Skript zur Vorlesung

Funktionalanalysis

Sommersemester 2004

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 25. 4. 2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das vorliegende Skript gibt den Inhalt der Vorlesung Funktionalanalysis vom Sommersemester 2004 an der Universität Konstanz wieder. Es handelt sich dabei um eine fast wörtliche Darstellung des präsentierten Stoffes.

Die Vorlesung richtete sich an Studierende des sechsten und achten Semesters und war (obwohl die „I“ im Titel fehlt) von Beginn an als erster Teil einer zweisemestrigen Vorlesung geplant. Die Vorlesung war vierstündig und wurde durch eine zweistündige Übung ergänzt; die Übungsaufgaben finden sich im Anhang des Skriptes wieder.

Eine zweisemestrige, jeweils vierstündige Vorlesung zur Funktionalanalysis zu halten, ist heute ein gewisser Luxus geworden. Dies gibt dem Dozenten die Möglichkeit, manche Themen zu vertiefen und nicht nur durch den Stoff zu hetzen. Andererseits besuchte ein Teil der Studierenden nur den ersten Teil, was diese Freiheit doch wieder etwas einschränkte.

Das Ziel des vorliegenden ersten Teils war es, Standardaussagen der linearen Funktionalanalysis bis hin zum Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren zu diskutieren. Dabei konnte ich nicht auf die Lebesguesche Integrationstheorie zurückgreifen, da diese nicht allen Studierenden vertraut war. Ich wählte deshalb den Weg über Spektralscharen, welche das Riemann-Stieltjes-Integral verallgemeinern und recht elementar definiert werden können. Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren, einer der wichtigsten Sätze der Funktionalanalysis überhaupt, folgte dann aus der beschränkten Version über die Cayley-Transformation und unitäre Operatoren. Innerhalb des Stoffes lag ein gewisses Gewicht auf der Operatortheorie, insbesondere in der Diskussion unbeschränkter Operatoren in Banachräumen.

Zu Beginn jeden Kapitels befindet sich ein kleiner Absatz, der kurz erläutert, um was es in diesem Abschnitt der Vorlesung geht. Damit soll auch etwas die Frage „was soll's“ (oder genauer „warum wird das jetzt hier behandelt“) beantwortet werden, eine Frage, die in der Mathematik zu wenig diskutiert wird.

Ich hoffe, dass das vorliegende Skript den Studierenden bei der Nachbereitung des Stoffes hilft, und möchte mich hier noch bei Frau Gerda Baumann für ihre Hilfe bei der Anfertigung des Skriptes herzlich danken. Ich bedanke mich auch bei meinen Studenten, die mir fleißig geholfen haben, Fehler im Skript zu entdecken, und dies hoffentlich auch in Zukunft tun werden.

Konstanz, den 25. 4. 2005 — Robert Denk

I. Hilberträume

1. Grundbegriffe

In diesem Abschnitt werden wichtige elementare Eigenschaften von Hilberträumen zusammengefasst. Das einzige, was über eine elementare Darstellung hinausgeht, ist die direkte Summe von Hilberträumen.

Wir beginnen mit der Definition eines Hilbertraums. Im folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1 Definition. a) Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum E, versehen mit einer Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$, heißt ein Vektorraum mit Skalarprodukt oder ein Prähilbertraum, falls gilt:
(i) Für alle $y \in E$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle x, y \rangle$ linear.
(ii) Für alle $x, y \in E$ gilt $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
(iii) Für alle $x \in E$ gilt $\langle x, x \rangle \geq 0$. Es gilt $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

b) Zwei Vektoren $x, y \in E$ heißen orthogonal (in Zeichen $x \perp y$), falls $\langle x, y \rangle = 0$ gilt. Eine Familie $\{x_i\}_{i \in I}$ von Vektoren heißt orthonormal, falls gilt:

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Die Größe $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ heißt die Norm von x.

Die Bezeichnung in Teil c) wird später seine Berechtigung finden.

1.2 Beispiele. a) $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ mit euklidischem Skalarprodukt.
b) $C([a, b])$ mit $\langle f, g \rangle := \int\limits_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$.

1.3 Satz (Pythagoras). a) *Seien $x, y \in E$ orthogonal. Dann gilt*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

b) *Sei $\{x_n\}_{n=1}^N$ orthonormal. Dann gilt*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2 + \Big\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n \rangle x_n \Big\|^2.$$

Beweis. a) Es gilt $\|x+y\|^2 = \langle x+y,\ x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle$.

b) Durch Nachrechnen sieht man $Px := \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n\rangle x_n \perp x - Px$. Damit $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x-Px\|^2$. Es gilt nach a):

$$\|Px\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|\langle x, x_n\rangle x_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n\rangle|^2 \cdot \underbrace{\|x_n\|^2}_{=1}.$$

□

1.4 Korollar. a) (Besselsche Ungleichung). *Sei $\{x_n\}_{n=1}^N$ orthonormal. Dann ist*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n\rangle|^2 \quad (x \in E).$$

b) (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). *Es gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in E).$$

Beweis. a) folgt direkt aus Satz 1.3 b).

b) Für $y \neq 0$ setze $x_1 := \frac{y}{\|y\|}$. Dann ist $\{x_1\}$ orthonormal, und aus a) folgt

$$\|x\|^2 \geq |\langle x, x_1\rangle|^2 = \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\ .$$

□

1.5 Satz (Parallelogramm-Identität). *Für $x, y \in E$ gilt*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

1.6 Satz. *Sei E Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann ist $(E, \|\cdot\|)$ normierter Raum, d.h. es gilt*

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in E),$$

$$\|x\| \geq 0 \quad (x \in E), \quad \|x\| = 0 \iff x = 0,$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Beweis. Nur die Dreiecksungleichung ist nichttrivial. Unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2\\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2\\ &= (\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

□

1.7 Definition. a) Eine Abbildung $d : E\times E \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, falls gilt:

$$\begin{aligned}&d(x,y)\ge 0 \quad (x,y\in E), \quad d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y,\\ &d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y) \quad (x,y,z\in E).\end{aligned}$$

Sei nun (E,d) metrischer Raum.

b) (Konvergenz) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ konvergiert gegen x (in Zeichen $x_n \to x$), falls

$$d(x_n,x)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

c) Eine Teilmenge $X\subset E$ heißt beschränkt, falls

$$\exists\, C>0 \quad \forall\, x\in X : d(x,0)\le C.$$

d) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E$ heißt Cauchy-Folge, falls

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}\ \forall\, n,m\ge n_0 : \quad d(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

e) Der metrische Raum (E,d) heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

1.8 Bemerkung. Sei (E,d) metrischer Raum.

a) Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.

b) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt, denn:

$$\exists\, n_0\in\mathbb{N}\ \forall\, n,m\ge n_0 : \quad d(x_n,x_m)<1.$$

Damit gilt für $n\ge n_0$:

$$d(x_n,0)\le \underbrace{d(x_n,x_{n_0})}_{\le 1} + d(x_{n_0},0)\le 1+d(x_{n_0},0) =: C.$$

1.9 Beispiele. a) $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist nicht vollständig.

b) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Definiere $\ell^\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{K} \text{ beschränkt}\}$ und $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)| (< \infty)$. Dann ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\ell^\infty(X)$.

Wir zeigen, dass der Raum $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist:

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, d.h.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad (n, m \geq n_0).$$

Damit ist für jedes feste $x \in X$ die Folge $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$, d. h. $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{K}$ existiert. Als Cauchy-Folge ist $\|f_n\|_\infty \leq C < \infty$ nach Bemerkung 1.8 b).

Somit gilt

$$|f(x)| = \lim_n \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq \|f_n\|_\infty \leq C} \leq C \quad (x \in X),$$

d.h. $\|f\|_\infty < \infty$ und damit $f \in \ell^\infty(X)$.

1.10 Bemerkung. Sei (E, d) vollständiger metrischer Raum, $F \subset E$. Dann ist $(F, d\big|_F)$ genau dann vollständig, wenn F abgeschlossen ist.

Beweis. (i) Sei F abgeschlossen, d.h. $\overline{F} = F$. Sei $(x_n)_n \subset F$ Cauchy-Folge. Dann existiert $x := \lim_n x_n \in E$, und es folgt $x \in \overline{F} = F$.

(ii) Sei F vollständig und $x \in \overline{F}$. Nach Definition von $\overline{F}$ existieren $x_n \in F$ mit $x = \lim_n x_n$. Damit ist $(x_n)_n$ Cauchy-Folge in F, d.h. $x \in F$. Insgesamt $\overline{F} = F$. □

1.11 Satz. *Sei (E, d) metrischer Raum, $x_0 \in E$. Definiere zu $x \in E$ die Abbildung $d_x : E \to \mathbb{K}$ durch $d_x(y) := d(x, y) - d(y, x_0)$. Dann ist $E \to \ell^\infty(E)$, $x \mapsto d_x$ eine Isometrie, d.h. $\|d_a - d_b\|_\infty = d(a, b) \quad (a, b \in E)$.*

Beweis. Es gilt

$$|d_a(x) - d_b(x)| = |d(a, x) - d(b, x)| \leq d(a, b),$$

daher ist $\|d_a - d_b\|_\infty \leq d(a, b)$. Wegen $|d_a(b) - d_b(b)| = d(a, b)$ gilt „=“. Beachte $d_a \in \ell^\infty(E)$ wegen

$$|d_a(y)| = |d(a, y) - d(y, x_0)| \leq d(a, x_0).$$

□

Damit läßt sich jeder metrische Raum (E,d) auffassen als Teil eines vollständigen metrischen Raumes $(\widetilde{E},\widetilde{d})$, in dem er dicht liegt. Setze dazu $\widetilde{E} := \overline{\{d_x : x \in E\}}$ (Abschluß in $\ell^\infty(E)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$).

1.12 Definition. Ein vollständiger Vektorraum mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum. Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

Durch $\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle := \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle$ mit $\widetilde{x} = \lim\limits_n x_n$, $\widetilde{y} = \lim\limits_n y_n$ wird auf dem oben definierten $\widetilde{E} \supset E$ ein Skalarprodukt erklärt.

Direkte Summen von Hilberträumen

Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge und $\alpha_i \geq 0 \quad (i \in I)$. Definiere

$$\sum_{i\in I} \alpha_i := \sup \Big\{ \sum_{i \in I_0} \alpha_i : I_0 \subset I \text{ endlich} \Big\}.$$

Falls $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i < \infty$, so ist $\{i \in I : \alpha_i \neq 0\}$ höchstens abzählbar, denn

$$\{i \in I : \alpha_i \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{i \in I : \alpha_i > \frac{1}{n}\}}_{\text{endlich}}.$$

Sei nun $\{E_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Hilberträumen. Definiere die direkte Hilbertraumsumme

$$E := \bigoplus_{i\in I} E_i := \Big\{ (x_i)_{i\in I} : x_i \in E_i, \sum_{i\in I} \|x_i\|_{E_i}^2 < \infty \Big\}.$$

Durch $(x_i)_i + (y_i)_i := (x_i + y_i)_i$ und $\alpha(x_i)_i := (\alpha x_i)_i$ wird E zu einem Vektorraum. Definiere

$$\langle (x_i)_i, (y_i)_i \rangle := \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i \rangle_{E_i}.$$

1.13 Bemerkung. Für $(x_i)_i, (y_i)_i \in E$ gilt $\sum\limits_{i\in I} |\langle x_i, y_i\rangle_{E_i}| < \infty$, denn für alle endlichen $I_0 \subset I$ gilt unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I_0} |\langle x_i, y_i \rangle_{E_i}| &\leq \sum_{i\in I_0} \|x_i\|_{E_i} \cdot \|y_i\|_{E_i} \\
&\leq \Big(\sum_{i\in I_0} \|x_i\|_{E_i}^2 \Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{i\in I_0} \|y_i\|_{E_i}^2 \Big)^{1/2} \\
&\leq \|x\|_E \cdot \|y\|_E < \infty.
\end{aligned}$$

1.14 Satz. *Sei $\{E_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Hilbertraäumen. Dann ist $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$ ebenfalls Hilbertraum.*

Beweis. Die Eigenschaften eines Skalarprodukts sind offensichtlich, so gilt z.B.:

$$\langle \alpha x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle \alpha x_i, y_i\rangle_{E_i} = \sum_i \alpha\langle x_i, y_i\rangle_{E_i} = \alpha\langle x, y\rangle.$$

Zu zeigen ist also nur noch die Vollständigkeit. Sei $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i\in I}$ eine Cauchy-Folge in E. Wegen

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|_{E_i}^2$$

ist $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in E_i, d.h. $x_i^{(n)} \to x_i$ in E_i.

Für $I_0 \subset I$ endlich, $n \in \mathbb{N}$ fest, gilt:

$$\sum_{i\in I_0} \|x_i^{(n)} - x_i\|_{E_i}^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{i\in I_0} \|x_i^{(n)} - x_i\|_{E_i}^2 \le \limsup_{m\to\infty} \sum_{i\in I} \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|_{E_i}^2$$

und damit

$$\sum_{i\in I} \|x_i^{(n)} - x_i\|_{E_i}^2 \le \limsup_{m\to\infty} \|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2.$$

Nimmt man nun den Limes Superior für $n \to \infty$, so erhält man

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i\in I} \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|_{E_i}^2 \le \limsup_{n,m\to\infty} \|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 = 0,$$

da $(x^{(n)})_n$ eine Cauchy-Folge ist. Damit gilt $x^{(n)} \to x$ in E.

Wegen

$$\sum_{i\in I_0} \|x_i\|_{E_i}^2 \le \sum_{i\in I_0} 2\big(\|x_i^{(n)}\|_{E_i}^2 + \|x_i - x_i^{(n)}\|_{E_i}^2\big) \le 2\|x^{(n)}\|^2 + 2\|x - x^{(n)}\|^2 < \infty$$

folgt $x \in E$. □

1.15 Definition. Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge, E_0 ein Hilbertraum und $E_i := E_0 \quad (i \in I)$. Definiere $\ell^2(I; E_0) := \bigoplus_{i\in I} E_i$. Speziell schreibt man

$$\begin{aligned} \ell^2(I) &:= \ell^2(I; \mathbb{C}) \\ \ell^2 &:= \ell^2(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

2. Der Satz von Riesz

Auch dieser kurze Abschnitt ist noch sehr elementar. Inhalt ist im wesentlichen die Beschreibung des Elements mit kleinstem Abstand durch eine orthogonale Projektion.

Sei $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum.

2.1 Definition. a)$M \subset E$ heißt konvex, falls gilt

$$\forall\, x, y \in M\ \forall\, \alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha) y \in M.$$

b) Zu $M \subset E$ heißt

$$M^\perp := \{x \in E \mid \forall\, y \in M : \langle x, y \rangle = 0\}$$

das orthogonale Komplement von M.

2.2 Bemerkung. $M^\perp$ ist abgeschlossener linearer Teilraum von E. Es gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$. Denn sei $x \in M \cap M^\perp$. Dann ist $\langle x, x \rangle = 0$, d.h. $x = 0$

2.3 Lemma. *Falls $M \subset E$ konvex und abgeschlossen ist, so existiert genau ein $x \in M$ mit $\|x\| \le \|y\|$ für alle $y \in M$.*

Beweis. Sei $d := \inf\{\|y\| : y \in M\}$. Wähle eine Folge $(y_n)_n \subset M$ mit $\|y_n\| \to d$.

Falls $d = 0$, gilt $y_n \to 0$ und wegen $M = \overline{M}$ ist $0 \in M$.

Falls $d > 0$, schreiben wir unter Verwendung der Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4 \cdot \|\underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in M}\|^2 \\ &\le 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4d^2 \to 0,\end{aligned}$$

da $\|y_n\| \to d$. Daher ist $(y_n)_n$ Cauchy-Folge. Da M vollständig ist, existiert $x := \lim\limits_n y_n \in M$. Es gilt $\|x\| = \lim\limits_n \|y_n\| = d$. Damit folgt $\|x\| \le \|y\|$ für alle $y \in M$.

Eindeutigkeit: Sei $\|x_1\| \le \|y\|, \|x_2\| \le \|y\| \quad (y \in M)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\|^2 &= 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 - 4\|\frac{x_1 + x_2}{2}\|^2 \\ &\le 2\underbrace{(\|x_1\|^2 - \|\frac{x_1 + x_2}{2}\|^2)}_{\le 0} + 2\underbrace{(\|x_1\|^2 - \|\frac{x_1 + x_2}{2}\|^2)}_{\le 0} \le 0.\end{aligned}$$

$\square$

2.4 Satz (Projektionssatz). *Sei $M = \overline{M} \subset E$ linearer Teilraum. Dann existiert für alle $x \in E$ eine eindeutige Zerlegung $x = m + m'$ mit $m \in M, m' \in M^\perp$.*

Beweis. Wähle $m' \in x + M$ mit $\|m'\| \le \|x + y\| \quad (y \in M)$, und $m := x - m'$.

(i) Wir zeigen $m' \in M^\perp$. Es gilt $\|m'\|^2 \le \|m' + ty\|^2 \quad (t \in \mathbb{K}, y \in M)$. Andererseits ist

$$\|m' + ty\|^2 = \|m'\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle m', ty\rangle + |t|^2\|y\|^2.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt somit

$$|t|^2\|y\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\langle m', y\rangle \le,$$

also $\mathrm{Re}\langle m', ty\rangle = 0$.

Ersetzt man t durch it, so erhält man

$$|t|^2\|y\|^2 + 2t\,\mathrm{Im}\langle m', y\rangle \le 0,$$

also $\mathrm{Im}\langle m', y\rangle = 0$.

(ii) Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $x = m + m' = z + z'$ mit $m, z \in M, m', z' \in M^\perp$. Dann ist $m - z = z' - m' \in M \cap M^\perp = \{0\}$, d. h. $m = z, m' = z'$. □

2.5 Satz. *Seien E, F normierte Räume, $T : E \to F$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) *T ist beschränkt, d. h. $\exists\, c > 0 : \|Tx\|_F \le c\|x\|_E \quad (x \in E)$.*

(ii) *$T : E \to F$ ist stetig.*

(iii) *$T : E \to F$ ist stetig an der Stelle $0 \in E$.*

Beweis. (i)⇒(ii). Sei $K_\delta(x) := \{y \in E : \|x - y\| > \delta\}$ für festes $x \in E$. Für $y \in K_\delta(0)$ ist nach (i)

$$\|Ty\|_F \le c\|y\|_E < c\delta.$$

Damit ist für $\|x - y\| < \delta$, d.h. für $y \in K_\delta(x)$

$$\|Ty - Tx\|_F = \|T(y - x)\|_F < c\delta.$$

Also ist T stetig (zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{c}$).

(ii)⇒(iii) ist trivial.

(iii)⇒(i). Da T stetig an der Stelle 0 ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $TK_\delta(0) \subset K_1(0)$. Damit $\|T(\delta\frac{x}{\|x\|_E})\|_F \le 1 \quad (x \in E)$, d.h. es gilt

$$\delta\,\frac{1}{\|x\|_E}\,\|Tx\|_F \le 1 \quad (x \in E)$$

und damit

$$\|Tx\|_F \leq \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{=:c} \|x\|_E \quad (x \in E).$$

□

2.6 Definition. Seien E, F normierte Räume. Der Raum

$$L(E,F) := \{T : E \to F \mid T \text{ linear, beschränkt}\}$$

heißt der Raum der linearen beschränkten Operatoren von E nach F. Wir setzen $L(E) := L(E,E)$. Der Raum $E' := L(E, \mathbb{K})$ heißt der (topologische) Dualraum von E.

Für $T \in L(E,F)$ definiert man

$$\|T\| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E,\, \|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.$$

$\|T\|$ heißt die Operatornorm von T.

Oft schreibt man Tx statt $T(x)$. Sei

$$\begin{aligned} \ker T &:= N(T) := \{x \in E : Tx = 0\}, \\ \operatorname{Im} T &:= R(T) := \{Tx : x \in E\}. \end{aligned}$$

2.7 Bemerkung. Es gilt

$$\|Tx\|_F \leq \|T\| \cdot \|x\|_E \quad (x \in E)$$

und

$$\|T\| = \inf\{C > 0 | \; \forall\, x \in E : \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E\}.$$

2.8 Satz (von Riesz). *Sei E Hilbert-Raum und $T \in E'$. Dann existiert genau ein $x_T \in E$ mit*

$$Tx = \langle x, x_T \rangle \quad (x \in E).$$

Es gilt $\|T\| = \|x_T\|_E$. Die Abbildung $E' \to E$, $T \mapsto x_T$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear.

Beweis. $M := \ker T = T^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter der stetigen Abbildung T. Damit ist $E = M \oplus M^{\perp}$.

(i) Falls $M = E$, folgt $T = 0$. Wähle $x_T := 0$.

(ii) Sei $M \neq E$. Wähle $y \in M^\perp \setminus \{0\}$. Wegen $M \cap M^\perp = \{0\}$ ist dann $Ty \neq 0$. Setze $x_T := \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot y$. Dann gilt $\|x_T\|^2 = \frac{|Ty|^2}{\|y\|^2}$ und

$$Tx_T = \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot Ty = \|x_T\|^2.$$

Für $x \in M$ gilt $\langle x, x_T\rangle = 0 = Tx$ wegen $x_T \in M^\perp$.

Für $x \notin M$ gilt

$$T\Big(x - \frac{Tx}{Tx_T} \cdot x_T\Big) = Tx - \frac{Tx}{Tx_T} \cdot Tx_T = 0,$$

d.h. $\widetilde{x} := x - \frac{Tx}{Tx_T} \cdot x_T \in M$.

Daher folgt $T\widetilde{x} = \langle \widetilde{x}, x_T\rangle (= 0)$. Wir erhalten

$$Tx = T\widetilde{x} + \frac{Tx}{Tx_T} \cdot \underbrace{Tx_T}_{\|x_T\|^2} = \langle \widetilde{x}, x_T\rangle + \Big\langle \frac{Tx}{Tx_T} \cdot x_T, x_T \Big\rangle = \langle x, x_T\rangle.$$

(iii) Nach Cauchy-Schwarz ist $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |\langle x, x_T\rangle| \leq \|x_T\|$. Andererseits haben wir $\|T\| \geq |T(\frac{x_T}{\|x_T\|})| = \|x_T\|$.

(iv) Eindeutigkeit: Sei $Tx = \langle x, x_T\rangle = \langle x, \widetilde{x}_T\rangle \quad (x \in E)$. Dann gilt

$$0 = \langle x, x_T - \widetilde{x}_T\rangle \quad (x \in E).$$

Wähle $x = x_T - \widetilde{x}_T$ und erhalte $\|x_T - \widetilde{x}_T\| = 0$.

(v) Die Abbildung ist konjugiert linear: Sei $T = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$. Dann ist

$$\begin{aligned} Tx &= \alpha_1 T_1 x + \alpha_2 T_2 x = \alpha_1 \langle x, x_{T_1}\rangle + \alpha_2 \langle x, x_{T_2}\rangle = \\ &= \langle x, \overline{\alpha}_1 x_{T_1}\rangle + \langle x, \overline{\alpha}_2 x_{T_2}\rangle = \langle x, \overline{\alpha}_1 x_{T_1} + \overline{\alpha}_2 x_{T_2}\rangle = \langle x, x_T\rangle. \end{aligned}$$

(vi) Die Abbildung ist surjektiv: Zu $y \in E$ sei $T_y x := \langle x, y\rangle$. Dann ist $|T_y x| \leq \|y\| \cdot \|x\|$, d.h. T_y stetig und damit $T_y \in E'$. □

2.9 Korollar (Stetige Bilinearformen). *Sei E Hilbertraum, $B : E \times E \to \mathbb{K}$ mit*

(i) *$x \mapsto B(x, y)$ linear $(y \in E)$,*

(ii) *$y \mapsto B(x, y)$ konjugiert linear $(x \in E)$,*

(iii) *$|B(x, y)| \leq C\|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in E)$.*

Dann existiert genau ein $T \in L(E)$ mit

$$B(x, y) = \langle x, Ty\rangle \quad (x, y \in E).$$

Dabei ist $\|T\|$ die kleinste Konstante C, für die (iii) *gilt.*

Beweis. Da $x \mapsto B(x,y)$ stetig und linear ist, existiert nach Riesz genau ein $\widetilde{y}$ mit $B(x,y) = \langle x, \widetilde{y}\rangle$. Setze $Ty := \widetilde{y}$. Es ist

$$\begin{aligned}\langle x, \alpha_1 \widetilde{y_1 + \alpha_2} y_2\rangle &= B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 B(x, y_1) + \overline{\alpha}_2 B(x, y_2)\\ &= \overline{\alpha}_1 \langle x, \widetilde{y}_1\rangle + \overline{\alpha}_2 \langle x, \widetilde{y}_2\rangle = \langle x, \alpha_1 \widetilde{y}_1 + \alpha_2 \widetilde{y}_2\rangle.\end{aligned}$$

Also ist T linear.

Wegen Eigenschaft (iii) ist T stetig: $\|Ty\|^2 = B(Ty, y) \leq C \cdot \|Ty\| \cdot \|y\|$, d.h. $\|T\| \leq C$. □

3. Orthonormalbasen

Orthonormalbasen erlauben es, jeden Hilbertraum als einen ℓ^2-Raum zu schreiben. Insbesondere gibt es bis auf unitäre Isometrie nur einen unendlichen separablen Hilbertraum. Dieser spielt eine wichtige Rolle in der Physik. Dieser kurze Abschnitt beendet die elementare Darstellung von Hilberträumen.

3.1 Definition. (i) Sei M eine Menge. Eine Abbildung $\prec$ auf einer Teilmenge von $M \times M$ heißt Halbordnung, falls gilt:

$$\begin{gathered} a \prec a, \\ a \prec b,\ b \prec a \Rightarrow a = b, \\ a \prec b,\ b \prec c \Rightarrow a \prec c. \end{gathered}$$

Beachte, dass $a \prec b$ oder $b \prec a$ nicht für alle $a, b \in M$ gelten muss.

(ii) Eine Menge $Q \subset M$ heißt total geordnet oder eine Kette, falls für alle $a, b \in Q$ gilt: $a \prec b$ oder $b \prec a$.

(iii) Ein Element $a \in M$ heißt obere Schranke für $S \subset M$, falls $s \prec a$ für alle $s \in S$.

(iv) Ein Element $m \in M$ heißt maximal, falls aus $m \prec x$ folgt $m = x$.

3.2 Lemma (von Zorn). *Sei M eine nichtleere Menge mit Halbordnung, für welche jede Kette eine obere Schranke in M besitzt. Dann besitzt M ein maximales Element.*

Der Beweis verwendet das Auswahlaxiom der Mengenlehre und wird hier weggelassen.

3.3 Definition. Sei E ein Hilbertraum. Eine Teilmenge $S \subset E$ heißt Orthonormalbasis oder vollständiges orthonormales System, falls S eine maximale orthonormale Teilmenge von E ist (maximal bezüglich Mengeninklusion).

3.4 Satz. *Jeder nichttriviale Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Sei $\mathscr{S}$ die Menge aller orthonormalen Teilmengen von E. Dann ist $\mathscr{S} \neq \emptyset$ da $\{\frac{x}{\|x\|}\} \in \mathscr{S}$ für jedes $x \in E \setminus \{0\}$.

Sei $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Kette in $\mathscr{S}$, d. h. für $\alpha, \beta \in A$ gilt $S_\alpha \subset S_\beta$ oder $S_\beta \subset S_\alpha$. Setze $S_0 := \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \subset E$. Dann ist $S_0 \supset S_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Zu $x, y \in S_0$ existiert ein $\alpha \in A$ mit $x, y \in S_\alpha$, d. h. S_0 ist orthonormal. Damit ist S_0 eine obere Schranke zu $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Nach dem Lemma von Zorn existieren maximale Elemente in $\mathscr{S}$. $\square$

3.5 Definition. Sei E Hilbertraum, $A \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $y_\alpha \in E$ für alle $\alpha \in A, y \in E$. Dann konvergiert die Summe $\sum_{\alpha \in A} y_\alpha$ gegen ein Element $y \in E$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $A_\varepsilon \subset A$ existiert, so dass

$$\Big\| y - \sum_{\alpha \in \widetilde{A}_\varepsilon} y_\alpha \Big\| < \varepsilon$$

für alle endlichen Mengen $\widetilde{A}_\varepsilon$ mit $A_\varepsilon \subset \widetilde{A}_\varepsilon \subset A$ gilt.

3.6 Bemerkung. Falls die Menge A abzählbar ist, entspricht die obige Definition der unbedingten Konvergenz (d.h. der Konvergenz unabhängig von der Reihenfolge der Summanden).

3.7 Satz. *Sei E Hilbertraum mit Orthonormalbasis $S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Dann gilt für alle $y \in E$*

$$y = \sum_{\alpha \in A} \langle y, x_\alpha \rangle x_\alpha.$$

Es gilt

$$\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle y, x_\alpha \rangle|^2 \qquad \text{(Besselsche Gleichung).}$$

Für jede Folge $\{c_\alpha\}_{\alpha \in A}$ mit $\displaystyle\sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2 < \infty$ konvergiert $\displaystyle\sum_{\alpha \in A} c_\alpha x_\alpha \in E$.

Beweis. Nach der Besselschen Ungleichung (Korollar 1.4 a)) gilt für alle endlichen $A_0 \subset A$ die Abschätzung

$$\sum_{\alpha \in A_0} |\langle y, x_\alpha \rangle|^2 \le \|y\|^2. \tag{1}$$

Damit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{\alpha : |\langle y, x_\alpha \rangle|^2 \ge \frac{1}{n}\}$ endlich, d. h. die Menge

$$\{\alpha : |\langle y, x_\alpha \rangle|^2 \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{ \alpha : |\langle y, x_\alpha \rangle|^2 \ge \frac{1}{n} \Big\}$$

ist abzählbar.

Sei $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} = \{\alpha : |\langle y, x_\alpha \rangle|^2 \neq 0\}$. Setze $y_n := \sum_{i=1}^n \langle y, x_{\alpha_i} \rangle x_{\alpha_i}$. Dann ist für $n > m$

$$\|y_n - y_m\|^2 = \Big\| \sum_{i=m+1}^{n} \langle y, x_{\alpha_i} \rangle x_{\alpha_i} \Big\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |\langle y, x_{\alpha_i} \rangle|^2.$$

Wegen (1) ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\langle y, x_{\alpha_i} \rangle|^2 < \infty$, d.h. $\|y_n - y_m\|^2 = \displaystyle\sum_{i=m+1}^{n} |\langle y, x_{\alpha_i} \rangle|^2 < \varepsilon$ für n, m hinreichend groß.

Da $(y_n)_n$ eine Cauchy-Folge in E ist, existiert $y' := \lim_n y_n \in E$.

Für $\alpha = \alpha_i$ gilt $\langle y - y', x_\alpha\rangle = \langle y, x_\alpha\rangle - \langle y, x_\alpha\rangle = 0$, für $\alpha \neq \alpha_i$ gilt $\langle y - y', x_\alpha\rangle = \langle y, x_\alpha\rangle - \langle y', x_\alpha\rangle = 0 - 0 = 0$.

Damit ist $y - y' \in S^\perp$. Aber $S^\perp = \{0\}$, sonst wäre S nicht maximal (betrachte $S \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ für ein $x \in S^\perp$). Somit $y = y'$. Die anderen Aussagen sind leicht zu beweisen. $\square$

3.8 Satz. *Sei E Hilbertraum mit Orthonormalbasis $S = \{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset E$. Dann ist Abbildung $E \to \ell^2(A), y \mapsto (\langle y, x_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$ isometrischer Isomorphismus.*

Es gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in A} \langle x, x_\alpha\rangle \overline{\langle y, x_\alpha\rangle}.$$

Beweis. Die Linearität ist klar, Isometrie und damit Injektivität nach Satz 3.7, ebenso die Surjektivität nach Satz 3.7. Zu zeigen ist noch die Parsevalsche Gleichung. Da $\{\alpha \in A : \langle x, x_\alpha\rangle \neq 0 \text{ oder } \langle y, x_\alpha\rangle \neq 0\} = \{\alpha_1, \alpha_2, ...\}$ höchstens abzählbar ist, können wir $\sum_{n=1}^\infty ...$ statt $\sum_{\alpha\in A}$ schreiben. Nach der Hölderschen und Besselschen Ungleichung gilt

$$\sum_{n=1}^N |\langle x, x_{\alpha_n}\rangle \overline{\langle y, y_{\alpha_n}\rangle}| \leq \Big(\sum_{n=1}^N |\langle x, x_{\alpha_n}\rangle|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{n=1}^N |\langle y, y_{\alpha_n}\rangle|^2\Big)^{1/2} \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Also ist $\sum_{n=1}^N \langle x, x_{\alpha_n}\rangle \overline{\langle y, y_{\alpha_n}\rangle}$ absolut konvergent. Es ist $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle$ und

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_{\alpha_n}\rangle + \langle y, x_{\alpha_n}\rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^\infty \Big(|\langle x, x_{\alpha_n}\rangle|^2 + |\langle y, x_{\alpha_n}\rangle|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, x_{\alpha_n}\rangle \cdot \overline{\langle y, x_{\alpha_n}\rangle})\Big) \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^\infty \langle x, x_{\alpha_n}\rangle \overline{\langle y, x_{\alpha_n}\rangle}
\end{aligned}$$

Damit folgt $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle = \operatorname{Re}\sum_n \langle x, x_{\alpha_n}\rangle \overline{\langle y, x_{\alpha_n}\rangle}$. Ersetzt man x durch $i \cdot x$, erhält man die Gleichheit der Imaginärteile. $\square$

3.9 Definition. Ein metrischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

3.10 Bemerkung. Ein normierter Raum E ist genau dann separabel, wenn ein abzählbares linear unabhängiges $S \subset E$ gilt mit $\overline{\operatorname{span} S} = E$. Insbesondere ist ein Hilbertraum genau dann separabel, wenn er eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

Um das zu sehen, betrachtet man alle Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{n} a_i S_i, a_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, s_i \in S$.

II. Banachräume

4. Der Satz von Baire

Der Satz von Baire ist der erste der klassischen Sätze der Funktionalanalysis. Obwohl die Formulierung eher abstrakt ist (etwa unter Verwendung des Begriffs der nirgends dichten Menge), sind die Folgerungen daraus von entscheidender Bedeutung für die ganze Operatortheorie. Dies gilt insbesondere für das Prinzip von Banach-Steinhaus.

Sei (E,d) metrischer Raum. Eine Menge $A \subset E$ heißt nirgends dicht, falls $\bar{A}$ keine inneren Punkte enthält, d. h. $\mathring{\bar{A}} = \emptyset$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\bar{A}$ keine offene Kugel enthält.

4.1 Satz (Bairescher Kategoriensatz). *Sei (E,d) vollständiger metrischer Raum, $A_n \subset E$ abgeschlossen. Falls $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine offene Kugel enthält, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass A_{n_0} (schon) eine offene Kugel enthält.*

Beweis. Sei $K_r(x_0) \subset A$ eine offene Kugel. Angenommen, kein A_n enthält eine offene Kugel, d. h. es gilt

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \forall\, \varepsilon > 0\, \forall\, x \in E : (E \setminus A_n) \cap K_\varepsilon(x) \neq \emptyset.$$

Wähle x_1 mit $0 < \varepsilon_1 < 1/2$ und

$$K_{\varepsilon_1}(x_1) \subset (E \setminus A_1) \cap K_r(x_0).$$

Da beide Mengen auf der rechten Seite offen sind, ist auch der Durchschnitt offen (und nichtleer).

Wähle nun im nächsten Schritt x_2 mit $K_{\varepsilon_2}(x_2) \subset (E \setminus A_2) \cap K_{\varepsilon_1}(x_1)$ (offen, nicht leer), $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{4}$.

Allgemein wähle x_n, ε_n mit $K_{\varepsilon_n}(x_n) \subset (E \setminus A_n) \cap K_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})$ und $0 < \varepsilon_n < 2^{-n}$.

Wegen $\varepsilon_n \to 0$ und $x_n \in K_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, d.h. $x_n \to x \in E$. Hier verwenden wir, dass E vollständig ist. Wegen $d(x, x_n) = \lim\limits_{m\to\infty} \underbrace{d(x_m, x_n)}_{<\varepsilon_n \text{ falls } m \geq n} < \varepsilon_n$ ist $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_{\varepsilon_n}(x_n)$.

Aber es gilt sowohl

$$\bigcap_n K_{\varepsilon_n}(x_n) \subset \bigcap_n (E \setminus A_n) = E \setminus A$$

als auch

$$\bigcap_n K_{\varepsilon_n}(x_n) \subset K_{\varepsilon_1}(x_1) \subset K_r(x_0) \subset A.$$

Somit ist $\bigcap_n K_{\varepsilon_n}(x_n) = \emptyset$ im Widerspruch zu $x \in \bigcap\limits_n K_{\varepsilon_n}(x_n)$. □

Satz 4.1 heißt aus folgendem Grund Kategoriensatz: Eine Menge $A \subset E$ heißt von erster Kategorie (mager), falls $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ mit nirgends dichten Mengen A_n gilt. Gibt es keine solche Darstellung, heißt A von von zweiter Kategorie.

Damit erhalten wir andere Formulierungen des Satzes von Baire. Sei (E, d) vollständig. Dann gilt:

(1) Die Vereinigung höchstens abzählbarer nirgends dichter Teilmengen enthält keine inneren Punkte.

(2) Der Raum E ist von zweiter Kategorie in sich.

4.2 Satz. *Sei (E, d) vollständiger metrischer Raum, $\mathcal{T}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f : E \to \mathbb{K}$. Die Familie $\mathcal{T}$ sei punktweise gleichmäßig beschränkt, d.h. es gilt*

$$\forall\, x \in E\; \exists\, c_x > 0\; \forall\, f \in \mathcal{T} :\; |f(x)| \le c_x.$$

Dann existiert eine offene Kugel K und ein $c > 0$ mit

$$\forall\, x \in K\; \forall\, f \in \mathcal{T} :\; |f(x)| \le c.$$

Beweis. Die Menge $A_n := \{x \in E \mid \forall\, f \in \mathcal{T} : |f(x)| \le n\}$ ist abgeschlossen. Für $x \in E$ existiert nach Voraussetzung ein $c_x > 0$ mit $|f(x)| \le c_x \quad (f \in \mathcal{T})$, d. h. es existiert eine natürliche Zahl n mit $x \in A_n$. Somit $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Nach dem Satz von Baire existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine offene Kugel $K \subset A_{n_0}$. Damit ist $|f(x)| \le n_0 \quad (x \in K, f \in \mathcal{T})$. □

4.3 Satz (Satz von Banach-Steinhaus, Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). *Sei E Banachraum und F normierter Raum. Sei $\mathcal{T} \subset L(E, F)$ eine punktweise gleichmäßig beschränkte Familie, d. h. es gelte*

$$\forall\, x \in E\; \exists\, c_x > 0\; \forall\, T \in \mathcal{T} : \|Tx\| \le c_x.$$

Dann existiert ein $c > 0$ mit $\|T\| \le c \quad (T \in \mathcal{T})$.

Beweis. Definiere $\mathcal{T}' := \{f_T : E \to \mathbb{K}, T \in \mathcal{T}\}$ mit $f_T(x) := \|Tx\|$. Nach Voraussetzung ist die Familie $\mathcal{T}'$ punktweise gleichmäßig beschränkt.

Nach Satz 4.2 existiert $K_{r_0}(x_0), c' > 0$ mit

$$\forall\, x \in K_{r_0}(x_0)\ \forall\, T \in \mathcal{T} : \|Tx\| \le c'.$$

Sei nun $x \in E, \|x\| = 1$ und $T \in \mathcal{T}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \frac{2}{r_0}\left\|T\Big(\frac{r_0}{2}x - x_0 + x_0\Big)\right\| \le \\ &\le \frac{2}{r_0}\left(\Big\|T\Big(\underbrace{\frac{r_0}{2}x - x_0}_{\in K_{r_0}(x_0)}\Big)\Big\| + \|\underbrace{Tx_0}_{\in K_{r_0}(x_0)}\|\right) \le \frac{4}{r_0}c' =: c. \end{aligned}$$

Somit gilt $\|T\| \le c \quad (T \in \mathcal{T})$. □

4.4 Definition und Satz. *Sei E normierter Raum, $M \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $E/M := \{[x] = x + M : x \in E\}$ der Quotientenraum. Dann ist $\|[x]\| := \inf\limits_{y \in M} \|x + y\|$ eine Norm auf E/M. Falls E Banachraum ist, so auch E/M.*

Beweis. Nur die Vollständigkeit folgt nicht durch direktes Nachrechnen. Sei $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in E/M.

(i) Übergang zur Teilfolge: Da $\|([x_n]) - ([x_m])\| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$, existiert eine Teilfolge $([x_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$ von $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\| < 2^{-k}$. Schreibe wieder $[x_k]$ statt $[x_{n_k}]$.

(ii) Wahl einer Cauchyfolge in E: Nach Definition der Norm in E/M existiert $z_k \in [x_k]$ mit $\|z_k - z_l\|_E \le 2\|[x_k] - [x_l]\|_{E/M}$. Damit

$$\|z_k - z_{k+m}\|_E \le \sum_{i=1}^{m} \|z_{k+i} - z_{k+i-1}\|_E \le 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \|\underbrace{[x_{k+i}] - [x_{k+i-1}]}_{\le 2^{-(k+i-1)}}\| \le 2^{-k+2},$$

d. h. $(z_k)_k$ ist eine Cauchyfolge in E. Sei $z := \lim_k z_k$.

Wegen

$$\begin{aligned} \|[x_k] - [z]\| = \|[z_k] - [z]\| &= \inf_{y \in M} \|z_k - z + y\|_E \\ &\le \|z_k - z\|_E \to 0 \end{aligned}$$

gilt $[x_k] \to [z]$ in E/M. □

4.5 Definition und Satz. *Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge und $\{E_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Banachräumen. Dann ist die direkte Summe*

$$\bigoplus_{i\in I} E_i := \Big\{(x_i)_{i\in I} : x_i \in E_i, \sum_{i\in I} \|x_i\|_{E_i} < \infty\Big\}$$

ein Banachraum.

Für $E_i = E_0 \quad (i \in I)$ *schreibt man*

$$\ell^1(I; E_0) := \bigoplus_{i \in I} E_i.$$

Man definiert $\ell^1(I) := \ell^1(I; \mathbb{C})$ *und* $\ell^1 := \ell^1(\mathbb{N})$.

Beweis. Wie im Hilbertraum-Fall (vgl. auch Beispiel 1.9 b)). □

5. Das Prinzip der offenen Abbildung

Das Prinzip der offenen Abbildung ist eine Folgerung aus dem Satz von Baire und erlaubt recht schnell wichtige Aussagen über das Spektrum unbeschränkter Operatoren. In diesem Abschnitt werden auch die ersten Begriffe der Operatortheorie definiert, wie etwa die Abgeschlossenheit eines unbeschränkten Operators.

5.1 Definition. Seien E, F normierte Räume.

a) Ein linearer Operator $T; E \to F$ ist eine lineare Abb. vom Definitionsbereich $D(T) \subset E$ nach F, wobei $D(T)$ ein linearer Unterraum von E ist. Die Menge $G(T) := \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$ heißt der Graph von T.

b) Der Operator T heißt abgeschlossen, wenn $G(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge des Banachraums $E \oplus F$ ist.

c) Der Operator T heißt abschließbar, wenn es einen abgeschlosenen linearen Operator $\overline{T}$ gibt mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Der Operator $\overline{T}$ heißt Abschließung oder der Abschluss von T.

5.2 Satz (Prinzip der offenen Abbildung). *Seien E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$ surjektiv. Dann ist T offen, d.h. das Bild einer offenen Menge ist offen.*

Beweis. (i) Wir zeigen zunächst, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $K_\varepsilon(0) \subset \overline{TK_1(0)}$. Sei dazu $K_n := K_n(0) \subset E$. Da T surjektiv ist, gilt $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(K_n)}$. Nach dem Satz von Baire ist das Innere von $\overline{T(K_n)}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ nichtleer, d.h. es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $y_0 \in F$ mit $K_{\varepsilon_0}(y_0) \subset \overline{T(K_n)}$.

Da T surjektiv ist, existiert ein $x_0 \in E$ mit $Tx_0 = y_0$. Es ist $K_{\varepsilon_0}(y_0) = Tx_0 + K_{\varepsilon_0}(0)$ und damit

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon_0}(0) &\subset \overline{T(K_n)} - Tx_0 = \overline{T(K_n) - Tx_0} \\ &= \overline{T(nK_1) - Tx_0} = \overline{T(nK_1 - x_0)} \subset \overline{T(mK_1)} = m\,\overline{T(K_1)} \end{aligned}$$

für ein $m \in \mathbb{N}$. Beachte dabei, dass $nK_1 - x_0 \subset mK_1$ für großes m gilt. Wir erhalten

$$K_{\varepsilon_0/m}(0) \subset \overline{T(K_1)}.$$

Wähle $\varepsilon := \varepsilon_{0/m}$.

(ii) Wir zeigen nun, dass $\overline{T(K_1)} \subset T(K_2)$ gilt. Dazu sei $y \in \overline{T(K_1)}$ und ε wie in (i). Wähle $x_1 \in K_1$ mit $y - Tx_1 \in K_{\varepsilon/2}(0)$.

Nach (i) ist $K_{\varepsilon/2}(0) \subset \overline{TK_{1/2}(0)}$. Wähle nun $x_2 \in K_{1/2}(0)$ mit $y - Tx_1 - Tx_2 \in K_{\varepsilon/4}(0) \subset \overline{TK_{1/4}(0)}$.

Wir erhalten iterativ eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in K_{2^{-n+1}}(0)$ mit $y - \sum_{i=1}^n Tx_i \in K_{\varepsilon \cdot 2^{-n}}(0)$. Nach Wahl der x_n ist $x := \sum_{n=1}^\infty x_n$ absolut konvergent. Es gilt $x \in K_2$ wegen $\|x\| \leq \sum_n \|x_n\| < 2$.

Unter Verwendung der Stetigkeit von T erhalten wir $y = \sum_{i=1}^\infty Tx_i = T(\sum_{i=1}^\infty x_i) = Tx \in TK_2$.

(iii) Nach (i) und (ii) ist $K_\varepsilon \subset TK_2$. Also enthält das Bild jeder Umgebung von $0 \in E$ eine offene Kugel in F, d.h. ist eine Umgebung von $0 \in F$. Sei nun $U \subset E$ offen. Zu $x \in U$ existiert $K_\delta(0)$ mit $x + K_\delta(0) \subset U$.

Damit $T(x + K_\delta(0)) = Tx + TK_\delta(0) \supset Tx + K_{\widetilde{\varepsilon}}$ für ein $\widetilde{\varepsilon} > 0$, d.h. es existiert eine Umgebung $Tx + K_{\widetilde{\varepsilon}}(0)$ von Tx mit $Tx + K_{\widetilde{\varepsilon}}(0) \subset TU$. Somit ist TU offen. □

5.3 Korollar. *Seien E, F Banachräume, $T : E \to F$ abgeschlossener linearer Operator mit Definitionsbereich $D(T)$. Sei $R(T)$ abgeschlossen. Dann ist T offen als Abbildung von $D(T)$ nach $R(T)$.*

Beweis. Definiere die Graphennorm $|||x|||_T := \|x\| + \|Tx\| \quad (x \in D(T))$.

Dann ist $|||\cdot|||_T$ eine Norm auf $D(T)$ und $(D(T), |||\cdot|||_T)$ ein Banachraum (da T abgeschlossen ist). Der Operator $\widetilde{T} : (D(T), |||\cdot|||_T) \to F,\ x \mapsto Tx$, ist stetig.

Eine Teilmenge $U \subset D(T)$ ist offen bzgl. $\|.\|_E$, falls U offen ist bzgl. $|||\cdot|||_T$. Nach Satz 5.2 ist $\widetilde{T}U = TU$ offen für U offen. □

5.4 Satz (Stetigkeit des Inversen). *Seien E, F Banachräume und $T : E \to F$ ein abgeschlossener linearer Operator mit $\ker T = \{0\}$ und $R(T)$ abgeschlossen. Dann ist $T^{-1} : R(T) \to E$ stetig.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar 5.3 aufgrund der Äquivalenz der Offenheit von T und der Stetigkeit von T^{-1}. □

5.5 Satz (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Seien E, F Banachräume, $T : E \to F$ abgeschlossener linearer Operator. Falls $D(T)$ abgeschlossen ist, so ist T stetig.*

Beweis. Da T abgeschlossen ist, ist $G(T)$ ist mit $\|(x, Tx)\| := \|x\| + \|Tx\|$ als abgeschlossener Unterraum von $E \oplus F$ ein Banachraum. Die Projektion $\pi_1 : G(T) \to E, (x, Tx) \mapsto x$, ist stetig und damit ein abgeschlossener linearer Operator. Der Werteberich $R(\pi_1) = D(T)$ ist abgeschlossen. Nach Satz 5.4 ist π_1^{-1} stetig. Ebenso ist $\pi_2 : G(T) \to F,\ (x, Tx) \mapsto Tx$, stetig. Damit ist $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ stetig. □

5.6 Korollar. *Seien $E_1 = (E, \|\cdot\|_1)$ und $E_2 = (E, \|\cdot\|_2)$ Banachräume mit*

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \quad (x \in E)$$

für eine Konstante $c > 0$.

Dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d.h. es gibt eine Konstante $c' > 0$ mit $c'\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \quad (x \in E)$.

Beweis. Übung. □

5.7 Korollar (Satz von Hellinger-Toeplitz). *Sei E Hilbertraum und $T : E \to E$ linearer Operator mit $D(T) = E$ und*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad (x, y \in E).$$

Dann ist T stetig.

Beweis. Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit von $G(T)$ in $E \oplus F$.

Sei $(x, y) = \lim_n (x_n, Tx_n)$, d.h. $x = \lim_n x_n$ und $y = \lim_n Tx_n$. Für $z \in E$ gilt

$$\langle y, z\rangle = \lim_n \langle Tx_n, z\rangle = \lim_n \langle x_n, Tz\rangle = \langle x, Tz\rangle = \langle Tx, z\rangle.$$

Damit folgt $\langle y - Tx, z\rangle = 0$ für alle $z \in E$. Also ist $y - Tx = 0$, d.h. $(x, y) \in G(T)$. □

6. Hahn-Banach-Sätze

Die Fortsetzungssätze von Hahn-Banach runden die klassischen Sätze der Funktionalanalysis ab. Zum einen handelt es sich um Trennungssätze, zum anderen um die Existenz genügend vieler Fortsetzungen. Damit zeigen die Hahn-Banach-Sätze, dass der topologische Dualraum eines Banachraums in gewisser Weise groß genug ist. Am Ende des Abschnitts wird noch der wichtige Begriff der Reflexivität diskutiert.

6.1 Satz (Fortsetzungssatz von Hahn-Banach). *Sei E ein $\mathbb{R}-$Vektorraum und $p : E \to \mathbb{R}$ konvex, d.h. es gelte*

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) \quad (\alpha \in [0,1], x, y \in E).$$

Sei ferner $L \subset E$ ein linearer Teilraum und $\lambda : L \to \mathbb{R}$ linear mit

$$\lambda(x) \leq p(x) \quad (x \in L).$$

Dann existiert ein lineares $\Lambda : E \to \mathbb{R}$ mit $\Lambda|_L = \lambda$ und $\Lambda(x) \leq p(x) \quad (x \in E)$.

Beweis. (i) Fortsetzung auf $\widetilde{L} := \operatorname{span}\{L, z\}$ mit $z \in E \setminus L$:

Für $y_1, y_2 \in L$ und $\alpha, \beta > 0$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned}\beta\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2) = \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) &= (\alpha+\beta)\cdot\lambda\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,y_1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,y_2\Big)\\ &\leq (\alpha+\beta)p\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(y_2+\beta z)\Big)\\ &\leq \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{\alpha}\left[\lambda(y_1) - p(y_1 - \alpha z)\right] \leq \frac{1}{\beta}\left[p(y_2+\beta z) - \lambda(y_2)\right] \tag{2}$$

Wähle

$$\widetilde{\lambda}(z) := \alpha_0 \in \Big[\sup_{y_1 \in L,\, \alpha>0} \tfrac{1}{\alpha}\big(\lambda(y_1) - p(y_1 - \alpha z)\big), \inf_{y_2\in L,\, \beta>0} \tfrac{1}{\beta}\big(p(y_2+\beta z) - \lambda(y_2)\big)\Big]$$

und definiere $\widetilde{\lambda}(\mu z + y) := \mu\widetilde{\lambda}(z) + \lambda(y)$ auf $\widetilde{L} = L \oplus \mathbb{R}\cdot z$.

$\widetilde{\lambda}$ ist linear auf $\widetilde{L}$ nach Definition, und es gilt

$$\widetilde{\lambda}(\mu z + y) = \mu\alpha_0 + \lambda(y) \leq p(\mu z + y).$$

Denn für $\mu > 0$ gilt nach Wahl von α_0 die Abschätzung

$$p\,(y_2 + \beta z) \geq \lambda(y_2) + \beta\alpha_0.$$

Setze nun $y_2 := y$ und $\beta := \mu$. Den Fall $\mu < 0$ sieht man analog.

(ii) Sei $\mathscr{M}$ die Menge aller Abbildungen $m : M \to \mathbb{R}$ auf einem linearen Unterraum $M \supset L$, welche linear sind und für welche gilt $m|_L = \lambda$ und $m \leq p|_M$.

Durch

$$m_1 \leq m_2 :\Longleftrightarrow M_1 \subset M_2,\ m_2|_{M_1} = m_1$$

wird $\mathscr{M}$ partiell geordnet. Sei $\{m_k\}$ eine Kette in $\mathscr{M}$. Dann ist $M := \bigcup_k M_k$ ein linearer Unterraum, und durch

$$m(x) := m_k(x) \quad (x \in M_k)$$

wird eine obere Schranke $m \in \mathscr{M}$ der Kette definiert. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element $\Lambda \in \mathscr{M}$.

Da Λ maximal ist, ist Λ auf ganz E definiert. Sonst existiert nach (i) eine Fortsetzung auf $D(\Lambda) \oplus \mathbb{R} \cdot z$ mit $z \in E \setminus D(\Lambda)$. □

6.2 Satz (Hahn-Banach, komplexe Version). *Sei E ein $\mathbb{C}-$Vektorraum und $p : E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit*

$$p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|\, p(x) + |\beta|\, p(y) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\alpha| + |\beta| = 1).$$

Sei $L \subset E$ linearer Teilraum und $\lambda : L \to \mathbb{C}$ linear mit $|\lambda(x)| \leq p(x) \quad (x \in L)$. Dann existiert ein lineares $\Lambda : E \to \mathbb{C}$ mit $\Lambda|_L = \lambda$ und $|\Lambda(x)| \leq p(x) \quad (x \in E)$.

Beweis. Setze $\ell(x) := \operatorname{Re}\lambda(x)$. Dann ist $\ell : E \to \mathbb{R}$ linear mit

$$\ell(x) \leq \lambda(x) \leq p(x) \quad (x \in L).$$

Wegen $\ell(ix) = -\operatorname{Im}\lambda(x)$ ist $\lambda(x) = \ell(x) - i\ell(ix)$. Setze ℓ nach Satz 6.1 fort zu einem $\mathbb{R}-$linearen $L : E \to \mathbb{R}$ mit $|L(x)| \leq p(x) \quad (x \in E)$. Dann ist

$$\Lambda(x) := L(x) - iL(ix)$$

$\mathbb{R}$-linear. Wegen

$$\Lambda(ix) = L(ix) - iL(-x) = L(ix) + iL(x) = i\Lambda(x)$$

ist Λ sogar $\mathbb{C}-$linear.

Für $\theta := \arg\Lambda(x)$ gilt:

$$|\Lambda(x)| = e^{-i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta}x) = L(e^{-i\theta}x) \leq pe^{-i\theta}x = p(x).$$

Hier wurde $\operatorname{Re}\Lambda = L$ und $\Lambda(e^{-i\theta}x) = |\Lambda(x)| \in \mathbb{R}$ verwendet. □

6.3 Korollar. *Sei E normiert, $L \subset E$ linearer Teilraum und $\lambda \in L'$. Dann existiert ein $\Lambda \in E'$ mit $\|\Lambda\| = \|\lambda\|, \Lambda_{|_L} = \lambda$.*

Beweis. Sei $p(x) := \|\lambda\|_{L'} \cdot \|x\|$. Dann ist $|\lambda(x)| \leq p(x) \quad (x \in L)$.

Nach Satz 6.2 existiert eine Fortsetzung Λ mit

$$|\Lambda(x)| \leq \|\lambda\| \cdot \|x\| \quad (x \in E),$$

d.h. $\Lambda \in E'$ und $\|\Lambda\| \leq \|\lambda\|$. Wegen $\Lambda|_L = \lambda$ ist $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$. □

6.4 Korollar. *Sei E normiert, $x \in E \setminus \{0\}$ fest. Dann existiert ein $\Lambda \in E'$ mit $\Lambda(x) = \|x\|$ und $\|\Lambda\| = 1$.*

Beweis. Definiere $\lambda : \mathbb{K}x \to \mathbb{K}, \lambda(\alpha x) := |\alpha|\|x\|$ und setze nach Korollar 6.3 fort. □

6.5 Korollar. *Sei E normiert, $L \subset E$ linearer Teilraum und $x \in E$. Sei*

$$d := \inf_{y \in L} \|x - y\| > 0.$$

Dann existiert ein $\Lambda \in E'$ mit $\|\Lambda\| = 1$, $\Lambda(x) = d$ und $\Lambda|_L = 0$.

Beweis. Definiere λ auf $L \oplus \mathbb{K}x$ durch $\lambda(\alpha x + y) := \alpha d$. Dann gilt

$$\|\lambda\| = \sup_{\alpha \in \mathbb{K},\, y \in L} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x\|} = \sup \frac{d}{\|\frac{y}{\alpha} + x\|} = \frac{d}{\inf\limits_{y \in L,\, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}} \|\frac{y}{\alpha} + x\|} = \frac{d}{d} = 1.$$

Die Behauptung folgt nun aus Korollar 6.3. □

Mit dem Satz von Hahn-Banach können wir Bidualräume $E'' := (E')'$ betrachten. Vorher betrachten wir noch die Dualräume.

6.6 Satz. *Seien E normierter Raum und F Banachraum. Dann ist $L(E, F)$ Banachraum. Insbesondere ist E' Banachraum.*

Beweis. Nur die Vollständigkeit ist nichttrivial. Sei $(A_n)_n$ Cauchyfolge in $L(E, F)$. Dann ist $(A_n x)_n$ Cauchyfolge in F für jedes $x \in E$.

Setze $Ax := \lim_n A_n x \in F$. Dann ist A offensichtlich linear. Wegen

$$\|Ax\|_F = \lim_n \|A_n x\|_F \leq \lim_n \|A_n\| \cdot \|x\|_E \leq C\|x\|_E$$

ist $A \in L(E,F)$. Da $\|(A-A_n)x\| = \lim_{m\to\infty} \|(A_m - A_n)x\|$, erhalten wir

$$\|A - A_n\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A-A_n)x\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \lim_{m\to\infty} \frac{\|(A_m - A_n)x\|}{\|x\|} \leq \lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\| < \varepsilon$$

für $n \geq n_0$, d.h. es gilt $A_n \to A$ in $L(E,F)$. □

6.7 Lemma. *Sei E ein normierter Raum. Die Abbildung $E \to E''$, $x \mapsto \widetilde{x}$ mit*

$$\widetilde{x}(\lambda) := \lambda(x) \quad (\lambda \in E')$$

ist linear und isometrisch.

Beweis. Es gilt

$$\widetilde{\alpha x + \beta y}(\lambda) = \lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda(x) + \beta\lambda(y) = \alpha\widetilde{x}(\lambda) + \beta\widetilde{y}(\lambda),$$

d. h. die Abbildung $x \mapsto \widetilde{x}$ ist linear. Weiter ist

$$\|\widetilde{x}\|_{E''} = \sup_{\|\lambda\|\leq 1} |\widetilde{x}(\lambda)| = \sup_{\|\lambda\|\leq 1} |\lambda(x)| \leq \sup_{\|\lambda\|\leq 1} \|\lambda\| \cdot \|x\|_E \leq \|x\|_E.$$

Nach Korollar 6.4 existiert zu jedem $x \in E$ ein $\lambda_0 \in E'$ mit $\|\lambda_0\| = 1$ und $\lambda_0(x) = \|x\|$. Damit gilt $\|\widetilde{x}\| = \sup_{\|\lambda\|\leq 1} |\lambda(x)| \geq |\lambda_0(x)| = \|x\|$. □

6.8 Definition. Ein normierter Raum E heißt reflexiv, falls die kanonische Einbettung $E \hookrightarrow E''$ aus Lemma 6.7 surjektiv ist.

6.9 Beispiele. a) Jeder Hilbertraum ist reflexiv nach dem Satz von Riesz.

b) Sei $1 < p < \infty$ und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir werden im zweiten Teil der Vorlesung sehen, dass $L_p(\mu)$ ein Banachraum ist. Nach einem Satz von Riesz ist die Abbildung

$$T : L_q(\mu) \to (L_p(\mu))',\ (Tg)(f) := \int fgd\mu \tag{3}$$

ein isometrischer Isomorphismus. Dabei ist $q \in (1,\infty)$ definiert durch $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Sei nun $\Lambda \in (L_p(\mu))''$. Definiere das Funktional $\Lambda_1 := \Lambda \circ T \in (L_q(\mu))'$. Nach dem Satz von Riesz, angewendet auf den Raum $(L_q(\mu))'$, existiert eine Funktion $h \in L_p(\mu)$, so dass für alle $g \in L_q(\mu)$ der Wert $\Lambda_1(g)$ gegeben ist durch

$$\Lambda_1(g) = \int ghd\mu. \tag{4}$$

Somit gilt für jedes $\lambda \in (L_p(\mu))'$

$$\Lambda(\lambda) = \Lambda_1(T^{-1}\lambda) = \int (T^{-1}\lambda) \cdot h d\mu = \lambda(h) = \widetilde{h}(\lambda).$$

Dabei wurde für die zweite Gleichheit (4) verwendet und für die dritte Gleichheit (3). Wir haben gesehen, dass $\Lambda = \widetilde{h}$ gilt, d.h. dass die Abbildung $h \mapsto \widetilde{h},\ E \to E''$, surjektiv ist. Die $L_p(\mu)$-Räume sind für $1 < p < \infty$ also reflexix.

c) In der Situation von b) gilt $\big(L_1(\mu)\big)' = L_\infty(\mu)$ aber $L_1(\mu) \subsetneq \big(L_\infty(\mu)\big)'$, d.h. $L_1(\mu)$ ist nicht reflexiv. Diese Aussage wird nicht bewiesen.

7. Einige Bemerkungen zur Topologie

In diesem Abschnitt werden kurz einige wichtige topologische Begriffe wiederholt. Wichtig für uns wird insbesondere der Satz von Banach-Alaoglu sein. Gerade die schwachen Topologien sind in der Funktionalanalysis wichtig, da in den meisten Fällen keine Stetigkeit in einer Normtopologie vorliegt. Die elementaren Definitionen topologischer Begriffe werden parallel zu den analogen Begriffen der σ-Algebren formuliert, um die Allgemeinbildung in diesem Bereich zu stärken.

Wir starten mit der Definition einiger grundlegender Begriffe der Topologie. Eine Topologie ist ähnlich wie eine σ-Algebra ein Mengensystem. Um die Ähnlichkeiten und Unterschiede deutlich zu machen, geben wir jeweils die entsprechenden Definitionen an.

7.1 Definition. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge; 2^X bezeichne die Potenzmenge von X.

a1) Ein Mengensystem $\tau \subset 2^X$ heißt eine Topologie auf X, falls gilt

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) Falls $A, B \in \tau$, so ist auch $A \cap B \in \tau$,

(iii) Falls I eine Indexmenge ist und $A_i \in \tau \quad (i \in I)$, so ist auch $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

a2) Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^X$ heißt eine σ-Algebra auf X, falls gilt

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,

(ii) Falls $A \in \mathcal{A}$, so ist auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) Falls $A_n \in \mathcal{A} \quad (n \in \mathbb{N})$, so ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

b1) Seien (X_1, τ_1) und (X_2, τ_2) topologische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ stetig, falls $f^{-1}(\tau_2) \subset \tau_1$.

b2) Seien $(X_1, \mathcal{A}_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume. Dann heißt eine Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ messbar, falls $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$.

c1) Sei $U \subset 2^X$. Dann heißt die kleinste Topologie, die U enthält, die von U erzeugte Topologie $\tau(U)$. Die erzeugte Topologie $\tau(U)$ ist das System aller Mengen der Form $\bigcup_{i\in I} \bigcap_{n=1}^N U_{in}$ mit $U_{in} \in U$, $N \in \mathbb{N}$.

c2) Sei $U \subset 2^X$. Dann heißt die kleinste σ-Algebra, die U enthält, die von U erzeugte σ-Algebra $\sigma(U)$. Es gibt keine einfache Darstellung von $\sigma(U)$.

d1) Sei I eine Menge und (Y_i, τ_i) topologischer Raum für $i \in I$. Sei $F = \{f\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Dann heißt die kleinste (gröbste) Topologie auf X, für die alle $f \in F$ stetig sind, die F-schwache Topologie $\tau(F)$ auf X. Es gilt

$$\tau(F) = \tau\Big(\big\{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i,\ i \in I\big\}\Big).$$

d2) Sei I eine Menge und $(Y_i, \mathcal{A}_i)$ Messraum für $i \in I$. Sei $F = \{f\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Dann heißt die kleinste σ-Algebra auf X, für die alle $f \in F$ messbar sind, die von F erzeugte σ-Algebra $\sigma(F)$ auf X. Es gilt

$$\sigma(F) = \sigma\Big(\big\{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \mathcal{A}_i,\ i \in I\big\}\Big).$$

e1) Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ das kartesische Produkt, wobei (X_i, τ_i) ein topologischer Raum für $i \in I$ ist. Sei $\mathrm{pr}_i : X \to X_i$ die Projektion auf die i-te Komponente. Dann heißt $\tau(\{\mathrm{pr}_i : i \in I\})$ die Produkttopologie auf X.

e2) Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ das kartesische Produkt, wobei $(X_i, \mathcal{A}_i)$ ein Messraum für $i \in I$ ist. Sei $\mathrm{pr}_i : X \to X_i$ die Projektion auf die i-te Komponente. Dann heißt $\sigma(\{\mathrm{pr}_i : i \in I\})$ die Produkt-σ-Algebra auf X.

7.2 Definition. a) Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $E^* := \{f\colon E \to \mathbb{K},\ f \text{ linear }\}$ der algebraische Dualraum von E. Für $F \subset E^*$ bezeichnet man die F-schwache Topologie auf E auch mit $\sigma(E, F)$.

b) Sei E normiert. Dann heißt $\sigma(E, E')$ die schwache Topologie auf E und $\sigma(E', E)$ die schwach-*-Topologie auf E'. (Beachte $E \subset E''$ im Sinne von Lemma 6.7.) Für die Konvergenzen bezüglich dieser Topologien schreibt man auch $x_n \xrightarrow{w} x$ in E bzw. $f_n \xrightarrow{w^*} f$ in E'.

7.3 Bemerkung. a) Sei E normiert. Dann ist $\sigma(E, E')$ Hausdorffsch. Dann nach dem Satz von Hahn-Banach existiert zu $x, y \in E$ mit $x \neq y$ ein $f \in E'$ mit $f(x) \neq f(y)$.

b) Es gilt $\sigma(E', E) \subset \sigma(E', E'') \subset \sigma_{\text{norm}}$, wobei σ_{norm} die Normtopologie auf E ist.

7.4 Lemma. *Sei E normiert, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Folge und $x \in E$ mit $x_n \xrightarrow{w} x$ in E. Dann ist $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.*

Beweis. Betrachte die Einbettung $E \hookrightarrow E''$, welche gegeben ist durch $\widetilde{x}_n(f) := f(x_n) \quad (f \in E')$. Nach Satz 6.6 ist E' Banachraum. Für jedes feste $f \in E'$ ist die Folge $\widetilde{x}_n(f)$ als konvergente Folge beschränkt, d.h. es gilt $|\widetilde{x}_n(f)| \leq c_f \quad (n \in \mathbb{N})$ für eine Konstante $c_f > 0$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus existiert ein $c > 0$ mit $\|\widetilde{x}_n\| \leq c$. Aber nach Lemma 6.7 gilt $\|\widetilde{x}_n\| = \|x_n\|$. □

7.5 Satz (Banach-Alaoglu). *Sei E ein normierter Raum. Dann ist die Einheitkugel in E' schwach-*-kompakt.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass die Menge $K_1' := \{f \in E' : \|f\| \le 1\}$ $\sigma(E', E)$-kompakt ist.

Für $x \in E$ sei $I_x := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \|x\|\}$. Nach dem Satz von Tychonov ist $I := \prod_{x\in E} I_x$ kompakt bezüglich der Produkttopologie. Die Elemente von I sind Abbildungen $b\colon E \to \mathbb{C}$ mit $b(x) \in I_x \quad (x \in E)$, d.h. $|b(x)| \le \|x\|$. Daher ist $K_1' \subset I$, da $|f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\| \le \|x\|$ für alle $f \in K_1'$ gilt.

Da die Produkttopologie auf I die schwächste Topologie ist, für die alle Abbildungen $b \mapsto b(x) \quad (x \in E)$ stetig sind, ist die Spurtopologie davon auf K_1' genau die schwach-*-Topologie auf K_1'. Zu zeigen ist also, dass $K_1' \subset I$ abgeschlossen ist bzgl. der Produkttopologie.

Sei $f \in \overline{K_1'} \subset I$, und seien $x, y \in E$. Dann ist

$$U := \{b \in I : |b(x+y) - f(x+y)| < \varepsilon,\ |b(x) - f(x)| < \varepsilon,\ |b(y) - f(y)| < \varepsilon\}$$

eine offene Umgebung von f. Wegen $f \in \overline{K_1'}$ existiert ein $g \in U \cap K_1'$. Da g nach Definition von K_1' linear ist, gilt

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

Da ε beliebig war, ist f additiv. Analog sieht man, dass $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{K},\ x \in E)$ gilt, d.h. f ist linear. Wegen $f \in I$ ist $\|f\| \le 1$ und damit $f \in K_1'$. □

7.6 Lemma. *Sei E normiert und M total in E', d.h.* span M *ist dicht in E'. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in E. Dann gilt $x_n \xrightarrow{w} x$ genau dann, wenn $\|x_n\| \le C$ und $f(x_n) \to f(x) \quad (f \in M)$ gilt.*

Beweis. Die Richtung „$\Longrightarrow$“ ist klar nach Lemma 7.4 und der Definition der schwachen Topologie.

Für die Gegenrichtung bemerken wir zunächst, dass für alle $\widetilde{f} \in \operatorname{span} M$ offensichtlich $\widetilde{f}(x_n) \to \widetilde{f}(x)$ gilt (endliche Linearkombination). Sei nun $f \in E'$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\widetilde{f} \in \operatorname{span} M$ mit

$$\|f - \widetilde{f}\| \le \frac{\varepsilon}{3 \max\{C, \|x\|\}}\,.$$

Damit folgt für alle $n \ge n_0$ mit n_0 hinreichend groß

$$|f(x_n) - f(x)| \le |f(x_n) - \widetilde{f}(x_n)| + |\widetilde{f}(x_n) - \widetilde{f}(x)| + |\widetilde{f}(x) - f(x)|$$

$$\begin{aligned}&\le \|f-\widetilde{f}\|\cdot\|x_n\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f-\widetilde{f}\|\cdot\|x\|\\&\le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Also gilt $f(x_n) \to f(x)$. □

7.7 Definition. Seien E, F normierte Räume. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(E,F)$ und $T \in L(E,F)$.

a) T_n konvergiert gleichmäßig oder in der Norm gegen T, wenn $\|T_n - T\| \to 0$.

b) T_n konvergiert stark (in der starken Operatortopologie) gegen T, wenn gilt

$$\forall\, x \in E : \ \|T_n x - Tx\|_F \to 0.$$

Man schreibt $T_n \xrightarrow{s} T$.

c) T_n konvergiert schwach (in der schwachen Operatortopologie) gegen T, wenn gilt

$$\forall\, x \in E \;\forall\, f \in F' : \ |f(T_n x) - f(Tx)| \to 0.$$

Man schreibt $T_n \xrightarrow{w} T$.

Man beachte, dass das Symbol $T_n \xrightarrow{w} T$ für Operatoren eine doppelte Bedeutung hat. Im Normalfall versteht man aber die Konvergenz nach Definition 7.7 darunter.

Die starke Opertatortopologie ist gegeben durch

$$\sigma\big(L(E,F), \{e_x : x \in E\}\big)$$

mit $e_x(T) := Tx \quad (x \in E,\, T \in L(E,F))$. Analog ist die schwache Operatortopologie gegeben als

$$\sigma\big(L(E,F), \{e_{x,f} : x \in E,\ f \in F'\}\big)$$

mit $e_{x,f} := f(Tx) \quad (f \in F',\, x \in E,\, T \in L(E,F))$.

Offensichtlich gilt

$$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T \implies T_n \xrightarrow{s} T \implies T_n \xrightarrow{w} T.$$

Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht.

7.8 Satz. *Sei E ein Banachraum und F ein normierter Raum. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(E,F)$ stark konvergent, d.h. für alle $x \in E$ konvergiere $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$. Dann existiert ein $T \in L(E,F)$ mit $T_n \xrightarrow{s} T$.*

Beweis. Für $x \in E$ definiert man $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$. Offensichtlich ist T linear, und es gilt $T_n \xrightarrow{s} T$. Zu zeigen ist, dass T stetig ist.

Da $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ konvergiert, existiert ein C_x mit $\|T_n x\|_F \leq C_x$. Nach Banach-Steinhaus gilt $\|T_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq C\|x\| \quad (n \in \mathbb{N})$$

und damit $\|Tx\| \leq C\|x\|$. □

III. Lineare Operatoren in Banachräumen

8. Das Spektrum

Dieser Abschnitt definiert die grundlegenden Begriffe der Spektraltheorie. Dabei werden von Anfang auch unbeschränkte Operatoren betrachtet. Neben der Definition des Spektrums eines linearen Operators ist die Holomorphie der Resolvente das Hauptergebnis dieses Abschnittes.

Wir wiederholen zunächst bereits bekannte Begriffe und wichtige Aussagen. Seien E, F Banachräume, und $T : E \to F$ ein linearer (nicht notwendig beschränkter) Operator. Sei $D(T) \subset E$ der Definitionsbereich und $R(T) \subset F$ der Wertebereich von T. Dann ist der Graph von T definiert als $\{(x, Tx) : x \in D(T)\}$.

Der Operator T ist genau dann stetig, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \to 0$ gilt $Tx_n \to 0$.

Der Operator T ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \to x \in E$ und $Tx_n \to y \in F$ gilt $x \in D(T)$ und $Tx = y$.

Falls $D(T)$ abgeschlossen ist, so ist T genau dann stetig, wenn T abgeschlossen ist (Satz vom abgeschlossenen Graphen).

Falls T abgeschlossen und injektiv ist, so ist auch T^{-1} abgeschlossen. Falls T abgeschlossen und injektiv ist und $R(T)$ abgeschlossen ist, so ist auch T^{-1} stetig (Satz von der Stetigkeit des Inversen).

Im folgenden schreiben wir für einen Operator $T : E \to E$ statt $T - \lambda\,\mathrm{id}_E$ einfach $T - \lambda$.

8.1 Definition. Sei E ein Banachraum und $T : E \to E$ ein linearer Operator mit $\overline{D(T)} = E$ (d.h. T ist dicht definiert).

a) $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda : D(T) \to E \text{ ist bijektiv }\}$ heißt die Resolventenmenge von T.

b) $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt das Spektrum von T.

c) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ nicht injektiv }\}$ heißt das Punktspektrum von T (die Menge aller Eigenwerte von T).

d) $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ injektiv}, \ \overline{R(T-\lambda)} = E, \ R(T-\lambda) \neq E\}$ heißt das kontinuierliche Spektrum von T.

e) $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} \neq E\}$ heißt das residuelle Spektrum (oder Restspektrum) von T.

8.2 Bemerkung. a) Direkt aufgrund der Definition haben wir

$$\mathbb{C} = \rho(T) \mathbin{\dot\cup} \sigma(T) = \rho(T) \mathbin{\dot\cup} \sigma_p(T) \mathbin{\dot\cup} \sigma_c(T) \mathbin{\dot\cup} \sigma_r(T),$$

wobei $\dot\cup$ die disjunkte Vereinigung bezeichnet.

b) Falls $\dim E < \infty$, so ist $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$.

c) Sei T abgeschlossen und $\lambda \in \rho(T)$. Dann ist die Inverse $(T-\lambda)^{-1} : E \to D(T)$ stetig. Denn $T-\lambda$ ist ebenfalls abgeschlossen, der Wertebereich $R(T-\lambda) = E$ ist abgeschlossen. Damit folgt die Aussage aus dem Satz vom stetigen Inversen.

8.3 Definition. Sei $T : E \to E$ ein linearer Operator mit Definitionsbereich $D(T)$.

a) Für $\lambda \in \rho(T)$ heißt $R_\lambda(T) := (T-\lambda)^{-1}$ die Resolvente von T.

b) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ heißt $\ker(T-\lambda)$ der geometrische Eigenraum von T zu λ und

$$N_\lambda^{(a)}(T) := \{x \in D(T) \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : (T-\lambda)^n x = 0\}$$

der algebraische Eigenraum von T zu λ.

8.4 Beispiel. Sei $E = \ell^2$ und $S\colon \ell^2 \to \ell^2$ definiert durch $S(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$ (Rechts-Shift). Dann ist $D(S) = \ell^2$, $\ker S = \{0\}$ und $0 \in \sigma_r(S)$ wegen $(1,0,0,\dots) \in R(S)^\perp$, d.h. $\overline{R}(S) \neq E$.

8.5 Lemma (Neumannsche Reihe). *Sei E ein Banachraum und $T \in L(E)$ mit $\|T\| < 1$. Dann existiert $(1-T)^{-1} \in L(E)$, und es gilt $(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty T^n$ und $\|(1-T)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|T\|}$.*

Beweis. Es gilt

$$\sum_{n=0}^N \|T^n\| \le \sum_{n=0}^N \|T\|^n \le \sum_{n=0}^\infty \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|},$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut. Damit existiert $S := \sum_{n=0}^\infty T^n \in L(E)$, und es gilt $\|S\| \le \frac{1}{1-\|T\|}$.

Es gilt $ST = TS = \sum_{n=0}^\infty T^{n+1} = S - 1$, d.h. $S(1-T) = (1-T)S = 1$ und damit $S = (1-T)^{-1}$. □

8.6 Satz. *Sei E ein $\mathbb{C}$-Banachraum und T ein abgeschlossener lineare Operator in E mit $\overline{D(T)} = E$. Dann ist $\rho(T)$ offen und somit $\sigma(T)$ abgeschlossen.*

Beweis. Falls $\rho(T) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\lambda_0 \in \rho(T)$. Es gilt

$$T - \lambda = T - \lambda_0 - (\lambda - \lambda_0) = (T - \lambda_0)\big[1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}\big].$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| \cdot \|(T - \lambda_0)^{-1}\| < 1$ existiert

$$\big[1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}\big]^{-1} \in L(E)$$

nach Lemma 8.5. Damit existiert

$$(T - \lambda)^{-1} = \big[1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}\big]^{-1} \in L(E).$$

Somit gilt

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \big\|(T - \lambda_0)^{-1}\big\|^{-1} \subset \rho(T),$$

also ist $\rho(T)$ offen. □

8.7 Korollar. a) *Für $\lambda_0 \in \rho(T)$ gilt*

$$\|R_{\lambda_0}(T)\| \geq \big[\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T))\big]^{-1}.$$

b) *Für $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ gilt*

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}.$$

Beweis. a) folgt aus der letzten Zeile im Beweis von Satz 8.6, b) aus der Darstellung von $R_\lambda(T)$ im Beweis von Satz 8.6 und der Neumann-Reihe. □

8.8 Definition (holomorphe Funktionen in Banachräumen). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, E ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $f \colon \Omega \to E$. Dann heißt f holomorph [schwach holomorph] in $z_0 \in \Omega$, falls $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ in der Norm von E [in der schwachen Topologie] existiert.

8.9 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, E ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $x : \Omega \to E$. Dann ist x genau dann schwach holomorph, wenn x holomorph ist.*

Zum Beweis brauchen wir noch ein Lemma.

8.10 Lemma. *Sei E ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ eine Folge in E. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge in E, falls $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine gleichmäßige Cauchyfolge für alle $f \in E'$ mit $\|f\| \leq 1$ ist.*

Beweis. (i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ Cauchyfolge. Dann ist

$$\sup_{f\in E',\,\|f\|\le 1} |f_n(x) - f_m(x)| \le \sup_{f\in E',\,\|f\|\le 1} \|f\|\cdot\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_m\|.$$

(ii) Es gelte

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, n,m \ge N\; \forall\, f \in E',\, \|f\| \le 1:\; |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Dann folgt unter Verwendung der Einbettung $E \hookrightarrow E''$, $x \mapsto \widetilde{x}$ die Abschätzung

$$\|x_n - x_m\| = \|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_m\| = \sup_{f\in E',\,\|f\|\le 1} |(\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_m)(f)| \le \varepsilon$$

für $n, m \ge N$. □

Beweis von Satz 8.9. Sei x schwach holomorph und $z \in \Omega$. Sei $\Gamma_z := K_\varepsilon(z) \subset \Omega$ mit positiver Orientierung. Nach dem Cauchy-Integralsatz gilt für alle $f \in E'$

$$f(x(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_z} \frac{f(x(\mu))}{\mu - z}\, d\mu.$$

Damit erhält man für $0 < |h| < \varepsilon$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\big[f(x(z+h)) - f(x(z))\big] - \frac{d}{dz} f(x(z)) \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_z} \Big(\frac{1}{h}\Big[\frac{1}{\mu - z - h} - \frac{1}{\mu - z}\Big] - \frac{1}{(\mu - z)^2}\Big) f(x(\mu))d\mu \\
&\qquad = \frac{h}{2\pi i}\int_{\Gamma_z} \frac{f(x(h))}{(\mu - z - h)(\mu - z)^2}\, d\mu.
\end{aligned}$$

Da $\mu \mapsto f(x(\mu))$ holomorph und damit stetig ist, gilt

$$|f(x(\mu))| \le C_f \quad (\mu \in \Gamma_z,\; f \in E').$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus folgt

$$\|x(\mu)\| \le C \quad (\mu \in \Gamma_z)$$

und damit

$$\Big|\frac{1}{h}\big[f(x(z+h)) - f(x(z))\big] - \frac{d}{dz} f(x(z))\Big| \le C'\, |h| \cdot \|f\|.$$

Wir erhalten

$$\frac{1}{h}\big[f(x(z+h)) - f(x(z))\big] \to \frac{d}{dz} f(x(z)) \quad (|h| \to 0)$$

schwach gleichmäßig für alle $f \in E'$ mit $\|f\| \le 1$. Nach Lemma 8.10 folgt die Konvergenz in der Norm, d.h. x ist holomorph.

Die andere Richtung des Satzes ist direkt aus den Definitionen klar. □

8.11 Korollar. *Sei E ein Banachraum, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Es gelte*

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_n \in E$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot |z - z_0|^n < \infty \quad \text{für } |z - z_0| < \varepsilon.$$

Dann ist x holomorph an der Stelle z_0.

Beweis. Für $f \in E'$ ist

$$\begin{aligned} f(x(z)) &= f\Big(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_0)^n\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f(a_n)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(a_n)(z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Stetigkeit von f verwendet. Wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(a_n)| \cdot |z - z_0|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \|f\| \cdot \|a_n\|_E \cdot |z - z_0|^n < \infty \quad (|z - z_0| < \varepsilon)$$

lässt sich $f(x(z))$ um z_0 in eine absolut konvergente Potenzreihe entwickeln, ist also holomorph an der Stelle z_0. Somit ist x schwach holomorph an der Stelle z_0 und damit nach Satz 8.9 holomorph. □

8.12 Satz. *Sei E ein Banachraum, T ein abgeschlossener linearer Operator in E mit $\overline{D(T)} = E$. Dann ist die Resolvente $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$, $\rho(T) \to L(E)$, holomorph in $\rho(T)$.*

Beweis. Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$. Nach Korollar 8.7 b) lässt sich $R_\lambda(T)$ in eine absolut konvergente Potenzreihe

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}$$

entwickeln. Nach Korollar 8.11 ist $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ holomorph an der Stelle λ_0. □

8.13 Satz. *Sei E ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T \in L(E)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer.*

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ ist $T - \lambda = (-\lambda)(1 - \lambda^{-1}T)$ nach Lemma 8.5 in $L(E)$ invertierbar, d.h. $\lambda \in \rho(T)$. Also ist $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ und damit kompakt.

Für $|\lambda| \geq \|T\|$ gilt

$$\|R_\lambda(T)\| = \Big\|\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^n}\Big\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \to 0 \quad (|\lambda| \to \infty).$$

Angenommen, es wäre $\rho(T) = \mathbb{C}$. Dann ist $\|R_\lambda(T)\| \leq C \quad (\lambda \in \mathbb{C})$. Für $x \in E$ und $f \in E'$ ist die Abbildung $\lambda \mapsto f(R_\lambda(T)x)$ holomorph in ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt, also nach dem Satz von Liouville konstant. Wegen

$$|f(R_\lambda(T)x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|R_\lambda(T)\| \to 0 \quad (|\lambda| \to \infty)$$

folgt $f(R_\lambda(T)x) = 0 \quad (f \in E', x \in E, \lambda \in \mathbb{C})$. Nach Korollar 6.4 zum Satz von Hahn-Banach folgt daraus $R_\lambda(T)x = 0 \quad (x \in E)$, d.h. $R_\lambda(T) = 0$, Widerspruch. □

8.14 Beispiel. Die folgenden Beispiele zeigen, dass für unbeschränkte Operatoren sehr wohl die Fälle $\sigma(T) = \mathbb{C}$ und $\sigma(T) = \emptyset$ auftreten können.

a) Sei $E = C([0,1])$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := C^1([0,T])$. Dann ist T unbeschränkt, da $\|Tf_n\| = n$ und $\|f_n\| = 1$ gilt für $f_n(t) := t^n$.

Wir zeigen, dass T abgeschlossen ist: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $f_n \to f$ in E und $Tf_n = f_n' \to g$ in E. Da $(f_n)_n$ und $(f_n')_n$ gleichmäßig konvergieren, gilt $f \in C^1([0,1])$ und $f_n' \to f'$. Somit ist $f \in D(T)$ und $g = f' = Tf$.

Es gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$, denn die Funktion $f(t) := e^{\lambda t}$ liegt in $\ker(T - \lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Sei $E := C_0([0,1]) := \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := \{f \in E : f' \in E\}$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, und seien $f, g \in E$. Betrachte die Gleichung $(T - \lambda)f = g$, d.h. $f' - \lambda f = g$. Versehen mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ hat diese gewöhnliche Differentialgleichung die eindeutige Lösung

$$f(t) = e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda s} g(s)ds.$$

Es gilt $f'(0) = g(0) + \lambda f(0) = 0$, d.h. $f' \in E$ und damit $f \in D(T)$. Somit ist $T - \lambda : D(T) \to E$ bijektiv für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $\rho(T) = \mathbb{C}$.

9. Adjungierte Operatoren

Dieser Abschnitt behandelt einen zentralen Begriff der Operatortheorie, nämlich den Adjungierten eines Operators. Am einfachsten ist dieser Begriff im Fall eines Hilbertraums bei beschränkten Operatoren. Für unbeschränkte Operatoren ist der Definitionsbereich des Adjungierten von entscheidender Bedeutung. Beispiele zeigen, dass bei unbeschränkten Operatoren der Definitionsbereich des Operators fast genauso wichtig ist wie der Wert.

a) Adjungierte von beschränkten Operatoren

9.1 Definition und Satz. *Seien E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$. Dann wird durch $f_1(x) := f(Tx)$ für jedes $f \in F'$ ein beschränktes lineares Funktional $f_1 \in E'$ definiert. Die Abbildung $T' : F' \to E'$, $f \mapsto f_1$ heißt (Banachraum-)adjungierter Operator zu T. Es gilt $T' \in L(F', E')$. Die Abbildung $T \mapsto T'$, $L(E, F) \to L(F', E')$ ist eine Isometrie.*

Beweis. Wegen $f_1 = f \circ T$ ist die Linearität und die Stetigkeit von f_1 klar. Wegen

$$|f_1(x)| = |f(Tx)| \le \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$$

ist $\|f_1\| \le \|T\| \cdot \|f\|$, d.h. $\|T'\| \le \|T\|$. Der Operator T' ist linear wegen

$$T'(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(Tx) = \alpha f(Tx) + \beta g(Tx).$$

Ebenso ist die Abbildung $T \mapsto T'$ linear.

Zu zeigen ist noch, dass $\|T\| \le \|T'\|$ gilt. Nach Korollar 6.4 zum Satz von Hahn-Banach existiert zu $x \in E$ ein $f_x \in E'$ mit $\|f_x\| = 1$ und $f_x(Tx) = \|Tx\|$. Damit ist

$$\|Tx\| = |f_x(Tx)| = |(T'f_x)(x)| \le \|T'\| \cdot \|x\|. \qquad \square$$

9.2 Bemerkung. a) Für $T \in L(E, F)$ ist $T'' \in L(E'', F'')$ und $T''|_E = T$. Denn es gilt $(T''\widetilde{x})(f) = \widetilde{x}(T'f) = (T'f)(x) = f(Tx) = \widetilde{Tx}(f)$.

b) Falls $T \in L(E, F)$ und $S \in L(F, G)$, so ist $(ST)' = T'S'$. Denn $((ST)'f)(x) = f(STx) = (S'f)(Tx) = [T'(S'f)](x)$.

c) Falls $T \in L(E, F)$ invertierbar ist, so gilt $(T^{-1})' = (T')^{-1}$. Dies gilt wegen $(T^{-1})'T' = (TT^{-1})' = \mathrm{id}' = \mathrm{id}$ und $(T'(T^{-1})' = (T^{-1}T)' = \mathrm{id}' = id$.

9.3 Definition. Seien E, F Hilberträume, und $T \in L(E, F)$. Dann existiert zu jedem $y \in F$ genau ein $y^* \in E$ mit

$$\langle Tx, y\rangle_F = \langle x, y^*\rangle \quad (x \in E).$$

Setze $T^*y := y^*$. Die Abbildung $T^* \in L(F, E)$ heißt (Hilbertraum-)Adjungierte zu T.

Man beachte, dass die Abbildung aus dem Satz von Riesz

$$i_E : E \to E',\ x \mapsto \langle\cdot, x\rangle$$

isometrisch aber konjugiert linear ist. Damit hängen Hilbertraum- und Banachraumadjungierte über $T^* = i_E^{-1} \circ T' \circ i_F$ zusammen. Vergleiche auch Aufgabe 8.

9.4 Definition. a) Sei E ein Hilbertraum und $T \in L(E)$. Dann heißt T

(i) selbstadjungiert, falls $T = T^*$,

(ii) unitär, falls $TT^* = T^*T = \mathrm{id}_E$,

(iii) normal, falls $TT^* = T^*T$.

b) Seien E, F Hilberträume und $T \in L(E, F)$. Dann heißt T unitär, falls $TT^* = \mathrm{id}_F$ und $T^*T = \mathrm{id}_E$ gilt.

9.5 Lemma. *Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(E)$. Dann ist T genau dann selbstadjungiert, falls $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in E$.*

Beweis. (i) Sei $T = T^*$. Dann ist $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $x, y \in E$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Nach Voraussetzung ist

$$\langle T(x + \alpha y), x + \alpha y\rangle = \overline{\langle T(x + \alpha y), x + \alpha y\rangle}$$

und damit

$$\alpha\langle Ty, x\rangle + \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle = \alpha\langle y, Tx\rangle + \overline{\alpha}\langle x, Ty\rangle.$$

Für $\alpha = 1$ erhält man

$$\langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle.$$

Für $\alpha = i$ erhält man

$$\langle Ty, x\rangle - \langle Tx, y\rangle = \langle y, Tx\rangle - \langle x, Ty\rangle.$$

Somit folgt

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad (x, y \in E).$$

Nach Definition von T^* gilt also $T = T^*$. □

9.6 Satz (Spektrum beschränkter selbstadjungierter Operatoren). *Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T \in L(E)$ selbstadjungiert. Dann gilt*

(i) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(ii) $\|(T-\lambda)^{-1}\| \le |\operatorname{Im}\lambda|^{-1} \quad (\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$.

(iii) *Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ ist $\ker(T-\lambda) = N_\lambda^{(a)}(T)$, d.h. geometrischer und algebraischer Eigenraum sind identisch.*

(iv) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

(v) $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Beweis. (i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ und $x \in E$. Es gilt mit Lemma 9.5

$$\|(T-\lambda)x\| \cdot \|x\| \ge |\langle (T-\lambda)x, x\rangle| \ge \big|\operatorname{Im}\langle (T-\lambda)x, x\rangle\big| = |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|x\|^2. \qquad (5)$$

Damit ist $T-\lambda$ injektiv.

Der Wertebereich $R(T-\lambda)$ ist abgeschlossen: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(T-\lambda)$ mit $y_n \to y$. Sei $y_n = (T-\lambda)x_n$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ wegen (5) eine Cauchyfolge, d.h. $x_n \to x$ und – da T stetig ist – auch $y = \lim_n y_n = (T-\lambda)x$.

$T-\lambda$ ist surjektiv: Sei $y \in R(T-\lambda)^\perp$, d.h.

$$\langle (T-\lambda)x, y\rangle = 0 \quad (x \in E).$$

Wegen $T = T^*$ ist dann $\langle x, (T-\bar\lambda)y\rangle = 0 \quad (x \in E)$, d.h. $(T-\bar\lambda)y = 0$. Da $T-\bar\lambda$ injektiv ist, folgt $y = 0$.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ der Operator $T-\lambda$ bijektiv ist.

(ii) Setze $y := (T-\lambda)x$ in (5) und erhalte

$$\|y\| \ge |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|(T-\lambda)^{-1}y\|.$$

(iii) Die Inklusion $\ker(T-\lambda) \subset N_\lambda^{(a)}(T)$ gilt immer. Sei also $x \in N_\lambda^{(a)}(T)\setminus\ker(T-\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(T-\lambda)^n x = 0$ für ein $n \ge 2$, aber $(T-\lambda)x \ne 0$. Wegen $T = T^*$ ist dann

$$\|(T-\lambda)^{n-1}x\|^2 = \langle (T-\lambda)^n x, (T-\lambda)^{n-2}x\rangle = 0.$$

Induktiv folgt $(T-\lambda)^{n-2}x = 0, \dots, (T-\lambda)x = 0$, Widerspruch.

(iv) Das folgt wie in der linearen Algebra. Seien x_1, x_2 Eigenvektoren zu $\lambda_1 \ne \lambda_2$ mit $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle Tx_1, x_2\rangle = \langle x_1, Tx_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle.$$

Wegen $\lambda_1 \ne \lambda_2$ folgt $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

(v) Angenommen, es existiert ein $\lambda \in \sigma_r(T)$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$, $T-\lambda$ injektiv und $\overline{R(T-\lambda)} \neq E$. Wähle $y \in R(T-\lambda)^\perp \setminus \{0\}$. Dann ist

$$0 = \langle (T-\lambda)x, y\rangle = \langle x, (T-\lambda)y\rangle \quad (x \in E),$$

d.h. $(T-\lambda)y = 0$ und, da $T-\lambda$ injektiv ist, $y=0$, Widerspruch. □

Der folgende Satz wird genauso wie Satz 9.6 bewiesen.

9.7 Satz (Spektrum unitärer Operatoren). *Sei E ein Hilbertraum und $T \in L(E)$ unitär. Dann gilt*

(i) $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

(ii) $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\big||\lambda|-1\big|}$ *für* $|\lambda| \neq 1$.

Die Aussagen (iii)–(v) *von Satz 9.6 gelten analog.*

b) Adjungierte von unbeschränkten Operatoren

9.8 Definition. Seien E, F Banachräume und $T : E \to F$ ein linearer dicht definierter Operator (d.h. $\overline{D(T)} = E$). Definiere

$$D(T') := \{f \in F' :\ \exists\, f_1 \in E' \text{ mit } f(Tx) = f_1(x) \quad (x \in D(T))\}$$

und

$$T'f := f_1 \quad (f \in D(T')).$$

Kurz kann man auch schreiben: $D(T') = \{f \in F' :\ x \mapsto f(Tx) \in E'\}$. Die Abbildung $T' : F' \to E'$ mit Definitionsbereich $D(T')$ heißt (Banachraum-)Adjungierte von T.

9.9 Bemerkung. a) $T'f$ ist eindeutig definiert. Denn seien $f_1, f_2 \in E'$ mit $f_1(x) = f(Tx) = f_2(x) \quad (x \in D(T))$. Da $\overline{D(T)} = E$ und f_1, f_2 stetig sind, folgt $f_1 = f_2$ auf ganz E.

b) Es gilt $(f,g) \in G(T')$ genau dann, wenn $g(x) = f(Tx) \quad (x \in D(T))$.

c) Der Operator T' ist abgeschlossen. Denn sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T')$ mit $f_n \to f$ in F' und $T'f_n \to g$ in E'. Dann gilt für $x \in D(T)$:

$$f(Tx) = \lim_{n\to\infty} f_n(Tx) = \lim_{n\to\infty} (T'f_n)(x) = g(x).$$

Damit gilt $f \in D(T')$ und $(f,g) \in G(T')$ nach b).

9.10 Definition. Seien E, F Hilberträume und $T : E \to F$ ein linearer dicht definierter Operator. Definiere

$$D(T^*) := \{y \in F : \; x \mapsto \langle Tx, y\rangle \text{ ist stetiges lineares Funktional auf } D(T)\}.$$

Für $y \in D(T^*)$ existiert ein eindeutiges $y^* \in E$ mit

$$\langle Tx, y\rangle_F = \langle x, y^*\rangle_E \quad (x \in D(T)).$$

Definiere $T^* : F \to E$ durch $T^*y := y^* \quad (y \in D(T^*))$. Der Operator T^* heißt (Hilbertraum-)Adjungierte von T.

9.11 Lemma. *Betrachte in der Situation von Definition* 9.10 *den unitären Isomorphismus*

$$U : E \oplus F \to F \oplus E, \; (x, y) \mapsto (y, -x).$$

Dann gilt

$$G(T^*) = U(G(T)^\perp) = [U(G(T))]^\perp.$$

Beweis. Sei $(y, y^*) \in G(T^*)$. Nach Definition von T^* gilt

$$\langle Tx, y\rangle_F = \langle x, y^*\rangle_E \quad (x \in D(T)),$$

d.h.

$$0 = \langle x, y^*\rangle_E + \langle Tx, y\rangle_F = \langle (x, Tx), (-y^*, y)\rangle_{E\oplus F} = \langle (x, Tx), U^{-1}(y, y^*)\rangle_{E\oplus F}.$$

Beachte dabei, dass $U^{-1}(y, x) = (-x, y)$ gilt. Somit ist $U^{-1}(y, y^*) \in G(T)^\perp$, d.h.

$$(y, y^*) \in U(G(T)^\perp) = [U(G(T))]^\perp.$$

Bei der letzten Gleichheit wurde verwendet, dass U unitär ist. $\square$

9.12 Satz. *Seien E, F Hilberträume und $T : E \to F$ ein dicht definierter linearer Operator. Dann ist T^* abgeschlossen. Falls T abschließbar ist, so ist T^* dicht definiert und $T^{**} = \overline{T}$.*

Beweis. Wegen $G(T^*) = [U(G(T))]^\perp$ (siehe Lemma 9.11) ist T^* abgeschlossen.

Sei T abschließbar und $y_0 \in D(T^*)^\perp$. Dann ist

$$\langle y_0, y\rangle = 0 \quad (y \in D(T^*)).$$

Damit folgt

$$\langle (0, y_0), (-z, y)\rangle_{E\oplus F} = 0 \quad ((y, z) \in G(T^*)).$$

Somit ist unter Verwendung von Lemma 9.11 und nach Definition des Abschlusses

$$(0, y_0) \in \big[U^{-1}(G(T^*))\big]^\perp = G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)} = G(\overline{T}).$$

Daher ist $y_0 = \overline{T}0 = 0$, also $\overline{D(T^*)} = F$. Wir wenden Lemma 9.11 nun an auf den adjungierten Operator $T^* : F \to E$ und erhalten

$$G(\overline{T}) = \big[U^{-1}(G(T^*))\big]^\perp = \big[-U^{-1}(G(T^*))\big]^\perp = G(T^{**}).$$

Also gilt $T^{**} = \overline{T}$. □

9.13 Korollar. *Seien E, F Hilberträume und $T : E \to F$ ein dicht definierter und abgeschlossener Operator. Dann ist T^* dicht definiert und abgeschlossen, und $T^{**} = \overline{T}$.*

9.14 Satz. *Seien E, F Hilberträume und $T : E \to F$ ein abgeschlossener und dicht definierter Operator. Dann gilt*

a) $R(T)^\perp = \overline{R(T)}^\perp = \ker T^*$.

b) $\overline{R(T)} = (\ker T^*)^\perp$.

c) $R(T^*)^\perp = \ker T$.

d) $\overline{R(T^*)} = (\ker T)^\perp$.

Beweis. a) Es gilt $y \in R(T)^\perp$ genau dann, wenn für alle $x \in D(T)$ gilt $\langle Tx, y\rangle = 0$. Dies ist äquivalent zu $y \in D(T^*)$ und $T^*y = 0$, also zu $y \in \ker T^*$.

b) Nach a) gilt $\overline{R(T)} = (R(T))^{\perp\perp} = (\ker T^*)^\perp$.

c) Nach Satz 9.12 ist T^* abgeschlossen, dicht definiert, und es gilt $T^{**} = T$. Wende a) auf T^* an und erhalte $R(T^*)^\perp = \ker T^{**} = \ker T$.

d) Wende b) auf T^* an. □

9.15 Beispiel. Sei $E = L_2([0,1])$. Definiere die Operatoren T_1, T_2, T_3 durch

$$\begin{aligned} D(T_1) &:= \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ absolutstetig}, f' \in L_2([0,1])\}, \\ D(T_2) &= D(T_1) \cap \{f : f(0) = f(1)\}, \\ D(T_3) &= D(T_1) \cap \{f : f(0) = f(1) = 0\} \end{aligned}$$

und $T_k f := if' \quad (f \in D(T_k))$ für $k = 1, 2, 3$. Offensichtlich ist $D(T_k)$ dicht in E.

Sei $f \in D(T_1)$ und $g \in D(T_1)$. Dann gilt

$$\langle T_1 f, g\rangle = \int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx$$

$$\begin{aligned} &= if(x)\overline{g(x)}\Big|_0^1 - \int_0^1 if(x)\overline{g'(x)}dx \\ &= if(1)g(1) - if(0)g(0) + \langle f, T_1 g\rangle. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \langle T_1 f, g\rangle &= \langle f, T_1 g\rangle \quad \text{für } f \in D(T_1),\ g \in D(T_3), \\ \langle T_1 f, g\rangle &= \langle f, T_1 g\rangle \quad \text{für } f, g \in D(T_2). \end{aligned}$$

Also haben wir $D(T_1) \subset D(T_3^*)$, $D(T_2) \subset D(T_2^*)$ und $D(T_3) \subset D(T_1^*)$.

Sei $g \in D(T_1^*)$ und $\phi := T_1^* g$. Definiere $\Phi(x) := \int_0^x \phi(t)dt$. Dann ist Φ absolutstetig mit $\Phi' = \phi$. Für $f \in D(T_1)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}dx = \langle T_1 f, g\rangle = \langle f, \phi\rangle =) \int_0^1 f(x)\overline{\phi(x)}dx \\ = f(x)\Phi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)\overline{\Phi(x)}dx \\ f(1)\Phi(1) - \int_0^1 f'(x)\overline{\Phi(x)}dx. \end{aligned}$$

Wählt man für f eine konstante Funktion, so erhält man $\Phi(1) = 0$. Damit gilt

$$\int_0^1 if'(x)\overline{(g(x) + i\Phi(x))}dx = 0 \quad (f \in D(T_1)),$$

d.h. $g + i\Phi \in R(T_1)^\perp = \{0\}$. Also ist g absolutstetig und $g(0) = -i\Phi(0) = 0$, $g(1) = -i\Phi(1) = 0$, d.h. $g \in D(T_3)$.

Insgesamt haben wir $D(T_1^*) = D(T_3)$, $T_1^* g = T_3 g \quad (g \in D(T_3))$, also $T_1^* = T_3$. Genauso zeigt man $T_3^* = T_1$ und $T_2^* = T_2$. Insbesondere folgt, dass T_k abgeschlossen ist für $k = 1, 2, 3$.

10. Kompakte Operatoren

Kompakte Operatoren sind in gewisser Weise die einfachsten Operatoren in unendlich-dimensionalen Räumen. Das Spektrum besteht (bis auf die 0) nur aus Eigenwerten mit endlicher Vielfachheit. Die Aussagen über kompakte Operatoren sind einer der Höhepunkte dieser Vorlesung, bereiten andererseits aber auch den Spektralsatz vor. Kompakte selbstadjungierte Operatoren lassen sich sehr gut beschreiben und ähnlich wie hermitesche Matrizen diagonalisieren. Die Riesz-Schauder-Theorie kompakter Operatoren, wie sie hier skizziert wird, gehört zu den klassischen Bereichen der Funktionalanalysis.

a) Erste Eigenschaften

10.1 Definition. Seien E, F Banachräume und $T : E \to F$ linear. T heißt kompakt, falls folgende äquivalente Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Das Bild jeder beschränkten Menge unter T ist relativ-kompakt (d.h. der Abschluss des Bildes ist kompakt).

(ii) Die Menge $\{Tx : \|x\|_E \leq 1\}$ ist relativ-kompakt.

(iii) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine beschränkte Folge, so enthält $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ eine in F konvergente Teilfolge.

Wir setzen $K(E,F) := \{T : E \to F | T \text{ linear, kompakt }\}$ und $K(E) := K(E,E)$.

In obiger Definition ist die Äquivalenz von (i) und (ii) klar, die von (ii) und (iii) folgt daraus, dass in metrischen Räumen die Kompaktheit äquivalent zur Folgenkompaktheit ist. Kompakte Operatoren sind beschränkt.

10.2 Lemma. a) *Falls* $\dim E < \infty$ *oder* $\dim F < \infty$*, so ist* $T \in L(E,F)$ *kompakt. Falls* $T \in L(E,F)$ *ist mit* $\dim R(T) < \infty$*, so ist* T *kompakt.*

b) *Die Identität* $\mathrm{id}_E : E \to E$ *ist genau dann kompakt, wenn* $\dim E < \infty$*.*

Beweis. a) ist klar, da im endlich-dimensionalen Raum eine Menge genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

b) Falls $\dim E < \infty$, so ist id_E nach a) kompakt.

Sei id_E kompakt, d.h. $\overline{K_1} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ kompakt. Dann existieren $x_i \in E$ mit $\overline{K_1} \subset \bigcup_{i=1}^n K_{1/2}(x_i)$ (endliche offene Überdeckung). Wir zeigen $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} =: V = E$.

Angenommen, es existiert ein $x \in E \setminus V$. Dann ist $d := \inf_{y \in V} \|x - y\| > 0$. Wähle $y \in V$ mit $d \leq \|x - y\| \leq \frac{3}{2}d$ und setze $z := \frac{x-y}{\|x-y\|}$. Da $z \in \overline{K_1}$, existiert ein x_i mit $\|z - x_i\| < \frac{1}{2}$. Schreibe

$$x = y + \|x - y\| \cdot z = \underbrace{y}_{\in V} + \underbrace{\|x - y\| x_i}_{\in V} + \|x - y\| \cdot (z - x_i).$$

Nach Definition von d folgt $\|x - y\| \cdot \|z - x_i\| \geq d$, d.h.

$$\|x - y\| \geq \frac{d}{\|z - x_i\|} > 2d,$$

Widerspruch. □

10.3 Satz. a) *Seien E, F Banachräume. Dann ist $K(E, F)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(E, F)$ (bezüglich der Normtopologie).*

b) *Seien E, F, G Banachräume. Dann gilt*

$$\begin{aligned} L(F, G) \circ K(E, F) &\subset K(E, G), \\ K(F, G) \circ L(E, F) &\subset K(E, G), \end{aligned}$$

wobei $L \circ K := \{T \circ S : \; T \in L, \; S \in K\}$.

c) *$K(E)$ ist ein abgeschlossenes Ideal in (der Banachalgebra) $L(E)$.*

Beweis. Teil b) folgt direkt aus der Definition.

a) Seien $S, T \in K(E, F)$. Dann ist offensichtlich $\alpha S \in K(E, F)$ für Skalare α. Definiere

$$S \oplus T : E \oplus E \to F \oplus F, \; (x_1, x_2) \mapsto (Sx_1, Tx_2).$$

Dann ist $S \oplus T$ kompakt, denn das kartesische Produkt kompakter Mengen ist kompakt. Damit ist

$$S + T : \quad \begin{array}{ccccccc} E & \longrightarrow & E \oplus E & \xrightarrow{S \oplus T} & F \oplus F & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & (x, x) & & (y_1, y_2) & \mapsto & y_1 + y_2 \end{array}$$

nach Teil b) kompakt.

Wir haben noch die Abgeschlossenheit zu zeigen. Sei $T \in \overline{K(E, F)} \subset L(E, F)$. Dann existiert ein $S \in K(E, F)$ mit $\|S - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da S kompakt ist, existiert eine offene Überdeckung

$$S(K_1(0)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_{\varepsilon/3}(Sx_i).$$

Für $y \in K_1(0)$ existiert ein i mit

$$\begin{aligned}\|Ty - Tx_i\| &\leq \|Ty - Sy\| + \|Sy - Sx_i\| + \|Sx_i - Tx_i\| \\ &\|T - S\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T - S\| \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Es gilt also $TK_1(0) \subset \bigcup_{i=1}^n K_\varepsilon(x_i)$, somit ist T kompakt. □

10.4 Lemma. *Sei E ein Banachraum und $A \subset E$ kompakt. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K_1' := \{f \in E' : \|f\| < 1\}$. Dann existiert eine auf A gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Im Beweis verwenden wir folgenden Satz.

10.5 Satz (von Arzela-Ascoli). *Sei M ein kompakter topologischer Raum, (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist eine Menge $H \subset C(M; X)$ genau dann relativ-kompakt, wenn H gleichgradig stetig ist und für alle $m \in M$ die Menge $\{f(m) : f \in H\} \subset X$ relativ-kompakt ist.*

Dabei wird wie üblich der Raum $C(M; X)$ mit der Supremumsnorm versehen. Eine Menge $H \subset C(M; X)$ heißt gleichgradig stetig, wenn für alle $m \in M$ und alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U_m von m existiert, so dass für alle $m' \in U_m$ und alle $f \in H$ gilt $d(f(m), f(m')) < \varepsilon$.

Beweis von Lemma 10.4. Sei

$$\widetilde{K'} := \{f|_A : \ f \in E', \|f\| \leq 1\} \subset C(A; \mathbb{K}).$$

Zu zeigen ist, dass $\widetilde{K'}$ relativ-kompakt ist. Dafür genügt es nach dem Satz von Arzela-Ascoli, folgende Aussagen zu zeigen:

(i) $\widetilde{K'}$ ist beschränkt,

(ii) $\widetilde{K'}$ ist gleichgradig stetig.

Zu (i): Sei $\|x\| < c$ für alle $x \in A$. Dann gilt für $f|_A \in \widetilde{K'}$

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|x\| < c,$$

d.h. $\|f|_A\|_{C(A;\mathbb{K})} \leq c$.

Zu (ii): Sei $x \in A$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $y \in K_\varepsilon(x) \cap A$ und $f \in \widetilde{K'}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{\|f\|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\|x - y\|}_{< \varepsilon} < \varepsilon.$$

□

10.6 Satz (von Schauder). *Seien E, F Banachräume. Dann ist $T \in L(E,F)$ genau dann kompakt, wenn $T' \in L(F', E')$ kompakt ist.*

Beweis. (i) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K_1'$. Zu zeigen ist, dass $(T f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ eine in E' konvergente Teilfolge besitzt. Da T kompakt ist, ist $\overline{TK_1}$ kompakt. Nach Lemma 10.4 existiert eine auf $\overline{TK_1}$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ und k, ℓ hinreichend groß ist

$$\|f_{n_k}(y) - f_{n_\ell}(y)\| < \varepsilon \quad (y \in TK_1).$$

Damit gilt

$$\|f_{n_k}(Tx) - f_{n_\ell}(Tx)\| < \varepsilon \quad (x \in K_1).$$

Da $f_n(Tx) = (T'f_n)(x)$, ist $(T'f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset E'$ eine Cauchyfolge und damit in E' konvergent.

(ii) Sei $T' \in K(F', E')$. Nach Teil (i) ist $T'' \in K(E'', F'')$, d.h. die Menge

$$\overline{T''\{x'' \in E'' : \|x''\| \leq 1\}}$$

ist kompakt. Wegen

$$K_1(0) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\} \subset \{x'' \in E'' : \|x''\| \leq 1\}$$

(isometrische Einbettung) ist also $\overline{T''K_1(0)} = \overline{TK_1(0)}$ kompakt, d.h. $T \in K(E,F)$. $\square$

b) Das Spektrum kompakter Operatoren

Zunächst brauchen wir ein Lemma über Komplementärräume.

10.7 Lemma. *Sei E ein normierter Raum, und $M \subset E$ ein linearer Teilraum.*

a) *Falls $\dim M < \infty$, so ist M abgeschlossen, und es existiert ein komplementärer abgeschlossener Unterraum N (d.h. es gilt $E = M + N$ und $N \cap M = \{0\}$).*

b) *Falls M abgeschlossen ist und $\operatorname{codim} M := \dim E/M < \infty$, so existiert ein komplementärer abgeschlossener Unterraum N zu M.*

Beweis. a) Die Abgeschlossenheit von M ist klar. Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von M und $\{\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_n\}$ die duale Basis in M', d.h. $\widetilde{f}_i(x_j) = \delta_{ij}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existieren Fortsetzungen $f_1, \ldots, f_n \in E'$. Definiere $P : E \to E$ durch

$Px := \sum_{i=1}^n f_i(x)x_i$. Dann ist $P \in L(E)$ mit $P^2 = P$ und $P|_M = \mathrm{id}_M$. Für $N := \ker P$ gilt $M \cap N = \{0\}$ und

$$x = \underbrace{(x - Px)}_{\in N} + \underbrace{Px}_{\in M} \quad (x \in E),$$

d.h. $E = N + M$.

b) Sei $\{[x_1], \dots, [x_n]\}$ eine Basis von E/M und $N := \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\} \subset E$. Dann ist $E = N + M$ und $N \cap M = \{0\}$, denn sei $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in M$, so ist $[x] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [x_i] = [0]$ und daher $\alpha_i = 0$.

Nach Teil a) ist N abgeschlossen. □

10.8 Satz (von Riesz). *Sei E ein Banachraum, $T \in K(E)$. Dann gilt:*

(i) $\ker(1 - T)$ *ist endlich-dimensional.*

(ii) $R(1 - T)$ *ist abgeschlossen.*

(iii) $\mathrm{codim}\, R(1 - T) < \infty$.

Beweis. (i) Nach Voraussetzung ist $\mathrm{id}_E|_{\ker(1-T)} = T|_{\ker(1-T)}$ kompakt, also gilt nach Lemma 10.2 b) $\dim \ker(1 - T) < \infty$.

(ii) Sei W ein abgeschlossener komplementärer Unterraum zu $\ker(1 - T)$ (Lemma 10.7 a)). Dann ist $(1 - T)|_W : W \to R(T)$ bijektiv und stetig. Wir zeigen, dass auch der inverse Operator $((1 - T)|_W)^{-1} : R(1 - T) \to W$ stetig ist.

Sonst existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(1 - T)x_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$. Da T kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $Tx_{n_k} \to x \in E \quad (k \to \infty)$. Somit gilt

$$x_{n_k} = \underbrace{Tx_{n_k}}_{\to x} + \underbrace{(1 - T)x_{n_k}}_{\to 0} \to x.$$

Da W abgeschlossen ist, folgt $x \in W$. Es ist $(1 - T)x = \lim_{k\to\infty}(1 - T)x_{n_k} = 0$, d.h. $x \in W \cap \ker(1 - T) = \{0\}$, Widerspruch zu $\|x_n\| = 1$. Somit ist $1 - T$ offen, und nach Übungsaufgabe 26 ist $R(1 - T)$ abgeschlossen.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} R(1 - T)^\circ &:= \{f \in E' : f|_{R(1-T)} = 0\} \\ &= \{f \in E' : \ \forall\, x \in E : \ f((1 - T)x) = 0\} \\ &= \{f \in E' : (1 - T')f = 0\} = \ker(1 - T'), \end{aligned}$$

und nach dem Satz von Schauder ist $k := \dim R(1 - T)^\circ < \infty$.

Seien $\{[y_1,], \ldots, [y_n]\}$ linear unabhängig in $E/R(1-T)$. Dann ist $V := \operatorname{span}\{R(1-T), y_1, \ldots, y_n\} \subset E$ abgeschlossen, denn: Sei $\pi : E \to E/R(1-T)$ die kanonische Abbildung. Dann ist $\pi(V) \subset E/R(1-T)$ endlich-dimensional, also abgeschlossen. Da π stetig ist, ist auch $V = \pi^{-1}(\pi(V))$ abgeschlossen.

Nach dem Satz von Hahn-Banach existieren Funktionale $\lambda_i \in E'$ mit $\lambda_i|_{R(1-T)} = 0$ und $\lambda_i(y_j) = \delta_{ij}$. Die letzte Bedingung garantiert, dass $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ linear unabhängig ist. Wegen $\lambda_i \in R(1-T)^\circ$ gilt also $n \leq k$.

Wir haben also gezeigt: $\operatorname{codim} R(1-T) \leq \dim R(1-T)^\circ < \infty$. □

Für das Spektrum kompakter Operatoren müssen wir noch $\ker(1-T)$ untersuchen. Dazu dient das folgende Lemma.

10.9 Lemma. *Sei E ein Banachraum und $T \in L(E)$. Seien M, L abgeschlossene Unterräume von E mit $M \subsetneqq L$ und $(1-T)L \subset M$. Dann existiert ein $x \in L \setminus M$ mit $\|x\| = 1$ und $\|Tx - Tz\| \geq \frac{1}{2} \quad (z \in M)$.*

Beweis. Sei $b \in L \setminus M$, d.h. $d := \operatorname{dist}(b, M) > 0$. Dabei ist $\operatorname{dist}(b, M) := \inf_{y \in M} \|b - y\|$. Wähle $y_0 \in M$ mit $\|b - y_0\| \leq 2d$ und setze $x := \frac{b-y_0}{\|b-y_0\|}$. Dann gilt für alle $y \in M$:

$$\|y - x\| = \frac{1}{\|b - y_0\|} \underbrace{\big\| \|b - y_0\| \cdot y - b + y_0 \big\|}_{\geq d} \geq \frac{1}{2}\,.$$

Also gilt für $z \in M$:

$$\|Tz - Tx\| = \| \underbrace{z - (1-T)z + (1-T)x}_{\in M} - x\| \geq \frac{1}{2}\,.$$

□

10.10 Satz. *Sei E ein Banachraum und $T \in K(E)$. Sei $N_m := \ker(1-T)^m$ und $R_m := R((1-T)^m)$ für $m \in \mathbb{N}_0$ (wobei $(1-T)^0 := 1$). Dann gilt:*

a) $N_0 \subset N_1 \subset \ldots$ *und* $\dim N_m < \infty \quad (m \in \mathbb{N}_0)$,

$R_0 \supset R_1 \supset \ldots$ *und* $\operatorname{codim} R_m < \infty \quad (m \in \mathbb{N}_0)$.

b) *Es gibt eine kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $N_n = N_{n+1} = \ldots$. Es gilt $R_n = R_{n+1} = \ldots$. Weiter ist $E = R_n + N_n$, $R_n \cap N_n = \{0\}$, und $(1-T)|_{R_n} : R_n \to R_n$ ist linear, bijektiv und stetig mit stetigem Inversen.*

Beweis. a) Es gilt

$$(1-T)^m = 1 - mT + \binom{m}{2} T^2 - \cdots = 1 - T_m$$

mit einem kompakten Operator $T_m \in K(E)$ (da $K(E)$ ein Ideal in $L(E)$ ist). Also ist $\dim N_m < \infty$ und $\operatorname{codim} R_m < \infty$ nach Satz 10.8. Die Inklusionen sind klar.

b) Wir zeigen die Behauptung in mehreren Schritten.

(i) Angenommen, es gilt $N_m \subsetneqq N_{m+1}$ für alle m. Wegen $(1-T)N_{m+1} \subset N_m$ existiert nach Lemma 10.9 ein $x_m \in N_{m+1} \setminus N_m$ mit $\|x_m\| = 1$ und $\|Tx_m - Ty\| \geq \frac{1}{2}$ $(y \in N_m)$. Insbesondere gilt $\|Tx_m - Tx_k\| \geq \frac{1}{2}$ für alle $k < m$. Daher enthält $(Tx_m)_{m\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, Widerspruch zur Kompaktheit von T. Sei $\alpha := \{m \in \mathbb{N} : N_m = N_{m+1}\}$ (Ascent).

(ii) Angenommen, es gilt $R_m \supsetneqq R_{m+1}$ für alle m. Wie im Beweis von Lemma 10.9 existiert ein $x_m \in R_m \setminus R_{m+1}$ mit $\|x_m\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x_m, R_{m+1}) \geq \frac{1}{2}$. Wieder gilt $\|Tx_m - Tx_k\| \geq \frac{1}{2}$ für alle $k < m$, Widerspruch zur Kompaktheit von T. Sei $\delta := \min\{m \in \mathbb{N} : R_m = R_{m+1}\}$ (Deszent).

(iii) Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt $R_\alpha \cap N_j = \{0\}$, denn: Sei $x \in R_\alpha \cap N_j$. Dann ist $x = (1-T)^\alpha y$ und $(1-T)^j x = 0$, d.h. $y \in N_{j+\alpha} = N_\alpha$ und damit $x = (1-T)^\alpha y = 0$.

(iv) Für alle $j \in N_0$ gilt $E = R_j + N_\delta$, denn: Sei $x \in E$. Dann ist $(1-T)^\delta x \in R_\delta = R_{\delta+j}$ und damit $(1-T)^\delta x = (1-T)^{\delta+j} y$ für ein $y \in E$. Somit ist $x - (1-T)^j y \in N_\delta$, d.h. $x \in R_j + N_\delta$.

(v) Es gilt $\alpha = \delta$, denn: Sei $x \in N_{\delta+1}$. Nach (iv) mit $j = \alpha$ ist $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in N_\delta$ und $x_2 \in R_\alpha$. Daher ist $x_2 = x - x_1 \in N_{\delta+1}$. Somit gilt $x_2 \in N_{\delta+1} \cap R_\alpha = \{0\}$, wobei (iii) verwendet wurde. Wir erhalten $x = x_1 \in N_\delta$. Also gilt $N_{\delta+1} = N_\delta$, d.h. es gilt $\alpha \leq \delta$.

Wegen $R_\alpha \cap N_\delta = \{0\}$ (wieder nach (iii)) ist auch $R_{\alpha+1} \cap N_\delta = \{0\}$ und $E = R_{\alpha+1} + N_\delta$ (nach (iv)). Andererseits ist auch $E = R_\alpha + N_\delta$ und $R_\alpha \cap N_\delta = \{0\}$. Wegen $R_\alpha \supset R_{\alpha+1}$ folgt damit $R_\alpha = R_{\alpha+1}$.

(vi) Wir haben bereits alles von Teil b) des Satzes mit $n := \alpha = \delta$ bewiesen bis auf die Aussagen über $(1-T)|_{R_n}$. Der Operator $(1-T)|_{R_n}$ ist injektiv wegen $N_1 \cap R_n = \{0\}$ nach Teil (iii). Er ist aber auch surjektiv wegen $R[(1-T)|_{R_n}] = R_{n+1} = R_n$ und besitzt stetiges Inverses nach Satz 5.4. □

10.11 Satz (Das Spektrum kompakter Operatoren). *Sei E Banachraum und $T \in L(E)$ kompakt.*

a) *Falls $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, so ist $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

b) *Das Spektrum $\sigma(T)$ ist höchstens abzählbar mit 0 als einzigem möglichen Häufungspunkt.*

c) *Für jedes $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ ist der algebraische Eigenraum $N_\lambda^{(a)}(T)$ endlichdimensional. Es gilt $N_\lambda^{(a)}(T) = \ker(T-\lambda)^p$ mit einer natürlichen Zahl $p \in \mathbb{N}$. Weiter ist $E = R(T-\lambda)^p + \ker(T-\lambda)^p$. Beide Unterräume sind invariant unter T*

und haben trivialen Durchschnitt.

Dabei heißt ein Unterraum $M \subset E$ invariant unter T, falls $TM \subset M$ gilt.

Beweis. a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ die Zahl aus Satz 10.10 b) für den Operator $\frac{T}{\lambda}$. Falls $n = 0$, so ist $\ker(1 - \frac{T}{\lambda}) = \ker(T - \lambda) = \{0\}$ und $R(T - \lambda) = E$, d.h. $T - \lambda$ ist bijektiv und somit $\lambda \in \rho(T)$.

Falls $n > 0$, so ist $\ker(T - \lambda) \neq \{0\}$, d.h. $\lambda \in \sigma_p(T)$.

b) Es genügt zu zeigen, dass $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ endlich ist. Ist dies nicht der Fall, so existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \sigma(T)$ mit $|\lambda| \geq \varepsilon$ und $\lambda_n \neq \lambda_m \quad (n \neq m)$. Nach Teil a) ist $\lambda_n \in \sigma_p(T)$, d.h. es existieren $x_n \in E \setminus \{0\}$ mit $Tx_n = \lambda_n x_n$. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig, daher gilt für $E_n := \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$: $E_1 \subsetneqq E_2 \subsetneqq \ldots$ und $TE_n \subset E_n$.

Wie im Beweis von Lemma 10.9 existieren $y_n \in E_n$ mit $\|y_n\| = 1$ und $\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} \quad (x \in E_{n-1})$. Für $1 \leq m < n$ gilt

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - \underbrace{\big(Ty_m - (T - \lambda_n)y_n\big)}_{=:z}.$$

Sei $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Dann ist

$$(T - \lambda_n)y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_n)x_i \in E_{n-1}$$

und damit $z \in E_{n-1}$. Also ist

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \underbrace{|\lambda_n|}_{\geq\varepsilon} \cdot \underbrace{\left\| y_n - \frac{z}{\lambda_n} \right\|}_{\geq\frac{1}{2}} \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

was einen Widerspruch zur Kompaktheit von T darstellt.

c) folgt aus Satz 10.10. □

10.12 Korollar (Fredholm-Alternative). *Sei E Banachraum, $T \in K(E)$ und $\lambda \neq 0$. Dann ist entweder*

$$(T - \lambda)x = y$$

für alle $y \in E$ eindeutig lösbar mit Lösung $x \in E$, oder die Gleichung

$$(T - \lambda)x = 0$$

hat eine nichttriviale Lösung.

Beweis. Das ist eine Umformulierung der Aussage, dass jedes $\lambda \neq 0$ entweder in der Resolventenmenge $\rho(T)$ oder im Punktspektrum $\sigma_p(T)$ liegt. □

c) Kompakte selbstadjungierte Operatoren

10.13 Definition. Sei E ein Hilbertraum und $M \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann heißt $P : E \to E$, $x \mapsto x_1$ mit $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$, die orthogonale Projektion von E auf M.

10.14 Lemma. a) *Sei P eine orthogonale Projektion. Dann ist P stetig mit*

$$\|P\| = \begin{cases} 1, & M \neq \{0\}, \\ 0, & M = \{0\}. \end{cases}$$

Es gilt $\ker P = M^\perp$ *und* $R(P) = M$*.*

b) *Ein Operator $P \in L(E)$ ist genau dann orthogonale Projektion, wenn $P^2 = P = P^*$.*

Beweis. a) Es gilt unter Verwendung des Satzes von Pythagoras

$$\|Px\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

d.h. $P \in L(E)$ und $\|P\| \leq 1$. Für $M = \{0\}$ ist $P = 0$. Sonst gilt für $x \in M \setminus \{0\}$ die Gleichheit $x = Px$ und damit $\|P\| = 1$.

b) (i). Sei P eine orthogonale Projektion. Die Gleichheit $P^2 = P$ ist klar nach Definition von P. Seien $x, y \in E$ mit $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, wobei $x_1, y_1 \in M$ und $x_2, y_2 \in M^\perp$. Dann gilt

$$\langle Px, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \underbrace{\langle x_1, y_2\rangle}_{=0} = \langle x, y_1\rangle = \langle x, Py\rangle,$$

d.h. es gilt $P = P^*$.

(ii). Es gilt $P^2 = P = P^*$. Setze $M := R(P)$. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_n \to x$ und $x_n = Py_n$, ist

$$Px_n = P^2 y_n = Py_n = x_n \tag{6}$$

und damit

$$\|x_n - Px\| = \|P(x_n - x)\| \leq \|P\| \cdot \|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

d.h. $Px = x$. Somit ist M abgeschlossen.

Sei $\widetilde{P}$ die orthogonale Projektion zum Unterraum M. Für $x \in E$ und $y \in M$ gilt

$$\langle \widetilde{P}x, y\rangle = \langle x, \widetilde{P}y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, Py\rangle = \langle Px, y\rangle.$$

Dabei wurde im zweiten Gleichheitszeichen $y \in M$ verwendet, für das dritte Gleichheitszeichen wurde (6) verwendet und für die letzte Gleichheit $P = P^*$. Setzt man $y := \widetilde{P}x - Px \in M$, so folgt

$$0 = \langle \widetilde{P}x - Px, y \rangle = \|(\widetilde{P} - P)x\|^2.$$

Also gilt $\widetilde{P} = P$, und P ist eine orthogonale Projektion. □

10.15 Lemma. *Sei E ein Hilbertraum, und seien P_1, P_2 orthogonale Projektionen auf M_1 bzw. M_2.*

a) *P_1P_2 ist genau dann orthogonale Projektion, falls $P_2P_1 = P_2P_1$ gilt. In diesem Fall ist P_1P_2 orthogonale Projektion auf den Unterraum $M_1 \cap M_2$.*

b) *Es sind äquivalent:*

(i) *$M_1 \subset M_2$.*

(ii) *Es gilt $\|P_1x\| \leq \|P_2x\| \quad (x \in E)$.*

(iii) *Es gilt $P_1 \leq P_2$, d.h. $\langle P_1x, x\rangle \leq \langle P_2x, x\rangle \quad (x \in E)$.*

(iv) *Es gilt $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.*

Beweis. a) (i). Es gelte $P_1P_2 = P_2P_1$. Dann erhalten wir

$$(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2$$

und

$$(P_1P_2)^* = (P_2P_1)^* = P_1^*P_2^* = P_1P_2.$$

Also ist P_1P_2 eine orthogonale Projektion.

(ii). Sei P_1P_2 orthogonale Projektion. Dann gilt für $x, y \in E$

$$\langle x, P_2P_1y\rangle = \langle x, P_2^*P_1^*y\rangle = \langle P_1P_2x, y\rangle = \langle x, P_1P_2y\rangle.$$

Daher ist $P_1P_2 = P_2P_1$.

In diesem Fall gilt $R(P_2P_1) \subset R(P_2) = M_2$ und $R(P_2P_1) = R(P_1P_2) \subset M_1$. Zu $x \in M_1 \cap M_2$ ist $x = P_1x = P_2x$, d.h. $(P_2P_1)x = x$. Insgesamt erhalten wir $R(P_2P_1) = M_1 \cap M_2$.

Der Beweis von Teil b) wird dem Leser als Übung überlassen. □

10.16 Lemma. *Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(E)$ eine Folge orthogonaler Projektionen in einem Hilbertraum E mit $P_n \leq P_m$ für $n \leq m$. Dann konvergiert P_n stark gegen eine orthogonale Projektion $P \in L(E)$.*

Beweis. Für $x \in E$ ist $(\|P_n x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, monoton steigend (Lemma 10.15 b)), also konvergent. Für $m \le n$ ist

$$\begin{aligned}\|P_n x - P_m x\|^2 &= \underbrace{\langle P_n x, P_n x\rangle}_{=\|P_n x\|^2} - \underbrace{\langle P_n x, P_m x\rangle}_{=\langle P_m P_n x, x\rangle = \langle P_m x, x\rangle = \|P_m x\|^2} - \langle P_m x, P_n x\rangle + \underbrace{\langle P_m x, P_m x\rangle}_{=\|P_m x\|^2}\\ &= \|P_n x\|^2 + \|P_m x\|^2 - 2\|P_m x\|^2 \to 0 \quad (m,n\to\infty).\end{aligned}$$

Also existiert $Px := \lim_{n\to\infty} P_n x \quad (x \in E)$.

Es gilt $\langle Px, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle P_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, P_n y\rangle = \langle x, Py\rangle$ und

$$\langle P^2 x, y\rangle = \langle Px, Py\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle P_n x, P_n y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle P_n x, y\rangle = \langle Px, y\rangle.$$

Somit gilt $P^2 = P = P^*$ und $P_n \xrightarrow{s} P$. □

10.17 Lemma. *Sei E ein Hilbertraum und $A = A^* \in L(E)$. Dann gilt*

$$\|A\| = \sup_{x\in E,\ \|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

Beweis. Die Ungleichung „$\ge$“ gilt nach Cauchy-Schwarz. Zum Beweis der anderen Ungleichung verwenden wir, dass nach dem Satz von Riesz gilt

$$\|Ax\| = \sup_{y\in E,\ \|y\|=1} |\langle Ax, y\rangle|,$$

d.h.

$$\|A\| = \sup_{x\in E,\ \|x\|=1}\ \sup_{y\in E,\ \|y\|=1} |\langle Ax, y\rangle|.$$

Für alle $z \in E$ ist $|\langle Az, z\rangle| \le M \cdot \|z\|^2$ mit

$$M := \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|. \tag{7}$$

Seien $x, y \in E$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$. Es gilt

$$\langle A(x\pm y), x\pm y\rangle = \langle Ax, x\rangle \pm 2\,\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, y\rangle,$$

also unter Verwendung von (7)

$$\begin{aligned}4\,\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle &= \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle\\ &\le M\cdot\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) = 2M\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) = 4M.\end{aligned}$$

Schreibe $|\langle Ax, y\rangle| = e^{i\theta}\langle Ax, y\rangle$ mit $\theta \in [0, 2\pi)$. Dann ist

$$|\langle Ax, y\rangle| = \underbrace{\langle Ae^{i\theta}x, y\rangle}_{\in\mathbb{R}} \le M,$$

d.h.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\ \sup_{\|y\|=1} |\langle Ax, y\rangle| \le M.$$ □

10.18 Lemma. *Sei E ein Hilbertraum und $A = A^* \in L(E)$. Setze*

$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle,$$
$$M := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle.$$

Dann gilt $\sigma(A) \subset [m, M]$ und $m, M \in \sigma(A)$.

Im Beweis dieser Aussage verwenden wir die Menge $\sigma_{ap}(A)$ der approximativen Eigenwerte von A. Diese ist definiert als die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ existiert mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(A-\lambda)x_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$. In den Übungen wird gezeigt, dass $\sigma_{ap}(A) \subset \sigma(A)$ gilt.

Beweis. (i) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda < m$ und $x \in E$. Dann ist nach Definition von m

$$\|(A-\lambda)x\| \cdot \|x\| \geq \big|\langle (A-\lambda)x, x\rangle\big| \geq (m-\lambda)\|x\|^2.$$

Somit ist $A - \lambda$ injektiv und $\|(A-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{m-\lambda}$. Da $(A-\lambda)^{-1}$ stetig und abgeschlossen ist, ist der Wertebereich $R(A-\lambda) = D((A-\lambda)^{-1})$ abgeschlossen. Unter Verwendung von 9.14 gilt $R(A-\lambda) = (\ker(A-\lambda))^\perp = E$. Also ist $A - \lambda$ bijektiv, d.h. $\lambda \in \rho(A)$.

(ii) Genauso zeigt man $(M, \infty) \subset \rho(A)$.

(iii) Nach Definition von m existieren $x_n \in E$ mit $\langle Ax_n, x_n\rangle \searrow m$ und $\|x_n\| = 1$. Da $\langle (A-m)x, x\rangle \geq 0 \quad (x \in E)$, ist

$$[x, y] := \langle (A-m)x, y\rangle$$

eine positiv semidefinite Bilinearform. Also gilt

$$\begin{aligned}
\|(A-m)x_n\|^2 &= [x_n, (A-m)x_n] \\
&\leq [x_n, x_n]^{1/2} \cdot [(A-m)x_n, (A-m)x_n]^{1/2} \\
&= \langle (A-m)x_n, x_n\rangle^{1/2} \cdot \langle (A-m)^2 x_n, (A-m)x_n\rangle^{1/2}.
\end{aligned}$$

Der erste Faktor in diesem Produkt konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$, der zweite ist beschränkt, da A beschränkt ist und $\|x_n\| = 1$ gilt. Somit konvergiert das Produkt gegen 0 für $n \to \infty$. Damit erhalten wir $m \in \sigma_{ap}(A) \subset \sigma(A)$.

(iv) Analog sieht man $M \in \sigma_{ap}(A) \subset \sigma(A)$. □

10.19 Korollar. *Sei E ein Hilbertraum und $A = A^*$ ein kompakter selbstadjungierter Operator.*

a) *Mindestens eine der Zahlen $\|A\|$ und $-\|A\|$ ist ein Eigenwert von A.*

b) *Falls $A \neq 0$, besitzt A mindestens einen von 0 verschiedenen Eigenwert.*

Beweis. a) Nach Lemma 10.17 ist $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, Ax\rangle|$. Der Rest folgt mit Lemma 10.18.

Teil b) folgt sofort aus a). □

10.20 Bemerkung. a) Für einen kompakten, aber nicht selbstadjungierten Operator $A \in L(E)$ gilt dies i.allg. nicht, wie man an folgendem Beispiel sieht. Sei $E = L_2([0,1])$ und

$$(Ax)(t) := \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Der Operator A ist ein Beispiel eines Volterra-Operators. Es gilt $\sigma(A) = \{0\}$.

b) Auch für selbstadjungiertes $A = A^* \in L(E)$, A nicht kompakt, gilt die Aussage des obigen Korollars i.allg. nicht. Betrachte dazu wieder $E = L_2([0,1])$ und $(Ax)(t) := tx(t)$ (Multiplikationsoperator). Dann ist $\sigma_p(A) = \emptyset$.

In Satz 10.11 ist die bisher stärkste Aussage über das Spektrum kompakter Operatoren zu finden. Im Falle eines kompakten Operators, der zusätzlich selbstadjungiert ist, haben wir zusätzliche Eigenschaften. Später werden wir sehen, wie sich dies auf allgemeine selbstadjungierte Operatoren verallgemeinern lässt.

10.21 Satz (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren). *Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum, und $A = A^* \in L(E)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Dann gilt*

(i) *Es existiert ein Orthonormalsystem $\{e_n\}_{n<N}$ aus Eigenvektoren von A zu Eigenwerten $\{\lambda_n\}_{n<N}$ mit $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so dass*

$$Ax = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n \quad (x \in E).$$

(ii) *Sei P_0 die orthogonale Projektion auf* $\ker A$. *Dann gilt*

$$x = P_0 x + \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n \quad (x \in E).$$

(iii) *Sei $\lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}$. Dann gilt*

$$(A-\lambda)^{-1} x = -\frac{1}{\lambda} P_0 x + \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle x, e_n\rangle}{\lambda_n - \lambda} e_n \quad (x \in E).$$

Beweis. (i) Setze $E_1 := E$ und $A_1 := A$. Falls $A_1 \neq 0$, so existiert nach Korollar 10.19 ein $\lambda_1 \in \sigma_p(A)$ mit $|\lambda_1| = \|A_1\| \neq 0$. Sei M_1 eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\ker(A - \lambda_1)$. Beachte dabei, dass $\ker(A - \lambda_1)$ endlich-dimensional ist.

Setze $E_2 := (\mathrm{span} M_1)^\perp = \ker(A - \lambda_1)^\perp = \overline{R(A - \lambda_1)} = R(A - \lambda_1)$. Hier haben wir Satz 9.14 und Satz 10.8 verwendet. Nach Satz 10.11 gilt $AE_2 \subset E_2$, d.h. $A_2 := A|_{E_2} \in L(E_2)$.

Offensichtlich gilt $A_2 = A_2^*$, und A_2 ist ebenfalls kompakt. Falls $A_2 \neq 0$, so existiert wieder nach Korollar 10.19 ein $\lambda_2 \in \sigma_p(A_2)$ mit

$$|\lambda_2| = \|A_2\| \leq \|A\| = |\lambda_1|.$$

Sei M_2 eine Orthonormalbasis von $\ker(A - \lambda_2)$. Es gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$, da $(A - \lambda_1)|_{E_2}$ nach Satz 10.10 b) injektiv ist. Daher ist $M_1 \cup M_2$ ein Orthonormalsystem (Satz 9.6 iv).

Setze $E_3 := (\mathrm{span}(M_1 \cup M_2))^\perp$. Dann ist E_3 ein abgeschlossener Unterraum. Wieder setzen wir $A_3 := A|_{E_3}$. Insgesamt erhalten wir eine Folge A_n von kompakten selbstadjungierten Operatoren auf E_n.

Sei nun $x \in E$. Für

$$x_{n+1} := x - \sum_{e_j \in M_1 \cup \cdots \cup M_n} \langle x, e_j \rangle e_j \in E_{n+1}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\Big\| Ax - \sum_{e_j \in M_1 \cup \cdots \cup M_n} \langle x, e_j \rangle e_j \Big\| &= \|Ax_{n+1}\| \\
&= \|A_{n+1} x_{n+1}\| \leq \|A_{n+1}\| \cdot \|x_{n+1}\| \\
&\leq |\lambda_{n+1}| \cdot \|x\| \leq |\lambda_{n+1}| \cdot \|x\| \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Hier verwendeten wir, dass $|\lambda_n| \to 0$ nach Satz 10.11 b) gilt. Damit folgt (i).

(ii) Es gilt $\ker A = (\mathrm{span}\{e_n\}_{n<N})^\perp$, denn sei $Ax = 0$, so ist

$$\langle x, e_n \rangle = \frac{1}{\lambda_n} \langle x, Ae_n \rangle = \frac{1}{\lambda_n} \langle Ax, e_n \rangle = 0.$$

Sei $\langle x, e_n \rangle = 0$ für $n < N$. Dann ist $Ax = 0$ nach Teil (i). Somit ist

$$E = (\ker A) \oplus \overline{\mathrm{span}\{e_n\}_{n<N}}.$$

Da $\{e_n\}_{n<N}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\mathrm{span}\{e_n\}_{n<N}}$ ist, gilt für $x_2 \in \overline{\mathrm{span}\{e_n\}}$ nach Satz 3.7:

$$x_2 = \sum_{n=1}^{N} \langle x_2, e_n \rangle e_n.$$

Somit erhalten wir für $x \in E$:

$$x = P_0 x + (1 - P_0)x = P_0 x + \sum_{n=1}^{N} \langle (1 - P_0)x, e_n \rangle e_n.$$

Aber es gilt $\langle (1 - P_0)x, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle$ wegen $P_0 x \in \operatorname{span}\{e_n\}^{\perp}$.

(iii) Sei $\lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}$. Wegen

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle x, e_n \rangle}{\lambda_n - \lambda} \, e_n \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{|\langle x, e_n \rangle|^2}{|\lambda_n - \lambda|^2} \leq \frac{\|x\|^2}{\min_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda|} < \infty$$

(beachte, dass $\sigma_p(A)$ diskret ist) ist die Reihe in (iii) konvergent. Für $x \in E$ gilt

$$\begin{aligned} &(A - \lambda)\Big(- \frac{1}{\lambda} \, P_0 x + \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle x, e_n \rangle}{\lambda_n - \lambda} \, e_n \Big) \\ &\qquad = P_0 x + \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle x, e_n \rangle}{\lambda_n - \lambda} \, (\lambda_n - \lambda) e_n = x. \end{aligned}$$

□

Zwischenbilanz: Das Spektrum und der Spektralsatz

Hier ist vielleicht die richtige Zeit, eine Zwischenbilanz zu ziehen. Der weitreichendste Satz, den wir bisher kennen gelernt haben, ist der Spektralsatz für kompakte und insbesondere für kompakte selbstadjungierte Operatoren. Wie kann man diesen interpretieren?

Sei E ein Hilbertraum und $A = A^* \in K(E)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Dann kann man nach dem Spektralsatz (Satz 10.21) ein Orthonormalsystem $\{e_n\}_{n=1}^N$ (mit $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) finden, so dass e_n ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_n ist. Diese Eigenvektoren bilden eine Orthonormalbasis von $\overline{R(A)} = \ker A^\perp$.

Bezüglich dieser Orthonormalbasis hat A eine Diagonalgestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Dies sieht man folgendermaßen: Sei $x = \sum_{n=1}^N \alpha_N e_N \in \overline{R(A)}$. Schreibt man x bezüglich der Basis $\{e_n\}_n$, so erhält man den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{k=1}^N \lambda_k \Big\langle \sum_{n=1}^N \alpha_N e_N, e_k \Big\rangle e_k \\ &= \sum_{k=1}^N \lambda_k \alpha_k e_k \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für den endlich-dimensionalen Fall ist dies nichts anderes als der aus der Linearen Algebra bekannte Satz, dass man eine hermitesche Matrix mit einer unitären Transformation auf Diagonalgestalt bringen kann.

Es sei schließlich noch bemerkt, dass die Orthonormalbasis von $\overline{R(A)}$ zu einer Orthonormalbasis von E ergänzt werden kann, indem eine Orthonormalbasis von $\ker A$

hinzugefügt wird. Insbesondere ist schon das ursprüngliche System $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraums E, falls der Operator A injektiv ist.

Wir können uns nochmal den Spektralsatz ansehen. Sei $\{e_1^{(j)}, \ldots, e_{n_j}^{(j)}\}$ eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren von $\ker(A-\lambda_j)$. Hier ist n_j die geometrische (und damit die algebraische) Vielfachheit des Eigenwerts λ_j. Dann ist

$$P_j := \sum_{k=1}^{n_j} \langle \cdot, e_k^{(j)} \rangle e_k^{(j)}$$

die orthogonale Projektion auf $\ker(A-\lambda_j)$. Nimmt man noch die orthogonale Projektion P_0 auf $\ker A$ hinzu, so gilt nach dem Spektralsatz

$$x = \sum_{j=0}^{N} P_j x$$

(wobei $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), und

$$Ax = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j P_j x.$$

Hier haben wir $\lambda_0 = 0$ gesetzt.

Die Resolvente schließlich, d.h. der Lösungsoperator für die zugehörige Gleichung, ist gegeben durch

$$(A-\lambda)^{-1} x = \sum_{j=0}^{N} \frac{P_j x}{\lambda_j - \lambda}$$

für $\lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}$.

Insgesamt haben wir somit die wichtigsten Aussagen über selbstadjungierte (hermitesche) Matrizen auf den unendlich-dimensionalen Fall verallgemeinert, allerdings immer unter der Voraussetzung, dass der Operator kompakt ist. Der aus der Linearen Algebra bekannte Fall endlich-dimensionaler Vektorräume ist hier natürlich mit behandelt, denn hier ist jeder lineare Operator kompakt.

Kompakte Operatoren sind besonders einfach: Hier besteht das Spektrum (abgesehen von der Null) nur aus Eigenwerten. Für allgemeine selbstadjungierte Operatoren in Hilberträumen kann man das nicht erwarten. Hier kann z.B. ein ganzes Intervall aus Eigenwerten bestehen. In so einem Fall ist es auch nicht mehr möglich, die Eigenwerte durchzunummerieren, d.h. die obigen Summen werden nicht mehr gültig sein. Um diese Fälle einbeziehen zu können, werden wir ein Integral definieren. Der Zugang, den wir hier wählen werden, ist der über sogenannte Spektralscharen. Grob gesprochen sind diese das Analogon der Verteilungsfunktion, die in der Stochastik verwendet wird.

Definiert man (immer noch im Fall eines kompakten selbstadjungierten Operators) für $\lambda \in \mathbb{R}$ den Operator

$$E_\lambda := \begin{cases} \sum_{\lambda_j \leq \lambda} P_j, & \lambda < 0 \\ \mathrm{id}_E - \sum_{\lambda_j > \lambda} P_j, & \lambda \geq 0 \end{cases}$$

so erhält man eine Schar von orthogonalen Projektionen $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, die im Sinn der Operatorordnung $\leq$ monoton nicht-fallend ist (d.h. $E_\lambda \leq E_\mu$ für $\lambda \leq \mu$, von rechts stetig ist in der starken Operatortopologie, für $\lambda < m$ den Wert 0 und für $\lambda > M$ den Wert id_E annimmt. Eine derartige Schar von orthogonalen Projektionen nennt man eine Spektralschar.

Das Integral $\int f(x) dg(x)$ kann für eine monotone Funktion g (oder allgemeiner für eine Funktion g von beschränkter Variation) und für eine stetige Funktion als Riemann-Stieltjes-Integral definiert werden. Genauso können hier die Integrale über die Spektralschar $\{E_\lambda\}_\lambda$ als Riemann-Stieltjes-Integrale definiert werden. Wir werden später sehen, dass die entsprechenden Integrale in der Operatornorm konvergeiern. Wir erhalten die folgenden Darstellungen:

$$\begin{aligned} x &= \int_m^M dE_\lambda x, \\ Ax &= \int_m^M \lambda dE_\lambda x \\ (A - \mu)^{-1} &= \int_m^M (\lambda - \mu)^{-1} dE_\lambda x. \end{aligned}$$

Im Fall einer hermiteschen Matrix in einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind obige Integrale endliche Summen. Im Fall eines kompakten selbstadjungierten Operators sind obige Integrale endliche oder abzählbar-unendliche Summen. Das nächste große Ziel dieser Vorlesung ist es, eine derartige Darstellung für alle selbstadjungierte Operatoren in einem Hilbertraum zu finden.

IV. Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

11. Beschränkte selbstadjungierte Operatoren

Der Spektralsatz ist das Hauptergebnis dieser Vorlesung. Er verallgemeinert die Transformation einer hermiteschen Matrix auf Diagonalform oder auch den Spektralsatz für kompakte Operatoren auf den Fall eines beliebigen selbstadjungierten Operators. Hier werden zunächst beschränkte Operatoren betrachtet. Im ersten Teil werden Spektralscharen und die zugehörigen Integrale diskutiert, im zweiten Teil wird der Spektralsatz bewiesen. Als Integrationskonzept liegt dabei das Riemann-Stieltjes-Integral zugrunde, da sich dieses recht elementar auf Spektralscharen übertragen lässt. Weitere Formulierungen des Spektralsatzes finden sich in Teil 2 der Vorlesung.

a) Spektralscharen

Zunächst wiederholen wir einige Ergebnisse aus der Analysis. Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Dann heißt

$$\operatorname{var} \alpha := \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

die Totalvariation von α. Dabei wird das Supremum über alle Zerlegungen

$$\mathcal{Z} : \;\; a = t_0 < \dots < t_n = b$$

genommen wird.

Der Raum

$$BV[a,b] := \{\alpha : [a,b] \to \mathbb{K} \mid \operatorname{var} \alpha < \infty\}$$

heißt der Raum aller Funktion von beschränkter Variation. Durch

$$\|\alpha\|_{BV} := |\alpha(a)| + \operatorname{var} \alpha$$

wird $BV[a,b]$ zu einem normierten Raum.

Für eine Stufenfunktion $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \chi_{[t_{i-1},t_i)}$ ist das Integral

$$\int_a^b f d\alpha := \sum_{i=1}^{n} f_i[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]$$

wohldefiniert, linear, und es gilt

$$\Big|\int_a^b f d\alpha\Big| \le \|f\|_\infty \cdot \|\alpha\|_{BV}.$$

Sei $T[a,b]$ die Menge aller Stufenfunktionen $f = \sum_{i=1}^n f_i \chi_{[t_{i-1},t_i)}$, und $I[a,b]$ der Abschluss von $T[a,b]$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

Dann ist $\int_a^b f d\alpha$ für alle $f \in I[a,b]$ definiert. Da jede stetige Funktion $f \in C([a,b])$ gleichmäßiger Limes von Stufenfunktionen obiger Form ist, gilt $C([a,b]) \subset I[a,b]$, und das Integral ist insbesondere für alle $f \in C([a,b])$ definiert.

Der obige Ansatz wird im folgenden auf operatorwertige Funktionen α übertragen, auf die sogenannten Spektralscharen. Wir beginnen mit der formalen Definition.

11.1 Definition. Sei E ein Hilbertraum. Eine Familie $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \subset L(E)$ heißt eine Spektralschar, falls gilt:

(i) E_λ ist orthogonaler Projektor für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $E_\mu E_\lambda = E_\lambda E_\mu = E_\mu$ für alle $\mu \le \lambda$.

(iii) $E_\mu x \to E_\lambda x$ für $\mu \searrow \lambda$ $(x \in E)$ (Rechtsstetigkeit).

(iv) $E_\lambda x \to 0$ für $\lambda \to -\infty$ $(x \in E)$.

(v) $E_\lambda x \to x$ für $\lambda \to +\infty$ $(x \in E)$.

Nach Satz 10.15 ist (ii) äquivalent zu $E\mu \le E_\nu$ für $\mu \le \nu$. Wir werden im folgenden einige Eigenschaften orthogonaler Projektionen brauchen, die die Aussagen von Lemma 10.15 ergänzen.

11.2 Lemma. *Sei E Hilbertraum, P_1 und P_2 orthogonale Projektionen in E. Dann gilt:*

a) $P_1P_2 = 0 \iff R(P_1) \perp R(P_2) \iff P_2P_1 = 0.$

b) $P_1 + P_2$ *orthogonale Projektion* $\iff P_1P_2 = 0 \iff$
$\iff \big(R(P_1+P_2) = R(P_1) \oplus R(P_2),\ R(P_1) \perp R(P_2)\big).$

c) $P_2 - P_1$ *ist genau dann orthogonale Projektion, wenn* $P_1P_2 = P_1 = P_2P_1$ *gilt.*

Beweis. a) Es ist $P_1P_2 = 0$ genau dann, wenn für alle $x, y \in E$ gilt $\langle P_1P_2x, y\rangle = 0$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\langle P_2x, P_1y\rangle = 0$ für alle $x, y \in E$ gilt, d.h. $R(P_1) \perp R(P_2)$.

b) Seien P_1, P_2 orthogonale Projektionen mit $P_1P_2 = 0$. Dann ist $(P_1+P_2)^* = P_1+P_2$ und

$$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_1P_2 + P_2P_1. \tag{8}$$

Mit $P_1P_2 = 0$ und $P_2P_1 = 0$ nach Teil a) ist dies gleich $P_1 + P_2$, d.h. $P_1 + P_2$ ist orthogonale Projektion.

Sei andererseits P_1+P_2 orthogonale Projektion. Dann gilt nach (8) $P_1P_2+P_2P_1 = 0$. Multipliziert man von links und von rechts mit P_1, so erhält man

$$\begin{aligned} P_1P_2 + P_1P_2P_1 &= 0, \\ P_1P_2P_1 + P_2P_1 &= 0, \end{aligned}$$

d.h. $P_1P_2 = -P_2P_1 = 0$. Damit ist die erste Äquivalenz in Teil b) bewiesen.

Sei nun $P_1P_2 = 0$. Die Inklusion $R(P_1 + P_2) \subset R(P_1) \oplus R(P_2)$ gilt allgemein. Sei also $y = P_1x_1 + P_2x_2 \in R(P_1) \oplus R(P_2)$. Wegen $P_1P_2 = 0$ folgt $P_1y = P_1x_1$ und $P_2y = P_2x_2$. Damit ist $y = P_1y + P_2y \in R(P_1 + P_2)$. Dies zeigt die Richtung „$\Rightarrow$“ der zweiten Äquivalenz in b). Die andere Richtung folgt sofort aus a).

c) $P_2 - P_1$ ist genau dann orthogonale Projektion, wenn $1-(P_2-P_1) = (1-P_2)-P_1$ orthogonale Projektion ist. Nach b) ist dies äquivalent dazu, dass $(1 - P_2)P_1 = 0 = P_1(1 - P_2)$, d.h. $P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$. □

11.3 Lemma (Eigenschaften von Spektralscharen). *Sei $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar in einem Hilbertraum E. Dann gilt:*

(i) *Für $\mu \le \lambda$ ist $E_\lambda - E_\mu$ eine orthogonale Projektion.*

(ii) *Für $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_4$ ist*

$$(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})(E_{\lambda_4} - E_{\lambda_3}) = (E_{\lambda_4} - E_{\lambda_3})(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) = 0.$$

(iii) *Für $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ und $x \in E$ ist*

$$\begin{aligned} \|(E_{\lambda_3} - E_{\lambda_1})x\|^2 &= \|(E_{\lambda_3} - E_{\lambda_2})x\|^2 + \|(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})x\|^2 \\ &= \langle (E_{\lambda_3} - E_{\lambda_1})x, x\rangle. \end{aligned}$$

(iv) *Die Grenzwerte $E_{\lambda+0}$ und $E_{\lambda-0}$ existieren in der starken Opertatortopologie und sind orthogonale Projektionen.*

(v) *Für alle $x \in E$ ist die Funktion $\lambda \mapsto \|E_\lambda x\|^2 = \langle E_\lambda x, x\rangle$ monoton wachsend und beschränkt durch $\|x\|^2$.*

(vi) *Für alle $x, y \in E$ ist die Funktion $\lambda \mapsto \langle E_\lambda x, y\rangle$ von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Es gilt*

$$\operatorname{var}\Big(\langle E_\lambda x, y\rangle|_{\lambda\in[a,b]}\Big) \le \|x\| \cdot \|y\|.$$

Beweis. Die Teile (i)–(iii) sind trivial.

(iv) Lemma 10.16.

(v) Für $\lambda \le \mu$ gilt $\|E_\lambda x\|^2 = \langle E_\lambda x, x\rangle \le \langle E_\mu x, x\rangle = \|E_\mu x\|^2$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|E_\lambda x\|^2 \le \|E_\lambda\|^2 \|x\|^2 \le \|x\|^2$.

(vi) Sei $a = t_0 < t_1 \ldots t_n = b$ eine Zerlegung. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |\langle (E_{t_i} - E_{t_{i-1}})x, y\rangle| &= \sum_{i=1}^n \big|\langle (E_{t_i} - E_{t_{i-1}})x, (E_{t_i} - E_{t_{i-1}})y\rangle \\ &\le \sum_{i=1}^n \|(E_{t_i} - E_{t_{i-1}})x\| \cdot \|(E_{t_i} - E_{t_{i-1}})y\| \\ &\le \Big(\sum_{i=1}^n \|(E_{t_i} - E_{t_{i-1}})x\|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^n \|(E_{t_i} - E_{t_{i-1}})y\|^2\Big)^{1/2} \\ &= \|(E_{t_n} - E_{t_0})x\| \cdot \|(E_{t_n} - E_{t_0})y\| \\ &\le \|x\| \cdot \|y\|.\end{aligned}$$

Dabei folgt das erste Ungleichheitszeichen aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in E, das zweite aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung im $\mathbb{R}^n$. □

Nun sind wir in der Lage, das Integral über eine Spektralschar zu definieren. Dabei ist

$$\chi_A(t) := \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0 & t \notin A \end{cases}$$

die charakteristische Funktion einer Menge $A \subset \mathbb{R}$.

11.4 Definition und Satz (Integrale über Spektralscharen). *Sei E ein Hilbertraum, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar in E.*

a) *Sei $f = \sum_{i=1}^n f_i \chi_{[t_{i-1},t_i)}(t)$ eine Treppenfunktion. Dann ist das Integral*

$$\int_a^b f dE_\lambda := \sum_{i=1}^n f_i(E_{t_i} - E_{t_{i-1}}) \in L(E)$$

unabhängig von der Darstellung von f, und linear in f.

b) *Die Abbildung $\int_a^b \cdot dE_\lambda \colon T[a,b] \to L(E)$ ist beschränkt auf dem Raum $T[a,b]$ aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ mit Norm kleiner gleich 1. Damit existiert eine eindeutige stetige lineare Fortsetzung auf dem Abschluss $I[a,b] = \overline{T[a,b]}$, die genauso bezeichnet wird. Es gilt*

$$\Big\| \int_a^b f dE_\lambda \Big\| \le \|f\|_\infty \quad (f \in I[a,b]).$$

Beweis. Teil a) ist offensichtlich. Um b) zu zeigen, genügt es, die Abschätzung

$$\Big\| \int_a^b f dE_\lambda \| \le \|f\|_\infty \quad (f \in T[a,b])$$

zu zeigen. Sei also $f \in T[a,b]$ von der im Satz angegebenen Form. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_a^b f dE_\lambda x \Big\|^2 &= \Big\| \sum_{i=1}^n f_i (E_{t_i} - E_{t_{i-1}})x \Big\|^2 \\
&\le \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \|(E_{t_i} - E_{t_{i-1}})x\|^2 \\
&\le \|f\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n \|(E_{t_i} - E_{t_{i-1}})x\|^2 \\
&= \|f\|_\infty^2 \|(E_b - E_a)x\|^2 \\
&\le \|f\|_\infty^2 \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Dabei wurde Lemma 11.3 (iii) verwendet. □

Das folgende Lemma zeigt die Homomorphie-Eigenschaften des neuen Integralbegriffs.

11.5 Lemma. *Sei E ein Hilbertraum und $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar. Dann gilt:*

(i) $\Big\langle \int_a^b f(\lambda) dE_\lambda x, y \Big\rangle = \int_a^b f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y\rangle \quad (x, y \in E).$

(ii) $E_\mu \int_a^b f(\lambda) dE_\lambda = \int_a^\mu f(\lambda) dE_\lambda \quad (a \le \mu \le b).$

(iii) *Für $f, g \in I[a,b]$ gilt*

$$\Big(\int_a^b f(\lambda) dE_\lambda\Big)\Big(\int_a^b g(\lambda) dE_\lambda\Big) = \int_a^b f(\lambda) g(\lambda) dE_\lambda.$$

(iv) $\Big(\int_a^b f(\lambda) dE_\lambda\Big)^* = \int_a^b \overline{f(\lambda)} dE_\lambda.$

(v) $\Big\| \int_a^b f(\lambda) dE_\lambda x \Big\|^2 = \int_a^b |f(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle.$

Beweis. Übungen. □

11.6 Korollar. *Sei E Hilbertraum und $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar in E. Dann ist*

$$A := \int_a^b \lambda dE_\lambda$$

ein beschränkter selbstadjungierter Operator in E.

b) Der Spektralsatz

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Umkehrung des letzten Korollars zu beweisen: zu jedem beschränkten selbstadjungierten Operator existiert eine Spektralschar, so dass die Darstellung aus Korollar 11.6 gilt.

Ein entscheidender Schritt dabei (der uns letztlich die Spektralschar, die wir suchen, definieren wird), ist folgender Satz (von Riesz), der den Dualraum des Raums der stetigen Funktionen beschreibt.

11.7 Satz (von Riesz). *Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $\lambda \in (C([a,b]))'$ existiert genau ein rechtsstetiges $\alpha \in BV[a-\varepsilon, b]$ mit $\alpha(t) = 0$ für $t \in [a-\varepsilon, a)$ und*

$$\lambda(f) = \int_{a-\varepsilon}^{b} f\,d\alpha \quad (f \in C([a,b])).$$

Wir schreiben $\alpha(a-0) = 0$ und

$$\int_{[a,b]} f\,d\alpha := \int_{a-0}^{b} f\,d\alpha := \int_{a-\varepsilon}^{b} f\,d\alpha.$$

Für den Beweis des Spektralsatzes brauchen wir noch eine Zutat.

11.8 Lemma (Spektralabbildungssatz). *Sei E ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T \in L(E)$. Sei p ein Polynom. Dann gilt*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)).$$

Beweis. (i) Sei $\mu \in \sigma(p(T))$. Wir faktorisieren

$$p(t) - \mu = \beta_n \cdot \prod_{i=1}^{n} (t - \gamma_i)$$

und erhalten $p(T) - \mu = \beta_n \cdot \prod_{i=1}^{n}(T - \gamma_i)$. Falls $\gamma_i \in \rho(T)$ für alle i gelten würde, so wäre $p(T) - \mu$ bijektiv, d.h. es gilt $\mu \in \rho(p(T))$. Also existiert ein i_0, so dass $T - \gamma_{i_0}$ nicht bijektiv ist. Das heißt aber $\gamma_{i_0} \in \sigma(T)$. Wegen $p(\gamma_{i_0}) - \mu = 0$ folgt $\mu \in p(\sigma(T))$.

(ii) Sei nun $\mu \in p(\sigma(T))$, d.h. es gilt $\mu = p(\gamma)$ mit einem $\gamma \in \sigma(T)$. Dann folgt $p(\gamma) - \mu = 0$, d.h.

$$p(t) - \mu = (t - \gamma)\widetilde{p}(t)$$

mit einem Polynom $\widetilde{p}$ von Grad nicht größer als $n-1$. Also gilt

$$p(T) - \mu = (T - \gamma)\widetilde{p}(T) = \widetilde{p}(T)(T - \gamma).$$

Da $\gamma \in \sigma(T)$, ist entweder $T - \gamma$ nicht surjektiv und damit auch $p(T) - \mu$ nicht surjektiv, oder es ist $T - \gamma$ nicht injektiv und damit $p(T) - \mu$ nicht injektiv. In beiden Fällen folgt $\gamma \in \sigma(p(T))$. □

Es folgt nun einer der wichtigsten Sätze dieser Vorlesung.

11.9 Satz (Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren). *Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum, und $A = A^* \in L(E)$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Setze $m := \inf_{\|x\|=1}\langle Ax, x\rangle$ und $M := \sup_{\|x\|=1}\langle Ax, x\rangle$. Dann existiert genau eine Spektralschar $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ mit folgenden Eigenschaften.*

(i) *Es gilt $E_\lambda = 0 \quad (\lambda < m)$ und $E_\lambda = \mathrm{id}_E \quad (\lambda \geq M)$.*

(ii) *Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $AE_\lambda = E_\lambda A$.*

(iii) *Für alle Polynome p gilt*

$$p(A) = \int_{m-0}^{M} p(\lambda)dE_\lambda,$$

wobei das Integral in der Operatornorm konvergiert. Insbesondere gilt

$$A = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

(a) (Definition der Spektralschar als Schar skalarer Funktionen). Sei $\mathcal{P}_r \subset C([m, M]; \mathbb{R})$ die Menge der reellen Polynome. Für $p \in \mathcal{P}_r$ gilt $p(A) = p(A)^*$ und damit nach Lemma 10.17, Lemma 10.18 und 10.19:

$$\begin{aligned}\|p(A)\| &= \sup_{\|x\|=1} |\langle p(A)x, x\rangle| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(p(A))\}\\ &= \max\{|\lambda| : \lambda \in p(\sigma(A))\}\\ &\leq \max\{|\lambda| : \lambda \in p([m, M])\} = \|p\|_\infty.\end{aligned}$$

Für $x, y \in E$ definiere

$$\phi_{x,y}(p) := \langle p(A)x, y\rangle \quad (p \in \mathcal{P}_r).$$

Dann ist die Abbildung $p \mapsto \phi_{x,y}(p)$ komplexwertig, $\mathbb{R}$-linear und beschränkt. Letzteres gilt wegen

$$|\phi_{x,y}(p)| = |\langle p(A)x, y\rangle| \leq \|p(A)\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \leq \|p\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Zerlege nun $\phi_{x,y}(p) = \phi^1_{x,y}(p) + i\phi^2_{x,y}(p)$ mit reellwertigen Funktionen $\phi^1_{x,y}$ und $\phi^2_{x,y}$.

Da die reellwertigen Polynome $\mathcal{P}_r$ dicht in $C([m, M]; \mathbb{R})$ liegen (Satz von Weierstraß), existieren eindeutige Fortsetzungen $\phi^1_{x,y}, \phi^2_{x,y} \in C([m, M]; \mathbb{R})'$.

Nach Satz 11.7 mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ existieren Funktionen $\alpha^1_{x,y}, \alpha^2_{x,y} \in BV[m-0, M])$ mit $\alpha^j_{x,y}(m-0) = 0$, $\alpha^j_{x,y}$ rechtsstetig, $\operatorname{var} \alpha^j_{x,y} \le \|\phi^j_{x,y}\| \le \|\phi_{x,y}\|$ und

$$\phi^j_{x,y}(f) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda) d\alpha^j_{x,y}(\lambda) \quad (f \in C([m, M]; \mathbb{R})).$$

Für $\alpha_{x,y} := \alpha^1_{x,y} + i\alpha^2_{x,y}$ gilt dann

$$\phi_{x,y}(f) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda) d\alpha_{x,y}(\lambda) \quad (f \in C([m, M])).$$

Außerdem haben wir $\alpha_{x,y}(m-0) = 0$, $\alpha_{x,y}$ ist rechtsstetig, und es gilt $\operatorname{var} \alpha_{x,y} \le 2\|\phi_{x,y}\|$.

(b) (Definition der Spektralschar als Operator). Wir zeigen nun, dass $(x, y) \mapsto \alpha_{x,y}(\lambda)$ für jedes feste λ eine stetige Bilinearform auf $E \times E$ ist. Seien dazu $x_1, x_2, y \in E$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathcal{P}_r$. Dann ist

$$\int_{m-0}^{M} p(\lambda) d\alpha_{x,y}(\lambda) = \phi_{x,y}(p) = \langle p(A)x, y\rangle.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_{m-0}^{M} p(\lambda) d\alpha_{c_1x_1+c_2x_2,y} &= \langle p(A)(c_1x_1 + c_2x_2), y\rangle \\ &= c_1\langle p(A)x_1, y\rangle + c_2\langle p(A)x_2, y\rangle \\ &= c_1 \int_{m-0}^{M} p(\lambda) d\alpha_{x_1}(\lambda) + c_2 \int_{m-0}^{M} p(\lambda) d\alpha_{x_2}(\lambda).\end{aligned}$$

Wir erhalten für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_r$ die Gleichheit

$$\int_{m-0}^{M} p(\lambda) d[\alpha_{c_1x_1+c_2x_2,y} - c_1\alpha_{x_1,y} - c_2 d\alpha_{x_2,y}] = 0.$$

Da $\operatorname{span}\mathcal{P}_r \subset C([m, M])$ dicht ist, folgt daraus

$$\int_{m-0}^{M} f(\lambda) d[\alpha_{c_1x_1+c_2x_2,y} - c_1\alpha_{x_1,y} - c_2\alpha_{x_2,y}] = 0 \quad (f \in C([m, M])).$$

Nach Satz 11.7 gilt also

$$\alpha_{c_1x_1+c_2x_2} = c_1\alpha_{x_1} + c_2\alpha_{x_2}.$$

Genauso sieht man unter Verwendung der Selbstadjungiertheit von A

$$\int_{m-0}^{M} p(\lambda) d\overline{\alpha_{y,x}}(\lambda) = \overline{\langle p(A)y, x\rangle} = \langle x, p(A)y\rangle$$

$$= \langle p(A)x, y\rangle = \int_{m-0}^{M} p(\lambda) d\alpha_{x,y}(\lambda)$$

und damit

$$\overline{\alpha_{y,x}(\lambda)} = \alpha_{x,y}(\lambda).$$

Daher ist $x \mapsto \alpha_{x,y}(\lambda)$ linear und $y \mapsto \alpha_{x,y}(\lambda)$ konjugiert linear. Wegen

$$|\alpha_{x,y}(\lambda)| = |\alpha_{x,y}(\lambda) - \alpha_{x,y}(m-0)| \leq \operatorname{var}\alpha_{x,y} \leq 2\|\phi_{x,y}\| \leq 2\|x\| \cdot \|y\|$$

ist also $(x, y) \mapsto \alpha_{x,y}(\lambda)$ eine stetige Bilinearform. Nach Korollar 2.9 existiert genau ein $E_\lambda \in L(E)$ mit

$$\alpha_{x,y}(\lambda) = \langle x, E_\lambda y\rangle.$$

(c) (Eigenschaften der Operatoren E_λ). Es gilt

$$\langle x, E_\lambda^* y\rangle = \langle E_\lambda x, y\rangle = \overline{\langle y, E_\lambda x\rangle} = \overline{\alpha_{y,x}(\lambda)} = \alpha_{x,y}(\lambda) = \langle x, E_\lambda y\rangle \quad (x, y \in E).$$

Also erhalten wir $E_\lambda^* = E_\lambda$.

Im nächsten Schritt zeigen wir

$$E_\lambda E_\mu = E_\mu = E_\mu E_\lambda \quad (\mu \leq \lambda). \tag{9}$$

Seien dazu $\ell, n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in E$. Wir setzen

$$k(\mu) := \int_{m-0}^{\mu} \lambda^n d\langle E_\lambda x, y\rangle \quad (\mu \in [a, b]).$$

Nach Übungsaufgabe 34 gilt

$$\int_{m-0}^{M} \mu^\ell dk(\mu) = \int_{m-0}^{M} \mu^{\ell+n} d\langle E_\mu x, y\rangle$$

und damit

$$\int_{m-0}^{M} \mu^\ell dk(\mu) = \langle A^{\ell+n}x, y\rangle = \langle A^\ell x, A^n y\rangle = \int_{m-0}^{M} \mu^\ell d\langle E_\mu x, A^n y\rangle.$$

Also ist

$$k(\mu) = \langle E_\mu x, A^n y\rangle = \langle A^n E_\mu x, y\rangle.$$

Sei nun $\lambda \in [m, M]$ fest. Dann gilt

$$\int_{m-0}^{M} \mu^n d\langle E_\mu E_\lambda x, y\rangle = \langle A^n E_\lambda x, y\rangle = k(\lambda) = \int_{m-0}^{\lambda} \mu^n d\langle E_\mu x, y\rangle$$
$$= \int_{m-0}^{M} \mu^n d\widetilde{\alpha}_{x,y}(\mu).$$

Dabei haben wir die Funktion $\widetilde{\alpha}_{x,y}$ definiert als

$$\widetilde{\alpha}_{x,y}(\mu) := \begin{cases} \langle E_\mu x, y\rangle, & \mu \le \lambda, \\ \langle E_\lambda x, y\rangle, & \mu > \lambda. \end{cases}$$

Die Funktion $\widetilde{\alpha}_{x,y}$ ist also konstant im Intervall $[\lambda, M]$. Wie oben folgt aufgrund der Dichtheit von $\operatorname{span}\mathcal{P}_r$ in $C([m, M])$, dass

$$\langle E_\mu E_\lambda x, y\rangle = \begin{cases} \langle E_\mu x, y\rangle, & \mu \le \lambda, \\ \langle E_\lambda x, y\rangle, & \mu > \lambda. \end{cases}$$

Wir erhalten $E_\mu E_\lambda = E_\mu$ für $\mu \le \lambda$ und $E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ für $\mu \ge \lambda$. Vertauscht man in der letzten Gleichheit μ und λ, so erhält man $E_\lambda E_\mu = E_\mu$ für $\mu \le \lambda$. Insgesamt erhalten wir somit die Aussage (9).

Insbesondere folgt für $\mu = \lambda$ die Gleichheit $E_\lambda^2 = E_\lambda = E_\lambda^*$, d.h. E_λ ist für jedes feste $\lambda \in [m, M]$ eine orthogonale Projektion.

Wir wollen im folgenden zeigen, dass $\{E_\lambda\}$ eine Spektralschar ist. Dazu müssen wir $\alpha_{x,y}$ und E_λ auf ganz $\mathbb{R}$ ausdehnen. Wir definieren

$$\widetilde{\alpha}_{x,y}(\lambda) := \begin{cases} 0, & \lambda < m, \\ \alpha_{x,y}(\lambda), & m \le \lambda \le M, \\ \alpha_{x,y}(M), & \lambda > M. \end{cases}$$

Für die zugehörigen Operatoren $\widetilde{E}_\lambda$ gilt die analoge Gleichheit. Wir schreiben im folgenden wieder E_λ.

Wir zeigen nun, dass $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ stark rechtsstetig ist. Dazu sei $\lambda \in \mathbb{R}, x, y \in E$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\searrow 0}\langle E_{\lambda+\varepsilon} x, y\rangle &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\widetilde{\alpha}_{x,y}(\lambda+\varepsilon) = \\ &= \left\{ \begin{matrix} 0, & \lambda < m, \\ \alpha_{x,y}(\lambda+0), & m \le \lambda \le M, \\ \alpha_{x,y}(M), & \lambda > M \end{matrix} \right\} = \widetilde{\alpha}_{x,y}(\lambda) = \langle E_\lambda x, y\rangle. \end{aligned}$$

Schließlich betrachten wir noch die Limiten $\lambda \to \pm\infty$. Für $\lambda < m$ ist $\widetilde{\alpha}_{x,y}(\lambda) = 0$ und damit $E_\lambda = 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \langle A^0 x, y\rangle = \phi_{x,y}(\lambda^0) = \int_{m-0}^{M} d\langle E_\lambda x, y\rangle \\ &= \int_{m-0}^{M} d\alpha_{x,y}(\lambda) = \alpha_{x,y}(M) - \alpha_{x,y}(m-0) = \alpha_{x,y}(M) = \langle E_M x, y\rangle. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir gesehen, dass $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar ist.

(d) (Vertauschbarkeit von E_λ und A). Seien $x, y \in E$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle AE_\mu x, y\rangle = \phi_{E_\mu x,y}(\lambda) &= \int_{m-0}^{M} \lambda d\langle E_\lambda E_\mu x, y\rangle = \int_{m-0}^{M} \lambda d\langle E_\mu E_\lambda x, y\rangle \\ &= \int_{m-0}^{M} \lambda d\langle E_\lambda x, E_\mu y\rangle = \langle Ax, E_\mu y\rangle = \langle E_\mu Ax, y\rangle.\end{aligned}$$

Also gilt $AE_\mu = E_\mu A$.

(e) (Darstellung von $p(A)$ als Integral). Nach Konstruktion von $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ gilt für $x, y \in E$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\langle A^n x, y\rangle = \phi_{x,y}(\lambda^n) = \int_{m-0}^{M} \lambda^n d\alpha_{x,y}(\lambda) = \int_{m-0}^{M} \lambda^n d\langle E_\lambda x, y\rangle.$$

Durch Linearität folgt damit

$$\langle p(A)x, y\rangle = \int_{m-0}^{M} p(\lambda) d\langle E_\lambda x, y\rangle = \Big\langle \int_{m-0}^{M} p(\lambda) dE_\lambda x, y\Big\rangle.$$

Damit gilt

$$p(A) = \int_{m-0}^{M} p(\lambda) dE_\lambda,$$

wobei das Integral nach 11.4 in der Operatornorm konvergiert.

(f) (Eindeutigkeit von E_λ). Sei $\{E'_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine zweite Spektralschar mit den Eigenschaften (i)–(iii) des Satzes. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ und für $x, y \in E$:

$$\int_{m-0}^{M} \lambda^n d\langle E'_\lambda x, y\rangle = \langle A^n x, y\rangle = \int_{m-0}^{M} \lambda^n d\langle E_\lambda x, y\rangle.$$

Somit haben wir

$$\langle E'_\lambda x, y\rangle = \langle E_\lambda x, y\rangle \quad (\lambda \in [m, M), x, y \in E).$$

Somit ist $E'_\lambda = E_\lambda$ für alle $\lambda \in [m, M)$, und wegen Bedingung (i) des Satzes folgt $E'_\lambda = E_\lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Der Spektralsatz erlaubt es uns, $f(A)$ nicht nur für Polynome zu definieren. Man beachte, dass die folgende Definition mit der üblichen übereinstimmt, falls f ein Polynom ist.

11.10 Definition. Sei $A = A^* \in L(E)$ und $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die zugehörige Spektralschar. Definiere für $f \in C([m, M])$ (mit m, M wie in Satz 11.9) den Operator

$$f(A) := \int_{m-0}^{M} f(\lambda) dE_\lambda.$$

11.11 Satz (Stetiger Funktionalkalkül). *Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum, $A = A^* \in L(E)$. Definiere $m := \inf_{\|x\|=1}\langle Ax, x\rangle$ und $M := \sup_{\|x\|=1}\langle Ax, x\rangle$. Dann ist die Abbildung $C([m, M]) \to L(E)$, $f \mapsto f(A)$, eine stetiger Banach-Algebren-Homomorphismus. Genauer gilt:*

(i) *Für alle Polynome f stimmt $f(A)$ mit der üblichen Definition überein. Insbesondere ist $f(A) = 0$ für $f = 0$, $f(A) = \mathrm{id}_E$ für $f = 1$ (konstante Funktion 1), und $f(A) = A$ für $f = \mathrm{id}_{[m,M]}$.*

(ii) *Die Abbildung $f \mapsto f(A)$ ist linear, stetig mit Norm 1 und multiplikativ, d.h. es gilt $(fg)(A) = f(A)g(A) \quad (f, g \in C([m, M]))$. Es gilt $\overline{f}(A) = f(A)^*$.*

(iii) *Sei $B \in L(E)$. Dann gilt*

$$AB = BA \iff E_\lambda B = BE_\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \iff f(A)B = Bf(A) \quad (f \in C([m, M])).$$

(iv) *Der Operator $f(A)$ ist normal für alle $f \in C([m, M])$. Weiter ist $f(A)$ unitär, falls $|f(\lambda)| = 1 \quad (\lambda \in [m, M]$, und selbstadjungiert, falls $f(\lambda) \in \mathbb{R} \quad (\lambda \in [m, M])$ gilt. Es gilt $f(A) \geq 0$, wenn $f(\lambda) \geq 0 \quad (\lambda \in [m, M])$ gilt.*

(v) *Für alle $x \in E$ gilt $\|f(A)x\|^2 = \int_{m-0}^{M} |f(\lambda)|^2 d\|E_\lambda\|^2$.*

Beachte in Punkt (iv), dass für einen Operator $B \in L(E)$ definiert wird:

$$B \geq 0 :\iff (B = B^* \text{ und } \langle Bx, x\rangle \geq 0 \quad (x \in E)).$$

Beweis. Teil (i) folgt direkt aus Satz 11.9, Teil (ii) folgt aus Lemma 11.5 (ii) und (iii).

(iv) Für $f \in C([m, M])$ ist

$$f(A)f(A)^* = f(A)\overline{f}(A) = |f|^2(A) = \overline{f}(A)f(A) = f(A)^*f(A).$$

Für $|f(\lambda)| = 1$ ist $f(A)f(A)^* = |f|^2(A) = \mathrm{id}_E$. Genauso folgt $f(A) = f(A)^*$ falls f reellwertig ist.

Sei nun $f \geq 0$. Dann ist

$$\langle f(A)x, x\rangle = \int_{m-0}^{M} f(\lambda)d\langle E_\lambda x, x\rangle \geq 0 \quad (x \in E).$$

Dabei wurde verwendet, dass $\langle E_\lambda x, x\rangle$ als Funktion von λ monoton steigend ist.

(v) ist Lemma 11.5 (v).

(iii) Sei $B \in L(E)$ mit $AB = BA$. Dann ist $A^nB = BA^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\int \lambda^n d\langle E_\lambda Bx, y\rangle = \langle A^nBx, x\rangle = \langle BA^nx, x\rangle$$

$$= \langle A^n x, B^* y\rangle = \int \lambda^n d\langle E_\lambda x, B^* y\rangle = \int \lambda^n d\langle B E_\lambda x, y\rangle$$

für alle $x, y \in E$. Also gilt $E_\lambda B = B E_\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Die gleiche Rechnung zeigt $f(A)B = Bf(A)$ falls $E_\lambda B = B E_\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$. □

11.12 Korollar. a) *Seien $A, B \in L(E)$ mit $A \geq 0$, $B \geq 0$ und $AB = BA$. Dann ist $AB \geq 0$.*

b) *Sei $A \in L(E)$ mit $A \geq 0$. Dann existiert genau ein $B \in L(E)$ mit $B \geq 0$ und $B^2 = A$. Der Operator B heißt die Wurzel von A. Insbesondere existiert zu jedem Operator $A \in L(E)$ der Absolutbetrag $|A| := \sqrt{A^*A}$.*

Beweis. a) Es gilt

$$AB = A\sqrt{B^2} = \sqrt{B}A\sqrt{B} \geq 0$$

wegen

$$\langle \sqrt{B}A\sqrt{B}x, x\rangle = \langle A\sqrt{B}x, \sqrt{B}x\rangle \geq 0 \quad (x \in E).$$

Hier wurde verwendet, dass A und $\sqrt{B}$ vertauschen.

b) Der Operator $B := \sqrt{A}$ erfüllt $B \geq 0$ und $B^2 = A$ nach dem Spektralsatz. Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit. Sei also $\widetilde{B} \geq 0$ mit $\widetilde{B}^2 = A$. Wähle $b \in \mathbb{R}$ mit $b > M := \sup_{\|x\|=1}\langle Ax, x\rangle$ und $b > \|\widetilde{B}\|^2$.

Zur Funktion $g(t) := \sqrt{(t)}$ existiert nach dem Satz von Weierstraß eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen mit $\|p_n - g\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$ im Intervall $[0, b] \supset [m, M]$. Damit gilt

$$\|p_n(A) - g(A)\| = \|p_n(A) - B\| \to 0 \quad \text{in } L(E). \tag{10}$$

Setze $\widetilde{p}_n(t) := p_n(t^2)$ und $\widetilde{g}(t) := g(t^2)(= t)$. Dann ist

$$\|\widetilde{p}_n - \widetilde{g}\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty) \text{ im Intervall } [0, \sqrt{b}] \supset [0, \|\widetilde{B}\|].$$

Nach dem Funktionalkalkül gilt

$$\|\widetilde{p}_n(\widetilde{B}) - \widetilde{g}(\widetilde{B})\| = \|\widetilde{p}_n(\widetilde{B}) - \widetilde{B}\| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{11}$$

Aber es ist $\widetilde{p}_n(\widetilde{B}) = p_n(\widetilde{B}^2) = p_n(A)$. Somit folgt aus (10) und (11) die Gleichheit $\widetilde{B} = g(A) = B$. □

12. Spektralzerlegung unitärer Operatoren

In diesem Abschnitt werden unitäre Operatoren und ihre Spektraldarstellung diskutiert. Dies ist zum einen eine erste Anwendung des bereits entwickelten Funktionalkalküls, wird uns aber zum anderen auch einen Beweis des Spektralsatzes für unbeschränkte Operatoren ermöglichen.

Zunächst wiederholen wir einige Aussagen über unitäre Operatoren, die wir bereits kennengelernt haben. Ein Operator $U \in L(E)$ heißt unitär, falls $UU^* = U^*U = \mathrm{id}_E$. Für $U \in L(E)$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} U \text{ unitär } &\iff R(U) = E \text{ und } \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in E) \\ &\iff R(U) = E \text{ und } \|Ux\| = \|x\| \quad (x \in E). \end{aligned}$$

Denn sei $U \in L(E)$ unitär. Dann gilt $UU^* = \mathrm{id}_E$, d.h. U ist surjektiv, und

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in E).$$

Aus dieser Gleichheit folgt sofort $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in E$.

Sei andererseits U surjektiv und isometrisch (d.h. $\|Ux\| = \|x\| \quad (x \in E)$. Dann folgt aus der Polarisationsformel $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in E$ und damit $U^*U = \mathrm{id}_E$. Da U bijektiv ist, folgt $U^* = U^*UU^{-1} = U^{-1}$, d.h. U ist unitär.

Wir wissen schon, dass für einen selbstadjungierten Operator $A = A^* \in L(E)$ der Operator e^{iA} unitär ist. Wir werden nun zeigen, dass alle unitären Operatoren diese Form haben.

12.1 Lemma. *Sei $A = A^* \in L(E)$. Sei weiter P die orthogonale Projektion auf $\ker A$ und $B \in L(E)$ mit $AB = BA$. Dann gilt $PB = BP$.*

Beweis. (i) Für $x \in \ker A$ ist $ABx = BAx = 0$. Somit ist $B(\ker A) \subset \ker A$, d.h. $PBP = BP$.

(ii) Es gilt $AB^* = (BA)^* = (AB)^* = B^*A$. Nach (i) ist somit $B^*(\ker A) \subset \ker A$.

(iii) Sei $x \in (\ker A)^\perp$ und $y \in \ker A$. Dann ist $\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^*y\rangle = 0$, da $B^*y \in \ker A$ nach Teil (ii) gilt.

Somit erhalten wir $B((\ker A)^\perp) \subset (\ker A)^\perp$, d.h. $PB(1-P) = 0$ und damit $PB = PBP$.

(iii) Aus (i) und (ii) folgt $BP = PB$. $\square$

12.2 Lemma. *Seien $W = W^* \in L(E)$ und $T = T^* \in L(E)$ mit $WT = TW$ und $W^2 = T^2$. Sei P die orthogonale Projektion auf $\ker(W - T)$. Dann gilt:*

(i) *Aus* $Wx = 0$ *folgt* $Px = x$.

(ii) $W = (2P - \mathrm{id}_E)T$.

Beweis. (i) Es gilt

$$\|Wx\|^2 = \langle Wx, Wx\rangle = \langle W^2x, x\rangle = \langle T^2x, x\rangle = \|Tx\|^2.$$

Damit folgt aus $Wx = 0$ auch $Tx = 0$ und damit $(W - T)x = 0$, d.h. $Px = x$.

(ii) Es gilt $(W - T)(W + T) = 0$ und damit $P(W + T) = W + T$. Der Operator W vertauscht mit $W - T$ und damit nach Lemma 12.1 auch mit P, das Gleiche gilt für T. Wir erhalten

$$W + T = P(W + T) = PW + PT = WP + TP = 2TP,$$

wobei $(W - T)P = 0$ verwendet wurde. Es gilt also $T = (2P - 1)W$. □

12.3 Satz. *Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $U \in L(E)$ unitär. Dann existiert ein selbstadjungierter Operator $A \in L(E)$ mit $\|A\| \le \pi$ und $U = e^{iA}$.*

Beweis. Setze $V := \frac{1}{2}(U + U^*) = \operatorname{Re} U$ und $W := \frac{1}{2i}(U - U^*) = \operatorname{Im} U$. Dann gilt

(i) $VW = WV$, $V = V^*$, $W = W^*$, $U = V + iW$.

(ii) $V^2 + W^2 = \frac{1}{4}(U^2 + 2 + (U^*)^2 - U^2 + 2 - (U^*)^2) = 1$.

(iii) $\|V\| \le 1$, $\|W\| \le 1$ wegen $\|U\| = 1$.

Definiere nun $T := f(V)$ mit der Funktion $f(\lambda) := \sin(\arccos\lambda) = \sqrt{1 - \lambda^2}$. Da f reellwertig ist, gilt $T = T^*$. Nach Satz 11.11 gilt $TV = VT$ und $TW = WT$. Außerdem haben wir

$$V^2 + T^2 = V^2 + f^2(V) = V^2 + 1 - V^2 = 1$$

und damit $W^2 = T^2$. Nach Lemma 12.2 gilt $W = (2P - 1)T$ und $\ker W \subset R(P)$, wobei die Projektion P wie in 12.2 definiert wird.

Setze $A := (2P - 1)\arccos V$. Dann gilt $A = A^*$ und $\|A\| \le \pi$ nach Satz 11.11 und $PV = VP$ nach Lemma 12.2. Nach dem Spektralsatz gilt $P \arccos V = (\arccos V)P$ und damit

$$A^2 = (2P - 1)^2(\arccos V)^2 = (4P^2 - 4P + 1)(\arccos V)^2 = (\arccos V)^2.$$

Wir wollen zeigen, dass $\cos A = V$ gilt. Dazu verwenden wir Potenzreihen. Sei

$$\arccos\lambda = g_1(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \lambda - \frac{\lambda^3}{6} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\lambda^n$$

die Potenzreihe der arccos-Funktion und $g_1^{(N)}(V) := \sum_{n=0}^N g_n V^n$. Dann gilt

$$\arccos V = \lim_{N\to\infty} g_1^{(N)}(V),$$

wobei der Limes in der Operatornorm existiert. Beachte dabei, dass nach dem Abelschen Grenzwertsatz die Gleichheit $\arccos\lambda = \sum_{n=0}^\infty g_n\lambda^n$ auch für $\lambda = 1$ gilt. Sei andererseits

$$\cos\lambda = g_2(\lambda^2) = 1 - \frac{1}{2}\,\lambda^2 + \frac{1}{4!}\,\lambda^4 + \dots$$

die cos-Reihe. Dann gilt die Identität $g_2((\arccos\lambda)^2) = \lambda$ als Identität zweier Potenzreihen und damit $g_2(A^2) = g_2((\arccos V)^2) = V$. Somit ist $\cos A = g_2(A^2) = V$.

Analog gilt mit $\sin\lambda = \lambda - \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^5}{5!} - \dots = \lambda g_3(\lambda^2)$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}\sin A = Ag_3(A^2) &= (2P-1)(\arccos V)g_3((\arccos V)^2)\\ &= (2P-1)\sin(\arccos V) = (2P-1)T = W.\end{aligned}$$

Also folgt

$$e^{iA} = \cos A + i\sin A = V + iW = U. \qquad \square$$

12.4 Satz (Spektralsatz für unitäre Operatoren). *Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $U \in L(E)$ unitär. Dann existiert eine Spektralschar $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ mit $E_\lambda = 0$ für $\lambda < -\pi$, $E_\lambda = \mathrm{id}_E$ für $\lambda \geq \pi$ und*

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda.$$

Für jedes Polynom p gilt

$$p(U) = \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\lambda}) dE_\lambda.$$

Durch $f(U) := \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\lambda})dE_\lambda$ wird der Operator $f(U) \in L(E)$ für jedes $f \in C([-\pi,\pi])$ definiert.

Beweis. Sei $U = e^{iA}$ nach Satz 12.3 und $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar von A. Dann folgt die Behauptung aus dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren. $\square$

13. Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren

Der in diesem Teil der Vorlesung allgemeinste Spektralsatz behandelt unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren. Um den Beweis kurz zu halten (und damit überhaupt noch im Rahmen dieser Vorlesung zu bleiben), wird auf einen systematischen Aufbau des entsprechenden Integralbegriffs verzichtet und stattdessen die Cayley-Transformierte verwendet. Diese Standardmethode erlaubt es, den Beweis des Spektralsatzes auf die schon bekannte Spektraldarstellung unitärer Operatoren zurückzuführen.

a) Die Cayley-Transformation

13.1 Definition. Sei E ein Hilbertraum und A ein linearer Operator in E mit $\overline{D(A)} = E$.

a) A heißt symmetrisch, wenn $A \subset A^*$ gilt, d.h. wenn $D(A) \subset D(A^*)$ und $A^*|_{D(A)} = A$.

b) A heißt selbstadjungiert, falls $A = A^*$ gilt.

c) A heißt wesentlich selbstadjungiert, falls der Abschluss $\overline{A}$ existiert und $\overline{A}$ selbstadjungiert ist.

13.2 Bemerkung. a) Es gilt $A \subset A^*$ genau dann, wenn $G(A) \subset G(A^*)$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad (x, y \in D(A)).$$

b) Falls A symmetrisch ist, so gilt

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R} \quad (x \in D(A)).$$

Falls E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum ist, so ist dies sogar äquivalent zur Symmetrie von A. Dies sieht man genauso wie im Beweis von Lemma 9.5

c) Falls A symmetrisch ist, so ist A abschließbar, und es gilt $\overline{A} \subset A^*$. Denn der Graph $G(A^*)$ ist abgeschlossen.

13.3 Definition. Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und A ein linearer Operator in E. Dann heißt

$$r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, C_\lambda > 0\, \forall\, x \in D(A) : \|(A - \lambda)x\| \geq C_\lambda \|x\|\}$$

die Menge der Punkte regulären Typs von A.

13.4 Bemerkung. Falls A symmetrisch ist, so gilt $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset r(A)$. Dann für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ gilt

$$\|(A-\lambda)x\| \cdot \|x\| \geq \big|\langle (A-\lambda)x, x\rangle\big| \geq \big|\operatorname{Im}\langle (A-\lambda)x, x\rangle\big| = |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|x\|^2.$$

Hier wurde verwendet, dass $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

13.5 Definition. Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und A ein symmetrischer Operator in E. Dann heißen

$$n_+(A) := \dim R(A-i)^\perp$$

und

$$n_-(A) := \dim R(A+i)^\perp$$

die Defektindizes von A.

Es gilt $n_+ = \dim R(A-\lambda)^\perp$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Eine analoge Aussage gilt für n_-. Der Beweis dieser Tatsache wird hier weggelassen.

13.6 Definition. Sei A ein symmetrischer linearer Operator in E. Dann heißt der Operator

$$U_A : R(A+i) \to E,\ U_A = (A-i)(A+i)^{-1}$$

die Cayley-Transformierte von A.

In obiger Definition ist zu beachten, dass $i \in r(A)$ und damit $A+i$ injektiv ist. Daher ist die Inverse $(A+i)^{-1}$ und somit U_A wohldefiniert.

13.7 Lemma. *Sei A ein symmetrischer dicht definierter Operator in E.*

a) *A ist genau dann abgeschlossen, wenn $R(A+i)$ und $R(A-i)$ beide abgeschlossen sind.*

b) *Die Cayley-Transformierte U_A ist isometrisch, und es gilt $1 \notin \sigma_p(U_A)$.*

c) *U_A ist genau dann ein unitärer Operator in $L(E)$, falls A selbstadjungiert ist.*

Beweis. b) Zu zeigen ist $\|U_A y\| = \|y\| \quad (y \in D(U_A))$, d.h.

$$\|(A+i)x\| = \|(A-i)x\| \quad (x \in D(A)).$$

Dies folgt leicht durch Ausmultiplizieren von $\langle (A\pm i)x, A(\pm i)x\rangle$ wegen $\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle \quad (x \in D(A))$.

Angenommen es gelte $1 \in \sigma_p(U_A)$. Dann existiert ein $x \in D(A)$ mit

$$y = (A+i)x = U_A y = (A-i)x.$$

Also ist $2ix = 0$ und somit $x = 0$ und $y = 0$, Widerspruch.

a) (i) Sei A abgeschlossen und $(y_n)_n \subset R(A+i)$ eine Folge mit $y_n \to y$. Wegen $\|U_A y_n\| = \|y_n\|$ ist auch $(U_A y_n)_n$ konvergent, etwa $U_A y_n \to \widetilde{y}$. Sei $x_n := (A+i)^{-1} y_n \in D(A)$. Dann gilt $y_n = (A+i)x_n$ und $U_A y_n = (A-i)x_n$. Somit

$$x_n = \frac{1}{2i}(y_n - U_A y_n), \quad Ax_n = \frac{1}{2}(y_n + U_A y_n). \tag{12}$$

Also sind beide Folgen $(x_n)_n$ und $(Ax_n)_n$ konvergent. Sei $x := \lim x_n$ und $w := \lim Ax_n$. Da A abgeschlossen ist, gilt $x \in D(A)$ und $w = Ax$.

Wegen $x = \frac{1}{2i}(y - \widetilde{y})$ und $Ax = \frac{1}{2}(y + \widetilde{y})$ folgt

$$y = Ax + ix \in D(U_A), \quad \widetilde{y} = Ax - ix \in R(A+i) = R(U_A).$$

Somit ist $D(U_A)$ abgeschlossen. Da $U_A : D(U_A) \to R(U_A)$ eine Isometrie ist, ist U_A offen und damit $R(U_A)$ abgeschlossen.

(ii) Falls $R(A \pm i)$ abgeschlossen ist, folgt mit den gleichen Überlegungen unter Verwendung von (12), dass der Operator A abgeschlossen ist.

c) (i) Sei A selbstadjungiert. Dann ist $R(A \pm i)^\perp = \ker(A \mp i) = \{0\}$. Nach Teil b) ist $R(A \pm i)$ abgeschlossen. Damit ist $D(U_A) = E$ und $R(U_A) = E$. Mit Hilfe der Polarisationsformel folgt aus $\|U_A x\| = \|x\| \quad (x \in E)$ auch

$$\langle U_A x, U_A y\rangle = \langle x, y\rangle \quad (x, y \in E).$$

Also gilt $\langle x, y\rangle = \langle U_A x, U_A y\rangle = \langle x, U_A^* U_A y\rangle \quad (x, y \in E)$ und somit gilt $U_A^* U_A = \mathrm{id}_E$. Da der Operator $U_A : E \to E$ bijektiv ist, gilt $U_A^{-1} = U_A^*$, d.h. U ist unitär.

(ii) Sei nun $U_A \in L(E)$ unitär. Dann folgt $R(A+i) = D(U_A) = E$ und $R(A-i) = R(U_A) = E$. Daraus folgt wie oben $\ker(A \pm i) = \{0\}$.

Sei $v \in D(A^*)$. Dann ist $\langle Ax, v\rangle = \langle x, A^* v\rangle \quad (x \in D(A))$. Es gilt

$$x = \frac{1}{2i}(y - U_A y), \quad Ax = \frac{1}{2}\,(y + U_A y) \tag{13}$$

mit $y = (A+i)x$ (vergleiche auch (12)). Also gilt

$$\left\langle \frac{1}{2}(y + U_A y), v \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2i}(y - U_A y), A^* v \right\rangle \quad (y \in E).$$

Bringt man den Operator U_A durch Adjunktion auf eine Seite, erhält man

$$\langle y, -iv - iU_A^* v\rangle = \langle y, A^* v - U_A^* A^* v\rangle \quad (y \in E).$$

Also gilt

$$-iU_A vi - iv = U_A A^* v - A^* v$$

und damit
$$A^*v - iv = U_A(A^*v + iv).$$
Setze $z := A^*v + iv$. Dann gelten die beiden Gleichungen
$$\begin{aligned} A^*v + iv &= z, \\ A^*v - iv &= U_A z. \end{aligned} \tag{14}$$
Wir erhalten
$$v = \frac{1}{2i}(1 - U_A)z \in R(1 - U_A) = D(A)$$
und $Av = \frac{1}{2}(1 + U_A)z = A^*v$.

Wir haben gezeigt, dass $A \supset A^*$ gilt. Da A symmetrisch ist, folgt $A = A^*$, d.h. A ist selbstadjungiert. □

13.8 Bemerkung. Im letzten Beweis haben wir gesehen, dass $D(A) = R(1 - U_A)$ und $A = i(1 + U_A)(1 - U_A)^{-1}$ gilt. Damit ist A durch U_A eindeutig festgelegt.

b) Der Spektralsatz

13.9 Satz (Spektrum und Spektralschar). *Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum, $A = A^* \in L(E)$ und $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die zu A gehörige Spektralschar. Dann gilt*

a) *Für eine reelle Zahl λ_0 gilt $\lambda_0 \in \rho(A)$ genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $E_{\lambda_0-\varepsilon} = E_{\lambda_0+\varepsilon}$, d.h. wenn E_λ konstant bei λ_0 ist.*

b) *Es gilt $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ genau dann, wenn $E_{\lambda_0-0} \neq E_{\lambda_0}$ gilt. Für alle $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\ker(A - \lambda_0) = R(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0})$.*

c) *Es gilt $\lambda_0 \in \sigma_c(A)$ genau dann, wenn $E_{\lambda_0} = E_{\lambda_0-0}$ gilt, aber für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $E_{\lambda_0-\varepsilon} \neq E_{\lambda_0+\varepsilon}$.*

Beweis. a) (i) Sei $\lambda_0 \in \rho(A)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt
$$\begin{aligned} E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon} &= (E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon})(A - \lambda_0)(A - \lambda_0)^{-1} \\ &= \Big[\int_{\mathbb{R}} \chi_{[\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon]}(\lambda)dE_\lambda\Big] \cdot \Big[\int_{\mathbb{R}} (\lambda - \lambda_0)dE_\lambda\Big](A - \lambda_0)^{-1} \\ &= \Big[\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)dE_\lambda\Big](A - \lambda_0)^{-1}, \end{aligned}$$
wobei die Funktion f definiert wird als $f(\lambda) := \chi_{[\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon]}(\lambda)(\lambda - \lambda_0)$.

Damit erhalten wir
$$\|E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon}\| \leq \underbrace{\|f\|_\infty}_{=\varepsilon} \cdot \|(A - \lambda_0)^{-1}\| \leq \frac{1}{2},$$

falls ε hinreichend klein ist. Der Operator $E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon}$ ist also eine orthogonale Projektion mit Norm nicht größer als $\frac{1}{2}$ und damit gleich 0.

(ii) Um die andere Richtung von Teil a) zu zeigen, betrachte die Funktion

$$f(\lambda) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda-\lambda_0}, & |\lambda-\lambda_0| \geq \varepsilon, \\ \frac{\lambda-\lambda_0}{\varepsilon^2}, & |\lambda-\lambda_0| < \varepsilon. \end{cases}$$

Es ist $f \in C(\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} f(A)(A-\lambda_0) &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)(\lambda-\lambda_0)dE_\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda:|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon\}} f(\lambda)(\lambda-\lambda_0)dE_\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}\setminus\cdots} 1 dE_\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1 dE_\lambda = \operatorname*{id}_E. \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass E_λ im Intervall $(\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon)$ konstant ist. Wegen $f(A)(A-\lambda_0) = (A-\lambda_0)f(A)$ folgt daraus $\lambda_0 \in \rho(A)$.

b) Wir zeigen die Gleichheit $\ker(A-\lambda_0) = R(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0})$.

(i) Um „$\subset$“ zu sehen, beachte man, dass für $\varepsilon > 0$ gilt

$$E_{\lambda_0-\varepsilon}x = \int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} dE_\lambda x = \Big[\int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} \frac{1}{\lambda-\lambda_0}\, dE_\lambda\Big](A-\lambda_0)x.$$

Der letzte Ausdruck ist gleich 0, falls $x \in \ker(A-\lambda_0)$. Man beachte, dass der Integrand $\frac{1}{\lambda-\lambda_0}$ stetig ist auf $(-\infty, \lambda_0-\varepsilon]$.

Genauso sieht man $(1-E_{\lambda_0+\varepsilon})x = 0$ für $x \in \ker(A-\lambda_0)$. Damit folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$x = (E_{\lambda_0+\varepsilon} - E_{\lambda_0-\varepsilon})x \quad (x \in \ker(A-\lambda_0)).$$

Nimmt man nun den Limes $\varepsilon \searrow 0$, so erhält man

$$x = (E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0})x \in R(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0}).$$

(ii) Um „$\supset$“ zu beweisen, betrachte $x \in E$ und schreibe

$$\|(A-\lambda_0)(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-\varepsilon})x\| = \Big\|\int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0} (\lambda-\lambda_0)dE_\lambda x\Big\| \leq \varepsilon\|x\|.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt

$$(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0-0})x \in \ker(A-\lambda_0).$$

c) folgt aus a) und b), da für einen selbstadjungierten Operator A gilt $\sigma_r(A) = \emptyset$. $\square$

13.10 Satz (Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren). *Sei A ein selbstadjungierter (nicht notwendig beschränkter) Operator in einem $\mathbb{C}$-Hilbertraum E. Dann existiert eine Spektralschar $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ mit*

$$\langle Ax, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E_\lambda x, x\rangle \quad (x \in D(A)).$$

Beweis. Sei U_A die Cayley-Transformierte von A. Dann ist U_A unitär nach Lemma 13.7, und es gilt nach Bemerkung 13.8

$$A = i(1 + U_A)(1 - U_A)^{-1}.$$

Sei $\{\widetilde{E}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die zu $-U_A$ gehörige Spektralschar, d.h. es gilt

$$-U_A = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} d\widetilde{E}_\lambda.$$

Es gilt $\widetilde{E}_{-\pi} = \mathrm{id}_E$ und $\widetilde{E}_{-\pi} = 0$. Denn sonst ist nach Satz 13.9 die Zahl $-\pi$ ein Eigenwert des Operators $B := \int_{-\pi}^{\pi} \lambda d\widetilde{E}_\lambda$. Aus $Bx = -\pi x$ folgt $p(B)x = p(-\pi)x$ für alle Polynome p und durch Grenzwertbildung auch $f(B)x = f(-\pi)x$ für alle stetigen Funktionen. Damit ist

$$-1 = e^{-i\pi} \in \sigma_p(e^{iB}) = \sigma_p(-U_A),$$

d.h. es gilt $1 \in \sigma_p(U_A)$ im Widerspruch zu Lemma 13.7.

Somit gilt

$$-U_A = \int_{-\pi+0}^{\pi-0} e^{i\lambda} d\widetilde{E}_\lambda.$$

Sei $x \in D(A) = R(1 - U_A)$ (siehe Bemerkung 13.8) und $y := (1 - U_A)^{-1}x$. Dann ist $Ax = i(1 + U_A)y$ und damit

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle &= \langle i(1 + U_A)y, (1 - U_A)y\rangle = i\langle U_A y, y\rangle - i\langle y, U_A y\rangle \\ &= i\langle (U_A - U_A^{-1})y, y\rangle = -i \int_{-\pi+0}^{\pi-0} (e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}) d\langle \widetilde{E}_\lambda y, y\rangle.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{E}_\lambda x, x\rangle &= \langle \widetilde{E}_\lambda (1 - U_A)y, (1 - U_A)y\rangle \\ &= \langle \widetilde{E}_\lambda (1 - U_A^*)(1 - U_A)y, y\rangle \\ &= \int_{-\pi+0}^{\lambda} (2 + e^{i\mu} + e^{-i\mu}) d\langle \widetilde{E}_\mu y, y\rangle.\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Gleichheit $\widetilde{E}_\lambda U_A = U_A \widetilde{E}_\lambda$ verwendet. Nun können wir die Substitutionsregel für das Riemann-Stieltjes-Integral anwenden (siehe Übungsaufgabe 34 a)). Diese ist für Funktionen α, β von beschränkter Variation mit $\alpha(\lambda) = \int_{-\pi+0}^{\lambda} g(\mu) d\beta(\mu)$ gegeben durch

$$\int_{-\pi+0}^{\pi-0} f(\lambda) g(\lambda) d\beta(\lambda) = \int_{-\pi+0}^{\pi-0} f(\lambda) d\alpha(\lambda). \tag{15}$$

Hierbei sind f und g integrierbare Funktionen. Wir setzen in (15)

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &:= \langle \widetilde{E}_\lambda x, x \rangle, \\ g(\mu) &:= 2 + e^{i\mu} + e^{-i\mu}, \\ f(\lambda) &:= \frac{-i(e^{i\lambda} - e^{-i\lambda})}{2 + e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}} = \tan \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\langle Ax, x \rangle = \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \tan \frac{\lambda}{2} \, d\langle \widetilde{E}_\lambda x, x \rangle.$$

Definiere nun $E_\lambda := \widetilde{E}_{2 \arctan \lambda}$. Dann gilt (siehe auch Aufgabe 34 b) die behauptete Gleichheit

$$\langle Ax, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E_\lambda x, x \rangle.$$

□

13.11 Beispiel (Multiplikationsoperator). Es sei $E = L_2([0,1])$ und $Af(t) := tf(t)$. Dann ist $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0,1]$. Sei nun p ein Polynom und $f, g \in E$. Wir haben

$$\langle p(A)f, g \rangle = \int_0^1 (p(A)f)(t)\overline{g(t)} dt = \int_0^1 p(t) f(t) \overline{g(t)} dt$$

und

$$\langle p(A)f, g \rangle = \int_0^1 p(t) d\langle E_t f, g \rangle. \tag{16}$$

Setze nun

$$\alpha(t) := \int_0^t f(\tau) \overline{g(\tau)} d\tau.$$

Dann gilt

$$\langle p(A)f, g \rangle = \int_0^1 p(t) d\alpha(t). \tag{17}$$

Da (16) und (17) für alle Polynome gleich sind, gilt

$$\langle E_t f, g \rangle = \alpha(t) = \int_0^t f(\tau) \overline{g(\tau)} d\tau = \langle \chi_{[0,t]} \cdot f, g \rangle \quad (t \in [0,1]).$$

Damit ist die Spektralschar von A gegeben durch

$$E_t f = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \chi_{[0,t]} \cdot f, & 0 \leq t \leq 1, \\ f, & t > 1. \end{cases}$$

Anhang A. Übungsaufgaben

Aufgabe 1. Untersuchen Sie, ob der Raum $C([a,b])$ mit der L_p-Norm $\|f\|_p := (\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dx)^{1/p}$ für $1 \leq p \leq \infty$ vollständig ist.

Aufgabe 2 (Satz von Jordan und von Neumann). Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum E wird genau dann durch ein Skalarprodukt definiert, falls die Parallelogrammgleichung gilt. Beweisen Sie diesen Satz für den Fall eines reellen Grundkörpers.
Hinweis: In einem Raum mit Skalarprodukt lässt sich dieses durch die Norm ausdrücken. Verwenden Sie diesen Ausdruck als Definition des Skalarprodukts. Zeigen Sie dann in einem ersten Schritt $\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle = 2\langle \frac{1}{2}(x+y), z\rangle (x,y,z \in E)$.

Aufgabe 3. Sei E Vektorraum mit Skalarprodukt und $\{x_1, .., x_1\}$ ein Orthonormalsystem in E. Zeigen Sie, dass für $x \in E$ der Ausdruck $\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k\|$ durch die Wahl $c_k = \langle x, x_k\rangle$ minimiert wird.

Aufgabe 4. Sei M eine Teilmenge eines Hilbertraums E. Zeigen Sie, dass $M^\perp$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von E ist, und dass $(M^\perp)^\perp$ gleich dem abgeschlossenen linearen Erzeugnis $\overline{spanM}$ von M ist.

Aufgabe 5. Sei E der $\mathbb{C}-$Vektorraum der endlichen Linearkombinationen der Funktionen $e_\lambda(x) := \exp(i\lambda x), \lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g\rangle := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(x) \quad \overline{g(x)} \quad dx$$

ein Skalarprodukt auf E ist, und dass $(E, \langle .,.\rangle)$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 6 (Zur Existenz von überabzählbar vielen linear unabhängigen Vektoren in einem unendlichdimensionalen Hilbertraum). Zeigen Sie, dass $\{e^{(z)} : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ mit $e_n^{(z)} := z^n$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\ell^2(\mathbb{N})$ ist.

Aufgabe 7 (Zur Existenz nichtstetiger linearer Funktionale). Für $E = \ell^2(\mathbb{N})$ sei F der Untervektorraum

$$F = \{x \in E : x_n \neq 0 \text{ nur für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei F' ein algebraisches Komplement von F in E, d.h. $F + F' = E$, $F \cap F' = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ für $x = y + y'$ mit $y \in F$ und $y' \in F'$ wohldefiniert, linear und nicht stetig ist.

Aufgabe 8 (Adjungierter Operator). Sei E ein Hilbertraum und $A \in L(E)$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in E$ genau ein $x^* \in E$ gibt mit $\langle Ay, x\rangle = \langle y, x^*\rangle$ für alle $y \in E$ und $\|x^*\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Zeigen Sie weiter:
(i) $x \mapsto x^* =: A^*x$ definiert $A^* \in L(E)$.
(ii) $A \mapsto A^*$ ist konjugiert linear.
(iii) $A^{**} = A$.
(iv) $\|A\| = \|A^*\|$.

Aufgabe 9. Sei $E \neq \{0\}$ ein normierter Raum und $P, Q : E \to E$ lineare Abbildungen mit $PQ - QP = \mathrm{id}_E$. Zeigen Sie, dass P und Q nicht beide gleichzeitig stetig sein können.

Hinweis. Betrachten Sie $P^nQ - QP^n = nP^{n-1}$.

Aufgabe 10. Beweisen Sie Korollar 2.9 der Vorlesung.

Aufgabe 11. a) Beweisen Sie, dass ein Hilbertraum mit abzählbarer Orthonormalbasis separabel ist.

b) Zeigen Sie, dass in einem separablen Hilbertraum alle Orthonormalbasen abzählbar sind.

Bemerkung. Die Aussage von Teil b) gilt ganz allgemein: In einem Hilbertraum haben alle Orthonormalbasen dieselbe Kardinalität. Diese heißt dann die Dimension des Hilbertraums.

Aufgabe 12. Für $1 \leq p < \infty$ ist der Banachraum $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ definiert durch

$$\ell^p := \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_p := \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\Big)^{1/p} < \infty\Big\}.$$

Analog ist ℓ^∞ definiert durch $\ell^\infty := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$.

a) Zeigen Sie, dass ℓ^p für $1 \leq p < \infty$ separabel ist.

b) Zeigen Sie, dass ℓ^∞ nicht separabel ist. (Betrachten Sie 0-1-wertige Folgen.)

Aufgabe 13. Sei $c_0 := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : x_n \to 0\ (n \to \infty)\}$ mit der Supremumsnorm versehen. Sei $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ und $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Man zeige:

a) Durch $\widetilde{f}(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n x_n$ wird ein stetiges lineares Funktional auf c_0 mit $\|\widetilde{f}\| = \|f\|_1$ definiert.

b) Die Abbildung $f \mapsto \widetilde{f}$ ist ein isometrischer Isomorphismus von ℓ^1 auf $(c_0)'$ (also insbesondere surjektiv).

Aufgabe 14 (Shift-Operatoren). Der Operator S in ℓ^2 sei definiert durch $Se^{(n)} := e^{(n+1)}$, wobei $\{e^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ die kanonische Orthonormalbasis in ℓ^2 sei. Man bestimme $\|S\|$, S^*, SS^*, S^*S und $\|S^*\|$. Was ist $\ker S$, $R(S)$, $\ker S^*$, $R(S^*)$?

Aufgabe 15. Beweisen Sie Korollar 5.6 der Vorlesung.

Aufgabe 16. Zeigen Sie, dass es ein stetiges lineares Funktional f auf $\ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ gibt, für das

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le f(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n$$

für alle $x \in \ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ gilt.

Hinweis. Fortsetzungssatz von Hahn-Banach.

Aufgabe 17 (8 Punkte). Sei E ein unendlich-dimensionaler Banachraum. Zeigen Sie, dass der Abschluss der Einheitssphäre $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ in der schwachen Topologie die Einheitskugel $\{x \in E : \|x\| \le 1\}$ ist.

Hinweis. a) Eine Umgebungsbasis von $x \in E$ in der schwachen Topologie ist gegeben durch alle Mengen der Form

$$U(f_1,\ldots,f_n,\varepsilon) := \{y \in E : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon \ (i = 1,\ldots,n)\}$$

mit $f_1,\ldots,f_n \in E'$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Betrachten Sie $x + \lambda z$ mit $z \in H := \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$ für $f_1,\ldots,f_n \in E'$. Zeigen Sie, dass $\dim E/H < \infty$ und damit $\dim H = \infty$ (und insbesondere $H \ne \{0\}$) gilt.

Aufgabe 18. Sei E ein Hilbertraum und $T \in L(E)$. Es bezeichne E_w bzw. E_n den Raum E versehen mit der schwachen bzw. der Normtopologie. Zeigen Sie, dass $T : E_w \to E_n$ genau dann stetig ist, wenn $R(T)$ endlich-dimensional ist.

Hinweis. Beachten Sie Hinweis b) von Aufgabe 17 mit $x = 0$.

Aufgabe 19 (Multiplikationsoperatoren, Teil 1). Sei $E = L^2([0,1])$ und $T \in$

$L(E)$ definiert durch $Tf(t) := t \cdot f(t)$. Bestimmen Sie $\rho(T), \sigma_p(T), \sigma_c(T)$ und $\sigma_r(T)$.

Aufgabe 20 (Multiplikationsoperatoren, Teil 2). Sei $E = C([0,1])$, $\phi \in E$ und $T \in L(E)$ definiert durch $Tf(t) := \phi(t) \cdot f(t)$. Bestimmen Sie $\sigma_p(T)$ und zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von T unendliche Vielfachheit haben (d.h. es gilt $\dim \ker(T - \lambda) = \infty$ für $\lambda \in \sigma_p(T)$).

Aufgabe 21 (Approximative Eigenwerte). Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $A \in L(E)$. Die Menge $\sigma_{\text{ap}}(A)$ der approximativen Eigenwerte von A ist definiert als die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ gibt mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(A - \lambda)x_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Zeigen Sie, dass $\sigma_{\text{ap}}(A) \subset \sigma(A)$ gilt.

Aufgabe 22 (Shift-Operatoren Teil 2). Sei S der Rechtsshift in $\ell^2(\mathbb{Z})$, d.h. $S(e^{(n)}) = e^{(n+1)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ für die kanonischen Einheitsvektoren $e^{(n)} = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{Z}}$. Bestimmen Sie das Spektrum von S (d.h. $\rho(S), \sigma_p(S), \sigma_c(S)$ und $\sigma_r(S)$).

Aufgabe 23 (Integraloperatoren). Sei $G : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

a) Durch

$$Kf(s) := \int_0^1 G(s,t)f(t)dt \quad (f \in C([0,1]))$$

wird ein Operator $K \in L(C([0,1]))$ definiert. Es gilt

$$\|K\| = \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |G(s,t)|dt.$$

b) Der Operator K ist kompakt. (**Hinweis:** Approximation durch Treppenfunktionen.)

Aufgabe 24 (Volterra-Operator). Nun sei in der Situation von Aufgabe 23 speziell $G(s,t) = 0$ für $s \le t$.

a) Man betrachte die Volterrasche Integralgleichung

$$f(s) = g(s) + \int_0^s G(s,t)f(t)dt.$$

Zeigen Sie, dass $\|K^n\| \le \frac{\mu^n}{n!}$ mit $\mu := \sup_{s\ge t} |G(s,t)|$ gilt und folgern Sie daraus, dass die Volterrasche Integralgleichung für jedes $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$ besitzt.

b) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(K)$ von K.

Aufgabe 25 (2 Punkte). Seien E ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $A, B \in L(E)$. Zeigen Sie:

a) Falls $1 - AB$ invertierbar ist, so ist $1 + B(1 - AB)^{-1}A$ das Inverse von $1 - BA$.

b) $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$.

Aufgabe 26. Seien E, F Banachräume und $A \in L(E, F)$. Zeigen Sie, dass $R(A)$ genau dann abgeschlossen ist, wenn es ein $C > 0$ gibt mit

$$\|Ax\| \geq C \operatorname{dist}(x, \ker A) \quad (x \in E).$$

Hinweis. Betrachten Sie $E/\ker A$.

Aufgabe 27. Seien E, F Banachräume und $A \in L(E, F)$. Zeigen Sie:

a) Falls es einen abgeschlossenen komplementären Unterraum $M \subset F$ zu $R(A)$ gibt, ist $R(A)$ abgeschlossen.

b) Falls $\operatorname{codim} R(A) < \infty$, ist $R(A)$ abgeschlossen.

Hinweis zu a). Betrachten Sie $A_0 : E \oplus M \to F,\ (x, y_0) \mapsto Ax + y_0$.

Aufgabe 28 (6 Punkte) Sei E ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum. Definiere für $A \in L(E)$ die Bezeichnung

$$A \geq 0 :\Longleftrightarrow A = A^*,\ \langle x, Ax \rangle \geq 0 \quad (x \in E).$$

a) Seien $A, B \in L(E)$ mit $A = A^*$, $B \geq 0$ und $AB = BA$. Zeigen Sie $A^2B = BA^2 \geq 0$.

b) Seien $A, B \in L(E)$ mit $A \geq 0$, $B \geq 0$ und $AB = BA$. Zeigen Sie $AB \geq 0$.

Hinweis zu b). Man kann $\|A\| = 1$ annehmen. Betrachten Sie die Folge A_n mit $A_1 := A$ und $A_{n+1} := A_n - A_n^2$ und zeigen Sie $0 \leq A_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \to A \quad (n \to \infty)$$

in der starken Operatortopologie.

Aufgabe 29. Beweisen Sie Lemma 10.15 b) der Vorlesung.

Aufgabe 30 (Nichtorthogonale Projektionen). Sei E ein Banachraum, und seien $M_1, M_2 \subset E$ lineare Teilräume mit $E = M_1 + M_2$ und $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Sei $P : E \to E$ definiert durch $Px := x_1$, wobei $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$.

Zeigen Sie: P ist genau dann stetig, wenn M_1 und M_2 beide abgeschlossen sind.

Aufgabe 31. Sei E ein Hilbertraum und $P \in L(E) \setminus \{0\}$ eine (nicht notwendig orthogonale) Projektion, d.h. $P^2 = P$. Zeigen Sie, dass P genau dann eine orthogonale Projektion ist, falls $\|P\| = 1$.

Hinweis. Wählen Sie ein $x \in E$ mit $Px \neq 0$ und $(1-P)x \neq 0$ und betrachten Sie die Einschränkung von P auf den von Px und $(1-P)x$ aufgespannten Unterraum.

Aufgabe 32 (Ein Störungssatz.) Sei E ein Hilbertraum und seien $A, B \in L(E)$ mit $A - B$ kompakt. Zeigen Sie, dass $\sigma(A) \setminus \sigma_p(A) \subset \sigma(B)$ gilt. (D.h. eine kompakte Störung des Operators A lässt die Punkte des Spektrums, die nicht Eigenwerte sind, unverändert.)

Aufgabe 33. Sei S der Linksshift in $\ell^2(\mathbb{Z})$, d.h. $S(e^{(n)}) = e^{(n-1)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ für die kanonischen Einheitsvektoren $e^{(n)} = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{Z}}$. Der Operator $S \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ ist bekanntlich unitär mit $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ (vgl. Aufgabe 22). Weiter sei $C \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ definiert durch

$$C(e^{(n)}) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq 1, \\ -e^{(0)} & \text{falls } n = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie: C ist kompakt, und $\sigma(S + C) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

Bemerkung. Eine kompakte Störung kann das Spektrum eines Operators also sehr wesentlich verändern. Vgl. auch Aufgabe 32.

Aufgabe 34. Seien $a < b$ und $\alpha, \beta \in BV([a, b])$. Ferner seien $f, g \in C([a, b])$.

a) Es gelte $\alpha(\lambda) = \int_a^\lambda f(\mu)d\beta(\mu)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b g(\lambda)d\alpha(\lambda) = \int_a^b f(\lambda)g(\lambda)d\beta(\lambda).$$

b) Nun sei α monoton wachsend und $\phi\colon [A, B] \to [a, b]$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Zeigen Sie, dass

$$\int_A^B (f \circ \phi)d(\alpha \circ \phi) = \int_a^b f d\alpha.$$

Aufgabe 35. Beweisen Sie Lemma 11.5 der Vorlesung.

Aufgabe 36. Sei $E = L^2([0,1])$, und für $x \in E$ sei

$$(E_\lambda x)(t) := \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ \chi_{[0,\lambda]}(t)x(t), & \lambda \in [0,1), \\ x(t), & \lambda \geq 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_0^1 \lambda dE_\lambda$.

Literatur

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York 1975.

[2] Diestel, J., Uhl, J. J.: Vector measures. Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[3] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators. I. General Theory. Interscience Publishers, New York 1963.

[4] Gohberg, I., Goldberg, S.: Basic operator theory. Birkhäuser Boston 1981.

[5] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: Classes of linear operators. Vol. I. Birkhäuser Basel 1990.

[6] Halmos, P.: A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin 1974.

[7] Heuser, H.: Funktionalanalysis. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart 1986.

[8] Hirzebruch, F., Scharlau, W.: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibliogr. Inst. Mannheim 1971.

[9] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer Berlin 1976.

[10] Pazy, A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, Berlin et al. 1983.

[11] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Academic Press San Diego 1980.

[12] Rudin, W.: Functional analysis. McGraw-Hill New York 1973.

[13] Werner, D.: Funktionalanalysis (5., erw. Aufl.). Springer Berlin 2005.

[14] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin et al. 1965.