dots$, $\varphi_n(t) \in (t-2^{-n}, t]$ für $t < n$ und $\varphi_n(t) \nearrow t \quad (t \in [0,\infty])$.

Setze $s_n := \varphi_n \circ f$. Dann ist $s_n\colon X \to [0,\infty)$ messbar, $s_n(X)$ endlich und $s_n(x) \nearrow f(x) \quad (x \in X)$. Für $f(x) < n$ gilt $|s_n(x) - f(x)| < 2^{-n}$. Insbesondere ist die Konvergenz gleichmäßig, falls f beschränkt ist. □

1.8 Definition (Lebesgue-Integral)**.** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar. Definiere

$$\int f d\mu := \sup\Big\{ \int s d\mu \mid s\colon X \to [0,\infty) \text{ Stufenfunktion, } s \le f \Big\} \in [0,\infty].$$

Zu $A \in \mathcal{A}$ definiert man

$$\int_A f d\mu := \int f \cdot \chi_A d\mu.$$

1.9 Satz (von Lebesgue, monotone Konvergenz)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar, und $f_n\colon X \to [0,\infty]$ messbar $(n \in \mathbb{N})$ mit $f_1 \le f_2 \le \dots$ und $f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)$ für alle $x \in X$. Dann gilt*

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \quad (n \to \infty).$$

Insbesondere gilt für jede Folge von Stufenfunktionen aus Satz 1.7 (ii)

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu.$$

Beweis. Wegen $\int f_n d\mu \le \int f_{n+1} d\mu$ existiert ein $\alpha \in [0,\infty]$ mit $\int f_n d\mu \to \alpha \quad (n \to \infty)$. Wegen $\int f_n d\mu \le \int f d\mu$ folgt

$$\alpha \le \int f d\mu. \tag{1}$$

Sei s Stufenfunktion mit $0 \le s \le f$ und sei $c \in (0,1)$. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$E_n := \{x \in X : f_n(x) \ge cs(x)\} \in \mathcal{A}.$$

Dann ist $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. [Denn sei $f(x) > 0$. Dann ist $cs(x) < f(x)$ wegen $c < 1$. Wegen $f_n(x) \to f(x)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) > cs(x)$.]

Es gilt

$$\int f_n d\mu \ge \int_{E_n} f_n d\mu \ge c \int_{E_n} s d\mu \quad (n \in \mathbb{N})$$

Für $n \to \infty$ gilt $\int_{E_n} s d\mu \to \int_X s d\mu$. Damit folgt

$$c \int s d\mu \leq \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \alpha.$$

Da $c \in (0,1)$ beliebig war, folgt

$$\int s d\mu \leq \alpha. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\int f d\mu = \alpha$. □

1.10 Satz. *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *Maßraum,* $f_n \colon X \to [0, \infty]$ *messbar* $(n \in \mathbb{N})$*. Dann ist*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Für Stufenfunktionen und dann (monotone Konvergenz) für messbare Funktionen gilt

$$\int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu.$$

Die Folge $g_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$ konvergiert monoton gegen $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Damit gilt

$$\int f d\mu = \lim_{N\to\infty} \int g_N d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

□

1.11 Satz (Lemma von Fatou). *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *Maßraum,* $f_n \colon X \to [0, \infty]$ *messbar* $(n \in \mathbb{N})$*. Dann gilt*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Sei $g_k := \inf_{i \geq k} f_i$. Dann ist $g_k \leq f_k \quad (k \in \mathbb{N})$, damit

$$\int g_k d\mu \leq \int f_k d\mu \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{3}$$

Es gilt $g_1 \leq g_2 \leq \ldots$ und $g_k(x) \to \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$. Damit (monotone Konvergenz)

$$\int g_k d\mu \to \int (\liminf_n f_n) d\mu \quad (k \to \infty)$$

Wegen (3) gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int g_k d\mu \leq \liminf_k \int f_k d\mu.$$

□

1.12 Lemma. *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $f, g\colon X \to [0, \infty]$ *messbar. Dann ist*

$$\left|\int f d\mu - \int g d\mu\right| \leq \int |f - g| d\mu.$$

Beweis. Das folgt durch direktes Nachrechnen für Stufenfunktionen und dann durch Grenzübergang für alle messbaren Funktionen. □

1.13 Bemerkung. Sei $f\colon X \to [0, \infty]$ messbar mit $f = 0$ μ-fast überall. Dann ist $\int f d\mu = 0$.

Dies sieht man folgendermaßen: Sei $N := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Dann ist

$$\int f d\mu = \int_N f d\mu + \int_{X \setminus N} \underbrace{f}_{=0} d\mu = \int_N f d\mu.$$

Sei $(s_n)_n$ eine Folge von Stufenfunktionen mit $s_n \nearrow f$, $s_n = \sum_k c_{nk} \chi_{A_{nk}}$ mit $c_{nk} \in [0, \infty]$. Es gilt

$$\int_N s_n d\mu = \sum_k c_{nk} \mu(A_{nk} \cap N) = 0.$$

Somit folgt $\int f d\mu = 0$.

Dies zeigt, dass eine Änderung der Funktionen auf einer Nullmenge das Integral nicht verändert.

1.14 Satz (majorisierte Konvergenz)**.** *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *Maßraum,* $f_n, f, g\colon X \to [0, \infty]$ *messbar* $(n \in \mathbb{N})$. *Es gelte* $f_n \leq g$ μ*-fast überall und* $f \leq g$ μ*-fast überall mit* $\int g d\mu < \infty$ *und* $f_n \to f$ μ*-fast überall. Dann gilt*

$$\int |f_n - f| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty)$$

und damit

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \quad (n \to \infty).$$

Beweis. Wegen $f_n, f \leq g$ μ-fast überall ist $\int f_n d\mu < \infty$ und $\int f d\mu < \infty$. Sei $g_n := g - \frac{1}{2}|f_n - f|$. Dann ist g messbar, $0 \leq g_n \leq g$ und damit

$$\int g_n d\mu \leq \int g d\mu < \infty.$$

Wegen $f_n \to f$ μ-fast überall gilt $g_n \to g$ μ-fast überall. Wir erhalten

$$\int g d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int g d\mu - \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu.$$

Da der letzte lim sup nichtnegativ ist, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0,$$

d.h. $\int |f_n - f| d\mu \to 0$. $\square$

Die beiden folgenden Sätze werden nicht bewiesen.

1.15 Satz (Transformationssatz). *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ Messraum, $\varphi\colon X \to X'$ messbar. Sei $f'\colon X' \to [0,\infty]$ messbar. Dann ist $f' \circ \varphi$ messbar und*

$$\int_X (f' \circ \varphi) d\mu = \int_{X'} f' d(\mu \circ \varphi^{-1}).$$

1.16 Satz (Radon-Nikodym). *Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein σ-endliches Maß [d.h. es existiert eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$] und $\widetilde{\mu}\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Maß mit $\widetilde{\mu} \ll \mu$. Dann existiert ein messbares $g\colon X \to [0,\infty]$ mit $\widetilde{\mu} = g\mu$, d.h.*

$$\widetilde{\mu}(A) = \int_A g d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Die Funktion g heißt die Radon-Nikodym-Ableitung (oder Dichte) von $\widetilde{\mu}$ bzgl. μ.

b) Das Bochner-Integral

Im folgenden sei W ein normierter Raum über dem Körper $\mathbb{K}$ (wobei wie stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gelte), versehen mit der Borel-σ-Algebra, und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein (o.E. vollständiger) Maßraum.

1.17 Definition. Sei $s = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} a_i$ eine Stufenfunktion mit $A_i \in \mathcal{A}$, $\mu(A_i) < \infty$ und $a_i \in W \quad (i = 1, \ldots, n)$. Definiere das (Bochner-)Integral

$$\int s d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) a_i \in W.$$

Die Menge aller Stufenfunktionen $s\colon X \to W$ mit $\mu(s^{-1}(\{w\})) < \infty$ für alle $w \in W \setminus \{0\}$ wird als $T(\mu; W)$ bezeichnet. Eine Stufenfunktion s heißt integrierbar, falls $s \in T(\mu; W)$ gilt.

1.18 Bemerkung. a) Offensichtlich ist $T(\mu; W)$ ein linearer Vektorraum. Falls $s \in T(\mu; W)$, so ist $\|s(\cdot)\|_W \in T(\mu; \mathbb{R})$.

b) Es gilt

$$\Big\| \int s d\mu \Big\|_W \le \int \|s\|_W d\mu \quad (s \in T(\mu; W)).$$

c) Durch $\|s\|_{T(\mu;W)} := \int \|s\|_W d\mu$ wird eine Seminorm auf $T(\mu; W)$ definiert.

Im folgenden werden wir öfter Folgen und Reihen von Funktionen mit endlichem oder separablem Wertebereich betrachten. Um zu sehen, dass die Separabilität des Wertebereichs erhalten bleibt, verwenden wir folgende Aussage.

1.19 Lemma. *a) Sei (Y, d) ein separabler metrischer Raum und $X \subset Y$. Dann ist $(X, d|_X)$ separabel.*

b) Sei W ein Banachraum, X eine Menge, $f_n\colon X \to W$ mit $f_n(X)$ separabel. Die Reihe $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiere für alle $x \in X$. Dann ist $f(X)$ separabel.

Beweis. a) Sei $Y = \overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Definiere

$$U := \{U_{r,n} := K_r(y_n) \cap X : r > 0,\ r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\},$$

wobei $K_r(y_0) := \{y \in Y : d(y, y_0) < r\}$. Zu jedem $U_{r,n} \neq \emptyset$ wähle ein $x_{r,n} \in U_{r,n}$. Dann ist $A := \{x_{r,n} : r, n\}$ abzählbar.

Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $r \in \mathbb{Q}, r < \varepsilon$ und y_n mit $d(x, y_n) < \frac{r}{2}$. Wegen $x \in K_{r/2}(y_n)$ ist $X \cap K_{r/2}(y_n) \neq \emptyset$, d.h. es existiert ein $x_0 \in A$ mit $x_0 \in X \cap K_{r/2}(y_n)$. Es folgt $d(x, x_0) \le d(x, y_n) + d(y_n, x_0) < r < \varepsilon$.

b) Sei $f_n(X) = \overline{\{y_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}}$ und

$$Z := \Big\{ \sum_{i=1}^{N} y_{n_i,k_i} : n_i, k_i \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Dann ist Z abzählbar. Sei $x \in X$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle ein k_n mit $\|f_n(x) - y_{n,k_n}\| < \varepsilon \cdot 2^{-n}$. Dann ist für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} y_{n,k_n}}_{\in Z} \Big\| < \varepsilon,$$

d.h. $\sum_{n=1}^{N} f_n(x) \in \overline{Z}$. Da die Partialsummen gegen $f(x)$ konvergieren, ist auch $f(x) \in \overline{Z}$.

Also gilt $f(X) \subset \overline{Z}$, und nach Teil a) ist $f(X)$ separabel. □

1.20 Satz. *Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $f\colon X \to W$ Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) Es existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $f_n\colon X \to W$ mit $f_n(x) \to f(x)$ (in W) für alle $x \in X$.

(ii) f ist messbar und $f(X)$ ist separabel.

Man kann in (i) $\|f_n(x)\| \le 2\|f(x)\| \quad (n \in \mathbb{N}, x \in X)$ wählen.

Beweis. (i)$\Rightarrow$ (ii) Als punktweiser Limes messbarer Funktionen ist f messbar. Wie im Beweis von Lemma 1.19 sieht man, dass $f(X)$ separabel ist.

(ii)$\Rightarrow$(i). Sei $\{w_n : n \in \mathbb{N}\} \subset f(X)$ dicht. Ohne Einschränkung seien alle w_n verschieden von 0. Setze für $n, N \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{A}_n^N := \Big\{x \in X : \|f(x)\| \ge \frac{1}{N},\ \|f(x) - w_n\| < \frac{1}{N}\Big\}.$$

Dann gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_n^N = \Big\{z \in X : \|f(x)\| \ge \frac{1}{N}\Big\},$$

da $\{w_n\}_n$ dicht ist. Sei

$$A_n^N := \widetilde{A}_n^N \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \widetilde{A}_k^N \quad (n \in \mathbb{N})$$

(disjunkte Version), und für $N \in \mathbb{N}$ und $M = 1, \dots, N$ definiere

$$g_{N,M}(x) := \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n^M}(x) w_n.$$

Dann ist $g_{N,M}$ Stufenfunktion und es gilt $\|g_{N,M}(x)\| \le 2\|f(x)\|$ $(x \in X)$ wegen

$$\|g_{N,M}(x)\| = \|w_n\| \le \frac{1}{M} + \|f(x)\| \le 2\|f(x)\| \quad (x \in A_n^M).$$

Für $N \in \mathbb{N}$ setze nun $f_N(x) := 0$, falls $g_{N,M}(x) = 0$ $(M = 1, \dots, N)$ und $f_N(x) := g_{N,M}(x)$ sonst, wobei

$$M := \max\{k = 1, \dots, N : g_{N,k}(x) \neq 0\}.$$

Dann ist auch f_N Stufenfunktion, und $\|f_N(x)\| \le 2\|f(x)\|$ $(x \in X)$. Aufgrund der Definition von $g_{N,M}$ und f_N gilt außerdem für $N \in \mathbb{N}$:

(*) Falls $x \in \bigcup_{M=1}^N \bigcup_{n=1}^N A_n^M$, so ist $f_N(x) \neq 0$ und

$$\|f_N(x) - f(x)\| \le \frac{1}{M_0^N}$$

mit $M_0^N := \max\{M = 1, \dots, N : x \in \bigcup_{n=1}^N A_n^M\}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Falls $f(x) = 0$, so folgt $\chi_{A_n^M}(x) = 0$ für alle $M, n \in \mathbb{N}$ und damit $f_N(x) = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Sei also $f(x) \neq 0$. Wähle $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N_0} < \min\{\|f(x)\|, \varepsilon\}$. Dann existiert genau ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{n_0}^{N_0}$. Für $N \geq \max\{N_0, n_0\}$ folgt $x \in \bigcup_{M=1}^N \bigcup_{n=1}^N A_n^M$ und $M_0^N \geq N_0$. Nach (*) erhalten wir

$$\|f_N(x) - f(x)\| < \frac{1}{M_0^N} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon \quad (N \geq \max\{N_0, n_0\}).$$

Somit konvergiert $f_N(x)$ gegen $f(x)$. □

1.21 Satz. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f\colon X \to W$ messbar und $f(X)$ separabel. Dann sind äquivalent:*

(i) Es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $f_n\colon X \to W$ mit f_n integrierbar, $f_n(x) \to f(x) \quad (x \in X)$, und

$$\int \|f_n - f\| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(ii) $\int \|f\| d\mu < \infty$.

Beweis. (i)⇒(ii). Es gilt

$$\int \|f\| d\mu \leq \int \|f_n - f\| d\mu + \int \|f_n\| d\mu < \infty$$

mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

(ii)⇒(i). Wähle eine Folge $(f_n)_n$ von Stufenfunktionen wie in Satz 1.20, wobei $\|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\| \quad (x \in X)$. Insbesondere ist f_n integrierbar. Damit gilt

$$g_n(x) := \|f_n(x) - f(x)\| \to 0, \; n \to \infty \quad (x \in X)$$

und $g_n(x) \leq 3\|f(x)\| \quad (x \in X)$, d.h. $g_n \to 0$ punktweise, und nach dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$\int g_n d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

1.22 Lemma. *Sei f messbar, $f(X)$ separabel, $\int \|f\| d\mu < \infty$. Seien $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ Folgen wie in Satz 1.21 (i). Falls W Banachraum ist, so existieren $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \in W$ und $\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \in W$, und beide Limiten sind gleich.*

Beweis. Es gilt mit Bemerkung 1.18

$$\begin{aligned}\Big\| \int f_n d\mu - \int g_n d\mu \Big\| &= \Big\| \int (f_n - g_n) d\mu \Big\| \\ &\le \int \|f_n - g_n\| d\mu \\ &\le \int \big(\|f_n - f\| + \|f - g_n\|\big) d\mu \\ &\to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung mit f_n, f_m statt f_n, g_n zeigt, dass $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ eine Cauchyfolge und damit konvergent ist. □

1.23 Definition. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, W ein Banachraum. Dann heißt $f: X \to W$ integrierbar, falls f messbar ist, $f(X)$ separabel ist und $\int \|f\| d\mu < \infty$. In diesem Fall heißt

$$\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu,$$

mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Satz 1.21, das Bochner-Integral von f über X bzgl. μ. Wir setzen

$$\mathcal{L}_1(\mu; W) := \{f : X \to W \mid f \text{ integrierbar }\}.$$

Eine andere Schreibweise (falls das Maß klar ist) ist $\mathcal{L}_1(X; W)$. Setze $\mathcal{L}_1(\mu) := \mathcal{L}_1(\mu; \mathbb{C})$. Wie üblich setzt man

$$\int_A f d\mu := \int (\chi_A \cdot f) d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

1.24 Satz. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, W ein Banachraum.*

a) $\mathcal{L}_1(\mu; W)$ ist linearer Vektorraum, und die Abbildung $\mathcal{L}_1(\mu; W) \to W,\ f \mapsto \int f d\mu$, ist linear.

b) Es gilt

$$\Big\| \int f d\mu \Big\| \le \int \|f\| d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_1(\mu; W)).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus den entsprechenden Aussagen für Stufenfunktionen. □

1.25 Satz. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, W Banachraum.*

a) (Satz von der majorisierten Konvergenz). Seien $f_n\colon X \to W$ *messbar,* $f_n(X)$ *separabel,* $f_n \to f$ μ*-fast überall. Sei* $g\colon X \to [0,\infty]$ *messbar mit* $\int g d\mu < \infty$ *und* $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ μ*-fast überall für alle* $n \in \mathbb{N}$*, und* $\|f(x)\| \leq g(x)$ μ*-fast überall.*

Dann ist $f_n \in \mathcal{L}_1(\mu; W)$*,* $f \in \mathcal{L}_1(\mu; W)$ *und*

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \text{ in } W \quad (n \to \infty).$$

b) Sei $f_n\colon X \to W$ *messbar,* $f_n(X)$ *separabel,* $\sum_{n=1}^{\infty} \int \|f_n\| d\mu < \infty$*. Dann ist* $f_n \in \mathcal{L}_1(\mu; W)$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konvergiert in* W *für* μ*-fast alle* $x \in X$*.*

Die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), & \text{falls } \sum_n f_n(x) \text{ konvergiert,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

c) Sei $f \in \mathcal{L}_1(\mu; W)$ *und* $A = \dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}} A_n$ *(d.h. disjunkte Vereinigung) mit* $A_n \in \mathcal{A}$*. Dann ist*

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Beweis. a) Genauso wie im Beweis von Satz 1.21 sieht man, dass $f_n, f \in \mathcal{L}_1(\mu; W)$. Wegen $\|f_n - f\| \to 0$ punktweise und $\|f_n - f\| \leq 2g$ folgt mit Satz 1.24

$$\Big\| \int (f_n - f) d\mu \Big\|_W \leq \int \|f_n - f\|_W d\mu \to 0.$$

b) Die Funktion $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ ist eine integrierbare Majorante für $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$. Insbesondere ist $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\| < \infty$ für μ-fast alle x, und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergent in W für μ-fast alle $x \in X$. Der Wertebereich des Grenzwertes ist separabel nach Lemma 1.19. Der Rest folgt mit majorisierter Konvergenz.

c) folgt sofort aus b) mit $f_n := f \cdot \chi_{A_n}$. $\square$

c) Die L_p-Räume

1.26 Definition. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, W Banachraum.

a) Für $1 \leq p < \infty$ sei $\mathcal{L}_p(\mu; W)$ die Menge aller Funktionen $f : X \to W$ mit f messbar, $f(X \setminus N)$ separabel für ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und $\int \|f\|_W^p d\mu < \infty$.

Wir setzen

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} := \Big(\int \|f\|_W^p d\mu \Big)^{1/p}.$$

b) Der Raum $\mathcal{L}_\infty(\mu; W)$ ist definiert als die Menge aller messbaren Funktionen $f : X \to W$ mit $f(X \setminus N)$ separabel für ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und $\|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mu;W)} < \infty$. Dabei definieren wir

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mu;W)} := \inf \big\{ c \in [0, \infty] : \exists\, N_c \in \mathcal{A},\ \mu(N_c) = 0 : \sup_{x \in X \setminus N_c} \|f(x)\|_W = c \big\}.$$

1.27 Bemerkung. a) Es gilt

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mu;W)} = \inf\{c \in [0, \infty] : \mu(\{x : \|f(x)\| > c\}) = 0\}.$$

b) Sei $f \in \mathcal{L}_\infty(\mu; W)$. Dann existiert ein $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mu;W)} = \sup_{x \in X \setminus N} \|f(x)\|_W.$$

Denn für $n \in \mathbb{N}$ existiert eine μ-Nullmenge N_n mit

$$\sup_{x \in X \setminus N_n} \|f(x)\| \leq \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mu;W)} + \frac{1}{n}.$$

Für $N := \bigcup_{n=1}^\infty N_n$ gilt $\mu(N) = 0$ und

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mu;W)} \leq \sup_{x \in X \setminus N} \|f(x)\| \leq \sup_{x \in X \setminus N_n} \|f(x)\| \leq \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mu;W)} + \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

1.28 Satz. *a) Für alle $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathcal{L}_p(\mu; W)$ ein linearer Vektorraum.*

b) (Höldersche Ungleichung.) Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (wobei $\frac{1}{\infty} = 0$). Seien $f \in \mathcal{L}_p(\mu; \mathbb{K})$ und $g \in \mathcal{L}_q(\mu; \mathbb{K})$. Dann ist $f \cdot g \in \mathcal{L}_1(\mu; \mathbb{K})$ und

$$\|fg\|_{\mathcal{L}_1(\mu;\mathbb{K})} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_p(\mu;\mathbb{K})} \|g\|_{\mathcal{L}_q(\mu;\mathbb{K})}.$$

c) (Minkowski-Ungleichung.) Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} + \|g\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)}.$$

Beweis. a) Für $1 \le p < \infty$, $f, g \in \mathcal{L}_p(\mu; W)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ ist $\alpha f \in \mathcal{L}_p(\mu; W)$ und wegen

$$\|f(x) + g(x)\|_W^p \le 2^p \big(\|f(x)\|_W^p + \|g(x)\|_W^p\big)$$

ist auch $f + g \in \mathcal{L}_p(\mu; W)$. Man beachte, dass der Wertebereich von $f + g$ (nach Änderung auf einer Nullmenge) nach Lemma 1.19 separabel ist.

b) (i) Sei $1 < p < \infty$. Wir verwenden die elementare Ungleichung

$$\alpha^r \beta^{1-r} \le r\alpha + (1 - r)\beta$$

(Beweis durch logarithmieren). Setze $r = \frac{1}{p}$ (d.h. $1 - r = \frac{1}{q}$) und

$$\alpha := \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(\mu;\mathbb{K})}} \quad \text{und } \beta := \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{\mathcal{L}_q(\mu;\mathbb{K})}}\ .$$

Wir erhalten

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\mathcal{L}_p(\mu;\mathbb{K})}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\mathcal{L}_q(\mu;\mathbb{K})}} \le \frac{1}{p}\, \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(\mu;\mathbb{K})}} + \frac{1}{q}\, \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{\mathcal{L}_q(\mu;\mathbb{K})}}\ .$$

Integriere über X:

$$\int |fg| d\mu \le \|f\|_{\mathcal{L}_p(\mu;\mathbb{K})} \|g\|_{\mathcal{L}_q(\mu;\mathbb{K})} \cdot \left(\frac{1}{p}\, \frac{\int |f|^p d\mu}{\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(\mu;\mathbb{K})}} + \frac{1}{q}\, \frac{\int |g|^q d\mu}{\|g\|^q_{\mathcal{L}_q(\mu;\mathbb{K})}} \right).$$

Da der letzte Ausdruck in Klammern 1 ist, folgt die Behauptung.

(ii) Sei nun $p = 1$ und $q = \infty$. Für alle μ-Nullmengen N gilt

$$\int_X |fg| d\mu = \int_{X\setminus N} |fg| d\mu \le \sup_{x\in X\setminus N} |f| \cdot \int_{X\setminus N} |g| d\mu = \sup_{x\in X\setminus N} |f(x)| \cdot \|g\|_{\mathcal{L}_1(\mu;\mathbb{K})}.$$

Nach Definition der Norm in $\mathcal{L}_\infty(\mu; \mathbb{K})$ folgt

$$\|fg\|_{\mathcal{L}_1(\mu;\mathbb{K})} \le \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mu;\mathbb{K})} \|g\|_{\mathcal{L}_1(\mu;\mathbb{K})}.$$

c) Für $p = 1$ und $q = \infty$ ist die Aussage trivial. Sei also $1 < p < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|f + g\|^p_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} &= \int \|f + g\|_W^p d\mu \\
&\le \int \|f\| \cdot \|f + g\|^{p-1} d\mu + \int \|g\| \cdot \|f + g\|^{p-1} d\mu \\
&\le \|f\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} \cdot \Big\| \|f + g\|_W^{p-1} \Big\|_{\mathcal{L}_q(\mu;\mathbb{K})} + \|g\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} \cdot \Big\| \|f + g\|_W^{p-1} \Big\|_{\mathcal{L}_q(\mu;\mathbb{K})}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde beim letzten Ungleichheitszeichen die Höldersche Ungleichung angewendet auf die Funktion $\|f(\cdot)\|\colon X \to [0,\infty)$ bzw. $\|g(\cdot)\|\colon X \to [0,\infty)$. Verwende nun

$$\Big\| \|f+g\|_W^{p-1} \Big\|_{\mathcal{L}_q(\mu;\mathbb{K})} = \Big(\int \|f+g\|_W^{q(p-1)} d\mu \Big)^{1/q} = \Big(\int \|f+g\|_W^{p} d\mu \Big)^{(p-1)/p} = \|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}_p(\mu;W)}$$

und erhalte

$$\|f+g\|^p_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} \le \Big(\|f\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} + \|g\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} \Big) \cdot \|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}_p(\mu;W)},$$

was zu zeigen war. □

Mit dem bisher Bewiesenen wissen wir schon, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)}$ eine Seminorm ist. Nun soll es um die Vollständigkeit der $\mathcal{L}_p$-Räume gehen. Dabei heißt ein Raum $(E, \|\cdot\|)$ mit einer Seminorm $\|\cdot\|$ wie üblich vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergent ist. (Der Limes ist allerdings im Gegensatz zu normierten Räumen nicht eindeutig.)

1.29 Lemma. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Raum mit Seminorm. Dann sind äquivalent:*

(i) E ist vollständig.

(ii) Jede absolut konvergente Reihe konvergiert, d.h. für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$ existiert ein $x \in E$ mit $\|\sum_{n=1}^N x_n - x\| \to 0 \quad (N \to \infty)$.

Beweis. (i)⇒ (ii). Das ist klar, da $(\sum_{n=1}^N x_n)_{N\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge ist.

(ii)⇒(i). Sei $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \le 2^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Setze $y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. Dann ist $\sum_{k=1}^\infty \|y_k\| < \infty$. Nach Voraussetzung existiert ein $y \in E$ mit

$$\Big\| y - \sum_{k=1}^K y_k \Big\| = \|y - (x_{n_{K+1}} - x_{n_1})\| \to 0 \quad (K \to \infty).$$

Somit gilt $x_{n_{K+1}} \to y + x_{n_1} \quad (K \to \infty)$ und damit $x_n \to y + x_{n_1}$ für $n \to \infty$. □

1.30 Satz. *Für $1 \le p \le \infty$ ist $\mathcal{L}_p(\mu;W)$ vollständig.*

Beweis. a) Sei $1 \le p < \infty$. Wir zeigen die Aussage von Lemma 1.29 (ii). Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_p(\mu;W)$ mit $a := \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} < \infty$. Setze $g(x) := \sum_{n=1}^\infty \|f_n(x)\|_W \in [0,\infty]$ und $g_n(x) := \sum_{k=1}^n \|f_k(x)\|_W$ für $x \in X$. Dann ist $g_n \in \mathcal{L}_p(\mu;\mathbb{R})$ und

$$\|g_n\|_{\mathcal{L}_p(\mu;\mathbb{R})} \le \sum_{k=1}^n \|f_n\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} \le a < \infty.$$

Nach dem Satz über monotone Konvergenz folgt $g \in \mathcal{L}_p(\mu;\mathbb{R})$ und

$$\int |g|^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int |g_n|^p d\mu \le a^p.$$

Insbesondere ist $\mu(N) = 0$ für $N := g^{-1}(\{\infty\}) = \{x \in X : g(x) = \infty\}$. Für $g' := g \cdot \chi_{X\setminus N}$ gilt: $g' \colon X \to [0,\infty)$ ist messbar und

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{N} \|f_n(x)\|_W \quad (x \in X \setminus N).$$

Da W vollständig ist, existiert $\sum_{n=1}^\infty f_n(x) =: f(x)$ für $x \in X \setminus N$. Setzt man noch $f(x) := 0$ für $x \in N$, so ist f messbar.

Wegen $\|f(x)\|_W \le g(x) \quad (x \in X)$ gilt $\int \|f\|^p d\mu < \infty$ und damit $f \in \mathcal{L}_p(\mu;W)$. Für $h_n := \|\sum_{k=n}^\infty f_k\|_W^p$ gilt $h_n \to 0$ μ-fast überall und

$$0 \le h_n \le \Big(\sum_{k=n}^\infty \|f_k\|_W\Big)^p \le g^p \in \mathcal{L}_1(\mu;\mathbb{R}).$$

Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt somit $\int h_n d\mu \to 0$, d.h.

$$\int \Big\| f - \sum_{k=1}^{n-1} f_k \Big\|_W^p d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k$ in $\mathcal{L}_p(\mu;W)$ gegen f.

b) Sei nun $p = \infty$, und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_\infty(\mu;W)$ eine Cauchyfolge. Zu $n,m \in \mathbb{N}$ wähle eine μ-Nullmenge $N_{n,m} \in \mathcal{A}$ mit

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}_\infty(\mu;W)} = \sup_{x\in X\setminus N_{n,m}} \|f_n(x) - f_m(x)\|_W.$$

Sei $N := \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} N_{n,m} \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mu(N) = 0$ und

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}_\infty(\mu;W)} = \sup_{x\in X\setminus N} \|f_n(x) - f_m(x)\|_W = \|f_n - f_m\|_{\ell^\infty(X\setminus N;W)}.$$

Da $\ell^\infty(X \setminus N;W)$ vollständig ist, existiert ein $g \in \ell^\infty(X\setminus N;W)$ mit

$$\|f_n - g\|_{\ell^\infty(X\setminus N;W)} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Setze

$$f(x) := \begin{cases} g(x), & \text{falls } x \in X \setminus N,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dann ist f messbar als Limes messbarer Funktionen, und es gilt

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mu;W)} \le \sup_{x\in X\setminus N} \|f_n(x) - f(x)\|_W = \|f_n - g\|_{\ell^\infty(X\setminus N;W)} \to 0$$

für $n \to \infty$. □

Jetzt machen wir noch in der üblichen Weise aus der Seminorm eine Norm. Dazu verwenden wir das folgende Lemma.

1.31 Lemma. *Sei $(E, \|\cdot\|_s)$ ein Raum mit Seminorm.*

a) $N := \{x \in E : \|x\|_s = 0\}$ ist ein Untervektorraum.

b) Durch $\|[x]\| := \|x\|_s$ wird eine Norm auf dem Quotientenraum E/N definiert.

c) Falls E vollständig ist, so ist E/N ein Banachraum.

Beweis. Teil a) ist trivial.

b) Zunächst ist $\|[x]\|$ wohldefiniert, denn seien $y_1, y_2 \in [x]$. Dann ist

$$\|y_1\|_s = \|y_2 + (y_1 - y_2)\|_s \leq \|y_2\|_s + \underbrace{\|y_1 - y_2\|_s}_{=0} = \|y_2\|_s.$$

Durch Vertauschen von y_1 und y_2 erhalten wir somit $\|y_1\|_s = \|y_2\|_s$.

Die Homogenität und die Dreiecksungleichung folgen aus der Seminorm-Eigenschaft. Es gilt außerdem $\|[x]\| = 0$ genau dann, wenn $x \in N$. Dies ist äquivalent zu $[x] = 0$ in E/N.

c) $([x]_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann Cauchyfolge in E/N, wenn $\|[x]_n - [x]_m\| \to 0$ für $n, m \to \infty$. Nach Definition der Norm auf E/N ist dies äquivalent dazu, dass $\|x_n - x_m\|_s \to 0$ für $n, m \to \infty$, d.h. dass $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in E ist. □

1.32 Definition. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und W ein Banachraum. Definiere

$$N := \{f\colon X \to W \mid f = 0 \quad \mu - \text{fast überall}\}.$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist

$$L_p(\mu; W) := \mathcal{L}_p(\mu; W)/N$$

der Quotientenraum. Falls das Maß klar ist, schreiben wir auch $L_p(X; W)$. Wir setzen wieder $L_p(\mu) := L_p(\mu; \mathbb{C})$. Für $X \subset \mathbb{R}^n$ wählen wir (falls nichts anderes vereinbart ist) für μ das Lebesgue-Maß, welches wir mit λ bezeichnen.

1.33 Bemerkung. a) Es gilt $f \in N \iff \|f\|_{\mathcal{L}_p(\mu;W)} = 0$.

b) Nach Satz 1.28 und Lemma 1.29 ist $L_p(\mu; W)$ ein Banachraum.

c) Alle Aussagen über $\mathcal{L}_p(\mu; W)$ gelten in analoger Weise auch in $L_p(\mu; W)$.

d) Eine „Funktion“ f in $L_p(\mu; W)$ ist eine Äquivalenzklasse. Es gibt insbesondere keinen Sinn, den Wert $f(x)$ für ein festes $x \in x$ zu betrachten (es sei denn, es wäre $\mu(\{x\}) > 0$).

e) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{card } A, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty, & \text{sonst .} \end{cases}$$

Das Maß μ heißt das Zählmaß auf X, welches auf der ganzen Potenzmenge 2^X definiert ist. Es gilt in diesem Fall

$$\mathcal{L}_p(\mu; W) = L_p(\mu; W) = \ell^p(X; W).$$

Der folgende Satz wird von Bedeutung sein, wenn man partielle Differentialgleichungen betrachtet, bei denen die Funktionen L_p-Funktionen auf offenen Gebieten sind. Wie oben vereinbart, bezeichnet λ das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$. Es sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die σ-Algebra der Borelmengen.

1.34 Satz (von Lusin). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\lambda(\Omega) < \infty$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit $\lambda(\Omega \setminus K) < \varepsilon$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

Beweis. O.E. sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wähle zu festem $i \in \mathbb{N}$ Mengen $B_{ij} \subset \mathbb{R}$ $(j \in \mathbb{N})$ mit $(B_{ij})_j$ disjunkt, B_{ij} messbar, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_{ij} = \mathbb{R}$ und

$$\operatorname{diam}(B_{ij}) := \sup_{s,t\in B_{ij}} |s-t| < \frac{1}{i}\ .$$

Setze

$$A_{ij} := \Omega \cap f^{-1}(B_{ij}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{ij} = \Omega$. Wir verwenden die Regularität des Lebesgue-Maßes:

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Somit können wir kompakte Mengen $K_{ij} \subset A_{ij}$ wählen mit $\lambda(A_{ij} \setminus K_{ij}) < \varepsilon \cdot 2^{-(i+j)}$. Dann ist

$$\lambda\Big(\Omega \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_{ij}\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_{ij} \setminus K_{ij})\Big) < \frac{\varepsilon}{2^i}\ .$$

Somit existiert ein $N(i) \in \mathbb{N}$ mit

$$\lambda\Big(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}\Big) < \frac{\varepsilon}{2^i}\ .$$

Definiere $D_i := \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}$. Dann ist D_i kompakt.

Wähle nun für alle i, j ein $b_{ij} \in B_{ij}$ und definiere

$$g_i \colon D_i \to \mathbb{R},\ g_i(x) := b_{ij} \text{ für } x \in K_{ij} \quad (j = 1, \dots, N(i)).$$

Da die Mengen K_{ij} disjunkt und kompakt sind, haben sie einen positiven Abstand, d.h. g_i ist stetig.

Es gilt

$$|f(x) - g_i(x)| \le \frac{1}{i} \quad (x \in D_i). \tag{4}$$

Setzt man schließlich $K := \bigcap_{i=1}^\infty D_i$, so ist K kompakt, und es gilt

$$\lambda(\Omega \setminus K) \le \sum_{i=1}^\infty \lambda(\Omega \setminus D_i) < \varepsilon.$$

Andererseits konvergiert wegen (4) die Folge $(g_i)_i$ gleichmäßig auf K gegen f. Damit ist $f|_K$ stetig. □

1.35 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$. Dann ist die Menge*

$$C_c(\Omega) := \{\varphi \in C(\Omega) : \operatorname{supp} \varphi \textit{ kompakt } \}$$

dicht in $L_p(\Omega)$.

Beweis. O.E. sei $f \ge 0$ (sonst verwende man eine Zerlegung). Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit $s_n \nearrow f$ punktweise. Wegen $0 \le s_n^p \le f^p$ ist $s_n \in L_p(\Omega)$. Wegen $(f - s_n)^p \le f^p$ folgt mit majorisierter Konvergenz $s_n \to f$ in $L_p(\Omega)$. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f - s_{n_0}\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Wegen $s_{n_0} \in L_p(\Omega)$ ist $\operatorname{supp} s_{n_0} \subset \Omega$ kompakt. Nach dem Satz von Lusin (Satz 1.34) gibt es ein $\varphi \in C_c(\Omega)$ mit $|\varphi(x)| \le \|s_{n_0}\|_\infty$ und

$$\lambda(\{x \in \Omega : \varphi(x) \ne s_{n_0}(x)\}) < \Big(\frac{\varepsilon}{4\|s_{n_0}\|_\infty}\Big)^p.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|s_{n_0} - \varphi\|_{L_p(\Omega)}^p &= \int\limits_{\Omega \cap \{x : \varphi(x) \ne s_{n_0}(x)\}} |s_{n_0} - \varphi|^p dx \\
&\le \|s_{n_0} - \varphi\|_\infty^p \, \lambda(\{x : \varphi(x) \ne s_{n_0}(x)\}) \\
&\le 2^p \|s_{n_0}\|_\infty^p \, \lambda(\{x : \varphi(x) \ne s_{n_0}(x)\}) \\
&< \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p.
\end{aligned}$$

Damit ist $\|f - \varphi\|_{L_p(\Omega)} \le \varepsilon$. □

2. Banachalgebren

Dieser Abschnitt verwendet einen abstrakteren Zugang zum Spektrum eines beschränkten Operators und zum Spektralsatz. Dabei gehen wir vom Begriff der Banachalgebra und speziell der C^*-Algebra aus. Die wichtigsten Beispiele von Banachalgebren sind die Menge der beschränkten linearen Operatoren in einem Hilbertraum und der Raum $C(T)$ der stetigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum T. Der wichtige Darstellungssatz von Gelfand-Naimark sagt, dass jede C^*-Algebra isometrisch isomorph ist zu einem $C(T)$. Dies ermöglicht einen Beweis des Funktionalkalküls für beschränkte normale Operatoren. Darüberhinaus ermöglicht die Gelfand-Theorie Querverbindungen zu anderen Bereichen der Mathematik wie z.B. die abstrakte Fourier-Analysis und die kommutative Algebra.

a) Der Satz von Stone-Weierstraß

Im folgenden sei T ein kompakter Hausdorff-Raum. Ein Untervektorraum $A \subset C(T)$ heißt Algebra, falls $f \cdot g \in A \quad (f, g \in A)$. Eine Teilmenge $B \subset C(T)$ heißt Verband, falls für alle $f, g \in B$ gilt: $f \wedge g := \min\{f, g\} \in B$ und $f \vee g := \max\{f, g\} \in B$.

2.1 Lemma. *Sei $B \subset C(T; \mathbb{R})$ eine abgeschlossene Unteralgebra mit $1 \in B$. Dann ist B ein Verband.*

Beweis. Wir zeigen

$$f \in B \Rightarrow |f| \in B.$$

Denn dann ist B ein Verband wegen $f \vee g = \frac{1}{2}|f - g| + \frac{1}{2}(f + g)$ und $f \wedge g = -\big((-f) \vee (-g)\big)$.

Sei o.E. $\|f\|_\infty \leq 1$. Nach dem Satz von Weierstraß existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen auf $[-1, 1]$ mit

$$\|p_n(x) - |x|\,\|_{C([-1,1])} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit gilt $\|p_n(f) - |f|\,\|_{C(T;\mathbb{R})} \to 0 \quad (n \to \infty)$, d.h. $|f| = \lim_{n\to\infty} p_n(f)$ in $C(T; \mathbb{R})$. Da B eine Algebra ist und $1 \in B$ gilt, folgt $p_n(f) \in B$. Weil B abgeschlossen ist, folgt $|f| \in B$. □

2.2 Satz (von Kakutani-Krein)**.** *Sei $B \subset C(T; \mathbb{R})$ ein abgeschlossener Unterraum und ein Verband mit $1 \in B$. Falls B die Punkte von T trennt (d.h. zu $t_1 \neq t_2$ existiert ein $f \in B$ mit $f(t_1) \neq f(t_2)$), so gilt $B = C(T; \mathbb{R})$.*

Beweis. Sei $h \in C(T;\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$.

(i) Wir zeigen:

$$\forall\, t \in T\ \exists\, f_t \in B:\ f_t(t) = h(t) \text{ und } h \le f_t + \varepsilon. \tag{5}$$

Dazu wählen wir zu $t, s \in T$ eine Funktion $f_{st} \in B$ mit $f_{st}(t) = h(t)$ und $f_{st}(s) = h(s)$. Eine solche Funktion existiert, denn nach Voraussetzung gibt es ein $\widetilde{f}_{st} \in B$ mit $\widetilde{f}_{st}(t) \neq \widetilde{f}_{st}(s)$. Die Funktion f_{st} entsteht aus $\widetilde{f}_{st}$ durch Skalierung und Addition einer Konstanten (beachte, dass $1 \in B$).

Zu $s \in T$ existiert eine offene Umgebung $U_s \subset T$ von s mit

$$f_{st}(\tau) + \varepsilon \ge h(\tau) \quad (\tau \in U_s).$$

Da T kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i}.$$

Setze nun $f_t := f_{s_1 t} \vee \cdots \vee f_{s_n t}$. Dann gilt $f_t(t) = h(t)$ und

$$f_t(\tau) + \varepsilon \ge h(\tau) \quad (\tau \in T).$$

Damit ist die Funktion f_t gefunden, welche (5) erfüllt.

(ii) Zu $t \in T$ wähle f_t wie in (i). Da $h - f_t$ stetig ist, existiert eine offene Umgebung $V_t \subset T$ von t mit

$$h(\tau) \ge f_t(\tau) - \varepsilon \quad (\tau \in V_t).$$

Wähle eine endliche Teilüberdeckung $T = \bigcup_{i=1}^m V_{t_i}$ und setze $f := f_{t_1} \wedge \cdots \wedge f_{t_m} \in B$. Nach Konstruktion der f_{t_i} gilt

$$f(\tau) + \varepsilon \ge h(\tau) \quad (\tau \in T),$$

nach Definition von V_t gilt aber auch

$$h(\tau) \ge f(\tau) + \varepsilon \quad (\tau \in T).$$

Somit gilt $\|f - h\|_\infty \le \varepsilon$, d.h. B ist dicht in $C(T, \mathbb{R})$. Da aber B abgeschlossen ist, folgt $B = C(T;\mathbb{R})$. □

Nun können wir den Satz von Stone-Weierstraß im reellen und im komplexen Fall formulieren und beweisen.

2.3 Satz (von Stone-Weierstraß)**.** *Sei $A \subset C(T;\mathbb{K})$ eine abgeschlossene Unteralgebra mit $1 \in A$, welche die Punkte von T trennt. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gelte auch noch $\bar{f} \in A$ für alle $f \in A$. Dann ist $A = C(T;\mathbb{K})$.*

Beweis. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt die Behauptung direkt aus den Sätzen 2.1 und 2.2. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in A$ und $\operatorname{Im} f \in A$. Damit trennen schon die reellwertigen Funktionen in A die Punkte von T, und es folgt $A \cap C(T;\mathbb{R}) = C(T;\mathbb{R})$. Da A ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, folgt $A = C(T;\mathbb{C})$. □

b) Banachalgebren

2.4 Definition. Eine Banachalgebra A ist ein $\mathbb{C}$-Banachraum, auf der eine bilineare, assoziative Abbildung $A \times A \to A, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$ definiert ist (die Multiplikation), wobei

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in A).$$

Wir schreiben wieder $xy := x \cdot y$. Die Banachalgebra A heißt kommutativ, falls $xy = yx \quad (x, y \in A)$. Ein Element $e \in A$ heißt Einheit von A, falls $xe = ex = x \quad (x \in A)$ und $\|e\| = 1$.

2.5 Beispiele. a) Sei E ein $\mathbb{C}$-Banachraum. Dann sind $A = L(E)$ und $A = K(E) := \{T \in L(E) : T \text{ kompakt}\}$ Banachalgebren. Dabei hat $L(E)$ die Einheit id_E, während $K(E)$ nur dann eine Einheit hat (nämlich ebenfalls id_E), falls E endlich-dimensional ist.

b) Sei T ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist $C(T)$ eine Banachalgebra mit der konstanten Funktion 1 als Einheit.

c) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L_\infty(\mu;\mathbb{C})$ eine Banachalgebra mit der konstanten Funktion 1 als Einheit.

2.6 Bemerkung. Die Multiplikation in einer Banachalgebra ist stetig.

2.7 Beispiel (Wiener-Algebra). Sei W der Vektorraum aller 2π-periodischen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$, für welche

$$\|f\|_W := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)| < \infty,$$

wobei

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

der k-te komplexe Fourier-Koeffizient ist. Mit anderen Worten, es gilt

$$\|f\|_W = \|(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

Äquivalent (und für manche Zwecke besser) kann eine Funktion $f \in W$ als eine Funktion auf dem Torus $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ betrachtet werden. Nach der Umkehrformel der Fourier-Transformation gilt für $f \in W$

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikt},$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite gleichmäßig und absolut konvergiert.

Der Vektorraum W wird mit der Norm $\|\cdot\|_W$ zu einem Banachraum, welcher vermöge $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ zum Banachraum $\ell^1(\mathbb{Z})$ isometrisch isomorph ist. In W wird die Multiplikation zweier Funktionen punktweise erklärt.

Wir zeigen nun: Für $f, g \in W$ ist auch $f \cdot g \in W$, und es gilt

$$\|f \cdot g\|_W \leq \|f\|_W \cdot \|g\|_W.$$

Dazu betrachte

$$\begin{aligned}
c_n(fg) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)e^{-ikt} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikt}\Big)\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(g)e^{imt}\Big)e^{-int}dt \\
&= \sum_{k,m\in\mathbb{Z}} c_k(f)c_m(g)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k+m-n)t}dt \\
&= \sum_{k+m=n} c_k(f)c_m(g) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)c_{n-k}(g).
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Reihen absolut konvergieren. Damit ist

$$\begin{aligned}
\|fg\|_W &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(fg)| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)| \cdot |c_{n-k}(g)| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{n-k}(g)| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)| \\
&= \|f\|_W \cdot \|g\|_W.
\end{aligned}$$

Damit ist W eine Banachalgebra, die sogenannte Wiener-Algebra.

Wir haben oben gesehen, dass $(c_n(fg))_n = (c_n(f))_n * (c_n(g))_n$ gilt, wobei die Faltung zweier ℓ^1-Folgen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definiert ist durch

$$(x * y)_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_{n-k}.$$

Versehen mit der Faltung als Produkt, wird auch $\ell^1(\mathbb{Z})$ zu einer Banachalgebra. Die Abbildung $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ein isometrischer Isomorphismus von Banachalgebren (d.h. auch multiplikativ).

Dieses Beispiel ist der Einstiegspunkt in die größere Theorie der abstrakten harmonischen Analysis. Dort wird allgemeiner (statt $\mathbb{T}$) eine lokalkompakte abelsche Gruppe betrachtet und ein kanonisches Maß (nämlich das sog. Haar-Maß). Sätze der Fourier-Theorie wie z.B. der Satz von Plancherel gelten hier ebenfalls.

2.8 Definition. Sei A eine Banachalgebra mit Einheit e.

a) Ein Element $x \in A$ heißt invertierbar in A, falls es ein $y \in A$ gibt mit $xy = yx = e$. Wir schreiben $x^{-1} := y$.

b) Die Resolventenmenge ist definiert durch

$$\rho(x) := \rho_A(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ invertierbar in } A\}.$$

Das Spektrum von x ist definiert als $\sigma(x) := \sigma_A(x) := \mathbb{C} \setminus \rho_A(x)$. Die Abbildung

$$R : \rho(x) \to A, \quad \lambda \mapsto (x - \lambda e)^{-1}$$

heißt die Resolventenabbildung.

c) Der Spektralradius von x ist definiert als $r(x) := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n}$.

2.9 Satz. *Sei A eine Banachalgebra mit Einheit e, und seien $x, y \in A$.*

a) Falls $\|x - e\| < 1$, so ist x invertierbar mit $x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(e - x)^n$. Die Resolventenmenge $\rho(x)$ ist offen und die Resolventenabbildung holomorph.

b) Es gilt $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|x\|\}$, und $\sigma(x)$ ist kompakt und nichtleer.

c) Es gilt $r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$.

d) Es gilt $\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}$.

Beweis. Die Teile a), b) und d) lassen sich wörtlich wie im Fall $A = L(E)$ beweisen. Zu zeigen bleibt nur c).

(i) Wir zeigen folgende Aussage: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $0 \le a_{n+m} \le a_n a_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(a_n)^{1/n} \to a := \inf_n (a_n)^{1/n} \quad (n \to \infty)$.

Um dies zu zeigen, sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $(a_N)^{1/N} < a + \varepsilon$ und setze $b(\varepsilon) := \max\{a_1, \dots, a_N\}$. Schreibe nun $n \in \mathbb{N}$ in der Form $n = kN + r$ mit $0 \leq r < N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (a_n)^{1/n} &= (a_{kN+r})^{1/n} \leq (a_N^k a_r)^{1/n} \\ &\leq (a+\varepsilon)^{kN/n} b^{1/n} = (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^{-r/n} b^{1/n} \\ &= (a+\varepsilon)\Big(\frac{b}{(a+\varepsilon)^r}\Big)^{1/n} \\ < a + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

falls n hinreichend groß ist. Dies zeigt (i).

(ii) Setze in (i) nun $a_n := \|x^n\|$. Dann folgt $r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$. Für $|\lambda| > r(x)$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \Big\| \Big(\frac{x}{\lambda}\Big)^n \Big\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|x^n\|^{1/n}}{|\lambda|} = \frac{r(x)}{|\lambda|} < 1.$$

Damit konvergiert

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{x}{\lambda}\Big)^n = \frac{1}{\lambda}\Big(e - \frac{x}{\lambda}\Big)^{-1} = (\lambda e - x)^{-1}.$$

Also ist $\lambda \in \rho(x)$.

(iii) Sei $r_0 := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$. Sei $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| > r_0$, und $f \in A'$. Betrachte die Funktion $F(\lambda) := f((\lambda e - x)^{-1})$. Dann ist F holomorph in $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(x)\}$, da die Reihe

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x^n)\lambda^{-n-1}$$

absolut konvergent ist für $|\lambda| > r(x)$.

Andererseits ist $F(\lambda)$ holomorph in $\rho(x)$ und damit für alle $|\lambda| > r_0$. Eine Potenzreihe konvergiert aber im größten offenen Kreisring, in dem sie holomorph ist. Daher konvergiert die obige Reihe an der Stelle μ (wegen $|\mu| > r_0$).

Insbesondere folgt $\lim_{n\to\infty} |f(x^n)\mu^{-n-1}| \to 0$. Da $f \in A'$ beliebig war, konvergiert die Folge $(x^n\mu^{-n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ in der schwachen Topologie gegen 0. Da schwache Nullfolgen beschränkt sind, existiert eine Konstante $C > 0$ mit $\|x^n\mu^{-n-1}\| \leq C$. Damit gilt

$$\|x^n\|^{1/n} \leq \big(C|\mu|^{n+1}\big)^{1/n}.$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen $|\mu|$ konvergiert, folgt

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq |\mu|.$$

Da die Zahl μ beliebig mit $|\mu| > r_0$ war, folgt $r(x) \leq r_0$. Nach (ii) gilt jedoch auch $r(x) \geq r_0$ und damit $r(x) = r_0$. $\square$

2.10 Satz (von Gelfand-Mazur). *Sei A eine Banachalgebra mit Einheit e, in der jedes $x \in A \setminus \{0\}$ invertierbar ist. Dann ist $A = \mathbb{C} \cdot e$.*

Beweis. Sei $x \in A$. Wähle $\lambda \in \sigma(x)$. Dann ist $\lambda e - x$ nicht invertierbar, und damit nach Voraussetzung $\lambda e - x = 0$, d.h. $x = \lambda e$. □

c) Die Gelfand-Transformation

2.11 Definition. Seien A_1, A_2 Banachalgebren. Eine Abbildung $\varphi : A_1 \to A_2$ heißt ein (Banachalgebren-)Homomorphismus, falls φ $\mathbb{C}$-linear und multiplikativ ist. Falls $A_2 = \mathbb{C}$, so heißt φ ein Charakter.

2.12 Lemma. *Sei A eine Banachalgebra und $\varphi : A \to \mathbb{C}$ ein Charakter. Dann ist φ stetig mit $\|\varphi\| \leq 1$. Falls A eine Einheit hat, ist entweder $\varphi = 0$ oder es gilt $\varphi(e) = 1$ und damit $\|\varphi\| = 1$.*

Beweis. Angenommen es existiert ein $x \in A$ mit $\|x\| < 1$ und $|\varphi(x)| = 1$. O.E. sei $\varphi(x) = 1$ (sonst ersetze x durch $e^{i\alpha}x$ mit einem geeigneten α und beachte die $\mathbb{C}$-Linearität von φ).

Für $y := \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x(1-x)^{-1}$ gilt $y = x + xy$ und damit

$$\varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(x)\varphi(y) = 1 + \varphi(y),$$

Widerspruch. Somit ist $\|\varphi\| \leq 1$.

Falls A eine Einheit e besitzt und $\varphi \neq 0$ gilt, so existiert ein $x \in A$ mit $\varphi(x) = 1$. Damit ist

$$1 = \varphi(x) = \varphi(ex) = \varphi(e)\varphi(x) = \varphi(e).$$

Damit folgt $\|\varphi\| = 1$ wegen $\|e\| = 1$. □

2.13 Beispiel. Sei T ein kompakter Hausdorff-Raum und $A = C(T)$. Dann ist $\varphi_t(x) := x(t) \quad (x \in A)$ für jedes $t \in T$ ein Charakter.

2.14 Definition. Sei A eine Banachalgebra. Ein Untervektorraum $I \subset A$ heißt ein Ideal, falls $xy \in I$ und $yx \in I$ gilt für alle $x \in I$ und $y \in A$. Ein Ideal I heißt echtes Ideal, falls $I \neq A$. Ein Ideal I heißt maximal, falls I echtes Ideal ist und kein echtes Ideal $\widetilde{I}$ existiert mit $I \subset \widetilde{I}$.

2.15 Lemma. *Sei A eine Banachalgebra.*

a) $\bar{I}$ ist ein Ideal, falls I ein Ideal ist.

b) Falls I ein abgeschlossenes Ideal ist, so ist A/I eine Banachalgebra (wobei die Multiplikation durch $[x] \cdot [y] := [xy]$ definiert wird für $[x], [y] \in A/I$). Falls A kommutativ ist, so auch A/I.

Beweis. a) Seien $x \in \bar{I}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ mit $x_n \to x$. Dann ist

$$xy = \lim_{n\to\infty} \underbrace{x_n y}_{\in I} \in \bar{I} \quad \text{und } yx \in \bar{I}.$$

b) Die Multiplikation ist wohldefiniert, denn seien $x - x_1 \in I$ und $y - y_1 \in I$. Dann ist

$$xy - x_1 y_1 = (x - x_1)y + x_1(y - y_1) \in I.$$

Da I abgeschlossen ist und A ein Banachraum ist, ist auch der Quotientenraum A/I ein Banachraum. Die algebraischen Eigenschaften der Multiplikation zeigt man durch Nachrechnen. Es gilt für $u, v \in I$

$$\begin{aligned}\|[xy]\| &\le \|xy + \underbrace{uy + xv + uv}_{\in I}\| = \|(x+u)(y+v)\| \\ &\le \|x+u\| \cdot \|y+v\|.\end{aligned}$$

Damit ist $\|[xy]\| \le \|[x]\| \cdot \|[y]\|$, und A/I eine Banachalgebra. □

2.16 Beispiele. a) Sei $\varphi \ne 0$ ein Charakter. Dann ist $\ker\varphi$ ein maximales Ideal, denn $\operatorname{codim}\ker\varphi = \dim E/\ker\varphi = \dim R(\varphi) = 1$. Da φ stetig ist, ist $\ker\varphi$ abgeschlossen.

b) Sei E ein Banachraum. Dann ist $K(E) := \{T \in L(E) : T \text{ kompakt }\} \subset L(E)$ ein abgeschlossenes Ideal.

c) Sei $A = C([0,1])$ und $D \subset [0,1]$ abgeschlossen. Dann ist

$$I := \{f \in A : f|_D = 0\}$$

ein abgeschlossenes Ideal.

2.17 Lemma. *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Einheit e.*

a) Falls $I \subsetneq A$ ein Ideal ist, so ist auch $\bar{I} \ne A$.

b) Falls I ein maximales Ideal ist, so ist I abgeschlossen.

c) Jedes echte Ideal ist in einem maximalen Ideal enthalten.

d) Falls $I = \bar{I} \subsetneq A$ *ein Ideal ist, so besitzt* A/I *eine Einheit.*

e) Falls I *ein maximales Ideal ist, so ist* $\dim A/I = 1$.

Beweis. a) Angenommen es existiert ein $x \in I$ mit $\|x - e\| < 1$. Dann existiert das Inverse x^{-1}, und $xx^{-1} = e \in I$. Damit folgt $I = A$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Somit gilt $K_1(e) := \{x \in X : \|x - e\| < 1\} \subset A \setminus I$, also ist $\bar{I} \neq A$.

b) folgt aus a) und Lemma 2.15 a).

c) ist eine einfache Zornifikation (bzgl. Inklusion; man beachte, dass $\bigcup_{\beta \in B} I_\beta$ ein echtes Ideal ist).

d) Es gilt $[e]\,[x] = [ex] = [x]$, d.h. $[e]$ ist eine Einheit in A/I. Weiter ist

$$\|[e]\| = \inf_{x \in I} \|e - x\| \leq \|e\| = 1.$$

Angenommen, es existiert ein $x_0 \in I$ mit $\|e - x_0\| < 1$. Dann wäre x_0 invertierbar, d.h. I wäre kein echtes Ideal.

e) Sei I maximales Ideal. Nach b) ist I abgeschlossen, und nach d) und Lemma 2.15 ist A/I eine kommutative Banachalgebra mit Einheit.

Sei $x \in A \setminus I$. Definiere

$$J := \{xa + b : a \in A,\ b \in I\}.$$

Dann ist J ein Ideal (Beweis durch Nachrechnen), und es gilt $I \subsetneq J$ (setze $a = 0$ bzw. $a = e$). Da I maximal ist, folgt $J = A$ und insbesondere $e \in J$. Also existieren $y \in A$ und $b \in I$ mit $xy + b = e$, d.h. $[x]\,[y] = [e]$.

Wir haben gezeigt:

$$\forall\, x \in A \setminus I\ \exists\, y \in A : [x]\,[y] = [e].$$

Da A/I kommutativ ist, ist jedes $[x] \in (A/I) \setminus \{0\}$ invertierbar. Nach dem Satz von Gelfand-Mazur ist $\dim A/I = 1$. □

Im folgenden sei A eine kommutative Banachalgebra mit Einheit e.

2.18 Definition. Definiere

$$\Gamma_A := \{\varphi\colon A \to \mathbb{C} \mid \varphi \neq 0, \varphi \ \text{ Charakter } \} \subset A'.$$

Γ_A heißt der Gelfandraum (oder das Spektrum) oder der maximale Idealraum von A. Der Gelfandraum Γ_A wird mit der Einschränkung der schwach-*-Topologie (die auf dem Dualraum A' definiert ist) versehen.

Die Abbildung $A \to C(\Gamma_A)$, $x \mapsto \hat{x}$ mit $\hat{x}(\varphi) := \varphi(x)$ heißt Gelfand-Transformation.

Man beachte, dass die Gelfand-Transformation stetig ist.

2.19 Satz. *a) Γ_A ist ein kompakter Hausdorff-Raum.*

b) $I \subset A$ ist genau dann ein maximales Ideal, wenn $I = \ker\varphi$ für ein $\varphi \in \Gamma_A$ gilt.

c) Es gilt $\sigma_A(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \Gamma_A\}$. Insbesondere ist $\Gamma_A \neq \emptyset$.

Beweis. a) Es gilt

$$\Gamma_A = \bigcap_{x,y\in A} \{\varphi \in A' : \varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = 0\} \cap \{\varphi \in A' : \varphi(e) = 1\}.$$

Damit ist Γ_A eine schwach-*-abgeschlossene Teilmenge der Einheitskugel $\{\varphi \in A' : \|\varphi\| \leq 1\}$ und somit (nach dem Satz von Banach-Alaoglu) schwach-*-kompakt.

Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma_A$ mit $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Dann gibt es ein $x \in A$ mit $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. Sei $\varepsilon := |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$ und sei $U_i := \{\varphi \in \Gamma_A\colon |\varphi(x) - \varphi_j(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ für $j = 1, 2$. Dann ist U_j eine offene Umgebung von φ_j (bzgl. der schwach-*-Topologie), und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Also ist Γ_A ein Hausdorff-Raum.

b) Sei I ein maximales Ideal. Dann ist $A/I \cong \mathbb{C} \cdot [e] \cong \mathbb{C}$ nach Lemma 2.17 e), und

$$\varphi : A \to A/I, \quad x \mapsto [x]$$

ist Homomorphismus (also Charakter) mit $\ker\varphi = I$. Dass $\ker\varphi$ maximales ideal ist, wissen wir aus Beispiel 2.16 a).

c) $\Gamma_A \neq \emptyset$ gilt nach Lemma 2.17 c). Sei $\lambda \in \rho(x)$. Dann ist $\lambda e - x$ invertierbar, also sind alle $\varphi(\lambda e) - \varphi(x) = \lambda - \varphi(x)$ in $\mathbb{C}$ invertierbar, d.h. verschieden von 0. Also gilt $\lambda \neq \varphi(x)$ für $\varphi \in \Gamma_A$.

Falls $\lambda \in \sigma(x)$, so ist $J := \{(\lambda e - x)a : a \in A\}$ ein echtes Ideal. Nach Lemma 2.17 c) existiert ein maximales Ideal $\widetilde{J} \supset J$. Nach Teil b) existiert ein $\varphi \in \Gamma_A$ mit $\widetilde{J} = \ker\varphi$, d.h. $(\lambda e - x)a \in \ker\varphi \quad (a \in A)$. Insbesondere folgt $\lambda e - x \in \ker\varphi$ und damit $0 = \varphi(\lambda e - x) = \lambda - \varphi(x)$. $\square$

2.20 Satz (Gelfandscher Darstellungssatz)**.** *a) Die Gelfand-Transformation $A \to C(\Gamma_A)$, $x \mapsto \hat{x}$, ist ein wohldefinierter stetiger Algebrenhomomorphismus mit $\hat{e} = 1$ (konstante Funktion 1). Es gilt $\|\hat{x}\|_\infty = r(x) \leq \|x\|$.*

b) Es gilt $\sigma(x) = \sigma(\hat{x})$ für $x \in A$.

Beweis. a) Bis auf die letzte Gleichheit ist schon alles klar. Es gilt

$$r(x) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in \Gamma_A\} = \|\hat{x}\|_\infty$$

Dabei wurde beim ersten Gleichheitszeichen Satz 2.9 verwendet, beim zweiten Gleichheitszeichen Satz 2.19. Ebenfalls nach Satz 2.9 gilt $r(x) \leq \|x\|$.

b) Es gilt

$$\sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \Gamma_A\} = \hat{x}(\Gamma_A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, \varphi \in \Gamma_A : \hat{x}(\varphi) - \lambda = 0\} = \sigma(\hat{x}).$$

$\square$

Nun folgt ein längeres Beispiel, in dem der Gelfandraum von $A = C(T)$ bestimmt wird. Nach dem Gelfandschen Darstellungssatz ist die Gelfand-Transformation $A \to C(\Gamma_A)$ ein Algebrenhomomorphismus. Wir werden nun sehen, dass im Fall $A = C(T)$ dies sogar ein Isomorphismus ist, was bereits den späteren Satz von Gelfand-Naimark vorbereitet.

2.21 Beispiel. Sei T ein kompakter Hausdorff-Raum und $A = C(T)$.

(i) Nach Beispiel 2.13 ist $\varphi_t : A \to \mathbb{C}$, $\varphi_t(x) := x(t)$ für $t \in T$ ein Charakter, d.h. $\varphi_t \in \Gamma_A$.

(ii) Sei umgekehrt $\varphi \in \Gamma_A$. Wir wollen zeigen, dass $\varphi = \varphi_t$ für ein $t \in T$ ist, was in mehreren Schritten bewiesen wird.

(a) Nach Satz 2.19 b) ist $I := \ker \varphi$ ein maximales Ideal. Setze $D := \{t \in T : \forall x \in I : x(t) = 0\}$. Dann ist D abgeschlossen. Definiere

$$I_D := \{x \in C(T) : x|_D = 0\}.$$

(b) Es gilt $I \subset I_D$. Denn für alle $x \in I$ ist $x|_D = 0$ nach Definition von D.

(c) Sei $x \in I_D$. Dann gilt

$$\forall\, t \in T\ \exists\, x_t \in I : x_t(t) = x(t).$$

Denn im Falle $t \in D$ kann man $x_t = 0$ wählen. Falls $t \notin D$, so existiert ein $\widetilde{x}_t \in I$ mit $\widetilde{x}_t(t) \neq 0$. Wähle nun

$$x_t := \frac{x(t)}{\widetilde{x}_t(t)}\, \widetilde{x}_t.$$

(d) Seien $x \in I_D$. Dann existiert ein $y \in I$ mit $\|y - x\|_\infty \leq \varepsilon$. Denn: zu $\varepsilon > 0$ und $t \in T$ setze

$$U_t := \{s \in T : |x(s) - x_t(s)| < \varepsilon\},$$

wobei x_t nach (c) gewählt wird. Dies ist eine offene Umgebung von t. Da T kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}.$$

Wähle Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in C(T)$ mit $0 \leq f_i \leq 1$, $f_i(t) = 0$ für $t \notin U_{t_i}$ und $\sum_{i=1}^n f_i = 1$. (D.h. wir wählen eine Partition der Eins. Die Existenz einer solchen Partition kann man z.B. durch Induktion über n beweisen.)

Definiert man $y := \sum_{i=1}^n f_i x_{t_i} \in I$. Dann ist für alle $s \in T$

$$|y(s) - x(s)| \leq \sum_{i=1}^n f_i(s) \cdot |x_{t_i}(s) - x(s)| \leq \sum_{i=1}^n f_i(s) \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

was die Behauptung (d) zeigt.

(e) Nach (d) ist $I_D \subset \bar{I}$. Da I abgeschlossen ist, folgt $I_D = I$.

(f) Die Menge D enthält genau einen Punkt. Denn angenommen, es gebe zwei Punkte $t_1, t_2 \in D$. Dann ist $I_D \subsetneq I_{\{t_1\}} \subsetneq A$, d.h. I_D wäre nicht maximal. Falls $D = \emptyset$, so ist $I_D = A$. Aber $I_D = I = \ker\varphi$ und damit $\varphi = 0$, Widerspruch zu $\varphi \in \Gamma_A$.

(g) Wir haben bisher gesehen: Zu jedem $\varphi \in \Gamma_A$ existiert ein $t \in T$ mit $\ker\varphi = I_{\{t\}} = \ker\varphi_t$. Angenommen, es gelte $\varphi \neq \varphi_t$. Dann existiert ein $s \in T$ mit $z := \varphi(s) \neq \varphi_t(s)$. Somit gilt $\varphi(s - ze) = \varphi(s) - z\varphi(e) = \varphi(s) - z = 0$, aber $\varphi_t(s - ze) = \varphi_t(s) - z \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $\ker\varphi = \ker\varphi_t$. Damit folgt $\varphi = \varphi_t$, was (endlich) Punkt (ii) zeigt.

(iii) Betrachte die Abbildung $\Phi : T \to \Gamma_A,\ t \mapsto \varphi_t$. Nach (i) und (ii) ist diese Abbildung bijektiv. Wir zeigen jetzt, dass Φ auch stetig ist.

Für jedes $x \in A$ ist die Abbildung $\hat{x} \circ \Phi : T \to \mathbb{C},\ t \mapsto \hat{x}(\varphi_t) = \varphi_t(x) = x(t)$ stetig. Sei nun $t \in T$ fest und $U \ni \Phi(t)$ eine offene Umgebung von $\Phi(t) = \varphi_t \in \Gamma_A$. Nach Definition der schwach-*-Topologie ist dabei o.E.

$$U = \{\varphi \in \Gamma_A : |\varphi_t(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n)\}$$

mit $\varepsilon > 0$ und $x_1, \ldots, x_n \in A$. Da die Abbildung $t \mapsto \varphi_t(x)$ stetig ist, existieren Umgebungen W_i von t mit

$$|\varphi_s(x_i) - \varphi_t(x_i)| < \varepsilon \quad (s \in W_i).$$

Setze $W := \bigcap_{i=1}^n W_i$. Dann ist W eine Umgebung von $t \in T$ und $\Phi(W) \subset U$. Damit ist Φ stetig.

(iv) Nach (i)-(iii) ist $\Phi : T \to \Gamma_A,\ t \mapsto \varphi_t$ bijektiv und stetig. Da T kompakt ist, ist auch Φ^{-1} stetig, d.h. Φ ist ein Homöomorphismus. Wegen

$$\hat{x}(\varphi_t) = \varphi_t(x) = x(t)$$

sind $C(T)$ und der Gelfandraum $\widehat{C(T)} = \{\hat{x} : x \in C(T)\}$ isometrisch algebreniso-morph.

d) C^*-Algebren

2.22 Definition. Sei A eine Banachalgebra.

a) Eine Abbildung $A \to A,\ x \mapsto x^*$ heißt Involution, falls gilt

(i) $(x+y)^* = x^* + y^* \quad (x, y \in A)$,

(ii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^* \quad (\lambda \in \mathbb{C}, x \in A)$,

(iii) $x^{**} = x \quad (x \in A)$,

(iv) $(xy)^* = y^* x^* \quad (x, y \in A)$.

b) Falls A eine Involution mit

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad (x \in A)$$

besitzt, so heißt A eine C^*-Algebra. Ein Algebrenhomomorphismus $\Phi : A \to B$ von C^*-Algebren heißt ein $*$-Homomorphismus, falls $\Phi(x^*) = (\Phi(x))^* \quad (x \in A)$.

c) Sei A eine C^*-Algebra. Dann heißt $x \in A$ selbstadjungiert, falls $x = x^*$, und normal, falls $xx^* = x^* x$ gilt.

2.23 Beispiele. a) Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum. Dann sind $K(E)$ und $L(E)$ C^*-Algebren.

b) Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum. Ist $T \in L(E)$ normal, so sei $\operatorname{alg}(T, T^*)$ die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von $L(E)$, welche id_E, T und T^* enthält. Es ist

$$\operatorname{alg}(T, T^*) = \overline{\Big\{ \sum_{n,m=0}^{N} a_{nm} T^n (T^*)^m : a_{nm} \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N} \Big\}}.$$

Offensichtlich ist $\operatorname{alg}(T, T^*)$ eine kommutative C^*-Algebra.

c) Sei T kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist $C(T)$ mit $f^* := \overline{f}$ eine C^*-Algebra. Ebenso $L_\infty(\mu)$ mit einem Maß μ.

2.24 Lemma. *Sei A eine C^*-Algebra.*

a) Es gilt $\|x\| = \|x^*\|$, $\|xx^*\| = \|x\|^2 \quad (x \in A)$.

b) Falls A eine Einheit besitzt, gilt $\|x\|^2 = \|x^2\|$ und $r(x) = \|x\|$ falls $x \in A$ normal ist.

c) Es gilt $\sigma_A(x) \subset \mathbb{R}$, falls $x = x^* \in A$.

Beweis. a) Wir haben
$$\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\| \cdot \|x\|.$$
Damit ist $\|x\| \leq \|x^*\|$ und $\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$. Ebenso folgt
$$\|xx^*\| = \|x^{**}x^*\| = \|x^*\|^2 = \|x\|^2.$$

b) Es gilt, falls $x \in A$ normal ist,
$$\|x^2\|^2 = \|x^2(x^*)^2\| = \|(x^*x)^2\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4.$$
Damit ist
$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{k\to\infty} \|x^{2^k}\|^{2^{-k}} = \|x\|.$$

c) Dies folgt mit einer Standardrechnung: Sei $\alpha + i\beta \in \sigma(x)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha + i(\beta + \lambda) \in \sigma(x + i\lambda)$ und damit $|\alpha + i(\beta + \lambda)| \leq \|x + i\lambda\|$. Also
$$\begin{aligned}\alpha^2 + (\beta+\lambda)^2 &= |\alpha + i(\beta+\lambda)|^2 \\ &\leq \|x + i\lambda\|^2 = \|(x+i\lambda)^*(x+i\lambda)\| \\ &= \|x^2 + \lambda^2 e\| \\ &\leq \|x\|^2 + \lambda^2.\end{aligned}$$
Damit folgt $\beta = 0$, d.h. $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. □

Die nächsten beiden Sätze bilden einen Höhepunkt der Theorie der C^*-Algebren. Es geht dabei um eine Darstellung von C^*-Algebren.

2.25 Satz (von Gelfand-Naimark, kommutative Version)**.** *Sei A eine kommutative C^*-Algebra mit Einheit. Dann ist die Gelfand-Transformation*
$$A \to C(\Gamma_A),\ x \mapsto \hat{x},$$
ein isometrischer $*$-Isomorphismus von C^*-Algebren.

Beweis. Nach dem Gelfandschen Darstellungssatz 2.20 ist die Gelfand-Transformation ein Algebren-Homomorphismus mit Norm nicht größer als 1. Sei
$$\hat{A} := \{\hat{x} : x \in A\} \subset C(\Gamma_A).$$
Es gilt nach Satz 2.20 und Lemma 2.24 b) $\|\hat{x}\|_\infty = r(x) = \|x\|$, d.h. die Gelfand-Transformation ist isometrisch. Wegen
$$(\hat{x}\hat{y})(\varphi) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) = \widehat{xy}(\varphi)$$
ist $\hat{A}$ eine Unteralgebra. Es ist $1 \in \hat{A}$, und da $x \mapsto \hat{x}$ isometrisch ist, ist das Bild $\hat{A} \subset C(\Gamma_A)$ abgeschlossen. Außerdem trennt $\hat{A}$ die Punkte von Γ_A.

Wir zeigen nun:
$$\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}. \tag{6}$$
Falls $x = x^*$, so folgt $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. Wegen
$$\sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \Gamma_A\} = \hat{x}(\Gamma_A)$$
ist auch $\hat{x}$ reellwertig, d.h. (6) gilt. Für beliebiges $x \in A$ zerlegen wir
$$x = y + iz = \frac{x + x^*}{2} + i\,\frac{x - x^*}{2i}$$
und damit $x^* = y - iz$, d.h.
$$\widehat{x^*} = \hat{y} - i\hat{z} = \overline{\hat{y} + i\hat{z}} = \overline{\hat{x}}.$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß erfüllt, und es folgt $\hat{A} = C(\Gamma_A)$. □

2.26 Satz (von Gelfand-Naimark für normale Elemente)**.** *Sei A eine C^*-Algebra mit Einheit e und $x \in A$ normal. Sei A_0 die von e, x und x^* erzeugte C^*-Unteralgebra. Dann ist Γ_{A_0} homöomorph zu $\sigma(x)$, und es existieren isometrische $*$-Isomorphismen*
$$C(\sigma(x)) \cong C(\Gamma_{A_0}) \cong A_0,$$
wobei $\mathrm{id}_{\sigma(x)}$ auf x abgebildet wird, die Funktion
$$\overline{\mathrm{id}_{\sigma(x)}} : \sigma(x) \to \mathbb{C},\ \lambda \mapsto \bar{\lambda}$$
auf x^* und die konstante Funktion 1 auf e.

Beweis. Nach Satz 2.20 gilt
$$\sigma_{A_0}(x) = \sigma(\hat{x}) = \{\varphi(x) : \varphi \in \Gamma_{A_0}\} = \hat{x}(\Gamma_{A_0}).$$
Damit ist $\hat{x} : \Gamma_{A_0} \to \sigma_{A_0}(x)$ surjektiv (und stetig).

Wir zeigen nun, dass $\hat{x}$ injektiv ist. Dazu sei $\varphi(x) = \psi(x)$ für $\varphi, \psi \in \Gamma_{A_0}$. Dann ist
$$\varphi(x^*) = \widehat{x^*}(\varphi) = \overline{\hat{x}(\varphi)} = \overline{\varphi(x)} = \overline{\psi(x)} = \psi(x^*).$$
Also gilt $\varphi(p(x, x^*)) = \psi(p(x, x^*))$ für alle Polynome p. Da φ und ψ stetig sind, folgt $\varphi = \psi$ auf A_0, d.h. $\hat{x}$ ist injektiv.

Da Γ_{A_0} kompakt ist, ist $\hat{x} : \Gamma_{A_0} \to \sigma_{A_0}(x)$ ein Homöomorphismus. Somit wird durch die Vorschrift $f \mapsto g := f \circ \hat{x}$ ein isometrischer Isomorphismus $C(\sigma_{A_0}(x)) \to C(\Gamma_{A_0})$

induziert. Insbesondere wird die Funktion $f = \mathrm{id}_{\sigma_{A_0}(x)}$ auf $g = \hat{x}$ abgebildet, d.h. in diesem Fall ist $g(\varphi) = \hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$.

Nach dem Satz von Gelfand-Naimark 2.25 ist $C(\Gamma_{A_0})$ isometrisch $*$-isomorph zu A_0. Insgesamt erhalten wir

$$C(\sigma_{A_0}(x)) \cong C(\Gamma_{A_0}) \cong A_0.$$

Für den oben stehenden $*$-Isomorphismus $\Phi : C(\sigma_{A_0}(x)) \to A_0$ gilt (beachte die Definition des Gelfand-Isomorphismus)

$$\Phi(\mathrm{id}_{\sigma_{A_0}(x)}) = x, \ \ \Phi(1_{\sigma_{A_0}(x)}) = e,$$

wobei $1_{\sigma_{A_0}(x)})$ die konstante Funktion 1 bezeichnet. Damit ist alles gezeigt bis auf die Gleichheit

$$\sigma_{A_0}(x) = \sigma(x)(:= \sigma_A(x)).$$

Diese Gleichheit ist der Gegenstand des folgenden Lemmas. □

2.27 Lemma. *Sei A eine C^*-Algebra mit Einheit e, $x \in A$ normal und $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra mit $e, x \in B$. Dann ist $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

Beweis. (i) Es gilt

$$\sigma_A(x) = \sigma(\hat{x}) = \{\varphi(x) : \varphi \in \Gamma_A\}.$$

Damit ist $\sigma_B(x) \supset \sigma_A(x)$ klar wegen $\Gamma_A \subset \Gamma_B$.

(ii) Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, reicht es, den Fall $B = A_0$ zu betrachten, wobei A_0 die von e, x und x^* erzeugte C^*-Unteralgebra sei. Dies genügt wegen $A_0 \subset B \subset A$.

Sei $\Phi : C(\sigma_{A_0}(x)) \to A_0$ wie im Beweis von Satz 2.26. Angenommen, es existiert ein $\lambda \in \sigma_{A_0}(x) \setminus \sigma_A(x)$. Dann existiert $y := (\lambda - x)^{-1} \in A \setminus A_0$.

Wähle $f \in C(\sigma_{A_0}(x))$ mit $f(\lambda) =: m > \|y\|$ und

$$|f(t)(\lambda - t)| \le 1 \quad (t \in \sigma_{A_0}(x)).$$

Für $g(t) := f(t)(\lambda - t)$ gilt

$$\begin{aligned} m \le \|f\|_\infty = \|\Phi(f)\| &= \|\Phi(f)(\lambda - x)y\| \\ &\le \|\Phi(g)\| \cdot \|y\| = \|g\|_\infty \|y\| \le \|y\|, \end{aligned}$$

Widerspruch zur Definition von m. Damit ist $\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x)$, d.h. die beiden Spektren sind gleich. □

2.28 Korollar (Spektralsatz für beschränkte normale Operatoren)**.** *Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ normal. Dann existiert ein isometrischer $*$-Homomorphismus $\Phi : C(\sigma(T)) \to L(H)$ mit $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T$, und $\Phi(1) = \mathrm{id}_H$.*

Beweis. Das ist Satz 2.26 angewendet auf die kommutative C^*-Algebra

$$A_0 := \mathrm{alg}(T, T^*) \subset L(H).$$

Beachte dabei, dass $\sigma_{A_0}(T) = \sigma_{L(H)}(T) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \exists\, S \in L(H) : S(T-\lambda) = (T-\lambda)S = \mathrm{id}_H\} = \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} :\ T - \lambda \text{ bijektiv}\}$, d.h. das Spektrum im Sinne der Operatortheorie stimmt mit dem Spektrum im Sinne der Banachalgebra überein. $\square$

3. Ergänzungen zum Spektralsatz

Der Spektralsatz ist im wesentlichen schon von Teil I der Vorlesung bekannt. Da uns nun die Lebesgue-Theorie zur Verfügung steht, können wir den Spektralsatz und den Funktionalkalkül allgemeiner (und besser) formulieren. Statt mit Spektralscharen zu arbeiten, was dem Riemann-Stieltjes-Integral entspricht, werden jetzt projektorwertigen Maße verwendet, welche die Lebesgue-Integrationstheorie zur Basis hat. Eine sehr schöne Formulierung des Spektralsatzes ist die Beschreibung als Multiplikationsoperator. In dieser Form taucht der Spektralsatz auch häufig in der Physik auf.

a) Projektorwertige Maße

3.1 Lemma. *Sei $M \subset \mathbb{C}$ kompakt. Sei $C(M) \subset U \subset B(M)$ ein Unterraum, wobei $B(M)$ der Raum der beschränkten messbaren Funktionen auf M sei. Es sei U abgeschlossen bzgl. punktweiser Konvergenz, d.h. falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $f_n \to f \quad (n \to \infty)$ punktweise gilt, so folgt $f \in U$. Dann gilt bereits $U = B(M)$.*

Beweis. Da die Stufenfunktionen im Raum $B(M)$ der beschränkten messbaren Funktionen dicht liegen (Satz 1.7), reicht es zu zeigen, dass jede Stufenfunktion in U liegt. Dazu zeigen wir, dass jede Stufenfunktion durch stetige Funktionen approximiert werden kann. Dazu reicht es, die charakteristischen Funktionen zu approximieren.

Sei also $\mathcal{B}(M)$ die σ-Algebra der Borelmengen von M und

$$\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{B}(M) : \chi_A \in U\}.$$

Falls A offen ist, existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(M)$ mit $0 \le f \le 1$ und $f_n(t) \to \chi_A(t) \quad (n \to \infty)$ für alle $t \in M$. Also sind alle offenen Mengen in $\mathcal{F}$ enthalten.

Wir zeigen, dass folgende Aussagen gelten:

(i) Falls $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \subset B$, so ist auch $B \setminus A \in \mathcal{F}$. Denn es gilt $\chi_{B\setminus A} = \chi_B - \chi_A$, und da U ein Vektorraum ist, folgt $\chi_{B\setminus A} \in U$.

(ii) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ paarweise disjunkt. Dann ist auch $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$. Denn es gilt $\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$, d.h. χ_A ist punktweiser Limes von Funktionen in U und damit selbst in U.

Die Eigenschaften (i) und (ii) sagen, dass $\mathcal{F}$ ein Dynkinsystem ist. Da die offenen Mengen ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem dieses Dynkinsystems bilden, ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra. Damit ist $\mathcal{F} = \mathcal{B}(M)$, d.h. jede Stufenfunktion liegt in U, was zu zeigen war. $\square$

3.2 Definition. Sei $(X,\mathcal{A})$ ein Messraum und H ein Hilbertraum. Eine Abbildung $E\colon \mathcal{A}\to L(H)$ heißt ein projektorwertiges Maß (PV-Maß), falls gilt:

(i) $E(A)$ ist orthogonale Projektion $(A\in\mathcal{A})$.

(ii) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\Big[E\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\Big]x = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(A_n)x \quad (x\in H).$$

(iii) Es gilt $E(X)=\mathrm{id}_H$.

Eine Menge $A\in\mathcal{A}$ heißt eine E-Nullmenge, falls $E(A)=0$ (dabei ist die 0 auf der rechten Seite der Nulloperator in H).

3.3 Bemerkung. Sei E ein PV-Maß. Dann gilt

a) $E(\emptyset)=0$.

b) $E(A\cup B)+E(A\cap B)=E(A)+E(B) \quad (A,B\in\mathcal{A})$.

c) $E(B\setminus A)=E(B)-E(A)$ für $A,B\in\mathcal{A}$ mit $A\subset B$.

d) Seien $A_n\in\mathcal{A}$ mit $A_n\subset A_{n+1} \quad (n\in\mathbb{N})$. Dann ist $E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)=\text{s-lim}_{n\to\infty}E(A_n)$. Analog gilt für $A_n\in\mathcal{A}$ mit $A_n\supset A_{n+1} \quad (n\in\mathbb{N})$ die Gleichheit $E(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)=\text{s-lim}_{n\to\infty}E(A_n)$.

e) $E(A\cap B)=E(A)E(B)=E(B)E(A) \quad (A,B\in\mathcal{A})$.

f) Seien $A,B\in\mathcal{A}$ mit $A\cap B=\emptyset$. Dann ist $R(E(A))\perp R(E(B))$.

g) Sei $x\in H$. Dann ist $E_x\colon\mathcal{A}\to[0,\infty)$ mit

$$E_x(A):=\langle x,E(A)x\rangle=\|E(A)x\|^2$$

ein endliches Maß mit $E_x(X)=\|x\|^2$.

3.4 Lemma. *Sei $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar in einem Hilbertraum H. Dann existiert genau ein PV-Maß E auf $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit*

$$E((-\infty,\lambda])=F_\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R}).$$

Beweis. Definiere

$$E((a,b]):=F_b-F_a \quad (a,b\in\mathbb{R},\ a<b).$$

Dann ist $E((a,b])$ eine orthogonale Projektion. Für $x \in H$ und $b_n \searrow b$ gilt

$$E((a,b_n]) = F_{b_n} - F_a \xrightarrow{\text{s}} F_b - F_a = E((a,b]) \quad (n \to \infty).$$

Damit ist E stetig von oben und somit σ-additiv. Da $\{(a,b] \subset \mathbb{R} : a < b\}$ ein durchschnittstabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bildet, existiert eine eindeutige Fortsetzung von E auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nach Konstruktion ist E ein PV-Maß. □

3.5 Definition. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, H ein Hilbertraum, E ein PV-Maß. Sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine Stufenfunktion, $f = \sum_{i=1}^n f_i \chi_{A_i}$. Dann heißt

$$\int f dE := \sum_{i=1}^n f_i E(A_i) \in L(H)$$

das Integral von f bzgl. E.

3.6 Lemma. *Sei E ein PV-Maß und seien f, g Stufenfunktionen.*

a) Für $x, y \in H$ gilt die Polarisationsformel

$$\Big\langle \int f dE x, y \Big\rangle = \frac{1}{4} \sum_{z^4=1} z \int f dE_{x+zy}. \tag{7}$$

Insbesondere ist $\int f dE$ durch $(\int f dE_x)_{x \in H}$ eindeutig festgelegt.

b) Die Abbildung $f \mapsto \int f dE$ ist linear.

c) Für $x \in H$ gilt $\|(\int f dE)x\|^2 = \int |f|^2 dE_x = \langle (\int |f|^2 dE)x, x \rangle$.

d) Es gilt $(\int f dE)(\int g dE) = \int fg dE$.

e) Es gilt $(\int f dE)^* = \int \bar{f} dE$.

Beweis. a) Für $x, y \in H$ haben wir unter Verwendung der Polarisationsformel in H:

$$\begin{aligned}
\Big\langle \int f dE x, y \Big\rangle &= \sum_{i=1}^n f_i \langle E(A_i)x, y \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n f_i \langle E(A_i)x, E(A_i)y \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n f_i \frac{1}{4} \sum_{z^4=1} z \|E(A_i)x + zE(A_i)y\|^2 \\
&= \frac{1}{4} \sum_{z^4=1} \sum_{i=1}^n f_i z \|E(A_i)(x+zy)\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sum_{z^4=1} \sum_{i=1}^{n} f_i z E_{x+zy}(A_i)(x+zy) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{z^4=1} z \int f dE_{x+zy}.
\end{aligned}
$$

b) ist klar.

c) Unter Verwendung des Satzes von Pythagoras erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\Big\| \Big(\int f dE \Big) x \Big\|^2 &= \Big\| \sum_{i=1}^{n} f_i E(A_i) x \Big\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \|E(A_i)x\|^2 \\
&= \int |f|^2 dE_x \\
&= \Big\langle \Big(\int |f|^2 dE \Big) x, x \Big\rangle.
\end{aligned}
$$

d) Mit Bemerkung 3.3 gilt

$$
\begin{aligned}
\Big(\int f dE \Big) \Big(\int g dE \Big) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} f_i E(A_i) \Big) \Big(\sum_{j=1}^{m} g_j E(B_j) \Big) \\
&= \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i) E(B_j) \\
&= \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i \cap B_j) \\
&= \int f g dE.
\end{aligned}
$$

e) folgt direkt aus der Definition des Integrals. □

3.7 Satz. *Sei E ein PV-Maß auf $(X, \mathcal{A})$ mit Werten in $L(H)$ und sei $x \in H$.*

a) Sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) *f ist messbar und $\int |f|^2 dE_x < \infty$ (d.h. $f \in L_2(E_x)$).*

(ii) *Es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit $f_n \to f$ punktweise und $\int |f_n - f|^2 dE_x \to 0 \quad (n \to \infty)$.*

b) Sind $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ Folgen wie in a) (ii), so sind die Folgen $((\int f_n dE)x)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ und $((\int g_n dE)x)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ konvergent mit gleichem Grenzwert.

c) Die Folge in a) (ii) kann unabhängig von $x \in H$ gewählt werden.

Beweis. a) Da E_x ein endliches Maß ist, ist jede Stufenfunktion integrierbar. Damit folgt a) aus Satz 1.20, der Dreiecksungleichung in $L_2(E_x)$ und dem Satz über majorisierte Konvergenz.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\int f_n dE - \int f_m dE\Big)x\Big\|^2 &= \Big\|\int (f_n - f_m) dEx\Big\|^2\\ &= \int |f_n - f_m|^2 dE_x \to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_2(E_x)$ nach Teil a) konvergent ist. Genauso sieht man

$$\Big\|\Big(\int f_n dE - \int g_n dE\Big)x\Big\|^2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

c) Nach Satz 1.18 kann man die Folge $(f_n)_n$ mit $|f_n(\lambda)| \le 2|f(\lambda)| \quad (\lambda \in X)$ wählen. Damit folgt a) (ii) für alle $x \in H$ durch majorisierte Konvergenz. □

3.8 Definition. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, $f\colon X \to \mathbb{C}$ messbar, H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und E ein PV-Maß in H. Definiere den Operator $\int f dE$ durch

$$\begin{aligned}D\Big(\int f dE\Big) &:= \Big\{x \in H : \int |f|^2 dE_x < \infty\Big\},\\ \Big(\int f dE\Big)x &:= \lim_{n\to\infty} \Big(\int f_n dE\Big)x \quad \text{für } x \in D\Big(\int f dE\Big).\end{aligned}$$

Dabei ist $(f_n)_n$ eine Folge wie in Satz 3.7.

Im folgenden werden wir unbeschränkte Operatoren betrachten. Daher zunächst noch eine Definition.

3.9 Definition. Sei B ein Banachraum und seien $S : D(S) \to B$ und $T : D(T) \to B$ lineare (nicht notwendig beschränkte) Operatoren in B.

a) Der Operator $S + T$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}D(S+T) &:= D(S) \cap D(T),\\ (S+T)x &:= Sx + Tx \quad (x \in D(S+T)).\end{aligned}$$

b) Der Operator TS ist definiert durch

$$\begin{aligned} D(TS) &:= \{x \in D(S) : Sx \in D(T)\}, \\ (TS)x &:= T(Sx). \end{aligned}$$

c) T ist eine Fortsetzung von S, in Zeichen $S \subset T$, falls $D(S) \subset D(T)$ und $Tx = Sx \quad (x \in D(S))$ gilt. Die Operatoren S und T sind gleich, falls $D(S) = D(T)$ und $Tx = Sx \quad (x \in D(T))$ gilt.

d) Sei B sogar ein Hilbertraum. Der Operator T heißt normal, falls T abgeschlossen und dicht definiert ist, und falls $TT^* = T^*T$ gilt (insbesondere gilt dann auch $D(TT^*) = D(T^*T)$).

3.10 Bemerkung. Sei der Operator $T : D(T) \to H$ in einem Hilbertraum abgeschlossen und dicht definiert. Dann ist T genau dann normal, falls $D(T) = D(T^*)$ und $\|Tx\| = \|T^*x\| \quad (x \in D(T))$ gilt.

Falls T normal ist, so gilt $R(T) = R(T^*)$.

(Ohne Beweis.)

3.11 Satz (Eigenschaften des Integrals über Spektralmaße)**.** *In der Situation von Definition 3.8 gilt:*

a) $D(\int f dE)$ ist ein dichter Unterraum von H und $f \mapsto \int f dE$ ist linear. Sei $A_c := \{\lambda \in X : |f(\lambda)| \leq c\}$ für $c \geq 0$. Dann ist $E(A_c)x \in D(\int f dE)$ für alle $c \geq 0$ und alle $x \in H$.

b) Es gilt

$$\Big\langle \int f dE x, y \Big\rangle = \frac{1}{4} \sum_{z^4=1} z \int f dE_{x+zy} \quad \Big(x, y \in D\Big(\int f dE\Big)\Big).$$

Insbesondere ist $\|(\int f dE)x\|^2 = \int |f|^2 dE_x$.

c) $\int f dE$ ist normal, und $(\int f dE)^* = \int \bar{f} dE$.

d) Es gilt $\int f dE = \int g dE$ genau dann, wenn

$$E\{\lambda \in X : f(\lambda) \neq g(\lambda)\} = 0.$$

e) $\int f dE$ ist genau dann injektiv, wenn $\int f dE = \int g dE$ gilt für $g := f + \chi_{f^{-1}(0)}$. Falls $f(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in X$, so ist $\int f dE$ injektiv und $(\int f dE)^{-1} = \int \frac{1}{f} dE$.

f) $\int f dE$ ist genau dann beschränkt, wenn $\int f dE \in L(H)$. Dies ist äquivalent dazu, dass ein $c \geq 0$ existiert mit $E(\{\lambda \in X : |f(\lambda)| \geq c\}) = 0$, d.h. zu $f \in L_\infty(E)$.

Es gilt in diesem Fall

$$\Big\| \int f dE \Big\|_{L(H)} = \|f\|_{L_\infty(E)}.$$

g) $\int f dE$ *ist genau dann selbstadjungiert, falls* $E(\{\lambda \in X : f(\lambda) \notin \mathbb{R}\}) = 0$.

h) Für $A \in \mathcal{A}$ *und messbare Funktionen* $f, g \colon X \to \mathbb{C}$ *gilt*

$$\begin{aligned} E(A)\Big(\int f dE\Big) &\subset \Big(\int f dE\Big) E(A), \\ \int (f+g) dE &\supset \int f dE + \int g dE, \\ D\Big(\int f dE + \int g dE\Big) &= D\Big(\int (f+g) dE\Big) \cap D\Big(\int g dE\Big), \\ \int (f \cdot g) dE &\supset \Big(\int f dE\Big)\Big(\int g dE\Big), \\ D\Big[\Big(\int f dE\Big)\Big(\int g dE\Big)\Big] &= D\Big(\int f g dE\Big) \cap D\Big(\int f dE\Big). \end{aligned}$$

Der Beweis ist etwas lang, aber nicht schwer.

Beweis. a) Offensichtlich gilt $E_{\alpha x} = |\alpha|^2 E_x$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $x \in H$. Ebenso gilt

$$\begin{aligned} E_{x+y}(A) &= \langle x+y, E(A)(x+y)\rangle \\ &\le E_x(A) + E_y(A) + 2|\langle E(A)x, E(A)y\rangle| \\ &\le E_x(A) + E_y(A) + 2\|E(A)x\| \cdot \|E(A)y\| \\ &\le E_x(A) + E_y(A) + \|E(A)x\|^2 + \|E(A)y\|^2 \\ &\le 2E_x(A) + 2E_y(A). \end{aligned}$$

Damit ist $D(\int f dE)$ ein linearer Unterraum.

Wegen $D(\int f dE) = D(\int |f| dE)$ sei o.E. $f \ge 0$. Zu $c \ge 0$ und $x \in H$ sei $x_c := E(A_c)x$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stufenfunktionen mit $f_n \nearrow f \quad (n \to \infty)$. Dann gilt mit monotoner Konvergenz

$$\int f_n^2 \chi_{A_c} dE_x \to \int f^2 \chi_{A_c} dE_x \le c^2 \|x\|^2.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \int f_n^2 \chi_{A_c} dE_x &= \Big\| \Big(\int f_n \chi_{A_c} dE\Big) x \Big\|^2 \\ &= \Big\| \int f_n dE x_c \Big\|^2 = \int f_n^2 dE_{x_c} \\ &\to \int f^2 dE_{x_c} \le c^2 \|x\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Somit ist $x_c \in D(\int f dE)$.

Wegen $E(A_N) \xrightarrow{s} E(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} A_N) = E(X) = \mathrm{id}_H$ folgt $x_N \to x \quad (N \to \infty)$, d.h. $D(\int f dE)$ ist dicht in H.

b) folgt durch majorisierte Konvergenz aus der entsprechenden Eigenschaft für Stufenfunktionen.

c) Nach a) gilt $E(A_N)y \in D(\int f dE)$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $y \in H$. Sei nun $x \in D((\int f dE)^*)$ und $x^* := (\int f dE)^* x$. Dann ist für alle $y \in H$

$$\begin{aligned}\langle E(A_N)x^*, y\rangle &= \langle x^*, E(A_N)y\rangle \\ &= \Big\langle x, \Big(\int f dE\Big)E(A_N)y\Big\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big\langle x, \Big(\int f_n dE\Big)E(A_N)y\Big\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big\langle x, E(A_N)\Big(\int f_n dE\Big)y\Big\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big\langle \Big(\int \bar f_n dE\Big)E(A_N)x, y\Big\rangle.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$E(A_N)x^* = \Big(\int \bar f dE\Big)E(A_N)x = \Big(\int \bar f \chi_{A_N} dE\Big)x. \tag{8}$$

Es gilt $E(A_N)x^* \to x^* \quad (N \to \infty)$ und mit monotoner Konvergenz

$$\Big\|\Big(\int \bar f \chi_{A_N} dE\Big)x\Big\|^2 = \int |f|^2 \chi_{A_N} dE_x \to \int |f|^2 dE_x \in [0,\infty] \quad (N\to\infty).$$

Nach (8) folgt $\int |f|^2 dE_x \le \|x^*\| < \infty$ und damit $x \in D(\int \bar f dE)$.

Daher erhalten wir

$$\Big(\bar f_n \chi_{A_N} dE\Big)x \to E(A_N)\Big(\int \bar f dE\Big)x \quad (n\to\infty).$$

Für $n \to \infty$ erhält man

$$x^* = \Big(\int \bar f dE\Big).$$

Wir haben somit gezeigt, dass $(\int f dE)^* \subset \int \bar f dE$. Nun zur umgekehrten Richtung. Für $x \in D(\int \bar f dE)$ und $y \in D(\int f dE)$ gilt

$$\begin{aligned}\Big\langle x, \int f dE y\Big\rangle &= \lim_{n\to\infty} \Big\langle x, \int f_n dE y\Big\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big\langle \int \bar f_n dE x, y\Big\rangle = \Big\langle \int \bar f dE x, y\Big\rangle,\end{aligned}$$

d.h. die Abbildung $y \mapsto \langle x, \int f dE y\rangle$ ist stetig. Nach Definition des adjungierten Operators ist also $x \in D((\int f dE)^*)$. Insgesamt erhalten wir also $(\int f dE)^* = \int \bar{f} dE$.

Wegen

$$\Big\| \int \bar{f} dE x \Big\|^2 = \int |f|^2 dE_x = \Big\| \int f dE x \Big\|^2 \quad \Big(x \in D\Big(\int f dE\Big)\Big)$$

und Bemerkung 3.10 ist $\int f dE$ normal.

d) (i) Sei $\int f dE = \int g dE$ und $A := \{\lambda : f(\lambda) \neq g(\lambda)\}$. Wir setzen

$$A_N := A \cap \{\lambda \in X : |f(\lambda)| \leq N, \ |g(\lambda)| \leq N\}.$$

Zu zeigen ist somit, dass $E(A_N) = 0$.

Sei $x \in R(E(A_N))$. Dann ist nach Teil a) $x \in D(\int f dE) = D(\int g dE) =: D$. Seien $f_n \to f$ und $g_n \to g$ Stufenfunktionen. Dann gilt

$$\Big\| \Big(\int f_n dE \Big) x - \Big(\int g_n dE \Big) x \Big\|^2 \longrightarrow \Big\| \Big(\int f dE \Big) x - \Big(\int g dE \Big) x \Big\|^2 = 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Andererseits ist die linke Seite in obiger Gleichung gegeben durch

$$\begin{aligned} \Big\| \Big(\int f_n dE \Big) x - \Big(\int g_n dE \Big) x \Big\|^2 &= \Big\| \Big(\int \chi_{A_N} (f_n - g_n) dE \Big) x \Big\|^2 \\ &= \int \chi_{A_N} |f_n - g_n|^2 dE_x \\ &\longrightarrow \int \chi_{A_N} |f - g|^2 dE_x \quad (n, m \to \infty). \end{aligned}$$

Somit gilt $\int_{A_N} |f - g|^2 dE_x = 0$. Da der Integrand auf A_N positiv ist, folgt $E_x(A_N) = 0$ und damit $\|E(A_N)x\|^2 = 0$. Da aber $x \in R(E(A_N))$ war, erhalten wir $x = 0$ und somit $E(A_N) = 0$.

(ii) Sei nun $E(\{f \neq g\}) = 0$. Dann ist $E_x(\{f \neq g\}) = 0$ für alle $x \in H$, d.h. $D(\int f dE) = D(\int g dE) =: D$.

Für $x, y \in D$ ist nach Teil b)

$$\Big\langle x, \Big(\int f dE \Big) y \Big\rangle = \Big\langle x, \Big(\int g dE \Big) y \Big\rangle$$

und damit $\int f dE y = \int g dE y$ für alle $y \in D$. Also ist $\int f dE = \int g dE$.

e) (i) Sei $\int f dE$ injektiv und $A := f^{-1}(0)$. Sei $x \in R(E(A)) \subset D(\int f dE)$ (unter Verwendung von a)). Dann ist

$$\Big\| \int f dE x \Big\|^2 = \int_A |f|^2 dE_x = 0,$$

d.h. $x = 0$. Damit ist $E(f^{-1}(0)) = 0$.

(ii) Sei nun $E(f^{-1}(0)) = 0$ und $x \in \ker(\int f dE)$. Dann ist

$$0 = \Big\| \int f dE x \Big\|^2 = \int |f|^2 dE_x,$$

damit $E_x(\{|f| > 0\}) = 0$. Wegen $E(\{f = 0\}) = 0$ haben wir $E_x(X) = 0$ und somit $\|x\|^2 = \|E(X)x\|^2 = 0$.

(iii) Sei nun $f(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in X$. Nach (ii) ist $\int f dE$ injektiv. Die Gleichung $(\int f dE)^{-1} = \int \frac{1}{f} dE$ gilt für Treppenfunktionen, da das Integral multiplikativ ist. Für $x \in D(\frac{1}{f} dE)$ folgt die Aussage durch Approximation mit $x_N = E(A_N)x$, wobei $A_N := \{\lambda \in X : |\frac{1}{f(\lambda)}| \leq N\}$ und durch majorisierte Konvergenz.

f) Sei $B_N := \{\lambda \in X : |f(\lambda)| \geq N\}$. Für $x \in R(E(B_N))$ gilt

$$\Big\| \int f dE x \Big\|^2 = \int |f|^2 dE_x \geq N^2 \|x\|^2.$$

Damit folgen die Aussagen von f) sofort.

g) Nach c) ist $(\int f dE)^* = \int \bar{f} dE$. Nach d) ist dies genau dann gleich $\int f dE$, wenn $E(\{\lambda : f(\lambda) \neq \bar{f}(\lambda)\}) = 0$.

h) Diese Aussagen folgen durch direktes Nachrechnen (Approximation durch Treppenfunktionen), man beachte die Definitionsbereiche.

$\square$

Der nächste Satz, der Spektralsatz für unbeschränkte normale Operatoren, ist einer der wichtigsten Sätze der Operatortheorie. Im wesentlichen ist er schon aus Teil I der Vorlesung bekannt, die Formulierung hier ist aber weitreichender, da wir inzwischen das Lebesgue-Integral zur Verfügung haben. Der wesentliche Teil des Beweises wurde bereits im ersten Teil der Vorlesung durchgeführt. Wieder ist $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra.

3.12 Satz (Spektralsatz in PV-Maß-Version)**.** *Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T\colon D(T) \to H$ ein normaler Operator in H. Dann existiert genau ein PV-Maß $E\colon \mathcal{B}(\sigma(T)) \to L(H)$ mit*

$$T = \int_{\sigma(T)} \mathrm{id}_{\sigma(T)}\, dE.$$

(Beachte, dass dies die Gleichheit unbeschränkter Operatoren ist, also insbesondere die Gleichheit der Definitionsbereiche impliziert.) Für jede messbare Funktion $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ wird durch

$$f(T) := \int_{\sigma(T)} f dE,\ D(f(T)) := \Big\{ x \in H\colon \int_{\sigma(T)} |f|^2 dE_x < \infty \Big\}$$

ein normaler Operator definiert. Es gelten die üblichen Regeln für den Funktionalkalkül. Falls f ein Polynom ist, stimmt $f(T)$ mit der üblichen Definition überein.

Falls T beschränkt ist und $f \in C(\sigma(T))$, so stimmt der obige (messbare) Funkionalkalkül mit dem stetigen Funktionalkalkül aus Kapitel 2 überein.

Beweisskizze. Obwohl bereits die wichtigsten Aussagen dieses Satzes durch die vorherigen Versionen des Spektralsatzes abgedeckt wurden, benötigt der ausführliche Beweis mehr Platz, als im Rahmen dieser Vorlesung zur Verfügung steht. Wir beschränken uns daher auf eine Beweisskizze.

Die Existenz einer Spektralschar ist aus Teil 1 der Vorlesung bekannt im Falle selbstadjungierter Operatoren. Falls T selbstadjungiert ist und $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die zu T gehörige Spektralschar, so wird durch

$$E((-\infty, b]) := F_b \quad (b \in \mathbb{R})$$

ein Spektralmaß definiert, siehe Lemma 3.4. Man kann unter Verwendung der Polarisationsformel zeigen, dass damit für $x \in D(T)$ und $y \in H$ gilt:

$$\langle Tx, y\rangle = \Big\langle \int \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, dEx, y\Big\rangle.$$

Aus Teil I der Vorlesung wissen wir auch (zumindest für beschränkte Operatoren), dass F_λ in einer Umgebung von $\lambda_0 \in \rho(T)$ lokal konstant ist. Damit ist $E(\rho(T)) = 0$, d.h. man kann obiges Integral durch das Integral über $\sigma(T)$ ersetzen.

Falls T normal ist, schreibt man $T = S_1+S_2$ mit $S_1 = \frac{1}{2}(T+T^*)$ und $S_2 = \frac{1}{2i}(T-T^*)$. Man kann leicht zeigen, dass S_1 und S_2 mit ihrem natürlichen Definitionsbereich $D(S_j) = D(T) = D(T^*)$ selbstadjungiert sind. (Man beachte die Gleichheit dieser Definitionsbereiche nach Bemerkung 3.10.)

Seien $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ und $\{G_\mu\}_{\mu\in\mathbb{R}}$ die Spektralscharen von S_1 bzw. S_2. Durch

$$E((a, b] \times (c, d]) := (F_b - F_a)(G_d - G_c)$$

für $(a, b] \times (c, d] \subset \mathbb{R}^2$ wird ein PV-Maß auf $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ definiert. Dazu verwendet man, dass F_λ und G_μ kommutieren, weil S_1 und S_2 kommutieren. Wieder gilt für das erzeugte Maß

$$E(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0.$$

Damit haben wir

$$\int_{\mathbb{C}} f dE = \int_{\sigma(T)} f dE.$$

Die Eigenschaften des Funktionalkalküls folgen aus Satz 3.11. Insbesondere stimmt $\int p dE$ für Polynome p mit der üblichen Definition überein nach Satz 3.11 h). Falls $T \in L(H)$, ist $\sigma(T)$ kompakt, und die Funktionalkalküle aus Satz 3.12 und aus Kapitel 2 stimmen überein.

Die Eindeutigkeit folgt für $T \in L(H)$ aus der Eindeutigkeit für alle Polynome, der Dichtheit der Polynome in $C(\sigma(T))$ und der Approximierbarkeit beschränkter messbarer Funktionen durch stetige Funktionen (Lemma 3.1).

Für unbeschränkte Operatoren kann man die Eindeutigkeit etwa durch die Transformation $T \mapsto T(\mathrm{id}_H + \sqrt{T^*T})^{-1} \in L(H)$ beweisen. □

b) Multiplikationsoperatoren

Die PV-Maß-Version des Spektralsatzes ist für viele Fälle die beste. Insbesondere in der Physik, wenn auch der Hilbertraum separabel ist, kann man auch eine Darstellung als Multiplikationsoperator finden, die nun folgt.

3.13 Satz (Multiplikationsoperatoren)**.** *Sei $(Z, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $W \neq \{0\}$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum und $\varphi\colon Z \to \mathbb{K}$ messbar. Definiere*

$$D(T_\varphi) := D_\varphi := \Big\{ f \in L_2(\mu; W) : \int \|\varphi f\|^2 d\mu < \infty \Big\},$$
$$T_\varphi f := \varphi \cdot f \quad (f \in D_\varphi).$$

Dann ist T_φ ein normaler Operator in $L_2(\mu; W)$. Es gilt

(i) $(T_\varphi)^* = T_{\bar\varphi}$.

(ii) $\ker T_\varphi = \{f \in L_2(\mu; W) : f(z) = 0$ *für μ-fast alle* $z \in \varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})\}$.

(iii) $T_\varphi \in L(L_2(\mu; W))$ *genau dann, wenn* $\varphi \in L_\infty(\mu)$.

(iv) *Es gilt $\varphi = \bar\varphi$ μ-fast überall genau dann, wenn T_φ selbstadjungiert ist.*

Beweis. Falls f messbar ist mit $f(Z)$ (bis auf eine μ-Nullmenge) separabel, so ist auch φf messbar und $(\varphi f)(Z)$ separabel. Damit ist

$$D_\varphi = \{f \in L_2(\mu; W) : \varphi f \in L_2(\mu; W)\}.$$

Sei $\chi_n := \chi_{A_n}$ mit $A_n := \{z \in Z : |\varphi(z)| \le n\}$. Für alle $f \in L_2(\mu; W)$ ist $\chi_n f \in D_\varphi$ wegen $\|\varphi \chi_n f\| \le n\|f\|$. Es gilt mit monotoner Konvergenz

$$\|f - \chi_n f\|^2_{L_2(\mu;W)} = \|(1 - \chi_{A_n}) f\|^2_{L_2(\mu;W)} = \int_{Z \setminus A_n} \|f(z)\|^2 d\mu(z) \longrightarrow 0.$$

Damit ist D_φ dicht.

Seien nun $f \in D_\varphi$, $g \in D(T_\varphi^*)$ und $g^* := T_\varphi^* g$. Dann ist

$$\langle g, T_\varphi f\rangle = \int \langle g, \varphi f\rangle_H d\mu = \int \langle \bar\varphi g, f\rangle_H d\mu,$$

aber auch

$$\langle g, T_\varphi f\rangle = \langle T_\varphi^* g, f\rangle = \int \langle \underbrace{T_\varphi^* g}_{g^*}, f\rangle_H d\mu.$$

Somit gilt

$$\int \langle (\bar\varphi g - g^*), f\rangle d\mu = 0 \quad (f \in D_\varphi).$$

Wegen $\chi_n f \in D_\varphi$ für alle $f \in L_2(\mu; W)$ folgt

$$\int \langle (\bar\varphi g - g^*), \chi_n f\rangle d\mu = 0 \quad (f \in L_2(\mu; W)),$$

und damit

$$\int \langle \chi_n(\bar\varphi g - g^*), f\rangle d\mu = 0 \quad (f \in L_2(\mu; W)).$$

Somit gilt $\chi_n(\bar\varphi g - g^*) = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$. Wendet man den Satz über monotone Konvergenz auf $\|\chi_n \bar\varphi g\|_{L_2}^2$ an, so erhalten wir $\bar\varphi g - g^* = 0$. Also ist $\bar\varphi g \in L_2(\mu; W)$ und damit $g \in D_{\bar\varphi}$. Wegen $g^* = \bar\varphi g$ haben wir $(T_\varphi)^* \subset T_{\bar\varphi}$ gezeigt.

Sei nun $g \in D_{\bar\varphi}$. Dann ist

$$D_\varphi \to \mathbb{K},\ f \mapsto \langle g, T_\varphi f\rangle = \langle T_{\bar\varphi} g, f\rangle$$

stetig, d.h. $g \in D(T_\varphi^*)$. Wegen $D(T_\varphi) = D_\varphi = D_{\bar\varphi} = D(T_\varphi^*)$ ist T nach Bemerkung 3.10 normal.

Wir zeigen noch (i)–(iii). Dabei wurde (i) bereits gezeigt.

(ii) Es ist $f \in \ker T_\varphi$ genau dann, wenn $\varphi \cdot f = 0$ μ-fast überall. Dies ist äquivalent dazu, dass $f(z) = 0$ für μ-fast alle $z \in \varphi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$.

(iii) a) Sei T_φ in $L(L_2(\mu; W))$. Angenommen es gilt $\varphi \notin L_\infty(\mu)$. Dann existiert eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A_n) < \infty$ und $A_n \subset \{|\varphi| > n\}$. Wegen $A_n = A_n \cap \bigcup_{k=n+1}^\infty \{|\varphi| \le k\}$ sei o.E. $A_n \subset \{|\varphi| \le N\}$ für ein $N \in \mathbb{N}$.

Sei $x \in W \setminus \{0\}$. Dann ist $f_n := \chi_{A_n} x \in D_\varphi$ und

$$\|T_\varphi f_n\|^2 = \|x\|^2 \int\limits_{A_n} |\varphi|^2 d\mu \ge \|x\|^2 n^2 \mu(A_n) = n^2 \|f_n\|^2.$$

Damit gilt $\|T_\varphi\| \ge n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, Widerspruch.

b) Sei nun $\varphi \in L_\infty(\mu)$ und $f \in L_2(\mu; W)$. Dann ist

$$\|\varphi(z) f(z)\|_H \le \|\varphi\|_{L_\infty(\mu)} \|f(z)\|_H \qquad \text{für } \mu\text{-fast alle } z.$$

Damit erhalten wir $\varphi f \in L_2(\mu; W)$ und

$$\|T_\varphi f\|_{L_2(\mu;W)} = \|\varphi f\|_{L_2(\mu;W)} \le \|\varphi\|_{L_\infty(\mu)} \|f\|_{L_2(\mu;W)}.$$

$\square$

3.14 Lemma. *Sei T normal, und seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \sigma(T) \to \mathbb{C}$ messbar. Dann ist $(f \circ g)(T) = f(g(T))$.*

Beweis. Das ist ein Spezialfall des Transformationssatzes: Sei E das Spektralmaß von T. Dann ist das Bildmaß $E \circ g^{-1}$ ein PV-Maß auf $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, und für messbares $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int (f \circ g) dE = \int f d(E \circ g^{-1}).$$

Da $g(T)$ normal ist, existiert ein Spektralmaß F auf $\sigma(g(T))$ mit

$$f(g(T)) = \int f dF$$

für $f : \sigma(g(T)) \to \mathbb{C}$ messbar. Aus der Eindeutigkeit des Spektralmaßes folgt $F = E \circ g^{-1}$, d.h.

$$(f \circ g)(T) := \int (f \circ g) dE = \int f dF =: f(g(T)).$$

$\square$

3.15 Definition. Sei H ein Hilbertraum und T ein linearer Operator in H. Ein Element $x \in H$ heißt zyklischer Vektor von T, falls $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(T^n)$ gilt und $\operatorname{span}\{T^n x : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ dicht ist.

3.16 Satz. *Sei T normaler Operator in H und x ein zyklischer Vektor von T. Wie oben betrachte den Maßraum $(\sigma(T), \mathcal{B}(\sigma(T)), E_x)$ mit $E_x(A) := \|E(A)x\|^2 \quad (A \in \mathcal{B}(\sigma(T)))$. Dann existiert ein unitärer Operator $U \colon H \to L_2(E_x)$ mit*

$$(UTU^{-1}f)(t) = tf(t) \quad (E_x\text{-fast überall}).$$

Beweis. Eine messbare Funktion $f \colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $L_2(E_x)$, falls $x \in D(f(T))$. In diesem Falle ist

$$\int_{\sigma(T)} |f|^2 dE_x = \|f(T)x\|^2.$$

Also ist $\Phi : L_2(E_x) \to H,\ f \mapsto f(T)x$ eine Isometrie. Insbesondere ist $R(\Phi)$ abgeschlossen. Da $x \in D(T^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $\operatorname{span}\{T^n x\} \subset R(\Phi)$. Daher ist

$\Phi : L_2(E_x) \to H$ ein Isomorphismus. Das Inverse $U := \Phi^{-1}$ ist eine Isometrie mit $D(U) = H$ und surjektiv, also unitär.

Es gilt mit Verwendung von Lemma 3.14

$$T(\Phi(f)) = T(f(T)x) = (T \circ f(T))x = g(T)x = \Phi(g),$$

wobei $g(t) = t \cdot f(t)$ gilt. Somit ist

$$(UTU^{-1}f)(t) = t \cdot f(t) \quad (f \in L_2(E_x)),$$

wobei die Gleichheit in $L_2(E_x)$, also E_x-fast überall gilt. □

Die Multiplikationsoperatorform des Spektralsatzes setzt zyklische Vektoren voraus. Falls kein zyklischer Vektor des ganzen Hilbertraums existiert, wählt man eine Zerlegung, wie sie im nächsten Lemma beschrieben wird.

3.17 Lemma. *Sei H separabel und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert eine Zerlegung $H = \bigoplus_{i<N} H_i$ mit $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so dass $T(H_i) \subset H_i$ gilt und $T_i := T|_{H_i}$ einen zyklischen Vektor besitzt.*

Beweis. Der Beweis verwendet das Zornsche Lemma. Sei $\mathscr{H}$ die Menge aller höchstens abzählbaren Familien $(H_i)_{i<N}$ von paarweise orthogonalen Unterräumen H_i mit $T(H_i) \subset H_i$ und $H_i = \overline{\operatorname{span}\{T^n x_i : n \in \mathbb{N}\}}$ für ein $x_i \in H$. Dann ist $\mathscr{H} \neq 0$, denn $\{\{0\}\} \in \mathscr{H}$.

Sei $\mathscr{K}$ eine Kette in $\mathscr{H}$. Schreibe jedes Element in $\mathscr{K}$ in der Form $k = \{H_{ik} : i < N_k\}$. Dann ist

$$k_0 := \bigcup_{k \in \mathscr{K}} k = \{H_{ik} : i < N_k,\ k \in \mathscr{K}\} \in \mathscr{H},$$

denn k_0 enthält nur abzählbar viele verschiedene Unterräume H_{ik}, da H separabel ist und alle H_{ik} orthogonal sind. Alle H_{ik} sind T-invariant und besitzen einen zyklischen Vektor.

Nach Zorn existiert ein maximales Element h in $\mathscr{H}$. Setze $U := \overline{\operatorname{span} \bigcup_{K \in h} K}$. Falls $U \neq H$, so existiert ein $x \in U^\perp \setminus \{0\}$. Für $V := \overline{\operatorname{span}\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}}$ gilt dann $TV \subset V$, und x ist ein zyklischer Vektor von $T|_V$. Außerdem gilt (unter Verwendung der Selbstadjungiertheit von T) für jedes $K \in h$

$$\langle T^n x, y \rangle = \langle x, T^n y \rangle = 0 \quad (y \in K).$$

Dies gilt wegen $x \in U^\perp \subset K^\perp$ und der T-Invarianz von K. Somit ist h orthogonal zu jedem $K \in h$, und $h \cup \{V\}$ ist ein größeres Element als h, Widerspruch. Somit ist $U = H$. □

3.18 Satz (Spektralsatz in Multiplikationsoperatorform)**.** *Sei H ein komplexer Hilbertraum, $T\colon D(T) \to H$ ein selbstadjungierter Operator. Dann existiert ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, eine messbare Funktion $h\colon Z \to \mathbb{C}$ und ein Hilbertraum-Isomorphismus $U\colon H \to L_2(\mu)$ mit $UTU^{-1} = T_h$. Dabei ist T_h der in Satz 3.13 definierte Multiplikationsoperator. Falls H separabel ist, lässt sich μ endlich wählen.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur für den Fall eines separablen Hilbertraums H und eines beschränkten Operators T durch. Für beliebiges H und unbeschränktes T geht der Beweis ähnlich, man muss allerdings mehr technische Details berücksichtigen (oder man verwendet eine Transformation, z.B. $z \mapsto \frac{z}{1+|z|}$).

Sei also H separabel und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Sei $H = \bigoplus_{i<N} H_i$ die Zerlegung aus Lemma 3.17, und seien $U_i : H_i \to L_2(\mu_i)$, $h_i\colon \sigma(T_i) \to \mathbb{C}$ wie in Satz 3.16, so dass

$$U_i T_i U_i^{-1} f_i = h_i f_i \quad (f_i \in L_2(\mu_i)).$$

Wir definieren eine Art Summe dieser Maßräume und der Abbildungen U_i und h_i durch

$$\begin{aligned}
\Omega &:= \bigcup_{i<N} (\sigma(T_i) \times \{i\}) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{N}, \\
\mathcal{A} &:= \{A \subset \Omega : A \cap (\sigma(T_i) \times \{i\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{C})\}, \\
\mu(A) &:= \sum_{i<N} \mu_i(A \cap (\sigma(T_i) \times \{i\})) \quad (A \in \mathcal{A}), \\
h &: Z \to \mathbb{C},\ h((t,i)) := h_i(t), \\
U &: H \to L_2(\mu),\ U((x_i)_{i<N}) := (U_i x_i)_{i<N}.
\end{aligned}$$

Dann ist U unitär, und es gilt $UTU^{-1} f = hf$ für $f \in L_2(\mu)$. □

4. Operatorhalbgruppen

Dieses kurze Kapitel soll nur einen ersten Eindruck in die Theorie der Operatorhalbgruppen geben. Die Halbgruppen bilden nicht nur eine gute Darstellung etwa der Lösung einer Differentialgleichung, einige Eigenschaften können mit Hilfe der Halbgruppentheorie abstrakt und ohne aufwändige Rechnungen bewiesen werden. Hier sollen vor allem die unitären Gruppen und die starkstetigen Halbgruppen kurz behandelt werden. Der Zugang verwendet den aus dem Spektralsatz bekannten Funktionalkalkül. Sollte man Halbgruppen und Evolutionsgleichungen in Banachräumen betrachten, so ist der Dunford-Funktionalkalkül zu verwenden, der allerdings nicht Gegenstand dieser Vorlesung ist.

4.1 Satz. *Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T : D(T) \to H$ ein selbstadjungierter Operator. Definiere $U(t) := e^{itT}$ $(t \in \mathbb{R})$ durch den Funktionalkalkül. Dann gilt:*

a) $U(t)$ ist unitär, und es gilt $U(t + t') = U(t)U(t')$ $(t, t' \in \mathbb{R})$.

b) Die Abbildung $t \mapsto U(t)x$, $\mathbb{R} \to H$, ist stetig für jedes $x \in H$, d.h. die Familie $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ist starkstetig.

c) Für $x \in D(T)$ existiert $U'(0)x := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)x - x)$, und es gilt $U'(0)x = iTx$.

d) Für $x \in H$, für welches $U'(0)x$ existiert, gilt $x \in D(T)$.

e) Für $x \in D(T)$ gilt

$$\frac{1}{t}(U(t) - \mathrm{id}_H)U(s)x \overset{t\to 0}{\longrightarrow} U(s)iTx = iTU(s)x.$$

Insbesondere ist $U(s)x \in D(T)$ $(s \in \mathbb{R})$.

Dieser Satz hat folgende Bedeutung für die Lösung von Gleichungen, etwa Differentialgleichungen. In der obigen Situation definiere $y\colon \mathbb{R} \to D(T) \subset H$ durch $y(t) := U(t)x$. Dann ist y eine Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} -i\,\frac{d}{dt}\,y(t) &= Ty(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \\ y(0) &= x. \end{aligned}$$

Beweis. a) folgt direkt aus dem Funktionalkalkül.

b) Es gilt mit majorisierter Konvergenz

$$\|(U(t) - \mathrm{id}_H)x\|^2 = \int |e^{its} - 1|^2 dE_x(s) \;\longrightarrow 0 \quad (t \to 0).$$

Damit folgt

$$\|U(t)x - U(t_0)x\| \le \|U(t_0)\| \cdot \|(U(t - t_0) - \mathrm{id}_H)x\| \;\longrightarrow 0 \quad (t \to t_0).$$

c) Sei $x \in D(T)$. Dann ist

$$\left\| \frac{1}{t}(U(t)x - x) - iTx \right\|^2 = \int \left| \frac{1}{t}(e^{its} - 1) - is \right|^2 dE_x(s).$$

Es gilt $|\frac{1}{t}(e^{its} - 1)| \le s$, denn z.B. gilt $i \int_0^s e^{it\lambda} d\lambda = \frac{1}{t}(e^{its} - 1)$. Damit

$$\int \left| \left(\frac{1}{t} e^{its} - 1 \right) - is \right|^2 dE_x(s) \le \int 4s^2 dE_x(s) < \infty,$$

da $x \in D(T)$, d.h. $\mathrm{id}_{\sigma(T)} \in L_2(E_x)$. Wegen $\frac{1}{t}(e^{its} - 1) - is \to 0 \quad (t \to 0)$ folgt mit majorisierter Konvergenz

$$\left\| \frac{1}{t}(U(t) - \mathrm{id}_H)x - iTx \right\|^2 = \int \left| \left(\frac{1}{t} e^{its} - 1 \right) - is \right|^2 dE_x(s) \to 0 \quad (t \to 0).$$

d) Definiere den Operator S durch

$$\begin{aligned} D(S) &:= \left\{ x \in H : U'(0)x = \lim_{t \to 0} \frac{U(t)x - x}{t} \text{ existiert} \right\}, \\ Sx &:= -iU'(0)x \quad (x \in D(S)). \end{aligned}$$

Dann ist S linear, und wegen $D(S) \supset D(T)$ ist $D(S)$ dicht in H. Für $x, y \in D(S)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle Sx, y \rangle &= \left\langle -i \lim_{t \to 0} \frac{U(t) - \mathrm{id}_H}{t} x, y \right\rangle \\ &= \lim_{t \to 0} \left\langle -i \frac{U(t) - \mathrm{id}_H}{t} x, y \right\rangle \\ &= \left\langle x, i \lim_{t \to 0} \frac{U(-t) - \mathrm{id}_H}{t} y \right\rangle \\ &= \left\langle x, -i \lim_{t \to 0} \frac{U(t) - \mathrm{id}_H}{t} y \right\rangle \\ &= \langle x, Sy \rangle. \end{aligned}$$

Also ist S symmetrisch, d.h. es gilt $S \subset S^*$. Andererseits ist $S \supset T$ und damit $S^* \subset T^* = T \subset S$. Wir erhalten $S = T$, was d) zeigt.

e) folgt aus a) und c). Beachte dazu

$$\begin{aligned} y'(t_0) &= \frac{d}{dt} U(t)x|_{t=t_0} = \frac{d}{ds} U(t_0 + s)x|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} U(s)|_{s=0} U(t_0)x = U(t_0)U'(0)x = iTU(t_0)x \\ &= i\, Ty(t_0). \end{aligned}$$

□

4.2 Definition. Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum, $U\colon \mathbb{R} \to L(H)$ eine Abbildung mit den Eigenschaften a) und b) aus Satz 4.1. Dann heißt $U(\cdot)$ eine starkstetige einparametrige unitäre Gruppe.

Wir wollen zeigen, dass alle solchen Gruppen die Form e^{itT} mit einem selbstadjungierten Operator T haben. Dazu brauchen wir folgendes Lemma.

4.3 Lemma. *Sei $T\colon D(T) \to H$ ein Operator mit $\overline{D(T)} = H$. Dann sind äquivalent:*

(i) *T ist wesentlich selbstadjungiert, d.h. der Abschluss $\overline{T}$ ist selbstadjungiert.*

(ii) *T ist symmetrisch und $\ker(T^* \pm i) = \{0\}$.*

Beweis. Wir wissen aus Teil I der Vorlesung, dass für einen abgeschlossenen und symmetrischen Operator gilt: Es gilt genau dann $\ker(T^* \pm i) = R(T \pm i)^\perp = \{0\}$, falls T selbstadjungiert ist. □

4.4 Satz (von Stone)**.** *Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $U\colon \mathbb{R} \to L(H)$ eine starkstetige unitäre Gruppe. Dann existiert ein selbstadjungierter Operator $T : D(T) \to H$ mit $U(t) = e^{itT}$. Der Operator T heißt die infinitesimale Erzeugende von U. Es gilt*

$$D(T) = \Big\{x \in H : U'(0)x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)x - x) \in H \quad \textit{existiert}\Big\}$$

und

$$Tx = -i\,U'(0)x \quad (x \in D(T)).$$

Beweis. (i) Sei $f \in \mathscr{D} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt } \}$ und $x \in H$. Dann ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to H,\ t \mapsto f(t)U(t)x$ stetig mit kompaktem Träger. Es gilt $g(\mathbb{R}) = \overline{g(\mathbb{Q})}$, d.h. $g(\mathbb{R}) \subset H$ ist separabel. Wegen $\|g(t)\| = |f(t)| \cdot \|x\|$ ist g integrierbar bezüglich des Lebesgue-Maßes, d.h.

$$x_f := \int_{\mathbb{R}} g(t)dt = \int f(t)U(t)xdt \in H$$

existiert. Sei $D := \operatorname{span}\{x_f : f \in \mathscr{D},\ x \in H\}$.

(ii) Es gilt $\overline{D} = H$. Dazu wählen wir $\psi \in \mathscr{D}$ mit $\psi \geq 0$, $\operatorname{supp}\psi \in [-1,1]$ und $\int \psi(t)dt = 1$. Derartige Funktionen gibt es, man wähle etwa

$$\psi(t) = C\exp\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\chi_{(-1,1)}(t)$$

mit einer geeignet gewählten Konstanten C. Für $\varepsilon > 0$ sei $\psi_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon}\psi(\frac{t}{\varepsilon})$. Dann ist $\operatorname{supp}\psi_\varepsilon \subset [-\varepsilon,\varepsilon]$ und $\int \psi_\varepsilon(t)dt = 1$.

Für $x \in H$ gilt

$$\|x_{\psi_\varepsilon} - x\| = \Big\| \int \psi_\varepsilon(t)(U(t)x - x)dt \Big\| \leq \sup_{|t|\leq\varepsilon} \|U(t)x - x\| \cdot \int \psi_\varepsilon(t)dt \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

(iii) (Definition des Operators S) Es gilt

$$U(s)x_f = U(s)\int f(t)U(t)xdt = \int f(t)U(t+s)xdt = \int f(t-s)U(t)xdt,$$

wobei die Transformation $t \to t - s$ verwendet wurde. Es gilt

$$\Big|\frac{1}{s}(f(t-s) - f(t))\Big| = \Big| -\frac{1}{s}\int_0^s f'(t-\tau)d\tau\Big| \leq \Big|\frac{1}{s}\, s\Big| \sup_{\tau\in\mathbb{R}} |f'(\tau)|.$$

Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz ist

$$\frac{1}{s}(U(s) - \mathrm{id}_H)x_f = \int \frac{f(t-s) - f(t)}{s}\, U(t)xdt \xrightarrow{s\to 0} \int (-f')(t)U(t)xdt.$$

Definiere nun den linearen Operator S durch $D(S) := D$ und

$$Sx_f := \lim_{s\to 0} \frac{1}{is}(U(s) - \mathrm{id}_H)x_f = \frac{1}{i}\, x_{-f'}.$$

(iv) (Eigenschaften von S) Es gilt $\overline{D(S)} = H$, $U(t)D(S) \subset D(S) \quad (t \in \mathbb{R})$, $S(D(S)) \subset D(S)$ und $U(t)Sx = SU(t)x$ für $t \in \mathbb{R},\ x \in D(S)$. Alles dies gilt nach Konstruktion von S.

S ist symmetrisch: Seien $x, y \in D(S)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle x, Sy\rangle &= \lim_{s\to 0}\Big\langle x, \frac{1}{is}(U(s) - \mathrm{id}_H)y\Big\rangle = \lim_{s\to 0}\Big\langle -\frac{1}{is}(U(-s) - \mathrm{id}_H)x, y\Big\rangle \\ &= \lim_{s\to 0}\Big\langle \frac{1}{is}(U(s) - \mathrm{id}_H)x, y\Big\rangle = \langle Sx, y\rangle.\end{aligned}$$

S ist wesentlich selbstadjungiert: Sei $y \in \ker(S^* - i)$. Dann gilt für $x \in D(S)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle U(t)x, y\rangle &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\big(\langle U(t+s)x, y\rangle - \langle U(t)x, y\rangle\big) \\ &= \lim_{s\to 0}\Big\langle \frac{U(s) - \mathrm{id}_H}{s}\, U(t)x, y\Big\rangle = \langle iSU(t)x, y\rangle \\ &= \langle iU(t)x, S^*y\rangle \overset{(*)}{=} \langle iU(t)x, iy\rangle = \langle U(t)x, y\rangle.\end{aligned}$$

An der Stelle $(*)$ wurde verwendet, dass $y \in \ker(S^* - i)$ war. Damit erfüllt die Funktion $f(t) := \langle U(t)x, y\rangle$ die Differentialgleichung $f' = f$, d.h. $f(t) = f(0)e^t$. Wegen

$$|f(t)| \le \|U(t)x\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\|$$

ist f beschränkt und damit $f = 0$.

Also haben wir $\langle x, U(t)^*y\rangle = \langle U(t)x, y\rangle = 0$ für alle $x \in D(S)$, d.h. $\|y\| = \|U(t)^*y\| = 0$. Wir haben gezeigt, dass $\ker(S^* - i) = \{0\}$. Genauso sieht man $\ker(S^* + i) = \{0\}$. Nach Lemma 4.3 ist S wesentlich selbstadjungiert.

(v) (Definition von T) Sei $T := \overline{S}$. Dann ist T nach (iv) selbstadjungiert. Setze $V := e^{itT}$. Zu zeigen ist noch $U(t) = V(t) \quad (t \in \mathbb{R})$.

Falls $x \in D(S) \subset D(T)$, so gilt $V'(t)x = iTV(t)x$ nach Satz 4.1 und $U'(t)x = iSU(t)x$ nach (iv). Für $w(t) := U(t)x - V(t)x$ erhalten wir

$$w'(t) = iSU(t)x - iTV(t)x = iTw(t)$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 = \langle w'(t), w(t)\rangle + \langle w(t), w'(t)\rangle = i\Big[-\langle Tw(t), w(t)\rangle + \langle w(t), Tw(t)\rangle\Big] = 0.$$

Wegen $w(0) = (U(0) - V(0))x = 0$ folgt daraus $w = 0$, d.h. $U(t)x = V(t)x$ für alle $x \in D(S)$ und $t \in \mathbb{R}$. Da $D(S)$ dicht in H ist, folgt $U(t) = V(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Bisher betrachteten wir unitäre Gruppen. In vielen Fällen besteht der Indexbereich nur aus dem halboffenen Intervall $[0, \infty)$, und die Operatoren bilden eine Halbgruppe.

4.5 Definition. Sei E ein Banachraum, $Q\colon [0,\infty) \to L(E)$ eine Abbildung mit

(i) $Q(0) = \mathrm{id}_E$,

(ii) $Q(s+t) = Q(s)Q(t) \quad (s, t \ge 0)$,

(iii) $\lim_{t\to 0} Q(t)x = x \quad (x \in E)$.

Dann heißt Q eine starkstetige Halbgruppe.

Der folgende Satz wird nicht bewiesen. Es handelt sich um das Analogon des Satzes von Stone für den Fall einer Halbgruppe. Die Beweise sind ähnlich wie beim Satz von Stone, allerdings haben wir keinen Hilbertraum und damit keinen Funktionalkalkül zur Verfügung.

4.6 Satz. *Sei Q eine starkstetige Halbgruppe in einem Banachraum E. Definiere*

$$D(T) := \left\{ x \in E : Q'(0)x := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(Q(t)x - x) \in E \;\; \textit{existiert} \right\}$$

und $Tx := Q'(0)x \quad (x \in D(T))$. Dann ist T dicht definiert, und für $x \in D(T)$ ist $y\colon [0,\infty) \to E$, $y(t) := Q(t)x$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= Ty(t) \quad (t > 0), \\ y(0) &= x. \end{aligned}$$

Falls E ein Hilbertraum ist und $Q(t)$ normal ist für alle $t \geq 0$, so ist auch T normal, und es gilt $Q(t) = e^{tT} \quad (t \geq 0)$.

5. Ein kurzer Ausflug in die Quantenmechanik

Dieser kurze Abschnitt ist der letzte, der sich mit dem Spektralsatz im weiteren Sinne beschäftigt. Mit den bisher behandelten Begriffen und Methoden haben wir schon alles zur Verfügung, um die Quantentheorie zu formulieren. Die Operatortheorie ist das wichtigste Hilfsmittel, um quantenmechanische Aussagen zu beweisen. Hier findet auch das Spektrum eines Operators eine Interpretation. In diesem Abschnitt sollen vor allem Begriffe geklärt werden.

5.1 Definition. Ein quantenmechanisches System ist beschrieben durch folgende Größen:

(i) Der Zustandsraum ist ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum H. Die Menge

$$H_1 := \{\psi \in H : \|\psi\| = 1\}$$

heißt die Menge der reinen Zustände.

(ii) Eine Observable ist ein selbstadjungierter Operator in H (oder äquivalent dazu, ein PV-Maß E). Beispiele sind der Ort X, der Impuls P, der Drehimpuls J, die Energie H und der Spin σ.

(iii) Sei S eine Observable mit Spektralmaß E. Falls das System im Zustand $\psi \in H_1 \cap D(S)$ ist, dann heißt $\langle \psi, S\psi\rangle \in \mathbb{R}$ der Erwartungswert der Observable S im Zustand ψ.

Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist

$$\langle \psi, E(A)\psi\rangle = \|E(A)\psi\|^2 = E_\psi(A) \in [0, 1]$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Messung von S der gemessene Wert in der Menge A liegt.

5.2 Bemerkung. Nach den obigen Definitionen und unter Verwendung des Spektralsatzes gilt

$$\langle \psi, S\psi\rangle = \Big\langle \psi, \int_{\sigma(S)} \mathrm{id}_{\sigma(S)}\, dE\psi \Big\rangle = \int_{\sigma(S)} \mathrm{id}_{\sigma(S)}\, dE_\psi = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\psi(\lambda).$$

Damit stimmt der Begriff des Erwartungswertes aus Definition 5.1 (iii) mit dem üblichen Begriff des Erwartungswertes aus der Stochastik überein (wobei hier das Maß durch E_ψ gegeben ist).

5.3 Beispiel (Ortsobservable)**.** Hier ist $H = L_2(\mathbb{R})$. Die Ortsobservable X ist definiert durch

$$(X\psi)(x) := x\psi(x),$$

d.h. $X = T_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ ist der Multiplikationsoperator aus Abschnitt 3. Wie in Satz 3.13 ist

$$D(X) = \Big\{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \int x^2|\psi(x)|^2 dx < \infty\Big\}.$$

Nach Satz 3.13 ist X selbstadjungiert. Es gilt für das zugehörige Spektralmaß

$$(E(A)\psi)(x) = \chi_A(x) \cdot \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R};\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Dies wurde (unter Verwendung von Spektralscharen) in den Übungen zu Teil 1 der Vorlesung gezeigt. Damit ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Gebiet $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$\langle\psi, E(A)\psi\rangle = E_\psi(A) = \int_A |\psi(x)|^2 dx.$$

Damit ist $|\psi(\cdot)|^2$ die Aufenthaltsdichte des Teilchens, d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung hat $|\psi(\cdot)|^2$ als Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes.

Man spricht von der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion in der Ortsdarstellung nach Schrödinger.

5.4 Beispiel (Impulsobservable)**.** Wieder ist $H = L_2(\mathbb{R})$. Definiere die Abbildung

$$U\colon \mathbb{R} \to L(H),\ (U(a)\psi)(x) = \psi(x-a).$$

Dann ist U eine starkstetige unitäre Gruppe (die starke Stetigkeit müsste man noch nachrechnen). Nach dem Satz von Stone existiert ein eindeutiger Operator P mit $U(a) = e^{-iaP/\hbar}$. Dabei ist $\hbar$ eine Konstante, das Planksche Wirkungsquantum. Die Konstanten $\hbar$ und das Minus-Zeichen sind (aus mathematischer Sicht) nur Konvention.

Für $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\frac{1}{a}(U(a) - \mathrm{id}_H)\psi(x) = \frac{1}{a}(\psi(x-a) - \psi(x)) \to -\psi'(x) \quad (a \to 0)$$

punktweise und – mit majorisierter Konvergenz – auch in $L_2(\mathbb{R})$. Damit ist P gegeben durch

$$\begin{aligned} D(P) &:= \Big\{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \psi' := \lim_{a\to 0} \frac{\psi(\cdot - a) - \psi(\cdot)}{a} \text{ existiert in } L_2(\mathbb{R})\Big\}, \\ P\psi &:= \frac{\hbar}{i}\,\psi' \quad (\psi \in D(P)). \end{aligned}$$

Wenn man den Begriff der Ableitung allgemeiner gefasst hat (was im Abschnitt über Distributionen in dieser Vorlesung der Fall sein wird), so kann man sehen, dass

$$D(P) = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \psi' \in L_2(\mathbb{R})\} =: H^1(\mathbb{R}).$$

Dabei ist $H^1(\mathbb{R})$ der sogenannte Sobelevraum der Ordnung 1.

5.5 Lemma (Kanonische Vertauschungsrelationen nach Heisenberg)**.** *Für die Ortsvariable X und die Impulsvariable P gilt*

$$XP - PX \subset \hbar i \ \mathrm{id}_{L_2(\mathbb{R})} .$$

Beweis. Für $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$[(XP - PX)\psi](x) = x \,\frac{\hbar}{i}\, \psi'(x) - \frac{\hbar}{i}\, \psi(x) - \frac{\hbar}{i}\, x\psi'(x) = \hbar i \psi(x).$$

Damit gilt

$$XP - PX|_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} = \hbar i \ \mathrm{id}_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} .$$

Sei $A := \frac{1}{\hbar i}(XP - PX)$. Dann ist A symmetrisch, d.h. es gilt $A \subset A^*$, und $\mathrm{id}_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} = A|_{\mathscr{D}(\mathbb{R})} \subset A \subset A^*$. Damit erhalten wir

$$A \subset \overline{A} = A^{**} \subset \Big(\mathrm{id}_{\mathscr{D}(\mathbb{R})}\Big)^* = \Big(\overline{\mathrm{id}_{\mathscr{D}(\mathbb{R})}}\Big)^* = (\mathrm{id}_{L_2(\mathbb{R})})^* = \mathrm{id}_{L_2(\mathbb{R})} .$$

□

Im folgenden vereinfachen wir die Darstellung, indem wir $\hbar = 1$ wählen.

5.6 Lemma (Kanonische Vertauschungsrelationen nach Weyl)**.** *Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$*

$$e^{iaP} e^{ibX} = e^{iba}\, e^{ibX} e^{iaP}.$$

Beweis. Der Operator $e^{ibX} \in L(H)$ ist der Multiplikationsoperator mit der Funktion $t \mapsto e^{ibt}$. Außerdem gilt $(e^{iaP}\psi)(x) = \psi(x + a)$. Somit gilt

$$(e^{iaP} e^{ibX} \psi)(x) = (e^{ibX} \psi)(x + a) = e^{ib(x+a)} \psi(x + a)$$

und

$$(e^{ibX} e^{iaP} \psi)(x) = e^{ibx} \psi(x + a).$$

□

5.7 Definition. Sei S eine Observable und $\psi \in H_1 \cap D(S)$ ein reiner Zustand. Der Erwartungswert von S im Zustand ψ wird geschrieben als

$$\langle S\rangle_\psi := \langle \psi, S\psi\rangle \ \Big(= \int s dE_\psi(s)\Big).$$

Für $\psi \in D(S^2) \subset D(S)$ ist die Varianz von S im Zustand ψ definiert als

$$\mathrm{var}_\psi S := \Big\langle \psi, (S - \langle S\rangle_\psi \,\mathrm{id}_H)^2 \psi \Big\rangle \ \Big(= \int (s - \langle S\rangle_\psi)^2 dE_\psi(s)\Big).$$

Die Größe $(\Delta S)_\psi := \sqrt{\mathrm{var}_\psi S}$ heißt die Standardabweichung oder Unschärfe von S im Zustand ψ.

5.8 Lemma. *In der Situation von Defintion 5.7 gilt $(\Delta S)_\psi = 0$ genau dann, wenn ψ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda_0 := \langle S\rangle_\psi$ ist.*

Beweis. Die folgenden Bedingungen sind alle äquivalent:

$$\begin{aligned}
&(\Delta S)_\psi = 0,\\
&\int (s-\lambda_0)^2 dE_\psi(s) = 0,\\
&S = \lambda_0 \quad E_\psi\text{-fast überall},\\
&E_\psi(\{\lambda_0\}) = \mathrm{id}_H,\\
&\psi \in R(E\{\lambda_0\}),\\
&\psi \in \ker(S-\lambda_0).
\end{aligned}$$

□

5.9 Satz (Heisenbergsche Unschärferelation)**.** *Seien A, B Observable und sei $\psi \in D(A^2)\cap D(AB)\cap D(BA)\cap D(B^2)$. Dann gilt*

$$(\Delta A)_\psi(\Delta B)_\psi \geq \frac{1}{2}\langle C\rangle_\psi \qquad \textit{mit } C := \frac{1}{i}(AB-BA).$$

Speziell folgt für die Orts- und Impulsobservable:

$$(\Delta X)_\psi(\Delta P)_\psi \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\psi \in H_1 \cap D(X^2)\cap D(P^2)).$$

Beweis. Sei $a := \langle A\rangle_\psi$, $b := \langle B\rangle_\psi$, $A_0 := A - a$ und $B_0 := B - b$. Dann ist

$$A_0B_0 - B_0A_0 = AB - BA = iC$$

und

$$\|A_0\psi\| = \langle \psi, A_0^2\psi\rangle^{1/2} = (\Delta A)_\psi.$$

Analog gilt $\|B_0\psi\| = (\Delta B)_\psi$. Wir haben

$$2i\,\mathrm{Im}\langle A_0\psi, B_0\psi\rangle = \langle A_0\psi, B_0\psi\rangle - \langle B_0\psi, A_0\psi\rangle = \langle \psi, (A_0B_0 - B_0A_0)\psi\rangle = -i\langle\psi, C\psi\rangle.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(\Delta A)_\psi(\Delta B)_\psi &= \|A_0\psi\|\cdot\|B_0\psi\| \geq \big|\langle A_0\psi, B_0\psi\rangle\big|\\
&\geq \big|\,\mathrm{Im}\langle A_0\psi, B_0\psi\rangle\big| \geq \frac{1}{2}\big|\langle\psi, C\psi\rangle\big| \geq \frac{1}{2}\langle C\rangle_\psi.
\end{aligned}$$

Der Spezialfall folgt aus Lemma 5.5. □

5.10 Beispiel (Schrödinger-Gleichung)**.** Sei E ein Hilbertraum, $H : D(H) \to E$ ein selbstadjungierter Operator (der sogenannte Hamilton-Operator). Dann wird die Zeitentwicklung eines Zustands $\psi_0 = \psi(0)$ gegeben durch die unitäre Gruppe $U(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}$. D.h. wenn ψ_0 der Zustand zur Zeit $t = 0$ ist, so ist $\psi(t) := U(t)\psi_0$ der Zustand zur Zeit t.

Für $\psi_0 \in D(H)$ gilt nach Satz 4.1

$$\begin{aligned} -i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) &= H\ \psi(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \psi(0) &= \psi_0. \end{aligned}$$

Dies ist die Schrödinger-Gleichung zum Hamilton-Operator H.

a) Freies eindimensionales Teilchen: Hier ist $H = \frac{1}{2m}P^2$, wobei $m > 0$ die Masse des Teilchens ist. Für $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \frac{1}{2m}s^2$ gilt nach dem Funktionalkalkül $H = h(P)$. Für $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ ist der Operator H gegeben durch

$$H\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\ \psi''(x).$$

b) Eindimensionaler harmonischer Oszillator: Hier ist der Hamilton-Operator H_0 gegeben durch

$$H_0 := \frac{1}{2m}\ P^2 + \frac{mw^2}{2}\ X^2,$$

d.h. für $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ ist

$$H_0\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\ \psi''(x) + \frac{mw^2}{2}\ x^2\psi(x).$$

Die Operatoren X, P und H in a) haben rein kontinuierliches Spektrum, für den Operator H_0 gilt

$$\sigma(H_0) = \sigma_P(H_0) = \Big\{\hbar w\Big(n + \frac{1}{2}\Big) : n \in \mathbb{N}_0\Big\}.$$

Eigenfunktionen sind die Hermite-Funktionen

$$h_n(x) := \mathrm{const} \cdot e^{x^2/2}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n e^{-x^2}.$$

Diese bilden eine Orthonormalbasis von $L_2(\mathbb{R})$.

6. Lokalkonvexe Räume

Bisher haben wir Konvergenz in normierten Räumen oder in einer schwachen Topologie kennengelernt. Andererseits kennen wir wichtige Konvergenzbegriffe, z.B. die punktweise Konvergenz, die damit noch nicht erfasst wurden. Daher müssen wir allgemeinere Räume als normierte Räume betrachten, die lokalkonvexen Räume. Die Konvergenz wird jetzt durch eine Familie von Seminormen definiert. So bedeutet die punktweise Konvergenz in $C([0,1])$ gegen 0 bedeutet die gleichzeitige Konvergenz aller Seminormen $p_t(f) := |f(t)|$ gegen 0. Die Theorie lokalkonvexer Räume liefert auch die Grundlage für die Distributionen, welche eine bedeutende Rolle bei Differentialgleichungen spielen.

6.1 Definition. a) Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und τ eine Topologie auf X. Dann heißt (X, τ) ein topologischer Vektorraum, falls die Addition und Skalarmultiplikation stetig sind.

b) Sei X ein Vektorraum und $\mathscr{P}$ eine Familie von Seminormen auf X. Für $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$ und $\varepsilon > 0$ definiere

$$U_{\mathscr{F},\varepsilon} := \{x \in X \mid \forall\, p \in \mathscr{F} : p(x) \le \varepsilon\}.$$

Sei $\tau_0 := \{U_{\mathscr{F},\varepsilon} : \mathscr{F} \subset \mathscr{P} \text{ endlich}, \varepsilon > 0\}$. Definiere weiter

$$\tau_{\mathscr{P}} := \{U \subset X : \forall\, x \in U\; \exists\, U_0 \in \tau_0 : x + U_0 \subset U\}.$$

(Später werden wir sehen, dass τ tatsächlich eine Topologie ist.)

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt ein lokalkonvexer Raum, falls eine Familie $\mathscr{P}$ von Seminormen auf X existiert, so dass τ mit der oben beschriebenen Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$ übereinstimmt.

6.2 Bemerkung. In der Situation von Definition 6.1 gilt

a) $0 \in U$ für alle $U \in \tau_0$.

b) Zu $U_1, U_2 \in \tau_0$ existiert ein $U \in \tau_0$ mit $U \subset U_1 \cap U_2$ (nämlich $U = U_{\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}$).

c) Zu $U \in \tau_0$ existiert $V \in \tau_0$ mit $V + V \subset U$ (nämlich $V = U_{\mathscr{F},\varepsilon/2}$).

d) Alle $U \in \tau_0$ sind absorbierend, d.h. es gilt

$$\forall\, x \in X\; \exists\, \lambda > 0 : x \in \lambda U.$$

Denn es gilt $x \in \lambda U_{\mathscr{F},\varepsilon}$, falls $\lambda > \frac{1}{\varepsilon} \max_{p \in \mathscr{F}} p(x)$.

e) Zu $U \in \tau_0$ und $\lambda > 0$ existiert ein $V \in \tau_0$ mit $\lambda V \subset U$ (nämlich $V = U_{\mathscr{F},\varepsilon/\lambda}$).

f) Jedes $U \in \tau_0$ ist kreisförmig, d.h.

$$\{\lambda : |\lambda| \le 1\} \cdot U \subset U,$$

und absolutkonvex, d.h.

$$\forall\, x, y \in U,\ |\alpha| + |\beta| \le 1:\ \alpha x + \beta y \in U.$$

6.3 Lemma. *Sei $\mathscr{P}$ eine Familie von Seminormen, und seien $\tau_{\mathscr{P}}$ und τ_0 wie in Definition 6.1.*

a) $\tau_{\mathscr{P}}$ ist eine Topologie auf X, und τ_0 ist ein Nullumgebungsbasis.

b) $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ ist ein topologischer Vektorraum.

Beweis. a) $\emptyset, X$ sind offen. Seien $U_1, U_2 \in \tau_{\mathscr{P}}$ und $x \in U_1 \cap U_2$. Dann existieren $U_{10}, U_{20} \in \tau_0$ mit $x + U_{i0} \subset U_i$. Wähle nach Bemerkung 6.2 b) $U_0 \in \tau_0$ mit $U_0 \subset U_{10} \cap U_{20}$. Dann ist $x + U_0 \subset U_1 \cap U_2$, d.h. $U_1 \cap U_2$ ist offen.

Sei I eine Menge, $U_i \in \tau_{\mathscr{P}}$ $(i \in I)$, und $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann existiert ein $i_0 \in I$ und $U \in \tau_0$ mit $x + U \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, d.h. $\bigcup_{i\in I} U_i$ ist offen.

b) (i) Sei $W \in \tau_{\mathscr{P}}$ und $U := \{(x, y) \in X \times X : x + y \in W\}$. Zu zeigen ist, dass U offen ist bezüglich der Produkttopologie.

Sei $(x, y) \in U$. Wähle $U_0 \in \tau_0$ mit $x + y + U_0 \subset W$. Wähle weiter nach Bemerkung 6.3 c) ein $V \in \tau_0$ mit $V + V \subset U_0$. Dann ist $(x + V) \times (y + V) \subset U$, d.h. U ist offen.

(ii) Sei $W \in \tau_{\mathscr{P}}$ und $U := \{(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X : \lambda x \in W\}$. Sei $(\lambda, x) \in U$. Wähle $U_0 \in \tau_0$ mit $\lambda x + U_0 \subset W$. Dann existiert ein $V \in \tau_0$ mit $V + V \subset U_0$ nach 6.2 c) und ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon x \in V$ nach 6.2 d). Da V kreisförmig ist (6.2 f)), gilt $(\mu - \lambda)x \in V$ falls $|\mu - \lambda| < \varepsilon$.

Wähle $\widetilde{V} \in \tau_0$ mit $\mu\widetilde{V} \subset V$, falls $|\mu| \le |\lambda| + \varepsilon$ (6.2 e,f)). Für $|\lambda - \mu| < \varepsilon$ und $v \in \widetilde{V}$ gilt

$$\mu(x + v) - \lambda x = (\mu - \lambda)x + \mu v \in V + V \subset U_0.$$

Damit ist $\{\mu \in \mathbb{K} : |\lambda - \mu| < \varepsilon\} \times (x + \widetilde{V}) \subset U$, d.h. U ist offen. □

6.4 Beispiele. a) Sei T eine Menge, X eine Familie von Funktionen $x\colon T \to \mathbb{K}$. Dann ist $p_t(x) := |x(t)|$ eine Seminorm, und $\mathscr{P} := \{p_t : t \in T\}$ erzeugt die Topologie der punktweisen Konvergenz.

b) Sei T ein topologischer Raum und $X \subset C(T)$ ein Vektorraum. Dann ist für jede kompakte Menge $K \subset T$ durch $p_K(x) := \sup_{t\in K} |x(t)|$ eine Seminorm gegeben. Die von $\mathscr{P} := \{p_K : K \subset T,\ K \text{ kompakt}\}$ erzeugte Topologie heißt die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta.

c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X = C^\infty(\Omega)$. Im folgenden verwenden wir die übliche Multiindex-Schreibweise

$$D^\alpha \varphi(x) := \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n} \varphi(x), \qquad \text{für } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n.$$

Für $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ definiere

$$p_{K,\alpha}(\varphi) := \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|$$

für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann ist $p_{K,\alpha}$ eine Seminorm, und

$$\mathscr{P} := \{p_{K,\alpha} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ K \subset \Omega,\ K \text{ kompakt}\}$$

erzeugt eine lokalkonvexe Topologie auf $C^\infty(\Omega)$. Versieht man $C^\infty(\Omega)$ mit dieser Topologie, so schreibt man $\mathscr{E}(\Omega)$.

d) Sei wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $K \subset \Omega$ kompakt. Setze

$$\mathscr{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} \varphi \subset K\}.$$

Dann wird durch $p_\alpha(\varphi) := \sup_{x \in K} |(D^\alpha \varphi)(x)|$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, eine Familie von Seminormen definiert und damit eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$.

e) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Definiere

$$\mathscr{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} \varphi \text{ kompakt}\} = \bigcup_{\substack{K \subset \Omega \\ K \text{ kompakt}}} \mathscr{D}_K(\Omega).$$

Sei für $K \subset \Omega$, K kompakt, τ_K die in d) definierte Topologie auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$. Setze

$$\mathscr{P} := \{p : \mathscr{D}(\Omega) \to [0, \infty) \mid p \text{ Seminorm },\ \forall\, K \subset \Omega \text{ kompakt} : p|_{\mathscr{D}_K} \text{ stetig bzgl. } \tau_K\}.$$

Dann erzeugt $\mathscr{P}$ eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathscr{D}(\Omega)$.

f) Sei X ein normierter Raum. Dann erzeugen die Seminormen

$$p_f(x) := |f(x)| \quad (f \in X')$$

die schwache Topologie auf X.

Auf dem Dualraum X' erzeugen die Seminormen

$$p_x(f) := |f(x)| \quad (x \in X)$$

die schwach-*-Topologie.

g) Seien X und Y normierte Räume. Dann erzeugt die Familie

$$p_x(T) := \|Tx\| \quad (x \in X),$$

die starke Operatortopologie auf $L(X, Y)$, und

$$p_{x,f}(T) := |f(Tx)| \quad (x \in X, f \in Y')$$

die schwache Operatortopologie auf $L(X, Y)$.

6.5 Definition (Schwartz-Raum)**.** Der Vektorraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ besteht aus allen Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für welche gilt:

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ \forall\, m \in \mathbb{N}_0 : p_{\alpha,m}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)|D^\alpha f(x)| < \infty.$$

Dabei ist $|x| := (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$. Der Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt Schwartz-Raum oder der Raum der schnell fallenden Funktionen. Durch die Familie $\mathscr{P} := \{p_{\alpha,m} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ m \in \mathbb{N}_0\}$ wird $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ zu einem lokalkonvexen Vektorraum.

6.6 Lemma. *Die Familie $\mathscr{P}$ von Seminormen erzeuge die lokalkonvexe Topologie τ auf X. Dann sind äquivalent:*

(i) *(X, τ) ist Hausdorff-Raum.*

(ii) *Zu $x \in X \setminus \{0\}$ existiert ein $p \in \mathscr{P}$ mit $p(x) \neq 0$.*

(iii) *Es gibt eine Nullumgebungsbasis τ_0 mit $\bigcap_{U\in\tau_0} = \{0\}$.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii). Zu $x \neq 0$ wähle Nullumgebungen U und V mit $(x+U)\cap V = \emptyset$. O.E. sei $V = U_{\mathscr{F},\varepsilon}$ für eine endliche Teilmenge $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$, $\varepsilon > 0$. Wegen $x \notin V$ gilt $p(x) \neq 0$ für ein $p \in \mathscr{F}$.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii). Es gilt $x \in \bigcap_{U\in\tau_0} U = \bigcap_{\mathscr{F},\varepsilon} U_{\mathscr{F},\varepsilon}$ genau dann, wenn für alle $p \in \mathscr{P}$ gilt $p(x) = 0$.

(iii)$\Longrightarrow$ (i). Sei $x \neq y$. Wähle $U \in \tau_0$ mit $x - y \notin U$. Da $(x, y) \mapsto x - y$ stetig ist, existieren Nullumgebungen V und W mit $W - V \subset U$. Damit ist $(x+V)\cap(y+W) = \emptyset$. □

6.7 Satz. *Ein topologischer Vektorraum (X, τ) ist genau dann lokalkonvex, wenn es eine Nullumgebungsbasis τ_0 aus absolutkonvexen absorbierenden Mengen gibt. Genauer ist in diesem Fall τ die von den Minkowski-Funktionalen*

$$p_U(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\} \quad (U \in \tau_0)$$

erzeugte lokalkonvexe Topologie.

Beweis. a) Falls (X, τ) lokalkonvex ist, ist τ_0 aus Definition 6.1 ein solche Nullumgebungsbasis nach 6.2 d) und f).

b) Sei τ_0 eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen und absorbierenden Mengen.

(i) Da $U \in \tau_0$ absorbierend ist, ist $p_U(x) < \infty \quad (x \in X)$.

(ii) Wir zeigen, dass p_U sublinear ist, d.h. dass gilt

$$\begin{aligned} p_U(\lambda x) &= \lambda p_U(x) \quad (\lambda \geq 0,\ x \in X), \\ p_U(x+y) &\leq p_U(x) + p_U(y) \quad (x, y \in X). \end{aligned}$$

Die erste Zeile ist klar. Zu $x, y \in X$ und $\varepsilon > 0$ wähle $\lambda, \mu > 0$ mit $\lambda \leq p_U(x) + \varepsilon$, $\mu \leq p_U(y) + \varepsilon$, $\frac{x}{\lambda} \in U$ und $\frac{y}{\mu} \in U$. Dann ist

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{y}{\mu} = \frac{x+y}{\lambda+\mu} \in U,$$

da U absolutkonvex und damit konvex ist. Somit gilt

$$p_U(x+y) \leq \lambda + \mu \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon.$$

Da ε beliebig war, erhalten wir $p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y)$.

(iii) Es gilt $p_U(\lambda x) = |\lambda| p_U(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K})$. Dies gilt nach (ii) für $\lambda \geq 0$, also sei o.E. $|\lambda| = 1$. Da U absolutkonvex und damit kreisförmig ist, gilt $\lambda U = U$, und damit $p_U(\lambda x) = p_{\lambda U}(\lambda x)$.

(iv) Nach (ii) und (iii) ist p_U eine Seminorm. Sei $\widetilde{\tau}$ die von $\{p_U : U \in \tau_0\}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie. Dann kann man direkt nachrechnen, dass $\widetilde{\tau} = \tau$. □

Im folgenden schreiben wir stets $\tau_{\mathscr{P}}$, falls die lokalkonvexe Topologie von der Familie $\mathscr{P}$ von Seminormen erzeugt wird.

6.8 Lemma. *Sei $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ ein lokalkonvexer Raum.*

a) Für eine Seminorm $q : X \to [0, \infty)$ sind äquivalent:

(i) *q ist stetig.*

(ii) *q ist stetig bei 0.*

(iii) *$\{x : q(x) \leq 1\} = q^{-1}([0,1])$ ist eine Nullumgebung.*

b) Alle $p \in \mathscr{P}$ sind stetig.

c) Eine Seminorm q ist genau dann stetig, wenn $M \geq 0$ und $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$, $\mathscr{F}$ endlich, existieren mit $q(x) \leq M \max_{p \in \mathscr{F}} p(x)$.

Beweis. a) (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) ist trivial. (iii) $\Longrightarrow$ (i). Zu $x \in X$, $\varepsilon > 0$ sei $U := \varepsilon q^{-1}([0,1]) = q^{-1}([0,\varepsilon])$. Dann gilt für $y \in U$

$$|q(x+y) - q(x)| \leq q((x+y) - x) = q(y) \leq \varepsilon,$$

d.h. $q(x+U) \subset [q(x)-\varepsilon, q(x)+\varepsilon]$. Somit ist q stetig.

b) Nach Definition von $\tau_{\mathscr{P}}$ ist $\{x : p(x) \le 1\}$ für alle $p \in \mathscr{P}$ eine Nullumgebung.

c) Nach a) ist q genau dann stetig, wenn gilt

$$\exists\, \varepsilon > 0, \mathscr{F} \subset \mathscr{P},\ \mathscr{F} \text{ endlich} : U_{\mathscr{F},\varepsilon} \subset q^{-1}([0,1]).$$

Da $U_{\mathscr{F},\varepsilon} = \{x : \max_{p\in\mathscr{F}} p(x) \le \varepsilon\}$, ist dies äquivalent zu

$$\exists\, \varepsilon > 0, \mathscr{F} \subset \mathscr{P},\ \mathscr{F} \text{ endlich} : q(x) \le \frac{1}{\varepsilon} \max_{p\in\mathscr{F}} p(x).$$

□

6.9 Korollar. *Sei $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ lokalkonvex und*

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{Q} \subset \{q : q \textit{ ist } \tau_{\mathscr{P}}\textit{-stetige Seminorm auf } X\}.$$

Dann ist $\tau_{\mathscr{P}} = \tau_{\mathscr{Q}}$.

Beweis. Das folgt sofort aus Lemma 6.8 c). □

6.10 Satz. *Seien $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ und $(Y, \tau_{\mathscr{Q}})$ lokalkonvex und $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) *T ist stetig.*

(ii) *T ist stetig bei 0.*

(iii) *Ist $q : Y \to [0,\infty)$ eine stetige Seminorm, so ist $q \circ T : X \to [0,\infty)$ eine stetige Seminorm.*

(iv) *Für alle $q \in Q$ existiert ein endliches $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$ und $M \ge 0$ so dass $q(Tx) \le M \max_{p\in\mathscr{F}} p(x) \quad (x \in X)$.*

Beweis. (i)$\Longleftrightarrow$(ii) wie im normierten Fall.

(i)$\Longrightarrow$(iii) klar als Komposition stetiger Funktionen.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) nach Lemma 6.8 b) und c).

(iv)$\Longrightarrow$(ii). Sei $V = \{y : q_i(y) \le \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n)\}$ eine Nullumgebung in Y. Wähle $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{P}$ und $M_i > 0$ zu q_i nach (iv) und setze $\mathscr{F} := \bigcup_{i=1}^n \mathscr{F}_i$, $M := \max_i M_i$. Dann ist $\max_{i=1,\ldots,n} q_i(Tx) \le M \max_{p\in\mathscr{F}} p(x)$, d.h. $T(U_{\mathscr{F},\varepsilon/M}) \subset V$. Somit ist T stetig bei 0. □

6.11 Korollar. *Sei $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ lokalkonvex. Eine lineare Abbildung $\ell : X \to \mathbb{K}$ ist genau dann stetig, wenn es endlich viele $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{P}$ und $M \geq 0$ gibt mit*

$$|\ell(x)| \leq M \max_{i=1,\ldots,n} p_i(x) \quad (x \in X).$$

Beweis. Das ist Satz 6.10 mit $(Y, \tau_Q) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$ (d.h. $\mathscr{Q} = \{|\cdot|\}$. □

6.12 Definition. Seien $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ und $(Y, \tau_{\mathscr{Q}})$ lokalkonvex. Definiere

$$L(X, Y) := \{T \colon X \to Y \mid T \text{ linear, stetig}\}.$$

Wir setzen $X' := L(X, \mathbb{K})$.

6.13 Bemerkung. Nach Satz 6.10 ist $L(X, Y)$ ein Vektorraum.

Es folgt ein kleiner Einschub über Netze.

6.14 Definition. a) Eine Menge I mit einer Relation $\leq$ heißt eine gerichtete Menge, falls

(i) $i \leq i \quad (i \in I)$,

(ii) Aus $i \leq j$ und $j \leq k$ folgt $i \leq k$ $(i, j, k \in I)$,

(iii) Für alle $i, j \in I$ existiert ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

b) Ein Netz in einer Menge X ist eine Abbildung $I \to X$, wobei I eine gerichtete Menge ist. Man schreibt $(x_i)_{i \in I} \subset X$.

c) Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in einem topologischen Raum (X, τ) heißt konvergent gegen $x \in X$, falls für jede Umgebung U von x ein $j \in I$ existiert, so dass für alle $i \geq j$ gilt $x_i \in U$.

Die Verwendung von Netzen hat den Vorteil, dass man Begriffe wie Stetigkeit leicht beschreiben kann, auch wenn es keine abzählbare Nullumgebungsbasis gibt (in diesem Fall – etwa bei metrischen Räumen – kann man sich auf Folgen beschränken). Der folgende Satz wird nicht bewiesen.

6.15 Satz. *Seien (X, τ_X) und (Y, τ_Y) topologische Räume.*

a) Sei $M \subset X$ und $x \in X$. Dann sind äquivalent:

(i) $x \in \overline{M}$.

(ii) *Es existiert ein Netz* $(x_i)_{i\in I} \subset M$ *mit* $x_i \to x$.

b) Sei $f : X \to Y$ *eine Abbildung und* $x_0 \in X$. *Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist stetig an der Stelle* x_0.

(ii) *Für alle Netze* $(x_i)_{i\in I} \subset X$ *mit* $x_i \to x$ *gilt* $f(x_i) \to f(x)$.

6.16 Satz. *Sei* $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ *lokalkonvex. Ein Netz* $(x_i)_{i\in I} \subset X$ *konvergiert genau dann gegen* $x_0 \in X$, *wenn für alle* $p \in \mathscr{P}$ *gilt* $p(x_i - x_0) \to 0$.

Beweis. Es gilt $x_i \to x_0$ genau dann, wenn $x_i - x_0 \to 0$. Somit sei o.E. $x_0 = 0$.

(i) Es gelte $x_i \to 0$. Nach Lemma 6.8 sind alle $p \in \mathscr{P}$ stetig, also folgt mit Satz 6.15 b) $p(x_i) \to 0$.

(ii) Es gelte $p(x_i) \to 0$ für alle $p \in \mathscr{P}$. Sei $U = U_{\mathscr{F},\varepsilon} \in \tau_0$. Zu $p \in \mathscr{F}$ existiert $i_p \in I$ mit $p(x_i) \le \varepsilon \quad (i \ge i_p)$. Da I gerichtet ist, existiert ein $j \in I$ mit $j \ge i_p$ für alle $p \in \mathscr{F}$. Für $i \ge j$ und $p \in \mathscr{F}$ folgt $p(x_i) \le \varepsilon$, d.h. $x_i \in U_{\mathscr{F},\varepsilon} \quad (i \ge j)$. Also gilt $x_i \to 0$. □

6.17 Satz. *Sei* $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ *lokalkonvex. Dann ist der Abschluss einer konvexen Menge konvex.*

Beweis. Sei $C \subset X$ konvex, $x, y \in \overline{C}$ und $0 \le \lambda \le 1$. Seien $(x_i)_i$ und $(y_i)_i$ Netze in C mit $x_i \to x$ und $y_i \to y$. Da X topologischer Vektorraum ist, gilt $\lim_i(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) = \lambda x + (1-\lambda)y$, d.h. $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{C}$. □

6.18 Definition. a) Seien X, Y $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\langle\cdot|\cdot\rangle : X \times Y \to \mathbb{K}$ eine bilineare Abbildung. Dann heißt (X, Y) ein duales Paar, falls

$$\forall\, x \in X \setminus \{0\}\ \exists\, y \in Y : \langle x|y\rangle \ne 0,$$
$$\forall\, y \in Y \setminus \{0\}\ \exists\, x \in X : \langle x|y\rangle \ne 0.$$

b) Sei (X, Y) ein duales Paar. Zu $y \in Y$ definiere die Seminorm $p_y(x) := |\langle x|y\rangle|$. Dann heißt die durch $\mathscr{P} := \{p_y : y \in Y\}$ auf X erzeugte lokalkonvexe Topologie die $\sigma(X, Y)$-Topologie.

6.19 Beispiel. Sei X lokalkonvex mit Dualraum X'. Dann ist (X, X') mit $\langle x|x'\rangle := x'(x)$ ein duales Paar, und $\sigma(X, X')$ heißt wie im normierten Fall die schwache Topologie auf X. Analog heißt $\sigma(X', X)$ die schwach-*-Topologie auf X' (Topologie der punktweisen Konvergenz).

6.20 Lemma. *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\ell, \ell_1, \dots, \ell_n : X \to \mathbb{K}$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) $\ell \in \operatorname{span}\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$.

(ii) $\exists\, M \geq 0 : |\ell(x)| \leq M \max_{i=1,\dots,n} |\ell_i(x)| \quad (x \in X)$.

(iii) $\bigcap_{i=1}^n \ker \ell_i \subset \ker \ell$.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii) ist klar.

(iii)$\Longrightarrow$(i). Sei

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix} : x \in X \right\} \subset \mathbb{K}^n.$$

Dann ist

$$\Phi : \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix} \mapsto \ell(x)$$

wohldefiniert und linear auf V. Daher existiert eine lineare Fortsetzung $\hat{\Phi} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ von Φ, d.h. es gilt $\hat{\Phi}(\xi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$. Damit gilt

$$\ell(x) = \Phi\left(\begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix}\right) = \hat{\Phi}\left(\begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_i(x).$$

□

6.21 Korollar. *a) Sei (X, Y) ein duales Paar. Dann ist $\left(X_{\sigma(X,Y)}\right)' = Y$, d.h. ein lineares Funktional $\ell : X \to \mathbb{K}$ ist genau dann $\sigma(X, Y)$-stetig, wenn $\ell(x) = \langle x|y \rangle$ für ein $y \in Y$.*

b) Sei (X, τ) lokalkonvex (z.B. normiert). Dann ist ein lineares Funktional $\ell : X \to \mathbb{K}$ genau dann schwach stetig (d.h. $\sigma(X, X')$-stetig), wenn es τ-stetig ist.

c) Sei (X, τ) lokalkonvex. Dann ist ein lineares Funktional $\ell : X' \to \mathbb{K}$ genau dann schwach--stetig, wenn es die Form $\ell(x') = x'(x)$ für ein $x \in X$ hat.*

Beweis. a) folgt direkt aus Korollar 6.11 und Lemma 6.20. b) und c) sind direkte Folgerungen aus a). □

6.22 Satz. . *Sei (X, Y) ein duales Paar, (T, τ) ein topologischer Raum, und $f\colon (T, \tau) \to (X, \sigma(X, Y))$ eine Funktion. Dann ist f genau dann stetig, wenn alle Funktionen $y \circ f : T \to \mathbb{K} \quad (y \in Y)$, $t \mapsto \langle f(t)|y\rangle$ stetig sind.*

Insbesondere ist $\sigma(X, Y)$ die gröbste (kleinste) Topologie auf X, für die alle $y \in Y$ stetig sind.

Beweis. (i) Sei f stetig. Nach Korollar 6.21 ist jedes $y \in Y$ $\sigma(X, Y)$-stetig, d.h. jedes $y \circ f : T \to \mathbb{K}$ ist stetig.

(ii) Seien alle $y \circ f : T \to \mathbb{K}$ stetig, und sei $t \in T$. Sei U eine Nullumgebung (bzgl. $\sigma(X, Y)$) in X. O.E. sei

$$U = \{x \in X : |\langle x|y_i\rangle| \leq \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}.$$

Da die Funktionen $|\langle f(\cdot)|y_i\rangle| : X \to \mathbb{K}$ nach Voraussetzung stetig sind, existieren Umgebungen W_i von t mit

$$|\langle f(t) - f(s)|y_i\rangle| \leq \varepsilon \quad (s \in W_i,\ i = 1, \ldots, n).$$

Für $W := \bigcap_{i=1,\ldots,n} W_i$ folgt $f(W) \subset f(t) + U$, d.h. f ist stetig in t. $\square$

6.23 Satz. *Sei $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) *X ist metrisierbar (d.h. es existiert eine Metrik d auf $X \times X$, welche die Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$ erzeugt), wobei die Metrik translationsinvariant definiert werden kann.*

(ii) *0 besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.*

(iii) *$\tau_{\mathscr{P}}$ wird bereits durch abzählbar viele Seminormen erzeugt.*

Dabei ist eine Metrik d translationsinvariant, falls gilt

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad (x, y, z \in X).$$

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii) gilt allgemein in metrischen Räumen.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Sei $B = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis. Dann existieren $U_{\mathscr{F}_n,\varepsilon_n} \in \tau_0$ mit $U_{\mathscr{F}_n,\varepsilon_n} \subset U_n$, und $\{U_{\mathscr{F}_n,\varepsilon_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbare Umgebungsbasis. Dann erzeugt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n \subset \mathscr{P}$ bereits die Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$.

(iii)$\Longrightarrow$(i). Sei $\mathscr{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definiere $d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$. Dann gilt $0 \leq d(x, y) \leq 1$. Man rechnet direkt nach, dass d eine Metrik ist und $\tau_{\mathscr{P}}$ erzeugt. $\square$

6.24 Definition. a) (Cauchyfolge) Sei (X, τ) ein topologischer Vektorraum und $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Umgebungsbasis der 0. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt Cauchyfolge, falls für jedes $\alpha \in A$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n - x_m \in U_\alpha \quad (n, m \geq n_0)$.

(X, τ) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

b) Ein lokalkonvexer Raum $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ heißt Fréchet-Raum, falls $\tau_{\mathscr{P}}$ durch eine translationsinvariante Metrik induziert wird und falls X vollständig ist.

7. Distributionen

Erst die Theorie der Distributionen ermöglicht einen sinnvollen und erfolgreichen Umgang mit Differentialgleichungen und Differentialoperatoren. Distributionen erlauben es uns, die Ableitungen von Funktionen zu betrachten, die nicht im klassischen Sinne differenzierbar sind. Insbesondere kann man jetzt auch Ableitungen von L_p-Funktionen betrachten und damit diese Banach- bzw. Hilbertraumtheorie (für $p = 2$) bei Untersuchungen über die Lösbarkeit von Differentialgleichungen verwenden. Auch die Fourier-Theorie erfährt hier eine deutliche Erweiterung. Der Raum der Testfunktionen, der zur Definition von Distributionen verwendet wird, muss topologisiert werden. Dies geschieht in Form einer lokalkonvexen Topologie, die wir zum Glück schon kennen.

a) Der Raum der Distributionen $\mathscr{D}'(\Omega)$

Wir wiederholen einige Begriffe, die in Beispiel 6.4 diskutiert wurden. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann ist

$$\mathscr{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} \varphi \text{ kompakt}\},$$

und

$$\mathscr{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} \varphi \subset K\}.$$

Durch die Familie

$$p_{\alpha,K}(\varphi) := \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n),$$

wird $\mathscr{D}_K(\Omega)$ zu einem lokalkonvexen Raum. Wir schreiben in diesem Fall $(\mathscr{D}_K, \tau_K)$. Dieser ist nach Satz 6.23 translationsinvariant metrisierbar. Eine äquivalente Familie von Seminormen ist gegeben durch

$$p_{N,K}(\varphi) := \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \quad (N \in \mathbb{N}_0).$$

Durch

$$\mathscr{P} := \{p : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C} : p \text{ Seminorm}, p_{\mathscr{D}_K(\Omega)} \text{ stetig bzgl. } \tau_K\}$$

wird auch $\mathscr{D}(\Omega)$ zu einem lokalkonvexen Raum. Wir schreiben $(\mathscr{D}, \tau)$.

7.1 Lemma. *Der Raum $(\mathscr{D}_K(\Omega), \tau_K)$ ist Fréchetraum.*

Beweis. Es ist nur noch die Vollständigkeit zu zeigen. Wir wählen folgende Umgebungsbasis der 0:

$$U_N := \left\{\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) : p_{N,K}(\varphi) < \frac{1}{N}\right\}.$$

Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_K(\Omega)$ eine Cauchyfolge. Zu $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_n - \varphi_m \in U_N \quad (n, m \geq n_0),$$

d.h. $\sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi_n(x) - D^\alpha \varphi_m(x)| < \frac{1}{N} \quad (|\alpha| \leq N, n, m \geq n_0)$. Daher konvergiert $(D^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf K gegen eine Funktion f_α. Es gilt $\varphi_n \to \varphi := f_0$ und $D^\alpha \varphi_n \to f_\alpha = D^\alpha \varphi$. Somit $p_N(\varphi_n - \varphi) \to 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$, d.h. $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}_K(\Omega)$ (Satz 6.16). □

7.2 Lemma. *a) Die Relativtopologie von τ auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$ stimmt mit τ_K überein.*

b) $\mathscr{D}_K(\Omega)$ ist τ-abgeschlossen in $\mathscr{D}(\Omega)$.

c) $(\mathscr{D}(\Omega), \tau)$ ist Hausdorff-Raum.

d) Sei Y lokalkonvex und $L : \mathscr{D}(\Omega) \to Y$ linear. Dann ist L genau dann τ-stetig, wenn alle $L|_{\mathscr{D}_K(\Omega)}$ τ_K-stetig sind.

Beweis. a) nach Definition wird die Relativtopologie von der Familie von Seminormen

$$\mathscr{Q} := \{p|_{\mathscr{D}_K(\Omega)} : p \in \mathscr{P}\}$$

erzeugt. Es gilt

$$\{p_{N,K} : N \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{Q} \subset \{q : q \text{ ist } \tau_K\text{-stetige Seminorm }\}$$

und damit ist nach Korollar 6.9 $\tau_{\mathscr{Q}} = \tau_K$.

b) ist klar nach a) und Lemma 7.1.

c) Sei $\varphi \neq 0$. Dann existiert ein $x \in \Omega$ mit $\varphi(x) \neq 0$ und daher $\pi_x(\varphi) \neq 0$. Nach Lemma 6.6 ist $\mathscr{D}(\Omega)$ ein Hausdorff-Raum.

d) (i) Sei L τ-stetig. Dann ist $L|_{\mathscr{D}_K(\Omega)}$ τ_K-stetig nach a).

(ii) Sei q eine stetige Seminorm auf Y. Dann ist $q \circ L|_{\mathscr{D}_K(\Omega)}$ eine stetige Seminorm auf $\mathscr{D}_K(\Omega)$ für alle Kompakta K, d.h. $q \circ L \in \mathscr{P}$. Damit ist $q \circ L$ τ-stetig. Nach Satz 6.10 ist L τ-stetig. □

7.3 Satz. *Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$.*

(ii) *Es existiert ein Kompaktum $K \subset \Omega$ mit* $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ *für alle $n \in \mathbb{N}$, und für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt*

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi_n(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Beweis. (ii) heißt $\varphi_n \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ und $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}_K(\Omega)$. Damit ist (ii)$\Longrightarrow$(i) trivial.

(i)$\Longrightarrow$(ii). Sei $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$. Angenommen, es existiert kein K wie in (ii). Dann existiert eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Mengen mit $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$ und eine Teilfolge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\psi_n \in \mathscr{D}_{K_n}(\Omega) \setminus \mathscr{D}_{K_{n-1}}(\Omega).$$

Wähle $x_n \in K_n \setminus K_{n-1}$ mit $\alpha_n := |\psi_n(x_n)| > 0$. Dann ist $\pi_n : \varphi \mapsto \frac{1}{\alpha_n}|\varphi(x_n)|$ stetig (siehe Beweis von Lemma 7.2).

Jedes kompakte $K \subset \Omega$ liegt in einem der K_n wegen $\bigcup_n K_n = \Omega$. Also ist $\mathscr{D}(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_{K_n}(\Omega)$. Es gilt $\pi_n|_{\mathscr{D}_{K_m}(\Omega)} = 0$ für $n > m$. Daher ist

$$\pi(\varphi) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \pi_n(\varphi)$$

für jedes $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ eine endliche Summe, und damit π eine wohldefinierte Seminorm. Es gilt

$$\pi|_{\mathscr{D}_K(\Omega)} = \sum_{n=1}^{N} \pi_n|_{\mathscr{D}_K(\Omega)} \qquad \text{falls } K \subset K_N.$$

Somit ist $\pi \in \mathscr{P}$ und insbesondere τ-stetig. Es gilt $\pi(\psi_n) \geq \pi_n(\psi_n) = 1$. Aber wegen $\varphi_n \to 0$ gilt auch $\pi(\psi_n) \to \pi(0) = 0$, Widerspruch. □

7.4 Bemerkung. Man kann zeigen, dass auch in $\mathscr{D}(\Omega)$ jede Cauchyfolge konvergiert. $\mathscr{D}(\Omega)$ ist aber kein Fréchetraum (nicht metrisierbar).

7.5 Definition. Der Raum $\mathscr{D}'(\Omega)$ wird definiert als Dualraum $\mathscr{D}'(\Omega) := (\mathscr{D}(\Omega), \tau)'$. Die Elemente von $\mathscr{D}'(\Omega)$ heißen Distributionen auf Ω. Der Raum $\mathscr{D}(\Omega)$ heißt auch der Raum der Testfunktionen.

7.6 Lemma. *Sei $\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

(ii) *Für alle Kompakta $K \subset \Omega$ ist $\Lambda|_{\mathscr{D}_K(\Omega)} \in (\mathscr{D}_K(\Omega), \tau_K)'$.*

(iii) *Für alle Kompakta $K \subset \Omega$ existieren $m \in \mathbb{N}_0$, $c > 0$ mit*

$$|\Lambda\varphi| \leq c p_m(\varphi) = c \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)| \quad (\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)).$$

(iv) *Gilt $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\Omega)$, so gilt $\Lambda\varphi_n \to 0$ in $\mathbb{C}$.*

Beweis. (i)$\Longleftrightarrow$(ii) nach Lemma 7.2 d).

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii) nach Korollar 6.11.

(i)$\Longrightarrow$(iv) ist klar (gilt sogar für Netze).

(iv)$\Longrightarrow$(ii) Nach (iv) ist $\Lambda_{\mathscr{D}_K(\Omega)}$ folgenstetig. Aber $(\mathscr{D}_K(\Omega), \tau_K)$ ist Fréchetraum, insbesondere metrisierbar. Also ist $\Lambda|_{\mathscr{D}_K(\Omega)}$ stetig. $\square$

7.7 Definition. Sei $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Lambda)$.

a) $\operatorname{ord}\Lambda := \inf\{n \in \mathbb{N} : \ \forall\ K \subset \Omega, K \text{ kompakt } \exists\ c > 0 : \ \forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) : |\Lambda\varphi| \leq c p_{n,K}(\varphi)\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt die Ordnung von Λ.

b) Sei $U \subset \Omega$ offen. Die Distribution Λ verschwindet auf U, falls $\Lambda\varphi = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset U$ gilt. Die Menge $\operatorname{supp}\Lambda := \Omega \setminus \{\bigcup\{U \subset \Omega : \Lambda \text{ verschwindet auf } U\}$ heißt der Träger von Λ.

7.8 Beispiele. a) Zu $x_0 \in \Omega$ heißt $\delta_{x_0} : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \varphi(x_0)$, die Dirac-Distribution. Wegen

$$|\delta_{x_0}(\varphi)| \leq p_{0,K}(\varphi) = \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \quad (\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega))$$

ist $\operatorname{ord}\delta_{x_0} = 0$. Wir schreiben auch $\delta := \delta_0$. Es gilt $\operatorname{supp}\delta_{x_0} = \{x_0\}$.

b) Sei $L_1^{\text{loc}} := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar }, f\cdot\chi_K \in L_1(\Omega) \text{ für alle } K \subset \Omega \text{ kompakt }\}/\{f = 0 \text{ fast überall }\}$. Es gilt $C(\Omega) \subset L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ und $L_1(\Omega) \subset L_1^{\text{loc}}(\Omega)$.

Zu $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ defniere

$$\Lambda_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)).$$

Dann ist

$$|\Lambda_f(\varphi)| \leq \Big(\int_K |f(x)|dx\Big) \cdot \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \quad (\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)),$$

d.h. $\Lambda_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ und $\operatorname{ord}\Lambda_f = 0$.

Die Einbettung $L_1^{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$ ist injektiv: Sei $\int f(x)\varphi(x)dx = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Dann gilt $\int_K f(x)dx = 0$ für alle kompakten $K \subset \Omega$ (Approximation durch C^∞-Funktonen). Daher gilt $\int_A f(x)dx = 0$ für alle Borelmengen $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ und damit $f = 0$ fast überall.

c) Sei $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{C}$ ein komplexes Maß oder $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to [0, \infty]$ ein Maß mit $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$. Dann wird durch

$$\Lambda_\mu(\varphi) := \int \varphi d\mu \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$$

eine Distribution $\Lambda_\mu \in \mathscr{D}'(\Omega)$ definiert. Die Abbildung $\mu \mapsto \Lambda_\mu$ ist injektiv, was man genauso wie in b) sieht.

d) Die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi'(0)$ ist in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ wegen $|\varphi'(0)| \leq p_1(\varphi)$ und besitzt die Ordnung 1. Analog gilt $\varphi \mapsto D^\alpha\varphi(0) \in \mathscr{D}'(\Omega)$ mit Ordnung $|\alpha|$.

7.9 Definition und Satz. *Für $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ setze*

$$(D^\alpha\Lambda)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)).$$

Dann ist $D^\alpha\varphi \in \mathscr{D}'(\Omega)$ und $D^\alpha\colon \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ ist schwach--stetig (d.h. stetig bzgl. $\sigma(\mathscr{D}'(\Omega), \mathscr{D}(\Omega))$).*

Beweis. Die Ableitung $D^\alpha : \mathscr{D}_K(\Omega) \to \mathscr{D}_K(\Omega)$ ist wegen $p_{N,K}(D^\alpha\varphi) \leq p_{N+|\alpha|,K}(\varphi)$ stetig für alle Kompakta $K \subset \Omega$. Also ist (Lemma 7.2) die Abbildung $D^\alpha : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ stetig.

Wegen $D^\alpha\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ist für jedes φ die Abbildung

$$\Lambda \mapsto (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi) = (D^\alpha\Lambda)(\varphi),\ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

$\sigma(\mathscr{D}'(\Omega), \mathscr{D}(\Omega))$-stetig. Nun können wir Satz 6.22 mit $T = X = \mathscr{D}'(\Omega)$ und $Y = \mathscr{D}(\Omega)$ anwenden und erhalten, dass $D^\alpha : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ stetig ist. □

7.10 Beispiele. a) Sei $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned} D^\alpha\Lambda_f(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}\Lambda_f(D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)D^\alpha\varphi(x)dx \\ &= \int_\Omega (D^\alpha f)(x)\varphi(x)dx = \Lambda_{D^\alpha f}(\varphi), \end{aligned}$$

d.h. D^α ist eine Erweiterung der klassischen Ableitung.

b) Betrachte die Heavisidefunktion $H = \chi_{[0,\infty)} \subset L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Dann gilt für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Lambda_H'(\varphi) &= -\Lambda_H(\varphi') = -\int_\mathbb{R} \chi_{[0,\infty)}(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx \\ &- \varphi(x)\big|_0^\infty = \varphi(0) = \delta(\varphi), \end{aligned}$$

d.h. es gilt $H' = \delta$ im Distributionssinne.

c) Sei für $x \in \mathbb{R}^3$ die Funktion f gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|x|}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, und für den Laplace-Operator $\Delta := \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2$ gilt

$$\Delta\Lambda_f = \delta.$$

(Dies kann man durch direktes Nachrechnen zeigen.) Die Funktion f heißt daher eine Fundamentallösung für den Laplace-Operator.

7.11 Definition und Satz. *Sei $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ und $f \in C^\infty(\Omega)$. Definiere*

$$f \cdot \Lambda(\varphi) := \Lambda(f \cdot \varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)).$$

Dann ist $f \cdot \Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Beweis. Sei $K \subset \Omega$ kompakt. Dann existieren $N \in \mathbb{N}_0$ und $C = C_{N,K} > 0$ mit

$$|\Lambda(f\varphi)| \leq C_{K,N} p_N(f\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)).$$

Verwende nun die Leibnizformel

$$D^\alpha(f \cdot \varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} f)(D^\beta \varphi).$$

Dabei ist $\beta \leq \alpha$ komponentenweise zu verstehen. Damit sieht man $p_N(f\varphi) \leq C'_{f,K,N} p_N(\varphi)$. Es gilt also

$$|\Lambda(f\varphi)| \leq C_{K,N} C'_{f,K,N} p_N(\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)),$$

d.h. $f \cdot \Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$. □

7.12 Definition. a) Seien $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Funktionen, so dass $(y \mapsto u(y)v(x-y)) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$(u * v)(x) := \int u(y)v(x-y)dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

die Faltung von u und v.

b) Definiere zu $x \in \mathbb{R}^n$ den Verschiebungsoperator τ_x durch

$$(\tau_x\varphi)(y) := \varphi(y-x) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)),$$
$$(\tau_x u)(\varphi) := u(\tau_{-x}\varphi) \quad (u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)).$$

Setzt man außerdem $\check{\varphi}(y) := \varphi(-y)$, so ist $(\tau_x\check{\varphi})(y) = \varphi(x-y)$.

c) Sei $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ definiere

$$(u * \varphi)(x) := u(\tau_x\hat{\varphi})$$

(Faltung von u und φ). Beachte, dass $u * \varphi$ eine Funktion und keine Distribution ist.

7.13 Satz. *Seien $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

a) $\tau_x(u * \varphi) = (\tau_x u) * \varphi = u * (\tau_x \varphi) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$.

b) $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * (D^\alpha \varphi) \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n)$.

c) $u * (\varphi * \psi) = (u * \varphi) * \psi$.

Beweis. a) Dies zeigt man direkt durch Einsetzen der Definitionen:

$$\begin{aligned}
[\tau_x(u * \varphi)](y) &= (u * \varphi)(y - x) = u(\tau_{y-x}\check{\varphi}),\\
[(\tau_x u) * \varphi](y) &= (\tau_x u)(\tau_y \check{\varphi}) = u(\tau_{y-x}\check{\varphi}),\\
[u * (\tau_x \varphi)](y) &= u\big(\tau_y(\tau_x\varphi)\check{}\,\big) = u(\tau_{y-x}\check{\varphi}).
\end{aligned}$$

b) Es gilt $\tau_x((D^\alpha\varphi)\check{}\,)) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\tau_x\check{\varphi})$, d.h. $(u * (D^\alpha\varphi))(x) = ((D^\alpha u) * \varphi)(x)$.

Sei $e = e_j$ der j-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$. Für $r \in \mathbb{R}$ klein setze $\eta_r := \frac{1}{r}(\tau_0 - \tau_{re})$, d.h. es gilt

$$(\eta_r\varphi)(y) = \frac{\varphi(y) - \varphi(y - re)}{r} \overset{r\to 0}{\longrightarrow} \partial_{x_j}\varphi(y) \quad \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Nach a) gilt $\eta_r(u * \varphi) = u * (\eta_r\varphi)$ und damit

$$\tau_x((\eta_r\varphi)\check{}\,)) \to \tau_x(\partial_{x_j}\varphi)\check{}\; \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Somit gilt $[u * (\eta_r\varphi)](x) \to (u * (\partial_{x_j}\varphi))(x)$. Insgesamt haben wir also

$$\partial_{x_j}(u * \varphi) = u * (\partial_{x_j}\varphi).$$

Iteration ergibt nun $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und die behauptete Gleichheit in b).

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
((\varphi * \psi)\check{}\,)(t) = (\varphi * \psi)(-t) = (\psi * \varphi)(-t) &= \int \psi(s)\varphi(-t - s)ds\\
= \int \psi(-s)\varphi(s - t)ds &= \int \check{\psi}(s)(\tau_s\check{\varphi})(t)ds.
\end{aligned}$$

Die Abbildung $s \mapsto \psi(-s)\varphi(s - t)$ ist stetig mit kompaktem Träger $K \subset \operatorname{supp}\check{\varphi} + \operatorname{supp}\check{\psi}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
(u * (\varphi * \psi))(0) = u((\varphi * \psi)\check{}\,)) &= u\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \check{\psi}(s)\tau_s\check{\varphi}(\cdot)dx\Big)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \check{\psi}(s)u(\tau_s\check{\varphi})ds = \int \psi(-s)(u * \varphi)(s)ds\\
&= ((u * \varphi) * \psi)(0).
\end{aligned}$$

Wende diese Gleichheit auf $\tau_{-s}\psi$ statt auf ψ an und erhalte die Behauptung von c). $\square$

Im letzten Beweis wurde verwendet, dass man die Funktion $\int \check{\psi}\tau_s\check{\varphi}(\cdot)ds$ als Limes von $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-wertigen Treppenfunktionen schreiben kann und das Integral mit u vertauschen kann. Dies ist nicht kompliziert, setzt aber den Begriff des Integrals über Funktionen mit Werten in lokalkonvexen Räumen voraus. Daher wird hier darauf verzichtet.

7.14 Satz. *Sei $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $h \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx = 1$. Zu $\varepsilon > 0$ definiere $h_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}h(\frac{x}{\varepsilon})$. (Dann heißt die Familie $(h_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine glättende Funktionenfamilie, englisch mollifier.)*

a) Für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\lim_{k\to\infty}(\varphi * h_{1/k}) = \varphi$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

b) Für $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt $\lim_{k\to\infty}(u * h_{1/k}) = u$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) Es gilt $f * h_{1/k} \to f$ gleichmäßig auf Kompakta für jedes stetige f, wie man folgendermaßen sieht:

$$\begin{aligned}(f * h_{1/k})(x) &= \int f(x-y)h_{1/k}(y)dy = \int f(x-y)k^n h(ky)dy \\ &= \int f\Big(x - \frac{z}{k}\Big)h(z)dz \\ &\to f(x)\int h(z)dz = f(x).\end{aligned}$$

Dabei wurde $f(x-\frac{z}{k}) \to f(x)$ punktweise und majorisierte Konvergenz verwendet.

Somit gilt $D^\alpha(\varphi * h_{1/k}) \to D^\alpha\varphi \quad (k\to\infty)$ gleichmäßig auf allen kompakten Mengen für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Da $\operatorname{supp} h_{1/k} = (\operatorname{supp} h)/k$ gilt, existiert ein $K \subset \mathbb{R}^n$, K kompakt, mit $\operatorname{supp}(\varphi * h_{1/k}) \subset K$. Nach Satz 7.3 (ii) und Satz 7.13 gilt daher $\varphi * h_{1/k} \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

b) Unter Verwendung der Stetigkeit von u und von 7.13 c) sieht man

$$\begin{aligned}u(\check{\varphi}) = (u*\varphi)(0) &= \lim_{k\to\infty}(u*(\varphi*h_{1/k}))(0) = \lim_{k\to\infty}((u*h_{1/k})*\varphi)(0) \\ &= \lim_{k\to\infty}(u*h_{1/k})(\check{\varphi})\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Dies heißt aber, dass $u * h_{1/k} \to u$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ in der schwach-*-Topologie. □

b) Der Schwartz-Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und die temperierten Distributionen

Der Schwartz-Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist uns schon aus Beispiel 6.5 bekannt. Wir wiederholen noch einmal die wichtigsten Definitionen. Der Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als die Menge aller $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für welche gilt:

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \;\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : \; p_{\alpha,m}(f) < \infty.$$

Dabei sind die Seminormen $p_{\alpha,m}$ definiert durch

$$p_{\alpha,m}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)|D^\alpha f(x)|.$$

Durch die Familie von Seminormen

$$\mathscr{P} := \{p_{\alpha,m} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\; m \in \mathbb{N}_0\}$$

zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum.

Äquivalente Familien von Seminormen sind

$$\{p_{k,m} : k, m \in \mathbb{N}_0\}$$

mit

$$p_{k,m}(f) := \max_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)|D^\alpha f(x)|$$

oder

$$\{q_{\alpha,Q} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\; Q \;\text{ Polynom}\}$$

mit

$$q_{\alpha,Q}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |Q(x)(D^\alpha f)(x)|.$$

7.15 Satz. *a) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Fréchetraum.*

b) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und P ein Polynom, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist jede der drei Abbildungen $f \mapsto P \cdot f$, $f \mapsto g \cdot f$ und $f \mapsto D^\alpha f$ stetige lineare Abbildungen von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) Die Menge $\mathscr{P}$ der Seminormen ist abzählbar, also ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ translationsinvariant metrisierbar. Die Vollständigkeit folgt wie in Lemma 7.1.

b) Dass die Funktionen $D^\alpha f$, $P \cdot f$ und $g \cdot f$ wieder in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ liegen, folgt sofort aus der Leibniz-Formel

$$D^\alpha(f \cdot g) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} g)(D^\beta f).$$

Die Stetigkeit folgt wie in 7.9. □

7.16 Satz. *a)* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *ist dicht in* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*.*

b) Die Inklusion $i : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$*,* $\varphi \mapsto \varphi$*, ist stetig.*

Beweis. a) Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$. Setze $f_r(x) := f(x)\psi(rx) \quad (x \in \mathbb{R}^n, r > 0)$. Dann ist $f_r \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Für ein Polynom P und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt (wieder unter Verwendung der Leibniz-Formel)

$$\begin{aligned} P(x)D^\alpha(f - f_r)(x) &= P(x)D^\alpha(f(x)(1 - \psi(rx))) \\ &= P(x)\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(D^{\alpha-\beta}f)(x)r^{|\beta|}\big[D^\beta(1-\psi)\big](rx) \end{aligned}$$

Es gilt $D^\beta[1 - \psi(rx)] = 0$ für $|rx| \leq 1$. Wegen $P(x)(D^{\alpha-\beta}f)(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$ (gleichmäßige Konvergenz) folgt damit $P(x)D^\alpha(f-f_r)(x) \to 0$ bezüglich gleichmäßiger Konvergenz, d.h. es gilt $f_r \to f \quad (r \to 0)$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist $i : (\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n), \tau_K) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig, da auf $\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n)$ die Topologien von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und von $\mathscr{D}_K(\mathbb{R}^n)$ übereinstimmen. (Beachte dazu, dass $|x|$ auf K beschränkt ist.) Nach Lemma 7.2 ist $i\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig. □

7.17 Definition. Der Dualraum

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) := (\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \tau_{\mathscr{P}})'$$

(also die Menge aller linearen Abbildungen $u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, die stetig bzgl. $\tau_{\mathscr{P}}$ sind), heißt der Raum der temperierten Distributionen.

7.18 Bemerkung. a) Die Adjungierte der Abbildung i aus Satz 7.16 b) ist wohldefiniert und injektiv. Diese ist gegeben durch

$$i' : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\ u \mapsto u|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}.$$

Es gilt $i'(u) = u \circ i$. Nach Satz 7.16 b) ist i stetig, d.h. $i'(u) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Da $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 7.16 a) dicht ist, ist $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ schon durch die Werte auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ festgelegt, d.h. i' ist injektiv.

b) Unter Verwendung der Identifizierung $i'\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ besteht $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ aus allen Distributionen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, die sogar bzgl. der Topologie von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig sind. Da die Topologie von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Wachstumsbedingung beinhaltet, spricht man auch von temperierten Distributionen. Genau diejenigen Distributionen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ sind temperiert, die eine stetige Fortsetzung auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ besitzen.

c) Damit sind auch $D^\alpha u$ und $f \cdot u$ für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert. Für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$D^\alpha u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

$$\begin{aligned} P \cdot u &\in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{falls } P \text{ ein Polynom ist,} \\ f \cdot u &\in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{falls } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Dies folgt direkt aus der Stetigkeit der entsprechenden Abbildungen $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (Satz 7.16).

8. Die Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation beschreibt mathematisch die Zerlegung einer Funktion oder eines akustischen oder elektromagnetischen Signals in Grundschwingungen. Innerhalb der Mathematik tritt die Fourier-Transformation insbesondere im Rahmen der partiellen Differentialgleichungen auf. Dies liegt daran, dass die Ableitung in der Fourier-Transformierten zur Multiplikation mit der Koordinatenfunktion wird. Die Fourier-Transformierte wird zunächst für L_2-Funktionen und dann für temperierte Distributionen betrachtet.

a) Definition und erste Eigenschaften

Wir verwenden folgende Standard-Bezeichnungen: Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} x\xi &:= \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \\ |x| &:= \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{1/2}, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}, \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Für $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ ist wieder

$$D^\alpha f(x) := \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n} f(x).$$

8.1 Definition. Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ heißt

$$(\mathscr{F} f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

die Fourier-Transformierte von f.

8.2 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann liegt $\mathscr{D}(\Omega)$ dicht in $L_p(\Omega)$ für alle $1 \le p < \infty$.*

Beweis. Der Beweis wird unter Verwendung des Friedrichschen Glättungsoperators geführt.

Wähle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$, $\int \varphi(x) dx = 1$ und $\operatorname{supp} \varphi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Setze dann $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subset \{\|x\| \leq \varepsilon\}$.

Sei $f \in L_p(\Omega)$. Setze f durch 0 fort zu $f \in L_p(\mathbb{R}^n) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ (siehe 7.8).

(i) Nach Satz 7.13 gilt $f * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Wir zeigen $\|f * \varphi_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$. Sei $p > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|(f * \varphi_\varepsilon)(x)| &\le \int |f(y)| \cdot |\varphi_\varepsilon(x-y)|^{1/p} \cdot |\varphi_\varepsilon(x-y)|^{1/q} dy \\
&\le \Big(\int |f(y)|^p \cdot |\varphi_\varepsilon(x-y)| dy \Big)^{1/p} \Big(\int |\varphi_\varepsilon(x-y)| dy \Big)^{1/q},
\end{aligned}$$

wobei die Höldersche Ungleichung verwendet wurde. Durch Integration bezüglich x erhält man

$$\begin{aligned}
\|f * \varphi_\varepsilon\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\le \|\varphi_\varepsilon\|^{p/q}_{L_1(\mathbb{R}^n)} \cdot \int \int |f(y)|^p \cdot |\varphi_\varepsilon(x-y)| dy dx \\
&= \|\varphi_\varepsilon\|^{p/q}_{L_1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\varphi_\varepsilon\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\varphi_\varepsilon\|^p_{L_1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

(iii) Sei nun $\eta > 0$. Wähle nach Satz 1.31 eine Funktion $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n) := \{g \in C(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0\}$ mit

$$\|f - \psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\eta}{3}.$$

Nach (ii) folgt $\|(f-\psi) * \varphi_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \|f - \psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\eta}{3}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|\psi * \varphi_\varepsilon(x) - \psi(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)(\psi(y) - \psi(x)) dy \Big| \\
&\le \sup_{|x-y|\le\varepsilon} |\psi(y) - \psi(x)|.
\end{aligned}$$

Da $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und damit gleichmäßig stetig ist, konvergiert der letzte Ausdruck gegen 0 für $\varepsilon \to 0$. Da $\operatorname{supp}\psi$ kompakt ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|\psi * \varphi_\varepsilon - \psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \frac{\eta}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|f - f * \varphi_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \|f - \psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|\psi - \psi * \varphi_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|\psi * \varphi_\varepsilon - f * \varphi_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \eta.$$

(iv) Falls $f = 0$ für fast alle $x \in \Omega \setminus K$ mit K kompakt ist, so ist $f * \varphi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\Omega)$ für hinreichend kleines ε. Ansonsten wähle $\widetilde{f}$ mit $\operatorname{supp} \widetilde{f} \subset \Omega$ kompakt und $\|f - \widetilde{f}\|_{L_p(\Omega)} < \eta$. Dann ist $\widetilde{f} * \varphi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\Omega)$ mit $\|f - (\widetilde{f} * \varphi_\varepsilon)\|_{L_p(\Omega)} < \eta + \varepsilon$. □

8.3 Satz. *Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathscr{F} f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Die Fourier-Transformation $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^n) \to (C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein stetiger linearer Operator mit Norm $\|\mathscr{F}\| \leq (2\pi)^{-n/2}$.*

Beweis. Offensichtlich ist $\mathscr{F} f$ messbar mit $\|\mathscr{F} f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$, d.h. $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^n) \to L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ist stetig mit Norm nicht größer als $(2\pi)^{-n/2}$.

(i) Wir zeigen, dass $\mathscr{F} f$ stetig ist. Sei dazu $(\xi^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\xi^{(k)} \to \xi$. Dann gilt $e^{-ix\xi^{(k)}} \to e^{-ix\xi} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$ und

$$|\mathscr{F} f(\xi^{(k)}) - \mathscr{F} f(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot \underbrace{|e^{-ix\xi^{(k)}} - e^{-ix\xi}|}_{\leq 2} dx \to 0$$

mit majorisierter Konvergenz.

(ii) Es gilt $\mathscr{F} f(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$. Dazu verwenden wir, dass nach Satz 8.2 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_1(\mathbb{R}^n)$ ist. Da $\mathscr{F} : L_1 \to L_\infty$ stetig ist, reicht es, $\mathscr{F} f(\xi) \to 0$ für $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen.

Sei $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $R > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| \geq R$. Wähle j mit $|\xi_j| \geq \frac{R}{\sqrt{n}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\mathscr{F} f(\xi)| &= \Big|\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx\Big| \\
&= \Big| - \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} f(x)\ \frac{1}{-i\xi_j}\ e^{-ix\xi} dx\Big| \\
&\leq (2\pi)^{-n/2} \|\partial_{x_j} f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{R} \ \to 0 \quad (R \to \infty).
\end{aligned}$$

□

8.4 Bemerkung. Der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (vergleiche Definition 6.5) liegt dicht in $L_p(\mathbb{R}^n)$ für alle $1 \leq p < \infty$. Denn jedes $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt in $L_p(\mathbb{R}^n)$ wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} c(1 + |x|)^{-mp} dx < \infty$$

für $mp > n$. Die Dichtheit von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n)$ ist klar wegen $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

8.5 Lemma. *Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:*

(i) $\mathscr{F} f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $D^\alpha(\mathscr{F} f) = (-i)^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha f)$.

(ii) $\mathscr{F}(D^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha(\mathscr{F} f)(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$.

(iii) $\mathscr{F} f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(iv) Es gibt eine Konstante $c > 0$ mit

$$|(\mathscr{F}f)(\xi)| \leq c p_{0,n+1}(f) = c \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^{n+1})|f(x)|.$$

(v) Die Fourier-Transformation $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

Beweis. (i) Unter Verwendung von $x^\alpha f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und der majorisierten Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} D^\alpha(\mathscr{F}f)(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\, e^{-ix\xi} d\xi \\ &= \frac{(-i)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x^\alpha e^{-ix\xi} d\xi = \big(\mathscr{F}(x^\alpha f(x)\big)(\xi). \end{aligned}$$

(ii) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(D^\alpha f)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D_x^\alpha e^{-ix\xi} dx = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathscr{F}f(\xi). \end{aligned}$$

(iii) Nach (i) gilt $\mathscr{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt

$$x^\alpha D^\beta(\mathscr{F}f)(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathscr{F}(\underbrace{D^\alpha x^\beta f}_{\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)})(\xi) \to 0 \quad (|\xi| \to \infty),$$

wobei wir Satz 8.3 verwendet haben.

(iv) Dies folgt aus

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx \Big| \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + |x|^{n+1}}\, dx}_{<\infty} \cdot p_{0,n+1}(f).$$

(v) Sei Q ein Polynom und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gilt unter Verwendung von (i), (ii) und (iv)

$$\begin{aligned} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |Q(\xi)D^\alpha(\mathscr{F}f)(\xi)| &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \Big|[\mathscr{F}(Q(D)(x^\alpha f(x))](\xi)\Big| \\ &\leq c \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big| Q(D)(x^\alpha f(x))(1 + |x|^{n+1}) \Big| \\ &\leq C \max_{|\beta|\leq M} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big| (1 + |x|^N) D^\beta f(x) \Big| \end{aligned}$$

für hinreichend große $N, M \in \mathbb{N}$. Nach Satz 6.10 ist $\mathscr{F}$ stetig. □

8.6 Lemma. *Für* $\gamma(x) := \exp(-\frac{x^2}{2})$ *gilt* $\mathscr{F}\gamma = \gamma$.

Beweis. (i) Sei $n = 1$. Die Funktion γ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + xy = 0, \quad y(0) = 1. \tag{9}$$

Damit gilt

$$0 = \mathscr{F}(\gamma' + x\gamma) = i\xi(\mathscr{F}\gamma) + i(\mathscr{F}\gamma)'.$$

Wegen

$$(\mathscr{F}\gamma)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

löst $\mathscr{F}\gamma$ ebenfalls das Anfangswertproblem (9). Also gilt $\gamma = \mathscr{F}\gamma$.

(ii) Für $n > 1$ schreiben wir

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\gamma)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} \cdot \prod_{j=1}^n e^{-ix_j\xi_j} \Big) dx \\ &= \prod_{j=1}^n \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2/2} e^{-ix_j\xi_j} dx_j \Big) \\ &= \prod_{j=1}^n e^{-\xi_j^2/2} = \gamma(\xi).\end{aligned}$$

□

8.7 Lemma. *Für* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *gilt* $\mathscr{F}^2 f(x) = f(-x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$.

Beweis. Sei $\gamma_a(x) := \gamma(ax)$ für $a > 0$ und γ wie in Lemma 8.6. Dann gilt

$$(\mathscr{F}\gamma_a)(\xi) = a^{-n}(\mathscr{F}\gamma)\Big(\frac{\xi}{a}\Big),$$

wie man durch Substitution im Integral sieht. Sei $g(x) := e^{-ix\xi_0}\gamma(ax)$ für $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ fest und $a > 0$ fest. Dann ist $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und

$$(\mathscr{F}g)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi_0}\gamma(ax)e^{-ix\xi} = (\mathscr{F}\gamma_a)(\xi + \xi_0) = a^{-n}\gamma\Big(\frac{\xi + \xi_0}{a}\Big).$$

Die Funktion $(x, \xi) \to f(\xi)g(x)e^{-ix\xi}$ ist in $L_1(\mathbb{R}^{2n})$, also können wir den Satz von Fubini anwenden. Wir erhalten

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)(x)g(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mathscr{F}g)(x)dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) a^{-n} (\mathscr{F}\gamma)\Big(\frac{x+\xi_0}{a}\Big) dx$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(au - \xi_0)\gamma(u) du. \tag{10}$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir die Substitution $u = \frac{x+\xi_0}{a}$ und die Identität $\mathscr{F}\gamma = \gamma$ verwendet.

Wir nehmen den Grenzwert $a \to 0$. Es gilt dann $\gamma(au) \to 1$ punktweise und $g(x) \to e^{-ix\xi_0}$ punktweise. Wegen $\mathscr{F}f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ können wir majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)(x) g(x) dx \to (\mathscr{F}^2 f)(\xi_0).$$

Um den Grenzwert für die rechte Seite von (10) zu berechnen, verwenden wir $f(au - \xi_0) \to f(-\xi_0)$ punktweise. Da $\|f\|_\infty \cdot \gamma$ eine integrierbare Majorante ist, erhalten wir

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(au - \xi_0)\gamma(u) du \to f(-\xi_0).$$

Also gilt $(\mathscr{F}^2 f)(\xi_0) = f(-\xi_0)$. □

8.8 Definition und Satz. *a) Die Fourier-Transformation $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Bijektion mit*

$$(\mathscr{F}^{-1} g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

b) (Satz von Plancherel.) Es gilt

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathscr{F}f, \mathscr{F}g \rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)} \quad (f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Somit ist $\mathscr{F}|_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}$ eine Isometrie und damit eindeutig zu einem isometrischen Isomorphismus $\mathscr{F}_2 : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzbar, der ebenfalls Fourier-Transformation genannt wird und unitär ist.

Beweis. a) Nach Lemma 8.7 gilt $\mathscr{F}^2 f = \check{f}$, d.h. $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}$. Damit gilt

$$(\mathscr{F}^{-1} g)(x) = (\mathscr{F}^3 g)(x) = (\mathscr{F}g)(-x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

b) Im Beweis von Lemma 8.7 sahen wir

$$\langle \mathscr{F}f, \overline{g} \rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, \overline{\mathscr{F}g} \rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Setze nun $h := \overline{\mathscr{F} g}$, d.h.

$$\overline{g} = \overline{\mathscr{F}^{-1}\overline{h}} = (2\pi)^{-n/2}\overline{\int \overline{h(x)} e^{ix\xi} dx} = \mathscr{F} h.$$

Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ dicht ist, ist $\mathscr{F}_2 : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert, isometrisch. Damit ist der Wertebereich $R(\mathscr{F}_2)$ abgeschlossen. Wegen $R(\mathscr{F}_2) \supset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathscr{F}_2$ surjektiv, also ein isometrischer Isomorphismus und damit unitär. □

8.9 Definition. Für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiere

$$\mathscr{F} u(\varphi) := u(\mathscr{F}\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

8.10 Bemerkung. a) Nach Lemma 8.5 ist $\mathscr{F} u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, und die Abbildung $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist linear, stetig und bijektiv mit $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)}$.

b) Für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ folgt

$$\mathscr{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|} x^\alpha \mathscr{F} u \quad \text{in } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

8.11 Beispiele. a) Sei $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p \le \infty$. Dann ist durch

$$\Lambda_f(\varphi) := \int f(x)\varphi(x) dx \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$$

ein $\Lambda_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{ord} \Lambda_f = 0$ definiert. Für $p = 1$ ist

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\Lambda_f)(\varphi) = \Lambda_f(\mathscr{F}\varphi) &= \int f(x)(\mathscr{F}\varphi)(x) dx \\ &= \int (\mathscr{F} f)(x)\varphi(x) dx = \Lambda_{\mathscr{F} f}(\varphi)\end{aligned}$$

(siehe Beweis von 8.7). Also ist $\mathscr{F}$ die Fortsetzung der gewöhnlichen Fouriertransformation.

b) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die Dirac-Distribution $\delta_a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$(\mathscr{F}\delta_a)(\varphi) = \delta_a(\mathscr{F}\varphi) = (\mathscr{F}\varphi)(a) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-iax}\varphi(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \Lambda_{e_a}(\varphi)$$

mit der L_∞-Funktion $e_a(x) := e^{-iax}$. Damit gilt in etwas laxer Schreibweise

$$\mathscr{F}\delta_a = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-iax}.$$

Insbesondere gilt $\mathscr{F}\delta_0 = (2\pi)^{-n/2} \cdot 1$, d.h. die Fourier-Transformation der Dirac-Distribution ist die Konstante 1. Damit folgt auch (wende $\mathscr{F}^3$ an)

$$\mathscr{F}1 = (2\pi)^{n/2}\delta_0.$$

c) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. P ein Maß auf $\mathcal{A}$ mit $P(\Omega) = 1$. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, d.h. eine messbare Funktion. Der Erwartungswert von X ist definiert als

$$\mathrm{E}X := \int_\Omega X dP = \int_\mathbb{R} \mathrm{id}_\mathbb{R}\, dP \circ X^{-1}$$

mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P \circ X^{-1} =: \nu$ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Für die zugehörige Distribution

$$u(\varphi) := \Lambda_\nu(\varphi) := \int \varphi d\nu \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}))$$

gilt (unter Verwendung des Satzes von Fubini)

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}u(\varphi) = u(\mathscr{F}\varphi) &= \int (\mathscr{F}\varphi)(x) d\nu(x) \\
&= \int_\mathbb{R} (2\pi)^{-1/2} \int_\mathbb{R} \varphi(t) e^{-ixt} dt d\nu(x) \\
&= \int_\mathbb{R} \underbrace{(2\pi)^{-1/2} \int_\mathbb{R} e^{-ixt} d\nu(x)}_{=:\psi_X(t)} \varphi(t) dt \\
&= \Lambda_{\psi_X}(\varphi)
\end{aligned}$$

mit der *charakteristischen Funktion* von X

$$\psi_X(t) := (2\pi)^{-1/2} E(e^{-itX}) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

8.12 Definition und Satz. *Zu $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definiere*

$$(u * \varphi)(x) := u(\tau_x \check{\varphi}).$$

Dann ist $u * \varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, und es gilt:

(i) $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * (D^\alpha \varphi)$.

(ii) $\mathscr{F}(u*\varphi) = (\mathscr{F}\varphi) \cdot (\mathscr{F}u)$. (Beachte, dass $\mathscr{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{F}u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt.)

(iii) $(\mathscr{F}u) * (\mathscr{F}\varphi) = \mathscr{F}(\varphi \cdot u)$.

Auf den (leichten) Beweis dieses Satzes wird hier verzichtet.

b) Paley-Wiener-Sätze

8.13 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt f holomorph, falls die Abbildung $z_j \mapsto f(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_n)$ holomorph ist für jedes $j = 1, \ldots, n$.

8.14 Lemma. *Sei $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ganz (d.h. holomorph in ganz $\mathbb{C}^n$) mit $f|_{\mathbb{R}^n} = 0$. Dann gilt $f = 0$.*

Beweis. Der Fall $n = 1$ ist aus der Funktionentheorie bekannt. Wir zeigen induktiv folgende Aussage:

$$\text{Falls } z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{R} \text{ gilt, so ist } f(z) = 0. \tag{A_k}$$

Die Aussage (A_n), also $k = n$ gilt nach Voraussetzung.

Wir betrachten den Schritt von k nach $k - 1$. Definiere

$$g_k(\lambda) := f(z_1, \ldots, z_{k-1}, \lambda, z_{k+1}, \ldots, z_n).$$

Für $(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ ist $g_k(z_k) = 0$ wegen (A_k). Also gilt $g_k = 0$ auf $\mathbb{R}$. Da g_k eine holomorphe Funktion einer Variablen ist, folgt $g_k(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Somit folgt $f(z) = 0$, falls $z_1, \ldots, z_{k-1} \in \mathbb{R}$ gilt. Dies ist aber die Aussage (A_{k-1}).

Die Aussage (A_0) ist die Behauptung des Lemmas. □

8.15 Satz (Paley-Wiener). *Zu $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ definiere die komplexe Fourier-Transformation*

$$f(z) := (2\pi)^{-n/2} \int \varphi(t) e^{-izt} dt = (\mathscr{F}\varphi)(z) \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

a) Sei $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r$. Dann ist $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, und zu $N \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $\gamma_N > 0$ mit

$$|f(z)| \leq \gamma_N (1 + |z|)^{-N} e^{r|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n). \tag{12}$$

b) Falls eine ganze Funktion $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ die Ungleichung (12) erfüllt, so gilt $f = \mathscr{F}\varphi$ für ein $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq r$.

Beweis. a) Für $|t| \leq r$ ist $|e^{-izt}| \leq e^{r|\operatorname{Im} z|}$. Damit existiert das obige Integral, und die Differentiation unter dem Integral zeigt, dass f holomorph ist. Es ist

$$z^\alpha f(z) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) z^\alpha e^{-izt} dt$$

$$= (2\pi)^{-n/2}(-i)^{|\alpha|}\int D^\alpha\varphi(t)e^{-izt}dt,$$

wobei partiell integriert wurde. Wir erhalten

$$|z^\alpha|\cdot|f(z)|\le c\|D^\alpha\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\cdot e^{r|\operatorname{Im} z|}.$$

Somit folgt

$$(1+|z|^N)|f(z)|\le\gamma_N e^{r|\operatorname{Im} z|},$$

d.h. die Ungleichung (12) gilt.

b) Sei f eine ganze Funktion, welche die Abschätzung (12) erfüllt. Definiere

$$\varphi(t):=(2\pi)^{-n/2}\int f(x)e^{itx}dx=\mathscr{F}^{-1}(f|_{\mathbb{R}^n})(t).$$

Wegen $(1+|x|^N)f(x)\in L_1(\mathbb{R}^n)$ für alle N folgt $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wie im Beweis von Lemma 8.5 (i).

(i) Betrachte das Integral

$$I(b):=\int_{\mathbb{R}} f(a+ib,z_2,\dots,z_n)e^{i(t_1(a+ib)+t_2z_2+\dots+t_nz_n)}da$$

für feste $t_2,\dots,t_n\in\mathbb{R}$ und $z_2,\dots,z_n\in\mathbb{C}$. Wir setzen

$$g(a+ib):=f(a+ib,z_2,\dots,z_n)e^{i(t_1(a+ib)+t_2z_2+\dots+t_nz_n)}.$$

Wir werden zeigen, dass $I(b)=I(0)$ für alle $b\in\mathbb{R}$ gilt. Dazu betrachten wir denn skizzierten Weg Γ. Da g eine ganze Funktion ist, folgt $\int_\Gamma g(z)dz=0$. Wegen (12) gilt

$$|g(a+ib)|\le C|a|^{-N}\cdot e^{r|b|},$$

und damit folgt

$$\int_{\gamma_2} g(z)dz\to 0\quad\text{und}\quad\int_{\gamma_4} g(z)dz\to 0\quad\text{für } R\to\infty.$$

Damit erhalten wir

$$\int_{\gamma_1} g(z)dz+\int_{\gamma_3} g(z)dz\to 0\quad (R\to\infty).$$

Da das erste Integral gegen $I(0)$ und das zweite gegen $-I(b)$ konvergiert für $R\to\infty$, folgt $I(b)=I(0)$.

(ii) Eine Iteration unter Verwendung der Argumente in (i) ergibt, dass für alle $y\in\mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\varphi(t)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x+iy)e^{it(x+iy)}dx\quad(t\in\mathbb{R}^n)$$

gilt.

(iii) Sei nun $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für $y := \frac{\lambda t}{|t|}$ mit $\lambda > 0$ ist $t \cdot y = \lambda |t|$, $|y| = \lambda$ und

$$|f(x+iy)| \cdot |e^{it(x+iy)}| \leq \gamma_N (1+|x|)^{-N} e^{(r-|t|)\lambda},$$

wobei (12) verwendet wurde. Nach (ii) erhalten wir

$$|\varphi(t)| \leq \gamma_N e^{(r-|t|)\lambda} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-N} dx.$$

Für großes N ist das letzte Integral endlich. Nehmen wir nun den Limes $\lambda \to \infty$, so erhalten wir $\varphi(t) = 0$ für alle $|t| > r$.

(iv) Nach Definition gilt $\varphi = \mathscr{F}^{-1}(f|_{\mathbb{R}^n})$. Damit ist $f|_{\mathbb{R}^n} = \mathscr{F}\varphi$. Man beachte, dass dies eine Gleichheit in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist. Somit gilt für alle $z \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$f(z) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) e^{-izt} dt.$$

Aber beide Seiten sind ganze Funktionen. Damit gilt die Gleichheit nach Lemma 8.14 für alle $z \in \mathbb{C}^n$. □

Der Satz von Paley-Wiener gilt in analoger Weise auch für Distributionen. Der folgende Satz wird nicht bewiesen (für einen Beweis siehe etwa das Buch von Rudin [13]).

8.16 Satz (Paley-Wiener für Distributionen)**.** *a) Sei $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$. Definiere*

$$f(z) := u(e_z) \quad (z \in \mathbb{C}^n) \qquad \text{mit } e_z(x) := e^{-ixz}.$$

Dann ist f eine ganze Funktion, und es existieren $\gamma > 0$ und $N > 0$ mit

$$|f(z)| \leq \gamma (1+|z|^N) e^{r|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n). \tag{13}$$

b) Falls eine ganze Funktion f die Ungleichung (13) erfüllt, so existiert ein $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset \{|x| \leq r\}$ und $f(z) = u(e_z) \quad (z \in \mathbb{C}^n)$.

8.17 Korollar. *Sei $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\mathscr{F}g)$ kompakt. Dann ist g eine C^∞-Funktion und sogar die Einschränkung einer ganzen Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Genauer besitzt die Äquivalenzklasse von $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ einen Repräsentanten in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Wende Satz 8.16 an mit $u = \mathscr{F}g \in L_2(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$f(z) = u(e_z) = \int (\mathscr{F}g)(x) e^{-ixz} dx = (2\pi)^{n/2} \mathscr{F}^2 g(z) = (2\pi)^{n/2} g(-z)$$

eine holomorphe Funktion. Die letzte Gleichheit ergibt sich dabei aus dem folgenden Satz. □

8.18 Satz. *Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $g := \mathscr{F} f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $f(x) = \mathscr{F}^{-1} g(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.*

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen (obwohl der Beweis nicht schwer ist).

c) Sobolevräume

8.19 Definition. Für $s \in \mathbb{R}$ sei

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathscr{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F} u \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$$

der (L_2-)Sobolevraum der Ordnung s. Die Norm $\|\cdot\|_s$ ist definiert durch

$$\|u\|_s := \|\mathscr{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F} u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

8.20 Bemerkung. a) Für $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ gilt $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F} u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ und damit $\mathscr{F} u \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist $\mathscr{F} u$ auch für $s < 0$ eine Funktion.

b) Nach Definition gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} &H^0(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n), \\ &H^s(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n) \quad (s \geq 0), \\ &H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^t(\mathbb{R}^n) \quad (s \geq t). \end{aligned}$$

8.21 Lemma. *Sei $s \in \mathbb{N}_0$. Dann ist*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : D^\alpha u \in L_2(\mathbb{R}^n) \quad (|\alpha| \leq s)\},$$

und die Norm

$$\|u\|_s^\sim := \Big(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/2}$$

ist zu $\|\cdot\|_s$ äquivalent.

Beweis. Es gilt nach dem Satz von Plancherel

$$\|u\|_s^\sim = \Big(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\xi^\alpha \mathscr{F} u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/2}.$$

Für $|\alpha| \leq s$ gelten die Abschätzungen

$$|\xi^\alpha| = |\xi_1|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |\xi_n|^{\alpha_n} \leq |\xi|^{|\alpha|} \leq (1 + |\xi|^2)^{s/2}$$

und

$$(1+|\xi|^2)^s = (1+|\xi_1|^2+\dots+|\xi_n|^2)^s \le \text{const} \sum_{|\alpha|\le s} |\xi^\alpha|^2.$$

Damit erhalten wir

$$C_1(1+|\xi|^2)^s \le \sum_{|\alpha|\le s} |\xi^\alpha|^2 \le C_2(1+|\xi|^2)^s,$$

d.h. die Normen $\|\cdot\|_s$ und $\|\cdot\|_s^\sim$ sind äquivalent. □

8.22 Bemerkung. Definiere zu $s \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\Lambda^s : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \Lambda^s u := \mathscr{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathscr{F}u.$$

Dann gilt $H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \Lambda^s u \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$, und nach dem Satz von Plancherel ist

$$\|u\|_s = \|\Lambda^s u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Offensichtlich ist $(\Lambda^s)^{-1} = \Lambda^{-s}$, d.h. $H^s(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{-s}(L_2(\mathbb{R}^n))$. Die Abbildung

$$\Lambda^{-s} : L_2(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

8.23 Lemma. *Der Sobolevraum $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v\rangle_s := \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}u(\xi)\overline{\mathscr{F}v(\xi)}(1+|\xi|^2)^s d\xi.$$

Beweis. Die rechte Seite ist $\langle \Lambda^s u, \Lambda^s v\rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)}$. Nach Bemerkung 8.22 ist aber $\Lambda^s : H^s(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ ein isometrischer Isomorphismus. □

8.24 Beispiel. Wegen $\mathscr{F}\delta = (2\pi)^{-n/2}\cdot 1$ gilt $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathscr{F}\delta \in L_2(\mathbb{R}^n)$ für $s < -\frac{n}{2}$. Damit ist $\delta \in H^s(\mathbb{R}^n)$ für alle $s < -\frac{n}{2}$.

8.25 Satz. *a) Sei $s \in \mathbb{R}$. Die Funktion $\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{s/2}$ ist in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und zu $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existiert $C_\alpha > 0$ mit $|D^\alpha(1+|\xi|^2)^{s/2}| \le C_\alpha(1+|\xi|^2)^{s/2} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$.*

b) Die Inklusion $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ ist stetig für alle $s \in \mathbb{R}$.

c) Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann sind $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}(1+|\xi|^2)^{s/2} = \frac{s}{2}\,(1+|\xi|^2)^{s/2-1}\cdot 2\xi_j,$$

und induktiv zeigt man, dass $D^\alpha(1+|\xi|^2)^{s/2}$ eine Summe von Ausdrücken der Form $P_k(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2-k}$ mit $k \le |\alpha|$ ist, wobei P_k ein Polynom von Grad $\le k$ ist. Dies zeigt Teil a) des Satzes.

b) folgt aus a) und der Definition der Seminormen in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) Nach Teil a) gilt $\Lambda^s(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ für jedes $s \in \mathbb{R}$. Wegen $\Lambda^{-s} = (\Lambda^s)^{-1}$ ist also $\Lambda^s : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Bijektion.

Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist, ist auch $\Lambda^{-s}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\Lambda^{-s}(L_2(\mathbb{R}^n)) = H^s(\mathbb{R}^n)$ bezüglich $\|\cdot\|_s$. Wir haben also die Einbettungen

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n),$$

und jede Einbettung ist stetig und dicht (siehe Satz 7.16). Damit ist auch $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $H^s(\mathbb{R}^n)$. □

8.26 Lemma. *Sei $s \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann ist die Abbildung $D^\alpha\colon H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ stetig.*

Beweis. Wegen

$$|\xi^\alpha|^2(1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|} = \frac{|\xi^\alpha|^2}{(1+|\xi|^2)^{|\alpha|}}\,(1+|\xi|^2)^s \le (1+|\xi|^2)^s$$

gilt

$$\|D^\alpha u\|_{s-|\alpha|} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha|^2(1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|}|\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \le \text{const}\,\|u\|_s.$$

□

8.27 Satz (Einbettungssatz von Sobolev)**.** *Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{R}$ mit $s > k + \frac{n}{2}$. Dann ist jedes $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ (nach Modifikation auf einer Nullmenge) in $C^k(\mathbb{R}^n)$, und*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha u(x)| \le C\|u\|_s$$

mit einer Konstanten $C > 0$, die nicht von u abhängt.

Beweis. (i) Sei $k = 0$ und $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt unter Verwendung von Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |u(x)| &= (2\pi)^{n/2}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\mathscr{F}u(\xi)d\xi\Big| \\ &= (2\pi)^{-n/2}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \big[e^{ix\xi}\mathscr{F}u(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\big]\cdot(1+|\xi|^2)^{-s/2}d\xi\Big| \\ &\le (2\pi)^{-n/2}\Big[\int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}u(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\Big]^{1/2}\cdot\Big[\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\Big]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Wegen $s > \frac{n}{2}$ ist das letzte Integral endlich, d.h. wir haben

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x)| \le C_1\|u\|_s \quad (u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)). \tag{14}$$

(ii) Nach Satz 8.25 ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $H^s(\mathbb{R}^n)$. Zu $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ wähle eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u_n - u\|_s \to 0$ $(n \to \infty)$. Wegen (14) konvergiert u_n gleichmäßig gegen u, d.h. $u \in C(\mathbb{R}^n)$, und die Abschätzung (14) gilt auch für u.

(iii) Sei nun $k > 0$, $|\alpha| \le k$ und $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Nach Lemma 8.26 ist $D^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$. Wegen $s - |\alpha| > \frac{n}{2}$ ist $D^\alpha u \in C(\mathbb{R}^n)$ und $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\alpha u(x)| \le C_1\|D^\alpha u\|_{s-|\alpha|} \le C_2\|u\|_s$, wobei für die letzte Ungleichung wieder Lemma 8.26 verwendet wurde. □

8.28 Korollar. *Es gilt*

$$H^\infty(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Der folgende Satz ist wichtig, wenn man Sobolevräume über beschränkten Gebieten betrachtet.

8.29 Satz (Rellich-Kondrachov)**.** *Sei $a \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und $s > 0$. Dann ist der lineare Operator $A : H^s(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, $u \mapsto a \cdot u$, kompakt.*

Beweis. Da $\Lambda^s : H^s(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ stetig ist, genügt es zu zeigen, dass der Operator $\widetilde{A} \in L(L_2(\mathbb{R}^n))$ mit $\widetilde{A}u := a \cdot \Lambda^{-s}u$ kompakt ist.

(i) Es gilt in $L_2(\mathbb{R}^n)$ die Gleichheit

$$\widetilde{A}u(x) = a(x)\cdot(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\mathscr{F}u(\xi)d\xi.$$

Definiere für $N \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{A}u(x) = a(x)\cdot(2\pi)^{-n/2}\int_{|\xi|\le N} e^{ix\xi}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\mathscr{F}u(\xi)d\xi.$$

Dieses Integral ist konvergent, da $L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ für alle beschränkten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\|(\widetilde{A} - \widetilde{A}_N)u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} &\le \text{const} \max_{x\in\mathbb{R}^n} |a(x)| \Big(\int_{|\xi|\ge N} (1+|\xi|^2)^{-s} |\mathscr{F}u(\xi)|^2 d\xi \Big)^{1/2} \\ &\le \text{const} \max_{x\in\mathbb{R}^n} |a(x)| \cdot N^{-s} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Also gilt $\|\widetilde{A} - \widetilde{A}_N\|_{L(L_2(\mathbb{R}^n))} \to 0 \quad (N \to \infty)$. Da die Menge der kompakten Operatoren in der Operatornorm abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, dass alle $\widetilde{A}_N$ kompakt sind.

(ii) Sei nun $N \in \mathbb{N}$ fest und $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le 1$. Mit Cauchy-Schwarz gilt

$$|\widetilde{A}_N u(x)| \le \text{const} \max_{x\in\mathbb{R}^n} |a(x)| |\Big(\int_{|\xi|\le N} (1+|\xi|^2)^{-s} \Big)^{1/2} \cdot \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. die Menge $K := \{\widetilde{A}_N u \mid u \in L_2(\mathbb{R}^n),\ \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le 1\} \subset L_\infty(X)$ ist beschränkt, wobei $X := \operatorname{supp} a$. Wir erhalten wieder mit Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}|\widetilde{A}_N u(y) - \widetilde{A}_N u(x)| &\le \text{const} \max_{|\xi|\le N} |a(y)e^{iy\xi} - a(x)e^{ix\xi}| \cdot \int_{|\xi|\le N} (1+|\xi|^2)^{-s/2} |\mathscr{F}u(\xi)| d\xi \\ &\le \text{const} \max_{|\xi|\le N} |a(y)e^{iy\xi} - a(x)e^{ix\xi}| \cdot \Big(\int_{|\xi|\le N} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi \Big)^{1/2} \cdot 1.\end{aligned}$$

Also ist K gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist $K \subset C(X)$ kompakt.

(iii) Sei nun $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ eine Folge mit $\|u_k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le 1$. Nach (ii) existiert eine Teilfolge $(u_{k_j})_j$, so dass $(\widetilde{A}_N u_{k_j})_j \subset C(X)$ eine Cauchyfolge ist. Da X kompakt ist, ist $(\widetilde{A}_N u_{k_j})_j$ auch eine Cauchyfolge in $L_2(X)$, d.h. in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Also ist $\widetilde{A}_N$ kompakt. □

Als Hilbertraum ist der Sobolevraum $H^s(\mathbb{R}^n)$ isometrisch isomorph zu seinem eigenen Dualraum bzgl. des Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$. Die folgende Darstellung des Dualraums ist jedoch günstiger.

8.30 Satz (Dualraum von H^s). *Sei $s \in \mathbb{R}$. Für $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ definiere das „L_2-Skalarprodukt“*

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}u(\xi)\overline{\mathscr{F}v(\xi)} d\xi.$$

a) Es gilt $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|_s \cdot \|v\|_{-s} \quad (u \in H^s(\mathbb{R}^n),\ v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n))$

b) Für $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ ist die Abbildung $T_v\colon H^s(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},\ u \mapsto \langle u,v\rangle$ ein stetiges lineares Funktional auf $H^s(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$\|T_v\|_{(H^s(\mathbb{R}^n))'} = \|v\|_{-s}.$$

c) Für jedes $T \in (H^s(\mathbb{R}^n))'$ existiert genau ein $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ mit $T = T_v$.

Beweis. a) Es gilt

$$|\langle u, v\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s/2} |\mathscr{F}u(\xi)| \cdot (1+|\xi|^2)^{-s/2} |\mathscr{F}v(\xi)| d\xi.$$

Die Behauptung folgt damit aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

b) Nach Teil a) ist $T_v \in (H^s(\mathbb{R}^n))'$ und $\|T_v\| \leq \|v\|_{-s}$. Setze $u := \mathscr{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{-s}\mathscr{F}v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\|v\|_{-s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-s} |\mathscr{F}v(\xi)|^2 d\xi = \langle u, v\rangle = T_v(u) \leq \|T_v\| \cdot \|u\|_s = \|T_v\| \cdot \|v\|_{-s}.$$

Also gilt $\|T_v\| \geq \|v\|_{-s}$ und damit Gleichheit in b).

c) Für $T \in H^s(\mathbb{R}^n)'$ existiert ein $w \in H^s(\mathbb{R}^n)$ mit

$$T(u) = \langle u, w\rangle_w = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \mathscr{F}u(\xi)\overline{\mathscr{F}w(\xi)} d\xi.$$

Für $v := \mathscr{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^s\mathscr{F}w$ gilt $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ und $Tu = \langle u, v\rangle = T_v(u)$. Die Eindeutigkeit ist klar wegen $\|v_1 - v_2\|_{-s} = \|T_{v_1} - T_{v_2}\|$ nach Teil b). $\square$

9. Ein kurzer Ausflug in die Welt der Signaltheorie

Die bisher diskutierten Ergebnisse der Distributionstheorie und der Fourier-Transformation besitzen eine Vielzahl von Anwendungen. In diesem kurzen Kapitel soll als Beispiel derartiger Anwendungen auf die Signaltheorie eingegangen werden. Dabei steht der Shannonsche Abtastsatz im Mittelpunkt, der die Grundlage für das Digitalisieren von (bandbegrenzten) Signalen darstellt.

Unter einem Signal wird hier eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ verstanden. Dabei wird (für $n=1$) $f(t)$ als der Wert des Signals zur Zeit t aufgefasst. Die Signaltheorie und ihre stochastische Erweiterung (in der ein Signal ein zeitkontinuierlicher stochastischer Prozess ist) haben fundamentale Bedeutung in den Anwendungen, z.B. für Fernseh- und Mobilfunksignale, drahtgebundene Kommunikation, Akustik, Bildverarbeitung. Im folgenden schreiben wir auch $\hat{u}$ statt $\mathscr{F}u$.

9.1 Definition. Eine Distribution $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt bandbegrenzt mit Bandbreite $b>0$ oder b-bandbegrenzt, falls

$$\operatorname{supp}\hat{u} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \le b\}.$$

9.2 Bemerkung. Nach dem Satz von Paley-Wiener ist eine bandbegrenzte temperierte Distribution eine C^∞-Funktion. Insbesondere nehmen wir für bandbegrenzte L_2-Funktionen im folgenden stets den C^∞-Repräsentanten. In diesem Sinn ist für eine bandbegrenzte Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ auch der Wert $f(x)$ an einer Stelle wohldefiniert.

9.3 Beispiel. Für die charakteristische Funktion $\chi := \chi_{[-1,1]^n}$ gilt

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}^{-1}\chi)(x) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{[-1,1]^n} e^{ix\xi}d\xi = (2\pi)^{-n/2}\prod_{j=1}^n \frac{e^{ix_j\xi_j}}{ix_j}\Big|_{\xi_j=-1}^{1}\\ &= (2\pi)^{-n/2}\prod_{j=1}^n \frac{2(e^{ix_j}-e^{-ix_j})}{2ix_j} = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{n/2}\operatorname{sinc}(x)\end{aligned}$$

mit

$$\operatorname{sinc}(x) := \prod_{j=1}^n \frac{\sin x_j}{x_j}.$$

Damit ist sinc eine 1-bandbegrenzte Funktion. Setzt man wieder $\operatorname{sinc}_a(x) := \operatorname{sinc}(ax)$ für $a>0$, so gilt

$$(\mathscr{F}\operatorname{sinc}_a)(\xi) = a^{-n}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{n/2}\chi_{[-a,a]^n}(\xi).$$

Für $n = 1$ heißt die sinc-Funktion auch der ideale Tiefpassfilter.

9.4 Lemma. *Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ b-bandbegrenzt, und sei $h \leq \frac{\pi}{b}$. Dann gilt in $L_2([-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n)$ die Gleichheit*

$$(\mathscr{F} f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(kh) e^{-ihk\xi}.$$

Beweis. Die Funktionen $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ mit

$$\varphi_k(\xi) := (2\pi)^{-n/2} h^{n/2} e^{-ikh\xi}$$

bilden eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $H := L_2([-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n)$. Da $\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-b, b]^n \subset [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n$ gilt (beachte $b \leq \frac{\pi}{h}$), gilt nach Teil 1 der Vorlesung in H die Entwicklung

$$\hat{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle \hat{f}, \varphi_k \rangle_H \varphi_k.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\langle \hat{f}, \varphi_k \rangle &= (2\pi)^{-n/2} h^{n/2} \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} \hat{f}(\xi) e^{ikh\xi} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} h^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ikh\xi} d\xi \\
&= h^{n/2} (\mathscr{F}^{-1} \hat{f})(hk) = h^{n/2} f(hk).
\end{aligned}$$

Hier wurde $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und Satz 8.18 verwendet. Also gilt

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(kh) e^{-ihk\xi}$$

in H. □

Der folgende Satz ist einer der berühmtesten Sätze der Signaltheorie.

9.5 Satz (Shannonscher Abtastsatz)**.** *Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ b-bandbegrenzt. Sei $h \leq \frac{\pi}{b}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(x - kh)\Big).$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in $\mathbb{R}^n$.

Beweis. (i) Nach Lemma 9.4 gilt in $L_2(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ihk\xi} \chi(\xi)$$

mit $\chi := \chi_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n}$. Da die Reihe in $L_2(\mathbb{R}^n)$ konvergiert und $\mathscr{F}$ stetig in $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist, gilt in $L_2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathscr{F}^{-1}\hat{f}(x) = \\ &= (2\pi)^{-n/2}h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\mathscr{F}^{-1}[e^{ihk\xi}\chi](x) \\ &= (2\pi)^{-n/2}h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)(\mathscr{F}^{-1}\chi)(x-hk) \\ &= (2\pi)^{-n/2}h^n \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{n/2}\Big(\frac{\pi}{h}\Big)^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\operatorname{sinc}_{\frac{\pi}{h}}(x-hk) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\operatorname{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(x-kh)\Big). \end{aligned}$$

Dabei wurde Beispiel 9.3 verwendet.

(ii) Um die punktweise Konvergenz der Reihe zu zeigen, verwenden wir für $\frac{\pi}{h}$-bandbegrenztes $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ die Gleichheit

$$h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |g(hk)|^2 = \sum_k |\langle \hat{g}, e_k\rangle_H|^2 = \|\hat{g}\|_H^2 = \|\hat{g}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Dabei wurde die Besselsche Gleichung in H und der Satz von Plancherel in $L_2(\mathbb{R}^n)$ verwendet. Wir setzen speziell $g = \operatorname{sinc}(\frac{\pi}{h}(x-\cdot))$ für festes x. Wegen $g = \operatorname{sinc}(\frac{\pi}{h}\cdot - \frac{\pi}{h}x)$ ist die Fourier-Transformierte gegeben durch

$$\hat{g}(\xi) = \Big(\frac{\pi}{h}\Big)^{-n}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{n/2}\chi_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n}(\xi)e^{-i\frac{\pi}{h}x\xi}.$$

Damit gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big|\operatorname{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(x-hk)\Big)\Big|^2 = c_1 \cdot \|\chi_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} =: c_2$$

mit einer von x unabhängigen Konstanten c_2. Mit Cauchy-Schwarz gilt

$$\sum_{|k|\geq N}\Big|f(hk)\operatorname{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(x-hk)\Big)\Big| \leq \underbrace{\Big(\sum_{|k|\geq N}|f(hk)|^2\Big)^{1/2}}_{\to 0\ (N\to\infty)} \cdot \underbrace{\Big(\sum_{|k|\geq N}\Big|\operatorname{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(x-hk)\Big)\Big|^2\Big)^{1/2}}_{\leq\sqrt{c_1}}.$$

Damit konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig in x. Insbesondere ist der Limes stetig in x.

Nach (i) ist f der L_2-Limes der Reihe im Abtastsatz. Nach (ii) konvergiert diese Reihe punktweise gegen eine stetige Funktion, und damit gilt punktweise Gleichheit zunächst fast überall und schließlich, da auch f stetig ist, für alle $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

9.6 Korollar. *Die Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ sei bandbegrenzt und besitze kompakten Träger. Dann ist $f = 0$.*

Beweis. Da der Träger von f kompakt ist, reduziert sich die Reihe im Shannonschen Abtastsatz auf eine endliche Summe. Die Funktion f ist also eine endliche Linearkombination von sinc-Funktionen, d.h. $\hat{f}$ ist eine endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen. Andererseits ist $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, da f kompakten Träger besitzt. Dies ist nur möglich, falls $\hat{f} = 0$ und damit $f = 0$ gilt. □

Nur für $\frac{\pi}{h} \geq b$, d.h. für $h \leq \frac{\pi}{b}$, gibt es keine Überlappungen, und die Funktion kann eindeutig rekonstruiert werden. Im Falle $h < \frac{\pi}{b}$ spricht man von Überabtastung (oversampling), im Falle $h > \frac{\pi}{b}$ von Unterabtastung (undersampling).

9.7 Bemerkung. a) Es gibt eine graphische Veranschaulichung des Beweises des Abtastsatzes.

b) In Anwendungen heißt $h =: T_s$ das Abtast- oder Sampling-Intervall, und $f_s := \frac{1}{T_s}$ die Abtastrate oder Symbolrate. Der Spektralbereich (oder Spektrum) eines Signals $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird definiert als $\frac{1}{2\pi}\operatorname{supp} f$. Bei einer b-bandbegrenzten Funktion ist das maximal auftretende Spektrum also $\frac{b}{2\pi} =: f_{\max}$. Die Abtastbedingung lautet damit $T_s \leq \frac{1}{2f_{\max}}$ oder $f_s \geq 2f_{\max}$.

c) Sei $h \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{h} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann wird durch $M_h f := \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}h \cdot \mathscr{F}f)$ ein stetiger linearer Operator $M_h : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ definiert. Nach 8.12 gilt $M_h f = (2\pi)^{-n/2} h * f$. In den Anwendungen spricht man von einem Filter. Dabei heißt h die Impulsantwort (wegen $\delta * h = h$ für $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$), und $\mathscr{F}h$ das Frequenzbild des Filters. Korollar 9.6 zeigt, dass es keinen Filter gibt, der im Zeit- und im Frequenzbereich kompakten Träger hat.

9.8 Beispiel (Datenraten bei GSM)**.** Das heute in Europa übliche Mobilfunksystem GSM (in der fullrate-Version) besitzt folgende Datenraten:

- Datenbitrate nach Digitalisierung der Sprache: 8.0 kbit/s,
- Datenbitrate nach Sprachkodierung: 13.0 kbit/s,
- Datenbitrate nach Kanalkodierung: 22.8 kbit/s,
- Bitrate nach Hinzufügen von Pilotsymbolen: 31.3 kbit/s,
- Bitrate pro Kanal (8 Benutzer, jeder 13. Frame ist Kontrollframe): $8 \cdot \frac{13}{12} \cdot 31.3$ kbit/s = 271 kbit/s,
- Symbolrate (1 Symbol = 1 bit): $f_s = 271$ kbit/s

In der heute verbreiteten halfrate-Version stehen pro Benutzer nach Kanalkodierung nur 11.4 kbit/s zur Verfügung, bei gleicher Symbolrate. Die mit dieser Symbolrate übertragenen Signale sind bandbegrenzt mit einer spektralen Bandbreite von

$f_{\max} = \frac{f_s}{2}$. Zur Übertragung braucht man also (im Basisband) einen Kanal mit Frequenzen $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$. Dieses Signal wird durch Modulation zu einem hochfrequenten Signal (HF-Signal). Die Modulation besteht dabei aus der Multiplikation mit e^{if_0x} mit der Trägerfrequenz f_0. Typische Werte sind

- $f_0 \approx 1800$ MHz (für O_2, T-D1),
- $f_0 \approx 900$ MHz (für e-plus).

Ein Kanal in diesem Frequenzband müsste somit 271 kHz breit sein. In GSM sind die Kanäle nur 200 kHz breit, man hat also Überlappungen. Es gibt 375 Kanäle im oberen Frequenzband und 125 Kanäle im unteren Frequenzband.

Literatur

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York 1975.

[2] Bauer, H.: Ma und Integrationstheorie, de Gruyter, Berlin 1990.

[3] Diestel, J., Uhl, J. J.: Vector measures. Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[4] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators. I. General Theory. Interscience Publishers, New York 1963.

[5] Gohberg, I., Goldberg, S.: Basic operator theory. Birkhäuser Boston 1981.

[6] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: Classes of linear operators. Vol. I. Birkhäuser Basel 1990.

[7] Halmos, P.: A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin 1974.

[8] Heuser, H.: Funktionalanalysis. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart 1986.

[9] Hirzebruch, F., Scharlau, W.: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibliogr. Inst. Mannheim 1971.

[10] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer Berlin 1976.

[11] Pazy, A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, Berlin et al. 1983.

[12] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Academic Press San Diego 1980.

[13] Rudin, W.: Functional analysis. McGraw-Hill New York 1973.

[14] Werner, D.: Funktionalanalysis (5., erw. Aufl.). Springer Berlin 2005.

[15] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin et al. 1965.