Skript zur Vorlesung

Analysis IV

Sommersemester 2006

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Juli 2006

Skript zur Vorlesung

Analysis IV

Sommersemester 2006

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

I. Das Lebesgue-Integral 3

1 Maßtheoretische Grundlagen 3

a) Inhalte und Maße 3

b) Das Lebesgue-Maß 14

2 Integration 17

a) Messbare Abbildungen 18

b) Das Lebesgue-Integral 20

3 Konvergenzsätze 27

a) Die wichtigsten Konvergenzsätze 27

b) Die L^p-Räume 32

4 Endliche Produkte von Maßräumen 35

a) Produkte von Messräumen, Produkt-σ-Algebren 35

b) Produktmaße und der Satz von Fubini 37

5 Der Transformationssatz 42

a) Einige spezielle Maße 42

b) Der Transformationssatz 45

II. Einiges zur Topologie 49

6 Topologische Begriffe 49

a) Topologische Räume 49

b) Das Lemma von Urysohn 54

7 Der Satz von Tychonov 59

a) Unendliche Produkte topologischer Räume, Ultrafilter 59

b) Das Lemma von Zorn und der Satz von Tychonov 62

III. Anwendungen und Ergänzungen 66

8 Eigenschaften der L^p-Räume 66

a) Die Faltung 66

b) Vollständigkeits- und Dichtheitsaussagen 69
9 Die Fourier-Transformation 73
Anhang A. Übungsaufgaben 83
Literatur 93

Einleitung

Das vorliegende Skript gibt den Inhalt der vierstündigen Vorlesung Analysis IV vom Sommersemester 2006 an der Universität Konstanz wieder. Es handelt sich dabei um eine fast wörtliche Darstellung des präsentierten Stoffes.

Die Vorlesung richtete sich an Studierende des vierten Semesters in den Diplomstudiengängen Mathematik, Mathematische Finanzökonomie und Physik sowie an Lehramtsstudierende. Der größte Teil der Vorlesung beschäftigt sich mit der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie. Diese wird ergänzt durch einige topologische Grundbegriffe und Aussagen und durch Anwendungen und Ergänzungen (etwa Faltung, L^p-Räume und Fourier-Transformation).

Der Aufbau der Lebesgueschen Theorie ist recht klassisch: Beginnend mit den Grundbegriffen von Mengensystemen, Inhalten und Maßen wird zunächst die Konstruktion von Maßen nach Carathéodory besprochen. Nach der Definition des Integrals (ebenfalls klassisch über das Integral von Stufenfunktionen) werden wichtige Konvergenzsätze wie monotone Konvergenz und majorisierte Konvergenz behandelt. Abgeschlossen wird dieser Teil mit dem Tranformationssatz und dem Satz von Fubini.

Im topologischen Teil konzentrierte ich mich auf das Lemma von Urysohn und den Satz von Tychonov, den ich mit Hilfe von Ultrafiltern bewies. Dieser Zugang erscheint mir recht klar, weist aber auch auf Grundideen der Topologie hin, welche in nachfolgenden Vorlesungen weiter ausgebaut werden können.

Insgesamt handelt es sich bei dieser Vorlesung um eine Vorlesung zwischen Grund- und Hauptstudium. Fortsetzende Vorlesungen, insbesondere über partielle Differentialgleichungen und zur Funktionalanalysis, bauen auf den hier behandelten Konzepten auf und führen diese weiter.

Am Ende des Skripts finden sich die zugehörigen Übungsaufgaben, welche von Herrn Olaf Weinmann gestellt wurden. Ich möchte mich bei Herrn Weinmann für die ausgezeichnete Betreuung und Organisation des Übungsbetriebs und für die hervorragend gestellten Aufgaben bedanken; hier wurde viel Zeit investiert, die den Studierenden zugute kommt. Auch bei den Übungsleitern möchte ich mich für die gerade in diesem Semester sehr gute Betreuung der Studierenden bedanken.

Ich hoffe, dass das vorliegende Skript den Studierenden bei der Nachbereitung des Stoffes hilft, und bitte alle Leser, die sicher zahlreichen Fehler im Skript zu entdecken und mir mitzuteilen.

Konstanz, den 31. 7. 2006 Robert Denk

I. Das Lebesgue-Integral

1. Maßtheoretische Grundlagen

1.1 Worum geht's? Das Maß einer Menge ist in der Mathematik an vielen Stellen von Bedeutung. Zum einen gibt es hier den stochastischen Zugang, nach welchem die Wahrscheinlichkeit als ein normiertes Maß definiert ist, zum anderen geht es um die Frage, welches Volumen etwa eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ besitzen soll.

Während in Analysis II der Zugang über das Riemann-Integral gewählt wurde, soll hier ein vertiefter (und für Konvergenzaussagen günstigerer) Ansatz diskutiert werden, das allgemeine Lebesgue-Maß und Lebesgue-Integral. Zunächst geht es um elementare Aussagen über σ-Algebren und Maße, insbesondere auch um die Frage, inwiefern ein Maß durch die Angabe auf einem einfachen Mengensystem (etwa den n-dimensionalen Intervallen) bereits festgelegt ist.

Die wichtigste Antwort dazu gibt der Fortsetzungssatz von Carathéodory, welcher das erzeugte Maß sogar (in Form des äußeren Maßes) konstruktiv angibt. Im zweiten Abschnitt werden wir diese abstrakte Konstruktion auf den elementargeometrischen Inhalt anwenden und das Lebesgue-Maß mit den zugehörigen Borel- bzw. Lebesgue-messbaren Mengen erhalten.

a) Inhalte und Maße

1.2 Definition. Sei X eine Menge, $\mathscr{P}(X) := \{A : A \subset X\}$ die Potenzmenge von X und $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$.

a) $\mathscr{A}$ heißt σ-Algebra über X, falls gilt:

(i) $\emptyset \in \mathscr{A}$,

(ii) Für jedes $A \in \mathscr{A}$ gilt $A^c := \{x \in X : x \notin A\} \in \mathscr{A}$.

(iii) Für $A_n \in \mathscr{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

In diesem Fall heißt $(X, \mathscr{A})$ Messraum.

b) Falls statt (iii) nur gilt

(iii′) Für $A, B \in \mathscr{A}$ gilt $A \cup B \in \mathscr{A}$,

so heißt $\mathscr{A}$ eine Algebra.

c) Falls statt (iii) nur gilt:

(iii″) Falls $A_n \in \mathscr{A}$ disjunkt sind (d.h. $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$), dann ist $\dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}} A_n \in \mathscr{A}$, so heißt $\mathscr{A}$ ein Dynkin-System.

d) $\mathscr{A}$ heißt ein Ring, falls $\emptyset \in \mathscr{A}$ und für alle $A, B \in \mathscr{A}$ gilt: $A \setminus B \in \mathscr{A}$ und $A \cup B \in \mathscr{A}$.

1.3 Bemerkung. a) Die (bezüglich Mengeninklusion) größte σ-Algebra ist $\mathscr{P}(X)$, die kleinste ist $\{\emptyset, X\}$. Falls $\mathscr{A}_i$ eine σ-Algebra ist für $i \in I$, wobei I eine nichtleere Indexmenge ist, dann ist $\bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$ wieder eine σ-Algebra.

Sei $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ beliebig. Dann ist

$$\sigma(\mathscr{E}) := \bigcap \{\mathscr{A} \supset \mathscr{E} : \mathscr{A} \text{ ist } \sigma\text{−Algebra über } X\}$$

die kleinste σ-Algebra, die $\mathscr{E}$ enthält (von $\mathscr{E}$ erzeugte σ-Algebra). Analog existieren ein kleinstes Dynkin-System $\mathscr{D}(\mathscr{E})$ und eine kleinste Algebra, die $\mathscr{E}$ enthält.

Die von $\mathscr{E}$ erzeugte Algebra kann man explizit angeben:

$$\Big\{ \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n} A_{ij} : A_{ij} \in \mathscr{E} \cup \mathscr{E}^c,\ n \in \mathbb{N} \Big\},$$

wobei $\mathscr{E}^c := \{A^c : A \in \mathscr{E}\}$.

Für σ-Algebren gilt dies keineswegs, auch nicht, wenn man n durch ∞ ersetzt und abzählbar oft iteriert!

b) Man beachte die Zusammenhänge der verschiedenen Mengensysteme. Zum Beispiel ist ein Ring $\mathscr{A}$ genau dann eine Algebra, falls $X \in \mathscr{A}$ gilt. Jede Algebra ist auch ein Ring.

c) Ein Mengensystem $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ ist genau dann ein Dynkin-System, wenn gilt:

(i) $X \in \mathscr{A}$,
(ii) Für $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \subset B$ gilt $B \setminus A \in \mathscr{A}$.
(iii) Für $A_n \in \mathscr{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

1.4 Lemma. a) *Ein Dynkin-System $\mathscr{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, falls gilt:*

$$\textit{Für alle } A, B \in \mathscr{D} \textit{ ist } A \cap B \in \mathscr{D}$$

(d.h. wenn $\mathscr{D}$ $\cap$-stabil ist).

b) (Dynkin-Lemma). *Sei $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ $\cap$-stabil. Dann ist $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{D}(\mathscr{E})$.*

Beweis. a) Sei $\mathscr{D}$ $\cap$-stabil. Dann gilt für $A, B \in \mathscr{D}$:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c = \Big[A^c \dot\cup (A \cap B)\Big]^c \in \mathscr{D},$$

also

$$A \cup B = (A \backslash B) \,\dot{\cup}\, B \in \mathscr{D}\,.$$

Seien $A_n \in \mathscr{D}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $\widetilde{A}_0 := \emptyset$ und $\widetilde{A}_n := A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{D}$. Dann ist

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}} \widetilde{A}_{n+1} \backslash \widetilde{A}_n \in \mathscr{D}\,,$$

d.h. $\mathscr{D}$ ist σ-Algebra.

b) Zu zeigen ist nur, dass $\mathscr{D}(\mathscr{E})$ eine σ-Algebra ist. Zu $A \in \mathscr{D}(\mathscr{E})$ definiere

$$\mathscr{D}_A := \{B \in \mathscr{P}(X) : A \cap B \in \mathscr{D}(\mathscr{E})\}\,.$$

Dann ist $\mathscr{D}_A$ ein Dynkin-System. Da $\mathscr{E}$ $\cap$-stabil ist, gilt

$$\mathscr{E} \subset \mathscr{D}_A \text{ für alle } A \in \mathscr{E}$$

und damit $\mathscr{D}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{D}_A$ für alle $A \in \mathscr{E}$, d.h.

$$A \cap B \in \mathscr{D}(\mathscr{E}) \text{ für alle } A \in \mathscr{E},\; B \in \mathscr{D}(\mathscr{E})\,.$$

Dies heißt $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}_B$ für alle $B \in \mathscr{D}(\mathscr{E})$ und damit

$$\mathscr{D}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{D}_B \text{ für alle } B \in \mathscr{D}(\mathscr{E})\,,$$

d.h. $\mathscr{D}(\mathscr{E})$ ist $\cap$-stabil. Mit Teil a) folgt nun die Behauptung. □

1.5 Definition. a) Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum. Dann heißt $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ ein Maß, falls gilt:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,
(ii) σ-Additivität: Für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ gilt

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)\,. \tag{1-1}$$

In diesem Fall heißt $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

b) Sei $\mathscr{A}$ ein Ring. Dann heißt $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ ein Inhalt, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ für alle } A, B \in \mathscr{A} \text{ mit } A \cap B = \emptyset$$

(endliche Additivität) gilt. Ein Inhalt μ heißt σ-additiv, falls für alle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ und $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ die Gleichheit (1-1) gilt.

c) Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathscr{A}$ heißt

- σ-endlich (oder normal), falls es eine Folge $(A_n)_n \subset \mathscr{A}$ gibt mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- endlich, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathscr{A}$ gilt. (Falls $\mathscr{A}$ eine Algebra oder sogar eine σ-Algebra ist, ist dies äquivalent zur Bedingung $\mu(X) < \infty$.)

d) Ein Maß μ auf einer σ-Algebra heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, falls $\mu(X) = 1$ gilt.

1.6 Bemerkung. In obiger Definition und auch im folgenden tritt der Wert ∞ auf. Dabei sind folgende Rechenregeln zu beachten:

- $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$,
- $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty \quad (0 < a \leq \infty)$,
- $\infty + a = a + \infty = \infty \quad (-\infty < a \leq \infty)$.

Der Ausdruck $\infty - \infty$ ist nicht definiert.

1.7 Beispiele. a) Dirac-Maß: Zu $x \in X$ definiere

$$\delta_x(A) := \chi_A(x) := \begin{cases} 1\,, & x \in A\,, \\ 0\,, & x \notin A\,. \end{cases}$$

Dann ist δ_x ein Maß auf $\mathscr{P}(X)$ und damit auf jeder σ-Algebra. Das Maß δ_x wird als Dirac-Maß oder auch Punktmaß bezeichnet.

b) Sei $X = \mathbb{N}$, $\mathscr{A} := \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ oder } A^c \text{ endlich }\}$ und

$$\mu(A) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ 1\,, & \text{falls } A^c \text{ endlich.} \end{cases}$$

Dann ist $\mathscr{A}$ eine Algebra und μ ein Inhalt, aber $\mathscr{A}$ ist keine σ-Algebra und μ ist nicht σ-additiv auf $\mathscr{A}$.

c) Zählmaß: Definiere

$$\zeta(A) := \begin{cases} |A|\,, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty\,, & \text{falls } A \text{ unendlich.} \end{cases}$$

Dann ist ζ ein Maß auf $\mathscr{P}(X)$, welches genau dann σ-endlich ist, falls X abzählbar ist.

1.8 Bemerkung. a) Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E \in \mathscr{A}$. Dann ist $\mathscr{A} \cap E := \{A \cap E : A \in \mathscr{A}\}$ eine σ-Algebra, und die Einschränkung $\mu|_E := \mu|_{\mathscr{A}\cap E}$ ist wieder ein Maß. Man erhält einen neuen Maßraum $(E, \mathscr{A} \cap E, \mu|_E)$. Man spricht von der Spur-σ-Algebra und dem Spurmaß.

b) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $(Y, \mathscr{B})$ ein Messraum und $f \colon X \to Y$ eine Funktion. Dann ist $\sigma(f) := f^{-1}(\mathscr{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}\}$ eine σ-Algebra auf X, die von f erzeugte σ-Algebra.

1.9 Beispiel (elementargeometrischer Inhalt). Das folgende Beispiel ist aus Analysis II bekannt.

Zu $a, b \in \mathbb{R}^n$ sei

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j \leq b_j \quad (j = 1, \ldots, n)\}$$

das n-dimensionale Intervall. Sei $\mathbb{I}_n := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$ das System aller Intervalle und

$$\mathbb{A}_n := \Big\{ \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} A_i : A_i \in \mathbb{I}_n, k \in \mathbb{N} \Big\}$$

das System aller endlichen Vereinigungen disjunkter Intervalle. Dann ist $\mathbb{A}_n$ ein Ring.

Definiere den elementargeometrischen Inhalt durch $\lambda((a, b]) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$ auf $\mathbb{I}_n$ und durch

$$\lambda\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{k}} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(A_i)$$

auf $\mathbb{A}_n$. Dann ist $\lambda \colon \mathbb{A}_n \to [0, \infty)$ ein Inhalt.

1.10 Bemerkung. Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathscr{A}$. Dann gilt:

(i) μ ist monoton, d.h. für $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(ii) μ ist subtraktiv, d.h. für $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$ gilt $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(iii) μ ist sub-additiv, d.h. für $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\,.$$

1.11 Satz. *Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathscr{A}$. Betrachte die folgenden Aussagen:*

(a) *μ ist σ-additiv.*

(b) *Für alle $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =: A \in \mathscr{A}$ gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

(*d.h. μ ist stetig von unten*).

(c) *Für alle $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ und $\mu(A_1) < \infty$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

(*d.h. μ ist stetig von oben*).

Dann gilt (a) $\iff$ (b) $\implies$ (c). *Falls μ endlich ist, sind alle drei Aussagen äquivalent.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b). Mit $A_0 := \emptyset$ und $\widetilde{A}_n := A_n \backslash A_{n-1}$ ist $A = \dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}} \widetilde{A}_n$ und $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \widetilde{A}_k$. Also ist

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\widetilde{A}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(\widetilde{A}_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)\,.$$

(b) $\Rightarrow$ (a). Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ paarweise disjunkt, $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$. Setze $\widetilde{A}_n := A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n$. Dann gilt $\widetilde{A}_n \nearrow A$ (d.h. $\widetilde{A}_1 \subset \widetilde{A}_2 \subset \dots$ und $\bigcup \widetilde{A}_n = A$), und nach (b) gilt $\mu(\widetilde{A}_n) \to \mu(A)$. Wegen $\mu(\widetilde{A}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ gilt also $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Wegen $\mu(A_1 \backslash A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ und $A_1 \backslash A_n \nearrow A_1$ gilt nach (b)

$$\mu(A_1) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \backslash A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

und damit $\mu(A_n) \to 0$.

Sei nun μ endlich.

(c) $\Rightarrow$ (d). Falls $A_n \nearrow A$, gilt $A \backslash A_n \searrow \emptyset$ und damit gilt $\mu(A \backslash A_n) \to 0$ nach (c). Somit folgt $\mu(A_n) \to \mu(A)$. $\square$

1.12 Beispiel. Wir zeigen, dass der elementargeometrische Inhalt λ σ-additiv auf $\mathbb{A}_n$ ist. Da λ endlich ist, genügt es, die Eigenschaft (c) in obigem Satz nachzurechnen. Sei also $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ mit $A_j \in \mathbb{A}_n$ und $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \emptyset$.

Sei $\varepsilon > 0$. Da A_j (Riemann-)messbar ist, existiert nach Analysis II eine kompakte Menge $\widetilde{K}_j \subset A_j$ mit $\lambda(A_j \setminus \widetilde{K}_j) < \varepsilon \cdot 2^{-j}$. Für $K_j := \widetilde{K}_1 \cap \dots \cap \widetilde{K}_j$ gilt dann ebenfalls $K_j \subset A_j$. Außerdem ist

$$A_j \setminus K_j = \bigcup_{i=1}^{j} (A_j \setminus \widetilde{K}_i) \subset \bigcup_{i=1}^{j} (A_i \setminus \widetilde{K}_i)$$

und damit

$$\lambda(A_j \setminus K_j) \le \sum_{i=1}^{j} \lambda(A_i \setminus \widetilde{K}_i) < \sum_{i=1}^{j} \varepsilon \cdot 2^{-i} < \varepsilon.$$

Da alle K_j kompakt sind mit $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ und

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} K_j \subset \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \emptyset,$$

existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $K_j = \emptyset \quad (j \ge j_0)$. Damit gilt für alle $j \ge j_0$

$$\lambda(A_j) = \lambda(A_j \setminus K_j) < \varepsilon.$$

Somit gilt $\lambda(A_j) \to 0 \quad (j \to \infty)$, und λ ist σ-additiv.

Wegen $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} (-j, j]^n$ ist λ auch σ-endlich auf $\mathbb{A}_n$.

In vielen Fällen ist nicht ein Maß auf einer σ-Algebra gegeben, sondern ein Inhalt auf einer Algebra oder einem Ring. Daher stellt sich die Frage, ob sich dieser Inhalt eindeutig zu einem Maß fortsetzen lässt. Die folgende Konstruktion liefert die Antwort.

1.13 Definition. Ein äußeres Maß auf einer Menge X ist eine Funktion $\mu^*\colon \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
(ii) $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ für alle $A, B \in \mathscr{P}(X)$ mit $A \subset B$,
(iii) $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ für alle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(X)$.

Eine Menge $A \subset X$ heißt μ^*-messbar, falls

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \qquad \text{für alle } B \in \mathscr{P}(X)\,.$$

1.14 Definition und Satz. *Sei μ ein σ-additiver Inhalt auf einem Ring $\mathscr{A}$. Definiere $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ durch*

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \inf\Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : A_n \in \mathscr{A},\ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Big\}, & \textit{falls } \{\cdots\} \ne \emptyset\,, \\ \infty\,, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

a) μ^* ist ein äußeres Maß und heißt das zu μ gehörige äußere Maß.

b) Jede Menge $A \in \mathscr{A}$ ist μ^*-messbar, und es gilt $\mu^*|_{\mathscr{A}} = \mu$.

Beweis. a) Eigenschaft (i) eines äußeren Maßes ist klar. Für (ii) beachte, dass jede Überdeckung $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ auch eine Überdeckung von $A \subset B$ ist.

Für (iii) sei o.E. $\mu^*(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Überdeckung $A_n \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{nm}$ mit

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_{nm}) \le \mu^*(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}.$$

Es folgt $A \subset \bigcup n, m \in \mathbb{N} A_{nm}$ und

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mu(A_{nm}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

und damit (iii).

b) Sei $A \in \mathscr{A}$. Wir zeigen zunächst

$$\mu^*(B) \ge \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \quad \text{für alle } B \in \mathscr{P}(X)\,. \tag{1-2}$$

Dazu sei o.E. $\mu^*(B) < \infty$. Da μ ein Inhalt ist, gilt für $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ die Gleichheit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap B_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A^c \cap B_n).$$

Für jede Überdeckung $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ist $B \cap A \subset \bigcup_n (A \cap B_n)$ und $A^c \cap B \subset \bigcup_n (A^c \cap B_n)$. Damit gilt

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n).$$

Nimmt man das Infimum über alle Folgen $(B_n)_n$, welche B überdecken, erhält man (1-2).

In (1-2) gilt sogar Gleichheit, denn aus Eigenschaft 1.13 (iii) folgt für $B \in \mathscr{P}(X)$

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B).$$

Es ist noch zu zeigen, dass $\mu(A) = \mu^*(A) \quad (A \in \mathscr{A})$ gilt. Sei $A \in \mathscr{A}$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ mit $A \subset \bigcup_n A_n$. Setze $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1, \dots, B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$. Da μ monoton und σ-additiv ist, erhält man

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap A_n)\Big) = \mu\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} (A \cap B_n)\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap B_n)\\ &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).\end{aligned}$$

Nimmt man das Infimum über alle Folgen $(A_n)_n$, die A überdecken, erhält man $\mu(A) \le \mu^*(A)$. Die andere Ungleichung ist aber klar wegen $A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \dots$. $\square$

1.15 Satz (Carathéodory). *Sei μ ein σ-additiver Inhalt auf einem Ring $\mathscr{A}$. Dann ist das Mengensystem $\overline{\sigma}(\mathscr{A})$ aller μ^*-messbaren Mengen eine ($\sigma(\mathscr{A})$ enthaltende) σ-Algebra, und $\mu^*|_{\overline{\sigma}(\mathscr{A})}$ ist ein Maß mit $\mu^* = \mu$ auf $\mathscr{A}$. Insbesondere existiert zu μ eine Maßfortsetzung auf $\sigma(\mathscr{A})$.*

Beweis. (i) Nach Satz 1.14 ist $\mathcal{A} \subset \overline{\sigma}(\mathcal{A})$.

(ii) Wir zeigen, dass $\overline{\sigma}(\mathscr{A})$ eine Algebra ist. Offensichtlich ist $\emptyset \in \overline{\sigma}(\mathscr{A})$, und A^c ist μ^*-messbar für jede μ^*-messbare Menge A.

Seien $A_1, A_2 \in \overline{\sigma}(\mathscr{A})$. In der Gleichung

$$\mu^*(B) = \mu^*(A_1 \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap B) \quad (B \in \mathscr{P}(X))$$

ersetzt man B einmal durch $A_2 \cap B$ und einmal durch $A_2^c \cap B$ und erhält

$$\begin{aligned}\mu^*(B) = \mu^*&(A_1 \cap A_2 \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap A_2 \cap B)\\ &+ \mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap A_2^c \cap B).\end{aligned}$$

In dieser Gleichung ersetzt man nun B durch $(A_1 \cup A_2) \cap B$ und erhält

$$\begin{aligned}\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) = \mu^*&(A_1 \cap A_2 \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap A_2 \cap B)\\ &+ \mu^*(A_1 \cap A_2^c \cap B).\end{aligned} \tag{1-3}$$

Vergleicht man die letzten beiden Gleichungen, sieht man

$$\begin{aligned}\mu^*(B) &= \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap A_2^c \cap B)\\ &= \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap B).\end{aligned}$$

Also gilt $A_1 \cup A_2 \in \overline{\sigma}(\mathscr{A})$, d.h. $\overline{\sigma}(\mathscr{A})$ ist eine Algebra.

(iii) Wir zeigen, dass $\overline{\sigma}(\mathscr{A})$ ein Dynkin-System ist. Dazu sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\sigma}(\mathscr{A})$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen und $A = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Aus (1-3) folgt

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) = \mu^*(A_1 \cap B) + \mu^*(A_2 \cap B) \quad (B \in \mathscr{P}(X)).$$

Induktiv erhält man

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B\Big) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A_i \cap B) \quad (B \in \mathscr{P}(X)).$$

Nach (ii) ist $\overline{\sigma}(\mathscr{A})$ eine Algebra und damit $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \overline{\sigma}(\mathscr{A})$. Also gilt für alle $B \in \mathscr{P}(X)$

$$\mu^*(B) = \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B\Big) + \mu^*\Big(\Big[\bigcup_{i=1}^n A_i\Big]^c \cap B\Big)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i \cap B) + \mu^*(A^c \cap B).$$

Hier wurde $A^c \subset \Big[\bigcup_{i=1}^n A_i\Big]^c$ verwendet. In der letzten Ungleichung nimmt man den Grenzwert $n \to \infty$ und erhält mit 1.13 (iii)

$$\mu^*(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B).$$

Wie im Beweis von Satz 1.14 sieht man, dass damit sogar

$$\mu^*(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \quad (B \in \mathscr{P}(X)) \tag{1-4}$$

gilt. Also gilt $A \in \overline{\sigma}(\mathscr{A})$, d.h. $\overline{\sigma}(\mathscr{A})$ ist ein Dynkin-System.

(iv) Da $\overline{\sigma}(\mathscr{A})$ $\cap$-stabil ist, zeigt das Dynkin-Lemma, dass $\overline{\sigma}(\mathscr{A})$ sogar eine σ-Algebra ist.

(v) Setzt man $B = A$ in (1-4), erhält man

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

d.h. $\mu^*|_{\overline{\sigma}(\mathscr{A})}$ ist ein Maß. □

1.16 Satz (Eindeutigkeitssatz). *Seien $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra und $\mu, \nu \colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ zwei σ-endliche Maße, welche auf einem $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathscr{E}$ von $\mathscr{A}$ übereinstimmen. Ferner enthalte $\mathscr{E}$ eine Folge von Mengen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}$ mit $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = X$ und $\mu(S_n) < \infty \quad (n \in \mathbb{N})$. Dann gilt $\mu = \nu$.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$\mathscr{D}_n := \{A \in \mathscr{A} : \mu(S_n \cap A) = \nu(S_n \cap A)\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}_n$. Wir zeigen, dass $\mathscr{D}_n$ ein Dynkin-System ist, indem wir die Kriterien aus Bemerkung 1.3 c) nachrechnen.

Wegen $S_n \in \mathscr{E}$ ist $X \in \mathscr{D}_n$. Für $A, B \in \mathscr{D}_n$ mit $A \subset B$ gilt

$$\mu(S_n \cap (B \setminus A)) = \mu(S_n \cap B) - \mu(S_n \cap A) = \nu(S_n \cap B) - \nu(S_n \cap A) = \nu(S_n \cap (B \setminus A)),$$

also ist $B \setminus A \in \mathscr{D}_n$. Genauso sieht man, dass für eine aufsteigende Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_n$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \nu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big),$$

indem man die Stetigkeit von unten (Satz 1.11) verwendet.

Nach dem Dynkin-Lemma 1.4 folgt nun $\mathscr{D}_n = \mathscr{D}(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Verwendet man nun nochmals die Stetigkeit von unten, so sieht man, dass $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S_n) = \nu(A)$ gilt. □

1.17 Definition. Ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ heißt vollständig, falls gilt: Aus $A \subset B$, $B \in \mathscr{A}$ und $\mu(B) = 0$ folgt $A \in \mathscr{A}$. Ein vollständiges Maß $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ heißt Vervollständigung des Maßes $\mu_0 : \mathscr{A}_0 \to [0,\infty]$, falls $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}$, $\mu|_{\mathscr{A}_0} = \mu_0$ und folgende (universelle) Eigenschaft gilt:

Sei $\mu' : \mathscr{A}' \to [0,\infty]$ vollständige Fortsetzung von μ_0. Dann ist $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ und $\mu'|_{\mathscr{A}} = \mu$ (d.h. μ ist minimale vollständige Fortsetzung von μ_0).

Insgesamt erhalten wir folgenden Fortsetzungssatz:

1.18 Satz. *Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra und $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,\infty]$ ein σ-additiver und σ-endlicher Inhalt. Dann existiert genau eine Maßfortsetzung $\widetilde{\mu}$ von μ auf die von $\mathscr{A}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathscr{A})$. Die Fortsetzung ist gegeben durch*

$$\widetilde{\mu} = \mu^*|_{\sigma(\mathscr{A})}.$$

Weiter ist durch $\mu^*|_{\overline{\sigma}(\mathscr{A})}$ eine vollständige Maßfortsetzung von μ gegeben.

Beweis. Nach dem Satz 1.15 von Carathéodory ist $\mu^*|_{\overline{\sigma}(\mathscr{A})}$ eine Maßfortsetzung von μ auf die σ-Algebra $\overline{\sigma}(\mathscr{A}) \supset \sigma(\mathscr{A})$. Nach dem Eindeutigkeitssatz 1.16 ist die Fortsetzung auf $\sigma(\mathscr{A})$ eindeutig.

Seien nun $N \in \overline{\sigma}(\mathscr{A})$ und $A \in \mathscr{P}(X)$ mit $A \subset N$ und $\mu^*(N) = 0$. Nach Satz 1.14 ist μ^* ein äußeres Maß und damit monoton, es gilt somit $\mu^*(A) = 0$. Für $B \in \mathscr{P}(X)$ folgt aus der Subadditivität und Monotonie von μ^*

$$\mu^*(B) \le \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \le \mu^*(A) + \mu^*(B \cap A^c) = \mu^*(B \cap A^c) \le \mu^*(B).$$

Also gilt überall Gleichheit, d.h. $A \in \overline{\sigma}(\mathscr{A})$. Damit ist $\mu^*|_{\overline{\sigma}(\mathscr{A})}$ vollständig. □

1.19 Bemerkung. Sei μ endlicher, σ-additiver Inhalt auf einer Algebra $\mathscr{A}$.

a) Man kann zeigen, dass $\mu^*|_{\overline{\sigma}(\mathscr{A})}$ die Vervollständigung des Maßes $\mu^*|_{\sigma(\mathscr{A})}$ ist.

b) Definiere die Halbmetrik (!)

$$d_{\mu^*}(A,B) := \mu^*(A \triangle B) \quad \text{auf } \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X),$$

wobei $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Dann gilt

$$\overline{\sigma}(\mathscr{A}) = \{B \in \mathscr{P}(X) : \text{ Für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } A \in \mathscr{A} \text{ mit } d_{\mu^*}(A,B) < \varepsilon\}.$$

(d.h. $\overline{\sigma}(\mathscr{A})$ ist der Abschluss von $\mathscr{A}$ bzgl. d_{μ^*} in $\mathscr{P}(X)$).

c) Im Satz 1.15 von Carathéodory wird das zum Inhalt μ gehörige äußere Maß μ^* betrachtet. Im Beweis werden jedoch nur die Eigenschaften aus der Definition 1.13 eines äußeren Maßes verwendet. Damit sieht man, dass folgende Aussage gilt: Sei ν ein äußeres Maß (im Sinne von 1.13) auf $\mathscr{P}(X)$, und seien $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}(X)$ die ν-messbaren Mengen. Dann ist $(X, \mathscr{M}, \nu|_{\mathscr{M}})$ ein Maßraum.

b) Das Lebesgue-Maß

1.20 Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann heißt die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra $\mathscr{B}(X) := \sigma(\tau)$ die Borel-σ-Algebra zu X.

1.21 Lemma. *Die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist die von den halboffenen Intervallen $\mathbb{I}_n = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$ erzeugte σ-Algebra.*

Beweis. (i) Wegen $(a, b + (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^t) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und

$$(a, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(a, b + \Big(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\Big)^t\Big)$$

ist offensichtlich $\sigma(\mathbb{I}_n) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zu jedem Punkt $q \in U \cap \mathbb{Q}^n$ existiert ein $\varepsilon_q > 0$ mit $I_q := \{x \in \mathbb{R}^n : q_j - \varepsilon_q < x_j < q_j + \varepsilon_q\} \subset U$. Wie oben sieht man $I_q \in \sigma(\mathbb{I}_n)$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, gilt

$$U = \bigcup_{q\in U\cap\mathbb{Q}^n} I_q.$$

Dies ist aber eine abzählbare Vereinigung, und somit ist $U \in \sigma(\mathbb{I}_n)$. Also ist $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathbb{I}_n)$. □

1.22 Lemma. *a) Jedes σ-endliche Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist bereits durch die Werte auf den halboffenen Intervallen $\mathbb{I}_n$ eindeutig festgelegt.*

b) Jedes endliche Maß $\mu\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ (insbesondere jedes Wahrscheinlichkeitsmaß) ist bereits durch seine Verteilungsfunktion

$$F_\mu\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty),\ x \mapsto \mu\big((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]\big)$$

eindeutig festgelegt.

Beweis. a) Da $\mathbb{I}_n$ ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist, welche die Folge $(-N, N]^n \nearrow \mathbb{R}^n$ enthält, folgt die Aussage sofort aus dem Eindeutigkeitssatz 1.16.

b) Bei endlichen Maßen μ ist der Wert auf $\mathbb{I}_n$ durch $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$ für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_j \leq b_j \quad (j = 1, \dots n)$ bereits eindeutig festgelegt, damit folgt die Aussage aus a). $\square$

1.23 Definition. Wir setzen

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

und definieren die Borel-σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \sigma\Big(\{(a, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}} : a \in \mathbb{R}\}\Big).$$

1.24 Definition (Lebesgue-Maß). Sei $\lambda \colon \mathbb{A}_n \to [0, \infty)$ der elementargeometrische Inhalt aus Beispiel 1.9 und 1.12. Die nach Satz 1.18 existierende eindeutige Maßfortsetzung auf $\sigma(\mathbb{A}_n) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ heißt das Lebesgue-Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und wird wieder mit λ bezeichnet, ebenso wie die Maßfortsetzung auf $\overline{\sigma}(\mathbb{A}_n)$. Die λ^*-messbaren Mengen $A \in \overline{\sigma}(\mathbb{A}_n)$ heißen die Lebesgue-Mengen des $\mathbb{R}^n$.

1.25 Bemerkung. Die Mächtigkeit (Kardinalität) von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ ist dieselbe wie die von $\mathbb{R}$, aber die Kardinalität der Lebesgue-messbaren Mengen ist $2^{|\mathbb{R}|}$ und damit größer. Das letzte sieht man, indem man eine Menge C mit $|C| = |\mathbb{R}|$ und $\lambda(C) = 0$ angibt (z.B. die Cantor-Menge, siehe unten). Dann ist jede Teilmenge von C Lebesgue-messbar. Es gibt also i.a. sehr viel mehr Mengen in der Vervollständigung $\overline{\sigma}(\mathscr{A})$ als in $\sigma(\mathscr{A})$.

1.26 Satz (Regularität des Lebesgue-Maßes). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und beschränkt. Dann existiert eine kompakte Menge K und eine offene Menge U mit $K \subset M \subset U$ und $\lambda(U \setminus K) < \varepsilon$.*

Beweis. (i) Da M beschränkt ist, gilt $\lambda(M) < \infty$. Nach Definition des äußeren Maßes existieren Mengen $A_k \in \mathbb{A}_n$ mit $M \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und

$$\lambda\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\Big) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(A_k) < \lambda(M) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Da die Mengen in $\mathbb{A}_n$ endliche Vereinigung von Intervallen sind, dürfen wir $A_k \in \mathbb{I}_n$ annehmen. Zu A_k wählen wir ein offenes Intervall $U_k \subset \mathbb{R}^n$ mit $A_k \subset U_k$ und $\lambda(U_k \setminus A_k) < \frac{1}{4}\varepsilon 2^{-k}$. Dann ist die Menge $U := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$ offen mit $M \subset U$ und $\lambda(U \setminus M) < \frac{\varepsilon}{2}$.

(ii) Sei $Q = (-N, N)^n$ ein Würfel mit $\overline{M} \subset Q$. Wir wenden (i) auf die messbare und beschränkte Menge $Q \setminus M$ an und erhalten eine offene Menge $V \supset Q \setminus M$ mit $\lambda(V) < \lambda(Q \setminus M) + \frac{\varepsilon}{2}$. O.E. sei dabei $V \subset Q$ (sonst ersetze V durch $V \cap Q$).

Wir erhalten

$$\lambda(Q \setminus V) = \lambda(Q) - \lambda(V) \geq \lambda(Q) - \lambda(Q \setminus M) - \frac{\varepsilon}{2} = \lambda(M) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Menge $K := Q \setminus V \subset Q$ ist offensichtlich beschränkt.

Es gilt $K = Q \setminus V \subset M$ wegen $Q \setminus M \subset V \subset Q$. Damit ist $\overline{K} \subset \overline{M} \subset Q$. Wegen

$$\overline{K} = \overline{Q \cap V^c} \subset \overline{V^c} = V^c$$

folgt daher $\overline{K} \subset Q \cap V^c = K$, d.h. K ist abgeschlossen und damit kompakt.

Insgesamt erhalten wir $K \subset M \subset U$ und $\lambda(U \setminus K) \leq \lambda(U \setminus M) + \lambda(M \setminus K) < \varepsilon$. □

1.27 Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Dann existieren Borelmengen $F, G \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $F \subset M \subset G$ und $\lambda(G \setminus M) = \lambda(M \setminus F) = 0$.*

Beweis. (i) Sei M beschränkt. Dann existieren nach Satz 1.26 abgeschlossene Mengen F_k und offene Mengen G_k mit $F_k \subset M \subset G_k$ und $\lambda(G_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$. Wählt man nun $F := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ und $G := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_k$, so folgt $F \subset M \subset G$ und

$$\lambda(G \setminus M) \leq \lambda(G_k \setminus M) < \frac{1}{k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. $\lambda(G \setminus M) = 0$ und genauso $\lambda(M \setminus F) = 0$.

(ii) Falls M unbeschränkt ist, wähle eine abzählbare Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ beschränkter disjunkter Mengen mit $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ (etwa durch $A_k := [-(k+1), k+1]^n \setminus [-k, k]^n$). Zu $M_k := M \cap A_k$ existieren nach (i) $F_k, G_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $F_k \subset M_k \subset G_k$ und $\lambda(G_k \setminus F_k) = 0$. Setze nun $F := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ und $G := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k$. □

1.28 Definition. Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \subset X$ heißt μ-Nullmenge, falls $N \in \mathscr{A}$ mit $\mu(N) = 0$. Man sagt, eine Eigenschaft gilt μ-fast überall, falls die Menge aller $x \in X$, für welche diese Eigenschaft nicht gilt, eine μ-Nullmenge ist, z.B. $f = 0$ μ-fast überall ist definiert als $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$.

1.29 Bemerkung. a) Falls das Maß vollständig ist, ist die Teilmenge einer Nullmenge wieder eine Nullmenge. Nach Satz 1.18 ist jede Teilmenge einer Lebesgue-messbaren Nullmenge wieder eine Nullmenge. Aber nicht jede Teilmenge einer Borelmenge $N \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda(N) = 0$ ist Borel-messbar!

b) Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

c) Für das Lebesgue-Maß gilt: Einzelne Punkte (und damit abzählbar viele Punkte) sind Nullmengen. Ein Unterraum der Form $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_k = 0\}$ mit $k \geq 1$ ist ebenfalls eine Lebesgue-Nullmenge, denn $U = \bigcup_{N\in\mathbb{N}}(U \cap [-N,N]^n)$ und

$$\lambda(U \cap [-N,N]^n) \leq \lambda([-\varepsilon,\varepsilon]^k \times [-N,N]^{n-k}) = 2^n \cdot \varepsilon^k \cdot N^{n-k}$$

für jedes $\varepsilon > 0$, d.h. $\lambda(U \cap [-N,N]^n) = 0$.

1.30 Beispiel (Cantor-Menge). Definiere iterativ die Mengen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$\begin{aligned} C_1 &:= [0,1], \\ C_2 &:= C_1 \setminus \Big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big), \\ C_3 &:= C_2 \setminus \Big[\Big(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\Big) \cup \Big(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\Big)\Big], \\ &\vdots \end{aligned}$$

(d.h. man nimmt jeweils in den verbleibenden Intervallen das mittlere Drittel weg). Die Cantormenge C ist nun definiert als $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Als abzählbarer Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist $C \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Andererseits gilt $\lambda(C_1) = 1$, $\lambda(C_2) = 1 - \frac{1}{3}$, $\lambda(C_3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9}$ etc. Man erhält

$$\lambda(C) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{2}{3}\Big)^n = 0.$$

Die Elemente in C sind gerade die Zahlen $x \in [0,1]$, welche eine 3-adische Entwicklung der Form

$$x = 0.a_1a_2a_3\dots$$

mit $a_n \in \{0,2\}$ besitzen.

Die Abbildung $x = 0.a_1a_2a_3\dots \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ ist surjektiv von C nach $[0,1]$. Also besitzt die Menge C die gleiche Mächtigkeit (Kardinalität) wie das Intervall $[0,1]$, nämlich $|[0,1]| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Insbesondere ist C überabzählbar ist. Die Cantormenge ist somit eine überabzählbare Lebesgue-Nullmenge. Da das Lebesgue-Maß (auf den Lebesgue-messbaren Mengen) vollständig ist, ist jede Teilmenge von C wieder Lebesgue-messbar (und eine Nullmenge). Dies zeigt, dass die Lebesgue-messbaren Mengen die Mächtigkeit $|\mathscr{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$ besitzen.

2. Integration

2.1 Worum geht's? Nachdem wir nun die Maßkonstruktion kennen, wird als nächstes das Integral eingeführt. Ähnlich wie beim Riemann-Integral in Analysis II, beginnt man mit den Stufenfunktionen (die hier allerdings bereits allgemeiner sind) und definiert das Integral für allgemeinere Funktionen durch Grenzwertbildung.

Die Klasse der integrierbaren Funktionen beim Lebesgue-Maß ist wesentlich größer als beim Riemann-Integral. So sind z.B. alle messbaren und nichtnegativen Funktionen integrierbar, falls man als Wert des Integrals auch ∞ zulässt. Besondere Bedeutung beim Integral besitzt der Wert ∞, der auch für Funktionen zulässig ist. Auch die Rolle der Nullmengen ist wesentlich und deutlich einfacher als beim Riemann-Integral.

a) Messbare Abbildungen

2.2 Definition. a) Seien $(X, \mathscr{A})$ und $(S, \mathscr{S})$ Messräume. Für $f\colon X \to S$ definiere

$$f^{-1}(B) := \{f \in B\} := \{x \in X : f(X) \in B\} \quad (B \in \mathscr{P}(S))$$

und

$$f^{-1}(\mathscr{S}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{S}\}\,.$$

Dann heißt f $\mathscr{A}$-$\mathscr{S}$-messbar, falls für alle $B \in \mathscr{S}$ gilt $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ (d.h. falls $f^{-1}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{A}$ gilt).

b) Falls $(S, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ oder $(S, \mathscr{S}) = (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, so spricht man statt von $\mathscr{A}$-$\mathscr{S}$-messbaren Funktionen nur von $\mathscr{A}$-messbaren Funktionen.

c) Falls (X, τ) ein topologischer Raum ist, so betrachtet man üblicherweise die Borel-σ-Algebra $\mathscr{A} = \mathscr{B}(X)$. In diesem Fall heißt eine bzgl. $\mathscr{A}$ messbare Funktion Borel-messbar oder einfach nur messbar.

2.3 Bemerkung. a) Jede konstante Funktion ist messbar bezüglich jeder σ-Algebra.

b) Sind $f\colon (X, \mathscr{A}) \to (S_1, \mathscr{S}_1)$ und $g\colon (S_1, \mathscr{S}_1) \to (S_2, \mathscr{S}_2)$ messbar, so auch $g \circ f\colon (X, \mathscr{A}) \to (S_2, \mathscr{S}_2)$. Denn es gilt

$$(g \circ f)^{-1}(\mathscr{S}_2) = f^{-1}(g^{-1}(\mathscr{S}_2)) \subset f^{-1}(\mathscr{S}_1) \subset \mathscr{A}\,.$$

c) Die Schreibweisen $\{f \in B\}$ sind insbesondere in der Stochastik üblich, z.B. $\{f \geq 0\} := \{x \in X : f(x) \geq 0\}$. In der Stochastik heißen messbare Funktionen $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ auch Zufallsvariablen und messbare Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ auch Zufallsvektoren.

2.4 Lemma. *Seien $(X, \mathscr{A})$ und $(S, \mathscr{S})$ Messräume und $\mathscr{S} = \sigma(\mathscr{E})$ (d.h. $\mathscr{E}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathscr{S}$). Dann ist $f : X \to S$ genau dann $\mathscr{A}$-$\mathscr{S}$-messbar, wenn $f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$.*

Beweis. Das Mengensystem $\mathscr{S}' := \{B \in \mathscr{P}(S) : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ ist eine σ-Algebra über S. Nach Definition ist f genau dann $\mathscr{A}$-$\mathscr{S}$-messbar, wenn $\mathscr{S} = \sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{S}'$. Dies ist aber äquivalent zu $\mathscr{E} \subset \mathscr{S}'$, d.h. zu $f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$. □

2.5 Korollar. *Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist $\mathscr{A}$-messbar.*

(ii) *Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathscr{A}$.*

(iii) *Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathscr{A}$.*

(iv) *Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathscr{A}$.*

(v) *Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathscr{A}$.*

Die analoge Aussage gilt für Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Beweis. Nach Lemma 2.4 ist nur zu zeigen, dass dieselben σ-Algebren erzeugt werden. Nach Lemma 1.21 erzeugen die halboffenen Intervalle bereits die Borel-σ-Algebra, damit erzeugen auch die Intervalle $[-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{R}$ schon die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ bzw. $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Die Äquivalenz von (ii)–(v) folgt aus den Darstellungen

$$\begin{aligned}
\{f \geq a\} &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Big\{f > a - \frac{1}{k}\Big\},\\
\{f < a\} &= \{f \geq a\}^c,\\
\{f \leq a\} &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Big\{f < a + \frac{1}{k}\Big\},\\
\{f > a\} &= \{f \leq a\}^c.
\end{aligned}$$

□

2.6 Satz. *Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum.*

a) Falls X topologischer Raum ist und $\mathscr{A} = \mathscr{B}(X)$, so sind alle stetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ messbar.

b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathscr{A}$-messbarer Funktionen $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind auch die Funktionen $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ $\mathscr{A}$-messbar.

c) Der Grenzwert einer punktweise konvergenten Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{A}$-messbarer Funktionen ist $\mathscr{A}$-messbar.

d) Seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-messbar und $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $h\colon X \to \mathbb{R}$, $h(x) := F(f(x), g(x))$ $\mathscr{A}$-messbar. Insbesondere sind mit f und g auch $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f \pm g$ und $f \cdot g$ $\mathscr{A}$-messbar, ebenso $|f|^r$ für $r > 0$ und f^r für $r \in \mathbb{N}$.

Beweis. a) Die Urbilder $\{f > a\} = f^{-1}((a, \infty))$ sind offen, also messbar.

b) Es gilt

$$\{\sup_n f_n \leq a\} = \bigcap_n \{f_n \leq a\} \in \mathcal{A}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$. Mit Korollar 2.5 folgt die Behauptung für das Supremum. Wegen $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ und $\limsup f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$ folgt der Rest daraus, da mit f offensichtlich auch $-f$ messbar ist.

c) Für eine konvergente Folge gilt $\lim f_n = \limsup f_n$ und damit folgt die Behauptung aus b).

d) Da F stetig ist, ist zu $a \in \mathbb{R}$ die Menge $G_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) > a\}$ offen. Wie in Beweis von Lemma 1.21 können wir schreiben $G_a = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ mit $A_k = (a_k, b_k) \times (c_k, d_k) \in \mathbb{I}_2$. Da f und g messbar sind, gilt

$$\{a_k < f < b_k\} = \{f > a_k\} \cap \{f < b_k\} \in \mathscr{A},$$

und ebenso $\{c_k < g < d_k\} \in \mathscr{A}$. Also ist auch

$$\{(f, g) \in A_k\} = \{a_k < f < b_k\} \cap \{c_k < g < d_k\} \in \mathscr{A}$$

und damit

$$\{x \in X : F(f(x), g(x)) > a\} = \{(f, g) \in G_a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{(f, g) \in A_k\} \in \mathscr{A}.$$

Die restlichen Aussagen von d) folgen aus der Stetigkeit der Abbildungen $(x, y) \mapsto x \pm y$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$, $(x, y) \mapsto \min\{x, y\}$, $(x, y) \mapsto |x|^r$ und $(x, y) \mapsto x^r$. □

b) Das Lebesgue-Integral

Im folgenden sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

2.7 Definition. a) Eine Stufenfunktion (oder Treppenfunktion oder einfache Funktion) ist eine Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ der Form $f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$ und $A_i \in \mathscr{A}$.

b) $B(X; \mathbb{R}) = B(X, \mathscr{A}; \mathbb{R})$ bezeichne den Raum aller beschränkten messbaren Funktionen $f \colon X \to \mathbb{R}$.

2.8 Satz. *a) Zu jeder messbaren Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit $s_k(x) \to f(x) \quad (x \in X)$.*

Falls zusätzlich $f \geq 0$ gilt, so kann man eine monoton wachsende Folge $(s_j)_j$ finden.

b) Sei $f \in B(X;\mathbb{R})$. Dann existiert eine Folge von Stufenfunktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. (Der Raum der Stufenfunktionen liegt somit dicht in $B(X;\mathbb{R})$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$-Norm.)

Beweis. a) Sei zunächst $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f \geq 0$. Für $k, j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq k \cdot 2^k$ definiere

$$A_{kj} := \Big\{x \in X : \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}\Big\} = f^{-1}\Big(\Big[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\Big)\Big)$$

und $A_k := f^{-1}([k,\infty])$. Da f messbar ist, sind A_{kj} und A_k messbar. Definiere nun

$$s_k := \sum_{j=1}^{k\cdot 2^k} \frac{j-1}{2^k}\,\chi_{A_{kj}} + k \cdot \chi_{A_k}.$$

Dann konvergiert die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend punktweise gegen f.

Im allgemeinen Fall zerlege man $f = f_+ - f_-$ mit $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := -\min\{0, f\}$ und wende obige Konstruktion auf f_+ und f_- an.

b) Die obige Konstruktion zeigt, dass die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bei beschränktem messbaren f sogar gleichmäßig konvergiert. □

2.9 Definition (Integral). a) Sei $s = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j}$ eine Stufenfunktion mit $s \geq 0$. Definiere das Integral von s bzgl. μ durch

$$\int s d\mu := \sum_{j=1}^{k} c_j \mu(A_j) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

b) Sei nun $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f \geq 0$. Definiere

$$\int f d\mu := \sup\Big\{\int s d\mu : s \quad \text{Stufenfunktion mit } 0 \leq s \leq f\Big\} \in [0,\infty].$$

c) Falls $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, definiert man

$$\int f d\mu := \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu, \tag{2-1}$$

falls nicht beide Integrale den Wert $+\infty$ haben.

d) Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt (Lebesgue-)integrierbar, falls f messbar ist und beide Integrale in (2-1) endlich sind. Die Menge aller integrierbaren Funktionen wird mit $\mathscr{L}^1(\mu) = \mathscr{L}^1(X,\mu) = \mathscr{L}^1(X)$ bezeichnet. Andere Schreibweisen sind etwa $\int f(x)d\mu(x) := \int f\mu(dx) := \int f d\mu$. Der Index „1" wird manchmal unten geschrieben: $L_1(\mu)$.

Falls $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$ ist, so schreibt man $\int f(x)dx$.

e) Für $A \in \mathscr{A}$ definiert man

$$\int_A f d\mu := \int \chi_A f d\mu.$$

Wir schreiben $\mathscr{L}^1(A) := \mathscr{L}^1(\mu|_A)$.

2.10 Satz (Elementare Eigenschaften des Lebesgue-Integrals). *Sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $A \in \mathscr{A}$.*

a) Sei zusätzlich f beschränkt und $\mu(X) < \infty$. Dann ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

b) Ist $a \le f(x) \le b \quad (x \in A)$ und $\mu(A) < \infty$, so gilt

$$a\mu(A) \le \int_A f d\mu \le b\mu(A).$$

c) Monotonie: Sind $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ mit $f \le g$, so ist

$$\int f d\mu \le \int g d\mu.$$

d) Homogenität: Ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt $\alpha f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und

$$\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu.$$

e) Ist A eine μ-Nullmenge, so gilt $\int_A f d\mu = 0$.

f) Ist $f \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$, so ist $f \in \mathscr{L}^1(A, \mu|_A)$.

Beweis. a) Zu $f \in B(X)$ existiert ein $K > 0$ mit $0 \le f_\pm \le K$. Für jede Stufenfunktion s mit $0 \le f_+$ gilt somit $\int s d\mu \le K\mu(X)$. Somit gilt $\int f_+ d\mu \le K\mu(X) < \infty$. Analog sieht man $\int f_- d\mu < \infty$.

c) Ist $f \le g$, so folgt $f_+ \le g_+$ und $f_- \ge g_-$. Für jede Stufenfunktion s mit $0 \le s f_+$ gilt daher auch $s \le g_+$. Damit folgt $\int f_+ d\mu \le \int g_+ d\mu$. Genauso folgt $\int f_- d\mu \ge \int g_- d\mu$ und damit die Behauptung.

b) folgt aus c) wegen $a\chi_A \le f\chi_A \le b\chi_A$.

e) Für jede Stufenfunktion $s = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ mit $0 \le s \le f_+$ gilt

$$\int_A s d\mu = \sum_{j=1}^k c_j \mu(A \cap A_j) = 0$$

wegen $\mu(A\cap A_j)\le \mu(A)=0$. Damit ist $\int_A f_+d\mu=0$. Analog folgt $\int_A f_-d\mu=0$.

f) Für jede Stufenfunktion $s=\sum_{j=1}^k c_j\chi_{A_j}$ mit $0\le s\le f_+$ gilt

$$\int_A sd\mu=\sum_{j=1}^k c_j\mu(A\cap A_j)\le\sum_{j=1}^k c_j\mu(A_j)=\int sd\mu.$$

Damit folgt $\int_A f_+d\mu\le\int f_+d\mu<\infty$, analog für f_-.

d) Für $\alpha=0$ ist nichts zu zeigen. Sei zunächst $\alpha>0$ und $f\ge 0$. Für jede Stufenfunktion $0\le s\le f$ ist auch αs Stufenfunktion mit $0\le\alpha s\le\alpha f$, und es folgt

$$\begin{aligned}\int(\alpha f)_+d\mu&=\sup\Big\{\int s'd\mu: 0\le s'\le\alpha f\Big\}\\&=\sup\Big\{\int\alpha sd\mu: 0\le\alpha s\le\alpha f\Big\}\\&=\sup\Big\{\alpha\int sd\mu: 0\le s\le f\Big\}\\&=\alpha\int f_+d\mu.\end{aligned}$$

Für allgemeine f und $\alpha\ge 0$ folgt

$$\int(\alpha f)d\mu=\int(\alpha f)_+d\mu-\int(\alpha f)_-d\mu=\alpha\Big(\int f_+d\mu-\int f_-d\mu\Big)=\alpha\int fd\mu.$$

Falls nun $\alpha=-1$, so gilt $(-f)_-=f_+$ und $(-f)_+=f_-$ und somit

$$\int(-f)d\mu=\int f_-d\mu-\int f_+d\mu=-\int fd\mu.$$

Der Fall $\alpha<0$ folgt nun aus der Kombination

$$\int\alpha fd\mu=-\int(-\alpha f)d\mu=-(-\alpha)\int fd\mu=\alpha\int fd\mu.$$

□

2.11 Satz (Maße durch Dichten). *Sei $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f\ge 0$. Definiere $\varphi_f\colon\mathscr{A}\to[0,\infty]$ durch*

$$\varphi_f(A):=\int_A fd\mu\quad(A\in\mathscr{A}).$$

Dann ist φ_f ein Maß.

Beweis. (i) Für charakteristische Funktionen $f = \chi_B$ mit $B \in \mathscr{A}$ gilt $\varphi_f(A) = \int_A \chi_B d\mu = \mu(A \cap B)$. Damit folgt die σ-Additivität aus der von μ.

(ii) Falls f eine Stufenfunktion ist, folgt die σ-Additivität aus (i) und der Linearität des Integrals.

(iii) Sei nun $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar und s eine Stufenfunktion mit $0 \le s \le f$. Für $A = \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_j$ mit $A_j \in \mathscr{A}$ gilt

$$\varphi_s(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_s(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_j} s d\mu \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_j} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_f(A_j).$$

Nimmt man das Supremum über alle Stufenfunktionen, so erhält man

$$\varphi_f(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_f(A_j). \tag{2-2}$$

Falls ein $j \in \mathbb{N}$ existiert mit $\varphi_f(A_j) = \infty$, so folgt wegen $A \supset A_j$ auch $\varphi_f(A) = \infty$, und wir erhalten Gleichheit in (2-2). Sei also $\varphi_f(A_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da A_1 und A_2 disjunkt sind, existiert nach Definition des Integrals als Supremum eine Stufenfunktion s mit $0 \le s \le f$ und

$$\int_{A_i} s d\mu \ge \int_{A_i} f d\mu - \varepsilon \quad (i = 1, 2).$$

Damit

$$\begin{aligned}\varphi_f(A_1 \dot{\cup} A_2) &\ge \int_{A_1 \dot{\cup} A_2} s d\mu = \int_{A_1} s d\mu + \int_{A_2} s d\mu \\ &\ge \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu - 2\varepsilon = \varphi_f(A_1) + \varphi_f(A_2) - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Da ε beliebig war, folgt $\varphi_f(A_1 \dot{\cup} A_2) \ge \varphi_f(A_1) + \varphi_f(A_2)$. Iterativ erhält man

$$\varphi_f(A_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n) \ge \sum_{i=1}^{n} \varphi_f(A_i).$$

Wegen $A \supset A_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n$ folgt

$$\varphi_f(A) \ge \sum_{i=1}^{n} \varphi_f(A_i)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nimmt man nun $n \to \infty$, erhält man Gleichheit in (2-2). □

2.12 Korollar. *Sei $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ und seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ disjunkt mit $A := \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann gilt*

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Beweis. Seien $\varphi_\pm$ die zu $f_\pm$ gehörigen Maße laut Satz 2.12. Da $\int_X f_\pm d\mu < \infty$, sind beide Maße endlich. Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi_f(A) &= \int_A f d\mu = \int_A f_+ d\mu - \int_A f_- d\mu = \varphi_+(A) - \varphi_-(A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_+(A_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_-(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_+(A_n) - \varphi_-(A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.\end{aligned}$$

□

2.13 Korollar. *Sei $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$, $A \in \mathscr{A}$. Falls $N \in \mathscr{A}$ ein μ-Nullmenge ist, so folgt*

$$\int_A f d\mu = \int_{A\cup N} d\mu.$$

Beweis. Anwendung von Korollar 2.12 mit $A \cup N = A \dot{\cup} (N \setminus A)$ liefert

$$\int_{A\cup N} f d\mu = \int_{A \dot{\cup} (N\setminus A)} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{N\setminus A} f d\mu = \int_A f d\mu,$$

da $\int_{N\setminus A} f d\mu = 0$ nach Satz 2.10 e). □

2.14 Bemerkung. Die Aussagen von Korollar 2.12 und 2.13 gelten auch für messbare Funktionen $f \geq 0$, wobei dann das Integral auch den Wert ∞ annehmen kann. Denn der wesentliche Beweisschritt liegt in Satz 2.10 e), der für messbare Funktionen gilt.

2.15 Lemma. *Seien $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f = g$ μ-f.ü. und $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$. Dann gilt auch $g \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$, und*

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

Beweis. Nach Satz 2.10 e) ist

$$\int g_+ d\mu = \int_{\{f=g\}} g_+ d\mu + \int_{\{f\neq g\}} g_+ d\mu = \int_{\{f=g\}} f_+ d\mu < \infty.$$

Genauso folgt $\int g_- d\mu = \int f_- d\mu < \infty$ und $\int f d\mu = \int g d\mu$. □

2.16 Lemma. *a) Sei $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, so gilt $\mu(\{x \in X : f(x) \in \{+\infty, -\infty\}\}) = 0$.*

b) Ist $f \geq 0$ messbar mit $\int f d\mu = 0$, so ist $f = 0$ μ-f.ü..

Beweis. a) folgt aus Satz 2.10 b).

b) Wir schreiben $\{f \neq 0\} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} \{\frac{1}{j+1} \leq f < \frac{1}{j}\} \dot{\cup} \{f \geq 1\}$. Falls $\mu(\{f \neq 0\}) > 0$, so hat wegen der σ-Additivität von μ eine der Mengen auf der rechten Seite positives Maß und damit nach Satz 2.10 b) $\int f d\mu > 0$. □

2.17 Lemma. *Sei $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*

a) Es gilt $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ genau dann, wenn $|f| \in \mathscr{L}^1(\mu)$ gilt. In diesem Fall ist

$$\Big| \int f d\mu \Big| \leq \int |f| d\mu.$$

b) (Majorantenkriterium) Sei $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ mit $|f| \leq g$ μ-f.ü.. Dann ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Beweis. a) Die Mengen $A := \{f \geq 0\}$ und $B := \{f < 0\}$ sind messbar, ebenso die Funktion $|f|$. Nach Korollar 2.12 gilt

$$\int |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu = \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu < \infty.$$

Die Abschätzung folgt aus $-|f| \leq f \leq |f|$ und der Monotonie des Integrals (Satz 2.10 c)).

b) Nach Änderung auf einer Nullmenge können wir o.E. $|f| \leq g$ annehmen. Dann ist $f_- \leq g$ und $f_+ \leq g$ und somit $\int f_\pm d\mu < \infty$. □

3. Konvergenzsätze

3.1 Worum geht's? Anders als beim Riemann-Integral existieren beim Lebesgue-Integral sehr starke Konvergenzsätze. Die beiden wichtigsten sind die Sätze von der majorisierten Konvergenz und von der monotonen Konvergenz. Diese Sätze erlauben es, viele Beweise sehr einfach zu führen und sind mit einer der Hauptmotivationen für die Behandlung der Lebesgue-Theorie.

Mit Hilfe dieser Sätze kann man auch leicht zeigen, dass das Lebesgue-Integral tatsächlich eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals ist. Einer weiterer wichtiger Grund für die Betrachtung des Lebesgue-Integrals sind die zugehörigen L^p-Räume. Insbesondere der Raum L^2 spielt eine wichtige Rolle in vielen Anwendungen, etwa in der Quantenphysik oder in der Theorie stochastischer Prozesse. Hier werden die L^p-Räume zunächst nur definiert und die einfachsten Eigenschaften gezeigt.

a) Die wichtigsten Konvergenzsätze

Im folgenden sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

3.2 Satz (von Lebesgue über monotone Konvergenz). *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$, und sei $f\colon X \to [0,\infty]$ definiert durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in X)$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Beweis. Nach Satz 2.6 b) ist $f = \sup f_n$ messbar, also existiert $\int f d\mu \in [0,\infty]$. Sei $\alpha := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \in [0,\infty]$. Wegen $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ folgt $\alpha \leq \int f d\mu$.

Sei $0 < c < 1$ und s Stufenfunktion mit $0 \leq s \leq f$. Definiere $A_n := \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\}$. Da $(f_n)_n$ monoton ist, folgt $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$. Wegen $cs \leq f_n$ gilt

$$\int f_n d\mu \geq \int_{A_n} f_n d\mu \geq c \int_{A_n} s d\mu.$$

Wegen $\lim_n f_n = f$ und $c < 1$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$, und aus der σ-Additivität des Maßes $A \mapsto \int_A s d\mu$ (siehe Satz 2.11) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq c \int s d\mu.$$

Nimmt man nun das Supremum über alle Stufenfunktionen s mit $0 \leq s \leq f$, so erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq c \int f d\mu.$$

Da $c < 1$ beliebig war, folgt daraus die Abschätzung $\alpha \geq \int f d\mu$ und damit die Behauptung. $\square$

3.3 Satz (Addititivität des Integrals). *Seien $f_1, f_2 \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Dann ist $f_1 + f_2 \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und*

$$\int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu.$$

Beweis. (i) Seien zunächst $f_1, f_2 \geq 0$. Nach Satz 2.8 existieren Stufenfunktionen $(s_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ für $i = 1, 2$ mit $0 \leq s_n^{(i)}$ und $s_n^{(i)}(x) \nearrow f_i(x) \quad (x \in X)$. Für $s_n := s_n^{(1)} + s_n^{(2)}$ gilt $s_n(x) \nearrow f(x) := f_1(x) + f_2(x) \quad (x \in X)$. Da das Integral über Stufenfunktionen linear ist, folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz:

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \Big(\int s^{(1)} d\mu + \int s^{(2)} d\mu \Big) = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu.$$

(ii) Sei nun $f_1 \geq 0$ und $f_2 \leq 0$. Setze $A := \{f_1 + f_2 \geq 0\}$ und $B := \{f_1 + f_2 < 0\}$. Nach Fall (i) gilt auf A

$$\int_A (f_1 + f_2) d\mu + \int (-f_2) d\mu = \int_A [(f_1 + f_2) + (-f_2)] d\mu = \int f_1 d\mu.$$

Unter Verwendung der Homogenität (Satz 2.10 d)) folgt $\int_A f d\mu = \int_A f_1 d\mu + \int_A f_2 d\mu$. Auf der Menge B folgt die Behauptung analog mit der Darstellung $-f_2 = f_1 + [-(f_1 + f_2)]$.

(iii) Im allgemeinen Fall zerlegen wir $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{4} A_i$ mit

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{x \in X : f_1(x) \geq 0,\ f_2(x) \geq 0\},\\ A_2 &:= \{x \in X : f_1(x) \geq 0,\ f_2(x) < 0\},\\ A_3 &:= \{x \in X : f_1(x) < 0,\ f_2(x) \geq 0\},\\ A_4 &:= \{x \in X : f_1(x) < 0,\ f_2(x) < 0\}. \end{aligned}$$

Auf jeder dieser Mengen gilt $\int_{A_i} f d\mu = \int_{A_i} f_1 d\mu + \int_{A_i} f_2 d\mu$ nach Fall (i) oder (ii). Summation über i liefert die Behauptung. $\square$

3.4 Satz. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen und $f\colon X \to [0, \infty]$ definiert durch $f := \sum_{n=1}^\infty f_n$. Dann gilt*

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Falls $f_n \in \mathscr{L}^1(\mu) \quad (n \in \mathbb{N})$ und die Summe auf der rechten Seite konvergiert, so gilt $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, und die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ konvergiert für μ-fast alle $x \in X$.

Beweis. Wende monotone Konvergenz auf die Partialsummen an. Die letzte Aussage folgt aus Lemma 2.16. □

3.5 Satz (Lemma von Fatou). *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen und $f\colon X \to [0,\infty]$ definiert durch $f := \liminf_{n\to\infty} f_n$. Dann gilt*

$$\int f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Definiere $g_n\colon X \to [0,\infty]$ durch

$$g_n(x) := \inf\{f_k(x) : k \ge n\} \quad (x \in X,\ n \in \mathbb{N}).$$

Die Funktionen g_n sind messbar nach Satz 2.6, die Folge $(g_n)_n$ ist monoton wachsend mit $g_n(x) \nearrow f(x) \quad (x \in X)$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu.$$

Wegen $g_n \le f_n$ gilt andererseits

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \liminf \int g_n d\mu \le \liminf f_n d\mu,$$

was die Behauptung zeigt. □

Der folgende Satz ist einer der wichtigsten Sätze der Integrationstheorie und heißt auch Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz.

3.6 Satz (von Lebesgue über majorisierte Konvergenz). *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen, und der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existiere μ-fast überall. Weiter existiere eine Funktion $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ mit $|f_n(x)| \le g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis. Durch Änderung auf einer Nullmenge können wir annehmen, dass $\lim_n f_n$ überall existiert und $|f_n| \le g$ überall gilt. Als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen ist f messbar, und nach dem Majorantenkriterium (Lemma 2.17 b)) ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Wegen $f_n + g \ge 0$ ist das Lemma von Fatou anwendbar, und es folgt

$$\int (f+g)d\mu = \int (\liminf_{n\to\infty} f_n + g)d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int (f_n + g)d\mu.$$

Wegen Additivität (Satz 3.3) folgt $\int f d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu$.

Da auch $g - f_n \ge 0$, folgt wieder mit Fatou

$$\int (g-f)d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int (g-f_n)d\mu$$

und damit $-\int f d\mu \le \liminf_n \int (-f_n)d\mu$, d.h.

$$\int f d\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Insgesamt haben wir also

$$\int f d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu \le \limsup_n \int f_n d\mu \le \int f d\mu,$$

was überall Gleichheit und damit die Konvergenz von $\int f_n d\mu$ gegen $\int f d\mu$ impliziert. □

3.7 Satz (Parameterabhängigkeit von Integralen). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f\colon X \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für alle $y \in U$ sei $f(\cdot, y)\colon X \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar. Definiere*

$$g\colon U \to \mathbb{R}, \quad g(y) := \int f(\cdot, y)d\mu = \int f(x,y)d\mu(x).$$

a) Für alle $x \in X$ sei $f(x,\cdot)\colon U \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle a, und es existiere eine μ-integrierbare Funktion $h\colon X \to [0,\infty]$ mit

$$|f(x,y)| \le h(x) \quad ((x,y) \in X \times U).$$

Dann ist auch g stetig an der Stelle a.

b) Für alle $x \in X$ sei $f(x,\cdot)\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in U, und es existiere eine μ-integrierbare Funktion $h\colon X \to [0,\infty]$ mit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_i}(x,y)\right| \le h(x) \quad ((x,y) \in X \times U,\ i = 1,\dots,n).$$

Dann ist auch g stetig differenzierbar an der Stelle a, und es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}(a) = \int \frac{\partial f}{\partial y_i}(x,y)d\mu(x) \quad (i = 1,\dots,n).$$

Beweis. a) Für jede Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $y_k \to a$ gilt $f(\cdot, y_k) \to f(\cdot, a)$ punktweise (bzgl. $x \in X$). Nach Voraussetzung ist h eine integrierbare Majorante von $(f(\cdot, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$, und die Aussage folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz 3.6.

b) Sei $1 \leq i \leq n$ und $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $t_n \to 0$, $t_n \neq 0$. Dann konvergiert

$$\frac{f(\cdot, a + t_n e_i) - f(\cdot, a)}{t_n} \to \frac{\partial f}{\partial y_i}(\cdot, a)$$

punktweise bzgl. $x \in X$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist die Funktionenfolge auf der linken Seite majorisiert durch h. Damit folgt die Differenzierbarkeit von g nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz und die Stetigkeit von g' nach Teil a). □

Der folgende Satz zeigt, dass das Lebesgue-Integral eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals darstellt.

3.8 Satz. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger. Falls f Riemann-integrierbar ist, so ist f Lebesgue-integrierbar, und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int f d\lambda,$$

wobei links das Riemann-Integral und rechts das Lebesgue-Integrals bzgl. des Lebesgue-Maßes steht.

Beweis. Als Riemann-integrierbare Funktion ist f beschränkt. Wir wählen ein Intervall $(-N, N] \in \mathbb{I}_n$ mit $\operatorname{supp} f \subset (-N, N]^n$ und dann eine Folge von Partitionen

$$(-N, N] = \dot{\bigcup_{k=1}^{m_j}} I_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

mit $I_{kj} \in \mathbb{I}_n$, deren Feinheit gegen 0 konvergiert. Setze für $j \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} m_j(x) &:= \inf\{f(y) : y \in I_{kj}\} \quad (x \in I_{kj}, k = 1, \dots, m_j), \\ M_j(x) &:= \sup\{f(y) : y \in I_{kj}\} \quad (x \in I_{kj}, k = 1, \dots, m_j). \end{aligned}$$

Dann sind m_j und M_j Stufenfunktionen und damit Lebesgue-messbar. Da sich die Partitionen verfeinern, gilt

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq M_2 \leq M_1.$$

Als Grenzwerte monotoner Folgen existieren punktweise $m(x) := \lim_{j\to\infty} m_j(x)$ und $M(x) := \lim_{j\to\infty} M_j(x)$ und sind wieder messbar. Es gilt $m \leq f \leq M$.

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$\int m d\lambda = \lim_{j\to\infty} \int m_j d\lambda = \lim_{j\to\infty} \int m_j(x)dx,$$

letzteres, da auf Stufenfunktionen Riemann- und Lebesgue-Integral nach Definition übereinstimmen (als entsprechende Linearkombination elementargeometrischer Inhalte). Genauso gilt
$$\int M d\lambda = \lim_{j\to\infty} M_j(x)dx.$$
Da f Riemann-integrierbar ist, gilt außerdem
$$\lim_{j\to\infty} m_j(x)dx = \lim_{j\to\infty} M_j(x)dx$$
und damit $\int(M-m)d\lambda = 0$. Nach Lemma 2.16 folgt $M = m$ λ-fast überall und somit wegen $m \leq f \leq M$ auch $m = M = f$ fast überall. Damit ist f Lebesgue-messbar mit
$$\int f d\lambda = \int m d\lambda = \int f(x)dx.$$
Beachte, dass wegen Beschränktheit von f und Kompaktheit des Trägers von f automatisch $f \in \mathscr{L}^1(\lambda)$ gilt. □

3.9 Korollar. *Jede Jordan-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar, und Jordan-Inhalt und Lebesgue-Maß von A sind gleich.*

Beweis. Wende Satz 3.8 auf χ_A an. □

b) Die L^p-Räume

Wieder sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

3.10 Definition. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ heißt (Lebesgue-)integrierbar, falls $\operatorname{Re} f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und $\operatorname{Im} f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ gilt. Wir schreiben auch $f \in \mathscr{L}^1(\mu; \mathbb{C})$ oder $f \in \mathscr{L}^1(X; \mathbb{C})$ bzw. umgekehrt auch $f \in L^1(\mu; \mathbb{R})$ für reellwertige Funktionen. Für $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ wird $\int f d\mu$ definiert durch $\int f d\mu := \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu$.

3.11 Bemerkung. Die Messbarkeit einer Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ ist wie üblich als Borel-Messbarkeit definiert (also $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}(\mathbb{C})$-Messbarkeit). Insbesondere folgt aus der Stetigkeit der Abbildungen $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z_1 + z_2 \mapsto z_1 + z_2$, $z \mapsto z_1 \cdot z_2$ und $z \mapsto |z|$:

Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ ist genau dann messbar, wenn $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f\colon X \to \mathbb{R}$ beide messbar sind. Sind $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ messbar, so auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und $|f|$.

3.12 Lemma. *Sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ messbar. Dann gilt $f \in \mathscr{L}^1(\mu; \mathbb{C})$ genau dann, wenn $|f| \in \mathscr{L}^1(\mu; \mathbb{R})$ gilt.*

Beweis. Das folgt sofort aus dem Majorantenkriterium (Lemma 2.17 b)) und den Ungleichungen

$$\begin{aligned}|\operatorname{Re} f| &\le |f|,\\ |\operatorname{Im} f| &\le |f|,\\ |f| &\le |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|.\end{aligned}$$

□

3.13 Bemerkung. Die obigen Sätze der Integrationstheorie gelten genauso für komplexwertige Funktionen. Dabei lassen sich die Beweise bis auf die Ungleichung $|\int f d\mu| \le \int |f| d\mu$ (Lemma 2.17 a)) direkt verallgemeinern. Für den Beweis dieser Ungleichung wähle $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ so, dass

$$c \int f d\mu \in [0, \infty).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\Big|\int f d\mu\Big| &= c\int f d\mu = \int cf d\mu = \int [\operatorname{Re}(cf) + i \operatorname{Im}(cf)] d\mu\\ &= \int \operatorname{Re}(cf) d\mu \le \int |cf| d\mu = \int |f| d\mu.\end{aligned}$$

Dabei wurde beachtet, dass $\int \operatorname{Im}(cf) d\mu = 0$, da $\int cf d\mu \in \mathbb{R}$.

3.14 Definition ($\mathscr{L}^p$-Räume). a) Sei $1 \le p < \infty$. Definiere $\mathscr{L}^p(\mu)$ als die Menge aller messbaren Funktionen $f \colon X \to \mathbb{C}$ mit

$$\|f\|_p := \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{1/p} < \infty.$$

b) Für $p = \infty$ wird $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ definiert als die Menge aller messbarer Funktionen $f \colon X \to \mathbb{C}$, für welche es ein $C_f > 0$ gibt mit $\mu(\{x \in X : |f(x)| > C_f\}) = 0$. Man spricht von μ-fast überall beschränkten Funktionen. Für $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ definiert man

$$\|f\|_\infty := \inf\Big\{C \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\Big\}.$$

c) Für Funktionen $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ werden die entsprechenden Funktionenräume mit $\mathscr{L}^p(\mu; \mathbb{R})$ bezeichnet. Manchmal schreiben wir auch $\mathscr{L}^p(\mu; \mathbb{C})$ statt $\mathscr{L}^p(\mu)$.

3.15 Satz. *a)* **(Höldersche Ungleichung)** *Für $1 \le p, q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt*

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (f \in \mathscr{L}^p(\mu),\ g \in \mathscr{L}^q(\mu)).$$

b) **(Minkowskische Ungleichung)** *Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)).$$

c) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist der Raum $\mathscr{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum, und $\|\cdot\|_p$ definiert eine Seminorm (Halbnorm) auf $\mathscr{L}^p(\mu)$, d.h. es gilt

$$\|f\|_p \geq 0 \qquad (f \in \mathscr{L}^p(\mu)), \tag{3-1}$$

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \qquad (\alpha \in \mathbb{C},\ f \in \mathscr{L}^p(\mu)), \tag{3-2}$$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)). \tag{3-3}$$

Beweis. a),b): Der Beweis der Hölderschen Ungleichung aus der Youngschen Ungleichung sowie der Minkowski-Ungleichung aus der Hölder-Ungleichung ist bereits aus Analysis II bekannt.

c) Die Messbarkeit von αf und $f+g$ ist klar, die Homogenität von $\|\cdot\|_p$ folgt für $1 \leq p < \infty$ aus Satz 2.10 d) und ist offensichtlich für $p = \infty$. Die Dreiecksungleichung ist gerade die Hölder-Ungleichung, welche auch zeigt, dass $f + g \in \mathscr{L}^p(\mu)$ gilt. □

3.16 Definition und Satz (L^p-Räume). *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Definiere auf $\mathscr{L}^p(\mu)$ die Äquivalenzrelation $\sim$ durch*

$$f \sim g \quad :\Longleftrightarrow \quad \mu\big(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}\big) = 0$$

(d.h. durch Gleichheit μ-fast überall). Die Menge der Äquivalenzklassen $\{[f] : f \in \mathscr{L}^p(\mu)\}$ wird mit $L^p(\mu)$ bezeichnet.

Auf $L^p(\mu)$ wird repräsentantenweise eine Vektorraumstruktur definiert: $\alpha[f] := [\alpha f]$ und $[f] + [g] := [f + g]$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)$. Analog definiert man

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p \quad (f \in \mathscr{L}^p(\mu)).$$

Damit wird $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ zu einem normierten Vektorraum.

Beweis. Die Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation und der Addition in $L^p(\mu)$ ist klar, ebenso übertragen sich die Eigenschaften einer Seminorm von $\mathscr{L}^p(\mu)$ auf $L^p(\mu)$. Sei nun $[f] \in L^p(\mu)$ mit $\|[f]\|_p = 0$. Dann gilt nach Definition $\int |f|^p d\mu = 0$ und damit nach Lemma 2.16 b) $f = 0$ μ-fast überall, d.h. $[f] = 0$ in $L^p(\mu)$. Somit ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $L^p(\mu)$. □

3.17 Bemerkung. Im folgenden wird für $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ in der Schreibweise nicht mehr zwischen $[f]$ und f unterschieden. Wichtig ist bei dieser Betrachtung, dass es für „Funktionen“ $f \in L^p(\mu)$ im allgemeinen keinen Sinn macht, vom Wert $f(x)$ an einer Stelle $x \in X$ zu sprechen. Denn falls $\mu(\{x\}) = 0$, so kann man den Repräsentanten f an der Stelle x ändern, ohne die Äquivalenzklasse zu ändern.

4. Endliche Produkte von Maßräumen

4.1 Worum geht's? Der Satz von Fubini ist bereits aus der Analysis II bekannt, dort finden sich auch eine ganze Reihe von Anwendungen dieses Satzes (z.B. im Zusammenhang mit dem Oberflächenintegral). Die Riemann-Theorie benötigt für diesen Satz recht starke Voraussetzungen, insbesondere die Rolle der Nullmengen ist dort recht unschön. Mit der Lebesgue-Theorie und den starken Messbarkeits- und Konvergenzaussagen kann man den Satz von Fubini wesentlich besser und allgemeiner formulieren.

Zunächst werden Produkte von Messräumen und von Maßen betrachtet, welche selber von Interesse sind. Insbesondere sind die Borelmengen des $\mathbb{R}^n$ das Produkt der eindimensionalen Borelmengen. Der hier gewählte Zugang lässt sich auf unendliche Produkte übertragen, bei welchen aber schnell topologische Fragen auftauchen, die wir noch nicht behandeln können.

a) Produkte von Messräumen, Produkt-σ-Algebren

Seien $(X_i, \mathscr{A}_i)$, $1 \le i \le n$, endlich viele Messräume. Dazu betrachte das kartesische Produkt

$$X := X_1 \times \ldots \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

4.2 Definition. Die Menge

$$\mathscr{Z} := \{A_1 \times \ldots \times A_n : A_i \in \mathscr{A}_i, 1 \le i \le n\} \subset \mathscr{P}(X)$$

heißt *Gesamtheit der Zylindermengen* (bzgl. der $\mathscr{A}_i$).

$$\mathscr{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_n := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i := \sigma(\mathscr{Z})$$

heißt die *Produkt-σ-Algebra der $\mathscr{A}_i$*.

4.3 Bemerkung. a) $\mathscr{Z}$ ist $\cap$-stabil. Denn $(A_1 \times \ldots \times A_n) \cap (B_1 \times \ldots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \ldots \times (A_n \cap B_n)$.

b) $\otimes$ ist assoziativ: $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3 = (\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2) \otimes \mathscr{A}_3 = \mathscr{A}_1 \otimes (\mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3)$. Zu zeigen ist wegen Symmetrie nur die erste Gleichheit und diese bedeutet definitionsgemäß $\sigma(\{A_1 \times A_2 \times A_3\}) = \sigma(\sigma(\{A_1 \times A_2\}) \times A_3)$. Dabei ist "$\subset$" klar und "$\supset$" folgt aus

$$\sigma(\{A_1 \times A_2 \times A_3 : A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2, A_3 \text{ fest}\}) = \sigma(\{A_1 \times A_2\}) \times A_3$$

$$\subset \sigma(\{A_1 \times A_2 \times A_3' : A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2, A_3' \in \mathscr{A}_3\})$$

für jedes $A_3 \in \mathscr{A}_3$.

c) Sei $\mathrm{pr}_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to (X_i, \mathscr{A}_i)$ die i-te Koordinatenprojektion. Dann gilt

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathscr{A}_i = \sigma(\mathrm{pr}_i : 1 \le i \le n) := \sigma\Big(\bigcup_{i=1}^n \mathrm{pr}_i^{-1}(\mathscr{A}_i)\Big).$$

Die Produkt-σ-Algebra ist somit die kleinste σ-Algebra auf X, die alle Koordinatenprojektionen messbar macht. Denn für $A_i \in \mathscr{A}_i$ folgt $\mathrm{pr}_i^{-1}(A_i) = X_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times X_n$, $1 \le i \le n$. Somit ist $A_1 \times \ldots \times A_n = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{pr}_i^{-1}(A_i) \in \sigma(\mathrm{pr}_i : 1 \le i \le n)$. Damit gilt "$\subset$".
"$\supset$" folgt sofort aus $\mathrm{pr}_i^{-1}(A_i) \in \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{A}_i$ wie eben gesehen.

4.4 Satz. *Zu $1 \le i \le n$ sei jeweils $\mathscr{E}_i \subset \mathscr{A}_i$ ein Erzeuger von $\mathscr{A}_i$ (also $\sigma(\mathscr{E}_i) = \mathscr{A}_i$) derart, daß es stets eine Folge $(E_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{E}_i$ gibt mit $E_{ik} \nearrow X_i$ für $k \to \infty$. Dann gilt*

$$\sigma(\{E_1 \times \ldots \times E_n : E_i \in \mathscr{E}_i, 1 \le i \le n\}) = \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{A}_i.$$

Beweis. "$\subset$" ist klar und für die umgekehrte Inklusion ist zu zeigen, daß $A_1 \times \ldots \times A_n \in \sigma(\{E_1 \times \ldots \times E_n\})$ gilt für alle $A_i \in \mathscr{A}_i$. Dazu wiederum reicht es, $X_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times X_n \in \sigma(\{E_1 \times \ldots \times E_n\})$ zu verifizieren. Hierfür betrachte zu gegebenem $E_i \in \mathscr{E}_i$

$$F_k := E_{1k} \times \ldots \times E_{i-1,k} \times E_i \times E_{i+1,k} \times \ldots \times E_{nk} \in \sigma(\{E_1 \times \ldots \times E_n\}).$$

Dann ist auch $X_1 \times \ldots \times E_i \times \ldots \times X_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ in $\sigma(\{E_1 \times \ldots \times E_n\})$. Wegen

$$\begin{aligned} X_1 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times X_n &\in X_1 \times \ldots \times \sigma(\mathscr{E}_i) \times \ldots \times X_n \\ &= \sigma(\{X_1 \times \ldots \times E_i \times \ldots \times X_n)\} \end{aligned}$$

folgt die Behauptung. □

4.5 Bemerkung. Die Behauptung des Satzes wird falsch ohne die Forderung der aufsteigenden Folgen! Beispielsweise erzeugt $\{\emptyset\}$ die triviale σ-Algebra $\mathscr{A}_1 = \{\emptyset, X_1\}$, aber wenn $\mathscr{A}_2$ mehr als zwei Mengen umfaßt, ist $\sigma(\{\emptyset\}) \ne \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$.

4.6 Satz. *Es gilt*

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Beweis. (i) $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ wird von den Intervallen $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$ erzeugt. Diese Intervalle sind aber Produkte von eindimensionalen Intervallen und damit Zylindermengen. Also ist $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathbb{I}_n) \subset \sigma(\mathscr{Z}) = \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

(ii) Für die andere Inklusion ist zu zeigen, dass jede Zylindermenge $Z = A_1 \times \dots \times A_n$ in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ liegt. Wie oben reicht es $Z = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times A_i \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ zu betrachten, da jede Zylindermenge endlicher Durchschnitt derartiger Mengen ist. Ist jedoch $A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, so gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \times \ldots \times A_i \times \ldots \times \mathbb{R} &\in \mathbb{R} \times \ldots \times \mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \ldots \times X_n \\ &= \mathbb{R} \times \ldots \times \sigma(\mathbb{I}_1) \times \ldots \times \mathbb{R} \\ &= \sigma(\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{I}_1 \times \ldots \times \mathbb{R}) \\ &\subset \sigma(\mathbb{I}_n) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

□

b) Produktmaße und der Satz von Fubini

Seien $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$, $1 \le i \le n$, nun endlich viele Maßräume.

4.7 Definition. Ein Maß $\mu : \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{A}_i \to [0, \infty]$ heißt *Produktmaß der* μ_i, wenn

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mu(A_i) \quad \text{für alle } A_i \in \mathscr{A}_i, 1 \le i \le n$$

(mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$).

Wir konstruieren das Produktmaß nur für zwei Faktoren, Produkte höherer Ordnung definiert man dann induktiv in Verbindung mit geeigneten Assoziativitätsüberlegungen.

Achtung: Die Existenz und Eindeutigkeit des Produktmaßes ist nur für das Produkt σ-endlicher Maßräume gewährleistet!

4.8 Lemma. *Seien $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, σ-endliche Maßräume und sei $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$ $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$-messbar. Dann gilt:*

i) Für jedes $x \in X_1$ ist $f(x, \cdot) : X_2 \to [0, \infty]$ $\mathscr{A}_2$-messbar.

ii) $x \mapsto \int f(x, \cdot) d\mu_2 = \int f(x, y) d\mu_2(y)$ ist $\mathscr{A}_1$-messbar.

Beweis. (i) Sei zunächst μ_2 endlich. Dazu betrachten wir das Teilmengensystem der Produkt-σ-Algebra

$$\mathscr{D} := \{A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 : \chi_A \text{ hat die Eigenschaften i) und ii)}\}.$$

Wir zeigen, daß $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System ist, wobei wir die Kriterien aus Bemerkung 1.3 c) nachprüfen.

- $X = X_1 \times X_2 \in \mathscr{D}$, da $\chi_X = 1$.
- $\mathscr{D} \ni A_l \nearrow A$, dann auch $A \in \mathscr{D}$: Es gilt $\chi_{A_l} \nearrow \chi_A$ und damit folgt i), da der punktweise Limes messbarer Funktionen wieder messbar ist, und ii) mit monotoner Konvergenz.
- $A, B \in \mathscr{D}$, $A \subset B$, dann auch $B \setminus A \in \mathscr{D}$: Es ist $\chi_{B\setminus A} = \chi_B - \chi_A$ und i) ist klar. ii) folgt aus der Endlichkeit von μ_2, denn damit ist $\int \chi_{B\setminus A}(x,\cdot)d\mu_2 = \int \chi_B(x,\cdot)d\mu_2 - \int \chi_A(x,\cdot)d\mu_2$ („$\infty - \infty$" kann nicht auftreten).

Außerdem umfaßt $\mathscr{D}$ den $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathscr{Z}$ der Zylindermengen, denn $A = A_1 \times A_2 \in \mathscr{Z}$, dann ist $\chi_A(x,y) = \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(y)$, woraus sich i) ergibt und mit $\int \chi_A(x,\cdot)d\mu_2 = \int \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}d\mu_2 = \chi_{A_1}(x)\mu_2(A_2)$ folgt ii).

Das Dynkin-Lemma besagt nun $\mathscr{D} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$, was gleichbedeutend damit ist, daß die Behauptung für alle χ_A mit $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ richtig ist. Wegen Linearität folgt die Behauptung für alle Stufenfunktionen, und mit den üblichen Konvergenzargumenten (punktweise Limiten messbarer Funktionen sind messbar und Satz von der monotonen Konvergenz) daher für alle $[0,\infty)$-wertigen produktmessbaren Funktionen.

(ii) Sei nun μ_2 σ-endlich. Wähle $\mathscr{A}_2 \ni S_k \nearrow X_2$ mit $\mu_2(S_k) < \infty$ und betrachte statt f nun $f_k := f \cdot \chi_{X_1 \times S_k}$, das bezüglich der zweiten Komponente auf dem endlichen Maßraum $(X_2; \mathscr{A}_2; \mu_2(S_k \cap \cdot))$ lebt.

Nach (i) stimmt die Behauptung für die f_k und damit wegen $f_k \nearrow f$ punktweise auch für f, mit den gleichen Konvergenzargumenten wie oben. $\square$

4.9 Lemma. *Seien $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$, $i = 1,2$, σ-endliche Maßräume. Dann existiert ein eindeutiges Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Explizit ist es gegeben durch*

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int \left(\int \chi_A(x,\cdot)d\mu_2 \right) d\mu_1(x) = \int \left(\int \chi_A(\cdot,y)d\mu_1 \right) d\mu_2(y).$$

Beweis. (i) $\mu_1 \otimes \mu_2$ ist ein Maß: Klar ist $\mu_1 \otimes \mu_2(\emptyset) = \int \left(\int \chi_\emptyset(x,\cdot)d\mu_2 \right) d\mu_1(x) = \int 0 \, d\mu_1 = 0$.

$\mu_1 \otimes \mu_2$ ist additiv wegen $\chi_{A_1 \dot\cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2}$ und damit

$$\begin{aligned}(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \dot\cup A_2) &= \int \Big(\int \chi_{A_1}(x, \cdot\,) + \chi_{A_2}(x, \cdot\,) d\mu_2 \Big) d\mu_1(x) \\ &= (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1) + (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_2)\end{aligned}$$

wegen Linearität der Integrale.

Für die σ-Additivität ist somit noch die Stetigkeit von unten zu zeigen (Satz 1.11). Sei daher $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \ni A_l \nearrow A$. Dann folgt wegen $\chi_{A_l} \nearrow \chi_A$

$$\begin{aligned}\mu_1 \otimes \mu_2(A_l) = &\int \Big(\int \chi_{A_l}(x, \cdot\,) d\mu_2 \Big) d\mu_1(x) \\ &\nearrow \int \Big(\int \chi_A(x, \cdot\,) d\mu_2 \Big) d\mu_1(x) = \mu_1 \otimes \mu_2(A)\end{aligned}$$

durch zweimalige Anwendung monotoner Konvergenz.

(ii) $\mu_1 \otimes \mu_2$ ist Produktmaß von $\mu_1 \otimes \mu_2$:

$$\begin{aligned}\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) &= \int \Big(\int \chi_{A_1}(x) \chi_{A_2} d\mu_2 \Big) d\mu_1(x) \\ &= \int \chi_{A_1}(x) \mu_2(A_2) d\mu_1(x) = \mu_2(A_2)\mu_1(A_1).\end{aligned}$$

(iii) Zur Eindeutigkeit: $\mu_1 \otimes \mu_2$ liegt durch $\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ fest auf dem $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathscr{Z}$ von $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Da die beiden Maße σ-endlich sind, gibt es $\mathscr{A}_1 \ni S_k \nearrow X_1$, $\mu_1(S_k) < \infty$, sowie $\mathscr{A}_2 \ni T_k \nearrow X_2$, $\mu_2(T_k) < \infty$. Damit ergibt sich $S_k \times T_k \nearrow X_1 \times X_2$ mit $\mu_1 \otimes \mu_2(S_k \times T_k) = \mu_1(S_k)\mu_2(T_k) < \infty$ und die Eindeutigkeit folgt aus dem Eindeutigkeitssatz 1.16.

(iv) Genauso zeigt man $\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int \big(\int \chi_A(\,\cdot\,, y) d\mu_1 \big) d\mu_2(y)$. $\square$

4.10 Bemerkung. a) $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) =: \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$ usw. für höhere Produkte. Denn die Gleichung stimmt für beliebige $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \in \mathscr{Z}$ (iteriertes Ausrechnen der Integrale) und gibt ein Produktmaß auf $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \mathscr{A}_3$. Der Eindeutigkeitssatz für Maße liefert wie vorhin die Behauptung.

b) Für das Lebesgue-Maß $\lambda_n \colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ folgt insbesondere

$$\lambda_n = \bigotimes_{j=1}^n \lambda_1.$$

Denn beide Seiten dieser Gleichung stimmen auf $\mathbb{I}_n$ überein.

c) Die Voraussetzung der σ-Endlichkeit ist für die Aussage von Lemma 4.9 wesentlich: Seien $X_1 = X_2 = [0,1]$ beide versehen mit den Borelmengen und $\mu_1 = \lambda|_{[0,1]}$ sowie $\mu_2 = \zeta$ das Zählmaß, das auf dem überabzählbaren Intervall nicht σ-finit ist. Wir betrachten die Diagonale

$$\Delta := \{(x,x) : x \in [0,1]\} = f^{-1}\{0\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

wobei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x - y$, stetig und damit $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbar ist. Aber nun berechnet sich (kurz λ für $\lambda|_{[0,1]}$)

$$\int \Big(\int \chi_\Delta(x,y) d\lambda(x) \Big) d\zeta(y) = \int \lambda(\{y\}) d\zeta(y) = \int 0 \; d\zeta(y) = 0$$

im Gegensatz zu

$$\int \Big(\int \chi_\Delta(x,y) d\zeta(y) \Big) d\lambda(x) = \int \zeta(\{x\}) d\lambda(x) = \int 1 \; d\lambda(x) = 1.$$

4.11 Satz (von Tonelli). *Seien $(X_i; \mathscr{A}_i; \mu_i)$, $i = 1,2$ zwei σ-endliche Maßräume sowie $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$ das Produktmaß auf der Produkt-σ-Algebra $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Sei $f : X_1 \times X_2 \to [0,\infty]$ $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$-messbar. Dann gilt in $[0,\infty]$ die Gleichheit*

$$\int f d\mu = \int \Big(\int f(x,y) d\mu_1(x) \Big) d\mu_2(y) = \int \Big(\int f(x,y) d\mu_2(y) \Big) d\mu_1(x).$$

Beweis. Nach Lemma 4.8 existieren alle Integrale in $[0,\infty]$. Nach Lemma 4.9 gilt die Behauptung für Indikatorfunktionen χ_A, $A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Mittels Linearität folgt die Behauptung für Stufenfunktionen, schließlich mit monotoner Konvergenz für alle produktmessbaren $[0,\infty]$-wertigen Funktionen. □

4.12 Satz (von Fubini). *Seien $(X_i; \mathscr{A}_i; \mu_i)$, $i = 1,2$ zwei σ-endliche Maßräume sowie $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$ das Produktmaß auf der Produkt-σ-Algebra $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Sei $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ mit $f \in \mathscr{L}^1(\mu;\mathbb{C})$, d.h. f sei integrierbar bzgl. des Produktmaßes.*

a) Es gilt $N := \{x \in X_1 : \int |f(x,y)| d\mu_2(y) = \infty\} \in \mathscr{A}_1$ mit $\mu_1(N) = 0$.

b) Definiere $g : X_1 \to \mathbb{C}$ durch

$$g(x) := \begin{cases} \int f(x,y) d\mu_2(y), & x \notin N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Dann ist $g \in \mathscr{L}^1(\mu_1;\mathbb{C})$, und es gilt

$$\int f d\mu = \int g d\mu_1 = \int \Big(\int f(x,y) d\mu_2(y) \Big) d\mu_1(x).$$

Die entsprechende Aussage gilt mit vertauschten Rollen von μ_1 und μ_2. Insbesondere ist

$$\int \Big(\int f(x,y) d\mu_2(y) \Big) d\mu_1(x) = \int \Big(\int f(x,y) d\mu_1(x) \Big) d\mu_2(y).$$

Beweis. Lemma 4.8 für $|f|$ liefert die $\mathscr{A}_1$-Messbarkeit von $x \mapsto \int |f(x,y)| d\mu_2(y)$, damit ist $N \in \mathscr{A}_1$. Wegen $|f| \in \mathscr{L}^1(\mu)$ folgt aus dem Satz von Tonelli

$$\int \Big(\int |f(x,y)| d\mu_2(y) \Big) d\mu_1(x) = \int |f| d\mu < \infty$$

und damit $\mu_1(N) = 0$.

Also ist auch $\mu(N \times X_2) = \mu_1(N)\mu_2(X_2) = 0$. Betrachte nun $\widetilde{f} := f \cdot \chi_{(N \times X_2)^c} = f \cdot \chi_{N^c \times X_2}$, dann ist $\widetilde{f} = f$ μ-fast überall. Nun folgt für $f \geq 0$ (und damit auch $\widetilde{f} \geq 0$)

$$\int g d\mu_1 = \int \Big(\int \widetilde{f}(x,\cdot) d\mu_2 \Big) d\mu_1(x) = \int \widetilde{f} d\mu = \int f d\mu,$$

wobei die mittlere Gleichheit wieder nach Tonelli folgt. Für ein beliebiges komplexwertiges f folgt dann die Behauptung durch dessen Zerlegung in vier nichtnegative Komponenten: $f = (\operatorname{Re} f)_+ - (\operatorname{Re} f)_- + i[(\operatorname{Im} f)_+ - (\operatorname{Im} f)_-]$. □

Die Folgerungen aus dem Satz von Fubini sind bereits aus der Analysis II bekannt. Hier seien nur zwei Beispiele erwähnt:

4.13 Korollar (Cavalieri-Prinzip). *Für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und $t \in \mathbb{R}$ sei*

$$A_t := \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in A\}$$

der Schnitt zum Wert t. Dann ist $A_t \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n-1})$, und

$$\lambda_n(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(A_t) dt.$$

Beweis. Dies folgt durch die Anwendung des Satzes von Tonelli auf χ_A. □

4.14 Korollar. *Sei $D \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ und $f : D \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Dann gilt* $\operatorname{graph} f \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ *und* $\lambda_n(\operatorname{graph} f) = 0$. *Insbesondere hat jede Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-Maß 0.*

Beweis. O.E. sei $D = \mathbb{R}^{n-1}$, denn sonst setze f durch 0 zu einer messbaren Funktion $\widetilde{f}$ auf $\mathbb{R}^n$ fort. Die Behauptung für f folgt dann aus $\operatorname{graph} f = (D \times \mathbb{R}) \cap \operatorname{graph} \widetilde{f}$.

Die Koordinatenprojektionen pr_i, $i = 1, \dots, n$, sind stetig und damit Borel-messbar. Also ist auch

$$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n$$

Borel-messbar. Damit ist $\operatorname{graph} f = \{g = 0\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Wegen $\chi_{\operatorname{graph} f}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) = 0$ für $t \neq f(x_1, \dots, x_{n-1})$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\operatorname{graph} f}(x', t) d\lambda(t) = 0$$

für alle $x' := (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Nach dem Satz von Tonelli folgt

$$\lambda_n(\operatorname{graph} f) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\operatorname{graph} f}(x', t) d\lambda_1(t) \Big) d\lambda_{n-1}(x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 0 \; d\lambda(x') = 0.$$

$\square$

5. Der Transformationssatz

5.1 Worum geht's? Der Transformationssatz ist der letzte große Satz der Lebesgueschen Integrationstheorie. Die Anwendungen des Transformationssatzes sind bereits aus der Analysis II bekannt und werden hier nicht mehr besprochen. Als Beispiel sei hier nur an der Begriff der Untermannigfaltigkeit und die Integration über Untermannigfaltigkeiten erinnert. Die Definition des zugehörigen Maßtensors beruhte wesentlich auf dem Tranformationssatz. In Analysis II wurde der Satz nicht bewiesen, das wird hier nachgeholt.

Der Beweis des Transformationssatzes ist nicht leicht und erfordert einige Schritte. Es gibt verschiedene Zugänge zum Beweis, hier wird ein induktiver Beweis gewählt, der es vermeidet, zunächst den Satz für lineare Abbildungen beweisen zu müssen (auch dies ist nicht trivial). Eine mögliche Formulierung des Satzes ist die Gleichheit zweier Maße, wobei das eine Maß ein Bildmaß ist, das andere ein Maß mit Dichte. In den Anwendungen wird es stets um die zugehörigen Integrale gehen.

a) Einige spezielle Maße

5.2 Definition und Satz. *Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathscr{B})$ ein Messraum und $\Phi\colon X \to Y$ messbar. Dann ist*

$$\mu \circ \Phi^{-1}\colon \mathscr{B} \to [0, \infty], \; (\mu \circ \Phi^{-1})(B) := \mu(\Phi^{-1}(B))$$

ein Maß, das Bildmaß von μ unter Φ.

Beweis. Die Eigenschaften eines Maßes übertragen sich unmittelbar bei Verwendung des Urbilds. □

5.3 Lemma (Transformationslemma). *Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathscr{B})$ ein Messraum und $\Phi\colon X \to Y$ messbar. Sei weiter $f\colon Y \to \mathbb{C}$ $\mathscr{B}$-messbar. Dann ist f genau dann $\mu \circ \Phi^{-1}$-integrierbar, wenn $f \circ \Phi$ μ-integrierbar ist, und in diesem Fall ist*

$$\int (f \circ \Phi) d\mu = \int f d(\mu \circ \Phi^{-1}).$$

Beweis. Für $f = \chi_A$ mit $A \in \mathscr{A}$ stimmt dies nach Definition des Bildmaßes, daher wegen Linearität des Integrals auch für Stufenfunktionen $f \geq 0$, mit monotoner Konvergenz für alle messbaren Funktionen $f \geq 0$. Der allgemeine Fall folgt wieder durch die Zerlegung $f = [(\operatorname{Re} f)_+ - (\operatorname{Re} f)_-] + i[(\operatorname{Im} f)_+ - (\operatorname{Im} f)_-]$. □

5.4 Beispiel (Maße mit Dichten). Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to [0, \infty]$ messbar. Dann ist nach Satz 2.11 durch

$$\nu(A) := \int_A f d\mu \quad (A \in \mathscr{A})$$

ein Maß gegeben. Eine messbare Funktion $g\colon X \to \mathbb{C}$ ist genau dann ν-integrierbar, wenn $g \cdot f$ μ-integrierbar ist, und in diesem Fall ist

$$\int g d\nu = \int g \cdot f d\mu.$$

Dies folgt genauso wie im Beweis des Transformationslemmas 5.3. Man sagt, das Maß ν besitzt die μ-Dichte f und schreibt $\nu = f \cdot \mu$. In symbolischer Schreibweise $d\nu = f d\mu$. Die Dichte f heißt auch die Radon-Nikodym-Ableitung von ν nach μ, symbolisch $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

5.5 Beispiel (Zählmaß). Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\zeta\colon \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$, $\zeta(A) = |A|$ das Zählmaß aus Beispiel 1.7 c). Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ heißt summierbar, wenn

$$\sum_{x \in X} |f(x)| := \sup \Big\{ \sum_{x \in E} |f(x)| : E \subset X \ \text{ endlich } \Big\} < \infty.$$

In diesem Fall ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{|f| \geq \frac{1}{n}\}$ endlich und damit $\{f \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$ abzählbar, etwa $\{f \neq 0\} = \{x_1, x_2, \dots\}$. Die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(x_n)$ ist dann absolut konvergent, und nach dem großen Umordnungssatz ist der Wert der Reihe unabhängig von der Summationsreihenfolge. Damit ist

$$\sum_{x\in X} f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$$

wohldefiniert.

Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ ist genau dann summierbar, wenn f ζ-integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\sum_{x\in X} f(x) = \int f d\zeta.$$

Denn offensichtlich gilt für endliche $E \subset X$ die Gleichheit $\int_E f d\zeta = \sum_{x\in E} f(x)$. Falls f ζ-integrierbar ist, so ist

$$\sup\Big\{ \sum_{x\in E} |f(x)| : E \subset X \ \text{ endlich } \Big\} = \sup\Big\{ \int_E |f| d\zeta : E \subset X \ \text{ endlich } \Big\}$$
$$\leq \int |f| d\zeta < \infty,$$

d.h. f ist summierbar. Im summierbaren Fall gilt für $E_n := \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$ mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\sum_{x\in X} |f(x)| \nwarrow \sum_{x\in E_n} |f(x)| = \int_{E_n} |f| d\zeta \nearrow \int |f| d\zeta.$$

Dies zeigt die Äquivalenz von Integrierbarkeit und Summierbarkeit wie auch die Gleichheit von Summe und Integral für den Fall $f \geq 0$. Der allgemeine Fall $f\colon X \to \mathbb{C}$ folgt durch die übliche Zerlegung.

5.6 Beispiel (Riemann-Stieltjes-Integrale). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und rechtsstetige Funktion. Dann existiert genau ein Borelmaß $\mu_g\colon \mathscr{B}([a,b]) \to [0,\infty]$ mit

$$\mu_g((s,t]) = g(t) - g(s) \quad (a \leq s \leq t \leq b)$$

und $\mu_g(\{s\}) = 0$.

Um dies zu sehen, setzen wir g konstant auf $(-\infty, a]$ und $[b,\infty)$ fort. Durch die obige Gleichung ist μ_g bereits auf $\mathbb{I}_n$ und damit auf $\mathbb{A}_n$ eindeutig festgelegt. Man rechnet nach, dass die Rechts-Stetigkeit von g gerade die σ-Additivität von μ_g auf $\mathbb{A}_n$ bedeutet. Wegen $\mu_g(\mathbb{R}) = \mu_g([a,b]) = g(b) - g(a)$ ist μ_g endlich. Damit existiert genau eine Maßfortsetzung von $\mu_g|_{\mathbb{A}_n}$ zu einem Borelmaß $\mu_g|_{\mathscr{B}(\mathbb{R})}$.

Das zu μ_g gehörige Integral

$$\int f dg := \int f d\mu_g$$

heißt auch das Riemann-Stieltjes-Integral von f bzgl. g. Die Theorie der Riemann-Stieltjes-Integrale kann analog zum Riemann-Integral auch unabhängig von der Lebesgue-Theorie entwickelt werden, indem man Zerlegungssummen der Form

$$\sum_{k=1}^{K} f(y_k)\big[g(x_{k+1}) - g(x_k)\big]$$

mit $y_k \in (x_k, x_{k+1}]$ betrachtet.

Eine kompakte Ausschöpfung und das übliche σ-Additivitätsargument zeigt, dass die obige Aussage auch für monoton wachsende und rechtsstetige $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt. Wählt man $g(x) = x$, erhält man das Riemann-Integral als Spezialfall des Riemann-Stieltjes-Integrals.

b) Der Transformationssatz

Der folgende Satz ist zentral für die gesamte Integrationstheorie und hat viele Auswirkungen, die zum Teil bereits in Analysis II besprochen wurden. Statt Transformationssatz wird dieser Satz auch Substitutionssatz oder Substitutionsregel für das n-dimensionale Lebesgue-Integral genannt.

5.7 Satz (Transformationssatz). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus.*

a) Es gilt

$$\lambda \circ \Phi = |\det \Phi'(\cdot)| \cdot \lambda \tag{5-1}$$

als Gleichheit von Maßen auf $\mathscr{B}(U)$. Dabei steht auf der linken Seite das Bildmaß von λ unter Φ^{-1} (siehe Definition 5.2), auf der rechten Seite das Maß mit Dichte $|\det \Phi'|$ (Beispiel 5.4), wobei Φ' die Jacobimatrix von Φ bezeichnet.

b) Sei $f\colon V \to \mathbb{C}$ messbar. Dann ist f über $V = \Phi(U)$ genau dann λ-integrierbar, wenn $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|\colon U \to \mathbb{C}$ λ-integrierbar über U ist, und dann gilt

$$\int_{\Phi(U)} f(y)dy = \int_U f\big(\Phi(x)\big) \cdot |\det \Phi'(x)| dx.$$

Beweis. a) Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte.

(i) Es genügt, die Gleichheit der Maße in (5-1) für Mengen der Form $A \cap U$ mit $A \in \mathbb{I}_n$ zu zeigen. Denn diese Mengen bilden ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem der σ-Algebra $\mathscr{B}(U) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \cap U$, und damit folgt die Gleichheit auf $\mathscr{B}(U)$ aus dem Eindeutigkeitssatz 1.16.

(ii) *Lokalisierung:* Es genügt, (5-1) in folgender lokaler Form zu zeigen: Zu jedem Punkt $a \in U$ existiert ein offenes Intervall $U_a \subset U$, so dass

$$(\lambda \circ \Phi)|_{U_a} = \Big(|\det \Phi'(\cdot)| \cdot \lambda \Big)\Big|_{U_a}.$$

(Beachte die Definition des Spurmaßes in Bemerkung 1.8.)

Denn wie im Beweis von Lemma 1.21 ist jede offene Menge U eine abzählbare Vereinigung von solchen offenen Intervallen $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_{a_k}$. Damit lässt sich jede Menge $A \in \mathscr{B}(U)$ in der Form $A = \dot{\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}} A_k$ schreiben mit

$$\begin{aligned} A_1 &:= A \cap U_{a_1}, \\ A_2 &:= (A \cap U_{a_2}) \setminus A_1, \\ A_3 &:= (A \cap U_{a_3}) \setminus (A_1 \cup A_2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es gilt $A_k \in \mathscr{B}(U_{a_k})$. Falls (5-1) in $\mathscr{B}(U_{a_k})$ gezeigt ist, folgt wegen der σ-Additivität beider Seiten von (5-1) auch

$$\lambda(\Phi(A)) = \sum_{k=1}^\infty \lambda(\Phi(A_k)) = \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} |\det \Phi'| d\lambda = \int_A |\det \Phi'| d\lambda.$$

(iii) Der Satz gilt für $n = 1$: Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $a \in U$. Wähle ein Intervall $U_a \subset U$ mit $a \in U_a$. Da Φ ein C^1-Diffeomorphismus ist, gilt $\Phi'(y) \neq 0$ für $y \in U_a$, d.h. es gilt $\Phi' > 0$ oder $\Phi' < 0$.

Im Falle $\Phi' > 0$ ist Φ streng monoton steigend, und für ein Intervall $A = (\alpha, \beta] \subset U_a$ gilt

$$\begin{aligned} (\lambda \circ \Phi)(A) &= \int_A 1\, d(\lambda \circ \Phi) = \int_{\Phi(A)} 1\, d\lambda \\ &= \int_{(\Phi(\alpha),\Phi(\beta)]} 1\, d\lambda = \int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} 1\, dy \\ &= \int_\alpha^\beta 1 \cdot \Phi'(x) dx = \int_{(\alpha,\beta]} |\Phi'(x)| d\lambda(x) = \int_A |\Phi'(\cdot)| d\lambda. \end{aligned}$$

Dabei wurden das Transformationslemma 5.3 und die aus der Analysis I bekannte Substitutionsregel für das eindimensionale Integral verwendet. Beachte, dass $\lambda(\{a\}) = 0$ und $\Phi'(x) = |\Phi'(x)|$ wegen $\Phi' > 0$.

Falls $\Phi' < 0$, erhält man genauso $\lambda \circ \Phi(A) = -\int_A \Phi'(x) dx = \int_A |\Phi'(x)| dx$.

(iv) Beweis des Satzes für $n > 1$ durch Induktion: Sei $a \in U$. Wegen $\det \Phi'(a) \neq 0$ können wir nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten annehmen, dass

$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(a) \neq 0$ gilt. Betrachte die C^1-Abbildung

$$\Psi\colon U \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \Phi_n(x)).$$

Dann gilt

$$\det \Psi'(x) = \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(x) \tag{5-2}$$

und damit $\det \Psi'(a) \neq 0$. Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit existiert eine offene Umgebung U_a von a, so dass $\Psi\colon U_a \to W := \Psi(U_a)$ ein C^1-Diffeormorphismus ist. O.E. sei dabei U_a ein offenes Intervall.

Setze $S := \Phi \circ (\Psi|_{U_a})^{-1}\colon W \to \Phi(U_a)$. Dann ist S ebenfalls C^1-Diffeomorphismus, und es gilt $S(x_1, \dots, x_{n-1}, \Phi_n(x)) = \Phi(x)$ und

$$\det S'(x) = \frac{\det \Phi'(\Psi^{-1}(x))}{\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(\Psi^{-1}(x))}. \tag{5-3}$$

Dabei wurden die Kettenregel und (5-2) verwendet.

Sei wie in Korollar 4.13 $W_t := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (y,t) \in W\}$ der t-Schnitt von W für $t \in \mathbb{R}$. Offensichtlich ist W_t wieder offen, eventuell auch leer. Definiere die induzierte Abbildung

$$\widetilde{S}\colon W_t \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad y \mapsto (S_1(y,t), \dots, S_{n-1}(y,t))$$

Wegen $S_n(x) = x_n$ ist $\widetilde{S}\colon W_t \to (\Phi(U_a))_t$ ein C^1-Diffeomorphismus.

Nach Induktionsannahme für $n-1$ liefert

$$\lambda_{n-1} \circ \widetilde{S} = |\det \widetilde{S}'| \cdot \lambda_{n-1} \quad \text{auf } \mathscr{B}(W_t) \tag{5-4}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $W_t \neq \emptyset$.

Mit dem Satz von Fubini, Gleichung (5-4) und $(\Phi(U_a))_t = S(W_t)$ folgt für $A \in \mathscr{B}(U_a)$

$$\begin{aligned}\lambda_n(\Phi(A)) = \int_{\Phi(U_a)} \chi_{\Phi(A)} d\lambda_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{(\Phi(U_a))_t} \chi_{\Phi(A)}(y,t) d\lambda_{n-1}(y) \Big) d\lambda_1(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{W_t} \chi_{\Phi(A)}(\widetilde{S}(y),t) |\det \widetilde{S}'(y)| d\lambda_{n-1}(y) \Big) d\lambda_1(t).\end{aligned}$$

Wegen $S(y,t) = (\widetilde{S}(y),t)$ ist $\chi_{\Phi(A)}(\widetilde{S}(y),t) = (\chi_{\Phi(A)} \circ S)(y,t)$ und $\det \widetilde{S}'(y) = \det S'(y,t)$, und wieder mit dem Satz von Fubini können wir weiter schreiben

$$\begin{aligned}\lambda_n(\Phi(A)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{W_t} (\chi_{\Phi(A)} \circ S)(y,t) |\det S'(y,t)| d\lambda_{n-1}(y) \Big) d\lambda_1(t) \\ &= \int_W (\chi_{\Phi(A)} \circ S)(x)\, |\det S'(x)| d\lambda_n(x).\end{aligned}$$

Es ist $\chi_{\Phi(A)} = \chi_A \circ \Phi^{-1}$ und damit $\chi_{\Phi(A)} \circ S = \chi_A \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi^{-1} = \chi_A \circ \Psi^{-1}$. Damit und mit (5-3) folgt

$$\begin{aligned}\lambda_n(\Phi(A)) &= \int_W \Big[\chi_A \cdot \frac{|\det \Phi'|}{|\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}|}\Big] \circ \Psi^{-1} d\lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big[\chi_A \cdot \frac{|\det \Phi'|}{|\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}|}\Big] \circ \Psi^{-1}(y,t)dt\Big) dy.\end{aligned}$$

Um das innere Integral zu berechnen, verwendet man den Transformationssatz für $n = 1$ aus (iii). Für festes $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist $s \mapsto \Phi_n(y,s) =: t$ injektiv, und das Inverse dieser Funktion hat die Ableitung

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}(y,s)} = \Big(\frac{1}{\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n}} \circ \Psi^{-1}\Big)(y,t),$$

wobei $\Psi^{-1}(y,t) = (y,s)$ verwendet wurde. Setzt man dies oben ein, erhält man (wieder mit Fubini)

$$\begin{aligned}\lambda_n(\Phi(A)) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big[\chi_A(y,s) \cdot |\det \Phi'(y,s)|\Big] ds\Big) dy \\ &= \int_A |\det \Phi'(x)| dx,\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

b) Definiere $\mu := |\det \Phi'| \cdot \lambda$. Nach Teil a) des Satzes gilt $\mu = \lambda \circ \Phi$, und mit dem Transformationslemma gilt dann

$$\begin{aligned}\int_U f\big(\Phi(x)\big) \cdot |\det \Phi'(x)| dx &= \int_U [f \circ \Phi] d\mu = \int_U [f \circ \Phi] d(\lambda \circ \Phi) \\ &= \int_{\Phi(U)} f d\big(\lambda \circ \Phi \circ \Phi^{-1}\big) = \int_{\Phi(U)} f d\lambda.\end{aligned}$$

□

5.8 Korollar. *Das Lebesgue-Maß $\lambda_n \colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ ist translationsinvariant, d.h. für jedes $h \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ gilt*

$$\int f(a+x)dx = \int f(x)dx \quad (a \in \mathbb{R}^n),$$

und homogen, d.h. für jedes $h \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ gilt

$$\int h(\alpha x)dx = |\alpha|^{-n} \int h(x)dx \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Beweis. Folgt sofort aus dem Transformationssatz für die Abbildungen $x \mapsto a + x$ bzw. $x \mapsto \alpha x$. □

II. Einiges zur Topologie

6. Topologische Begriffe

6.1 Worum geht's? In der bisherigen Vorlesung ist die Topologie regelmäßig als Begriff aufgetaucht. Es sollte inzwischen auch klar sein, wie wichtig Begriffe wie Konvergenz oder Kompaktheit sind. In den meisten Fällen waren die bisher betrachteten topologischen Räume metrische Räume. Aber dieser Begriff ist nicht allgemein genug, um die in der Analysis auftretenden Konvergenzarten zu beschreiben:

- Welche Topologie beschreibt punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge?
- Seien f, g zwei verschiedene Funktionen in $\mathscr{L}^1(\mu)$, welche μ-fast überall gleich sind. Dann ist $\|f - g\|_1 = 0$, d.h. der Abstand der Funktionen ist gleich Null. Topologisch sind diese Funktionen nicht unterscheidbar.

Es ist also notwendig, allgemeinere Topologien und entsprechende Konzepte (wie etwa die Hausdorff-Eigenschaft) zu betrachten. Wie das zweite Beispiel zeigt, sind auch Trennungseigenschaften wichtig, d.h. die Frage, wie gut eine Topologie verschiedene Elemente voneinander trennen kann. Diese Frage wird beantwortet durch das Lemma von Urysohn, in welchem die Trennung abgeschlossener Mengen durch eine stetige Funktion vorgenommen wird. Das Lemma von Urysohn hat als Folgerung das Erweiterungslemma von Tietze, welches es erlaubt, stetige Funktionen, die nur auf einer abgeschlossenen Teilmenge des ganzen Raums definiert sind, auf den ganzen Raum fortzusetzen.

a) Topologische Räume

Wir wiederholen noch einmal den grundlegenden Begriff. Man vergleiche auch den Begriff der Topologie mit dem der σ-Algebra.

6.2 Definition. a) Sei X eine Menge. Ein System $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ heißt eine Topologie, falls

(i) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.

(ii) Falls $U_1, U_2 \in \tau$, so gilt $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

(iii) Für jede Familie $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \tau$ gilt $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau$.

In diesem Fall heißt (X, τ) ein topologischer Raum, und die Mengen $U \in \tau$ heißen die offenen Mengen.

b) Seien (X, τ_X) und (Y, τ_Y) zwei topologische Räume. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt stetig, falls $f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X$, d.h. falls für alle $W \in \tau_Y$ gilt $f^{-1}(W) \in \tau_X$.

6.3 Beispiele. a) Für eine Menge X ist $\{\emptyset, X\}$ eine Topologie, die triviale oder gröbste Topologie, und $\mathscr{P}(X)$ eine Topologie, die diskrete oder feinste Topologie.

b) Sei (X, d) metrischer Raum. Dann ist die Menge aller $U \subset X$, für welche jeder Punkt $x \in U$ ein innerer Punkt ist, eine Topologie. Dies war die Definition der offenen Mengen in Analysis I. Die zugehörige Topologie heißt die von der Metrik d induzierte Topologie.

c) Sei (X, τ_X) ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann wird durch

$$\tau_Y := \{U \cap Y : U \in \tau_X\} \subset \mathscr{P}(Y)$$

eine Topologie auf Y definiert, die Spurtopologie oder Relativtopologie von τ_X auf Y. In der Spurtopologie von $X = \mathbb{R}$ auf die Menge $Y = [0, 1)$ ist etwa die Menge $[0, \frac{1}{2})$ offen.

6.4 Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Das Innere $\overset{\circ}{A}$ von A ist definiert als die Vereinigung aller offenen Mengen U mit $U \subset A$. D.h. $\overset{\circ}{A}$ ist die größte offene Teilmenge von A.

Analog ist der Abschluss $\overline{A}$ von A definiert als der Durchschnitt aller abgeschlossener Mengen $V \supset A$, d.h. als die kleinste abgeschlossene Obermenge von A.

Eine Menge $A \subset X$ heißt dicht in einer Menge $B \subset X$, falls $B \subset \overline{A}$.

6.5 Definition. a) Ein Mengensystem $\mathscr{B} \subset \tau$ heißt eine Basis der Topologie τ, falls jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus $\mathscr{B}$ ist, d.h.

$$\forall\, U \in \tau\ \exists\ \text{ Menge } \Lambda\ \forall\, \lambda \in \Lambda\ \exists\, B_\lambda \in \mathscr{B}:\ U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda.$$

b) Ein Mengensystem $\mathscr{S} \subset \tau$ heißt eine Subbasis der Topologie τ, falls jede offene Menge Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathscr{S}$ ist, d.h.

$$\forall\, U \in \tau\ \exists\, \Lambda\ \forall\, \lambda \in \Lambda\ \exists\, n_\lambda \in \mathbb{N}\ \exists\, S_\lambda^1, \dots, S_\lambda^{n_\lambda} \in \mathscr{S}:\ U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{j=1}^{n_\lambda} S_\lambda^j.$$

6.6 Beispiele. a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Menge der offenen Kugeln $\{B(x, r) : x \in X,\ r > 0\}$ bildet eine Basis der durch d induzierten Topologie auf X.

b) Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei $L = \{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von Seminormen (siehe Satz 3.15) $p_\lambda \colon X \to [0, \infty)$. Definiere τ als das System aller Mengen $U \subset X$, für welche gilt

$$\forall\, x \in U\ \exists\, r \in \mathbb{N}\ \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda\ \exists\, \varepsilon > 0:\ B^{(\lambda_1)}(x, \varepsilon) \cap \dots \cap B^{(\lambda_r)}(x, \varepsilon) \subset U.$$

Dabei sei $B^{(\lambda_j)}(x,\varepsilon)$ die Kugel um x mit Radius ε bzgl. der Seminorm p_{λ_j}. Dann ist τ eine Topologie auf X, die sog. lokalkonvexe Topologie zu L auf X. Eine Subbasis von τ ist gegeben durch

$$\{B^{(\lambda)}(x,r) : \lambda \in \Lambda,\ x \in X,\ r > 0\}.$$

c) Seien (X,τ_X) und (Y,τ_Y) topologische Räume. Definiere $\tau_{X\times Y} \subset \mathscr{P}(X \times Y)$ als das System aller Mengen $W \subset X \times Y$ mit

$$\forall\,(x,y) \in W\ \exists\, U \in \tau_X,\ V \in \tau_Y : (x,y) \in U \times V \subset W.$$

In vielen Anwendungen hat man eine Topologie und eine Vektorraumstruktur. In diesem Fall ist es wichtig, folgende Verträglichkeitsbedingung zu betrachten.

6.7 Definition. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und τ eine Topologie auf X. Dann heißt X ein topologischer Vektorraum, falls die Abbildungen $X \times X \to X,\ (x,y) \mapsto x+y$ und $\mathbb{K} \times X \to X,\ (\alpha,x) \mapsto \alpha x$ stetig sind.

6.8 Beispiele. a) $(\mathbb{K}^n, |\cdot|)$ ist ein topologischer Vektorraum, wie aus der Analysis II bekannt ist.

b) Die lokalkonvexe Topologie aus Beispiel 6.6 definiert einen topologischen Vektorraum.

Die folgende Definition ist fundamental für topologische Überlegungen.

6.9 Definition. Sei (X,τ) ein topologischer Raum.

a) Eine Menge $U \subset X$ heißt eine Umgebung von $x \in X$, falls ein $V \in \tau$ existiert mit $x \in V \subset U$. Man beachte, dass eine Umgebung selbst nicht offen sein muss.

b) (X,τ) heißt ein Hausdorffraum oder hausdorffsch, falls für $x,y \in X$ zwei Umgebungen U_x, U_y existieren mit $x \in U_x$, $y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$. (D.h. man kann die Punkte x und y durch Umgebungen trennen. Offensichtlich äquivalent dazu ist die Existenz offener Umgebungen, welche x und y trennen.)

c) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt konvergent gegen ein $x \in X$, falls zu jeder Umgebung U von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U \quad (n \geq n_0)$.

d) Sei nun (X,τ) ein topologischer Vektorraum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt eine Cauchyfolge, wenn zu jeder Umgebung U von $0 \in X$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$x_n - x_m \in U \quad (n,m \geq n_0).$$

Der Raum (X,τ) heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

e) Sei (X,τ) topologischer Vektorraum. Dann heißt (X,τ) Fréchetraum, falls τ durch eine abzählbare Menge L von Seminormen erzeugt wird (siehe Beispiel 6.6 b)) und vollständig und hausdorffsch ist ist.

6.10 Bemerkung. a) Metrische Räume sind hausdorffsch (zu $x, y \in X$ betrachte $B(x,\delta)$ und $B(y,\delta)$ mit $\delta := \frac{1}{2}d(x,y)$).

b) Sei X eine Menge mit mehr als einem Element. Dann ist die triviale Topologie $\tau = \{\emptyset, X\}$ nicht hausdorffsch. Ebenso sind die Räume $\mathscr{L}^p(\mu)$ mit der Seminorm $\|\cdot\|_p$ i. allg. nicht hausdorffsch, da Funktionen $f \neq 0$ existieren mit $\|f\|_p = 0$. Interessantere Beispiele für Räume, die nicht hausdorffsch sind, finden sich in der algebraischen Geometrie.

c) Sei (X,τ) ein topologischer Vektorraum, dessen Topologie τ durch die abzählbare Familie $L = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ von Seminormen erzeugt wird. Falls aus $p_n(x) = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$ bereits $x = 0$ folgt, dann definiert

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

eine Metrik d auf X, welche die Topologie τ erzeugt. Insbesondere sind Fréchеträume metrisierbar.

6.11 Bemerkung. Seien (X,τ_X) und (Y,τ_Y) topologische Räume. Sei $\mathscr{B}_Y$ eine Basis der Topologie τ_Y. Für eine Funktion $f\colon X \to Y$ sind äquivalent:

(i) f ist stetig.

(ii) Für jedes $x \in X$ und jede Umgebung V von $f(x)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

(iii) Für jedes $x \in X$ und jedes $B \in \mathscr{B}_Y$ mit $f(x) \in B_Y$ ist $f^{-1}(B)$ eine Umgebung von x.

(Beweis Übung.)

Die letzte Bemerkung ist die Motivation für folgende Definition.

6.12 Definition. Seien (X,τ_X) und (Y,τ_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f stetig an der Stelle $x \in X$, falls für jede Umgebung V von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist.

Für das nächste Beispiel ist die Multiindex-Schreibweise günstig, die hier noch einmal wiederholt wird.

6.13 Definition (Multiindex-Schreibweise). Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} x\xi &:= \sum_{j=1}^n x_j\xi_j, \\ |x| &:= \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{1/2}, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}, \\ |\alpha| &:= \alpha_1+\cdots+\alpha_n. \end{aligned}$$

Für $f\in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ sei

$$D^\alpha f(x) := \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n} f(x).$$

6.14 Definition und Satz (Schwartz-Raum). *Der Vektorraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ besteht aus allen Funktionen $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für welche gilt:*

$$p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big|x^\alpha D^\beta f(x)\big| < \infty \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n).$$

Durch die abzählbare Familie $L=\{p_{\alpha,\beta} : \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n\}$ von Normen auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ wird eine metrisierbare lokalkonvexe Topologie definiert, welche $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ zu einem Fréchetraum macht. Der Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, versehen mit dieser Topologie, heißt Schwartz-Raum oder der Raum der schnell fallenden Funktionen.

Beweis. Übungen. □

6.15 Definition und Satz (Quotiententopologie). *Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $\pi\colon X\to X/\sim$, $x\mapsto[x]$ die kanonische Projektion. Dann heißt eine Menge $U\subset X/\sim$ offen in der Quotiententopologie, falls $\pi^{-1}(U)\in\tau_X$. Der Raum $X/\sim$, versehen mit der Topologie der so definierten offenen Mengen, heißt Quotientenraum von X bzgl. $\sim$.*

Beweis. Die Eigenschaften einer Topologie übertragen sich direkt bei Betrachtung der Urbilder $\pi^{-1}(U)$. □

6.16 Beispiele. a) Sei $\mathbb{T}:=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ der Quotientenraum, d.h. für $x,y\in\mathbb{R}$ gilt $x\sim y$ genau dann, wenn $x-y\in\mathbb{Z}$. Dann gilt $\mathbb{T}=\{[x]: x\in[0,1)\}$. Aber topologisch ist $\mathbb{T}$ nicht gleich der Strecke $[0,1)$, da etwa die Menge $[0,\frac12)$ offen in $[0,1)$ ist, die Menge $\{[x]: x\in[0,\frac12)\}$ aber nicht offen in der Quotiententopologie ist.

Man muss noch die beiden Enden der Strecke $[0,1)$ miteinander identifizieren, um ein topologisch korrektes Bild von $\mathbb{T}$ zu erhalten. Dies geschieht etwa durch die Identifizierung $\mathbb{T} \cong S^1 := \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| = 1\}$ mit Hilfe der Abbildung $x \mapsto e^{2\pi i x}$. Eine Menge $\{[x] : x \in U \subset [0,1)\}$ ist genau dann offen, falls $\{e^{2\pi i x} : x \in U\} \subset S^1 \subset \mathbb{R}^2$ offen in der Topologie von S^1 ist. Dabei wird natürlich S^1 mit der Spurtopologie des $\mathbb{R}^2$ auf S^1 versehen.

Die Menge $\mathbb{T}$, versehen mit der obigen Quotiententopologie, heißt der (eindimensionale) Torus. Analog heißt $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ der n-dimensionale Torus. Beispielsweise ist $\mathbb{T}^2 \cong [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, falls man die obere Seite des Einheitsquadrates mit der unteren identifiziert und die linke Seite mit der rechten.

b) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Norm (d.h. insbesondere ein Vektorraum), und $M \subset X$ ein Untervektorraum. Sei $X/M = X/\sim$ der Quotientenraum, d.h. für $x, y \in X$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in M$. Dann ist X/M wieder ein Vektorraum.

Sei nun M abgeschlossen. Definiert man

$$\|[x]\|_\sim := \operatorname{dist}(x, M) := \inf_{m \in M} \|x - m\|,$$

so ist $(X/M, \|\cdot\|_\sim)$ ein normierter Raum. Falls X vollständig ist (und M abgeschlossen), so ist X/M wieder vollständig (ohne Beweis).

b) Das Lemma von Urysohn

6.17 Satz (Lemma von Urysohn). *Sei (X, τ) ein topologischer Raum mit folgender Trennungseigenschaft:*

(T) Falls $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt sind, so existieren offene Mengen $U_A \supset A$ und $U_B \supset B$ mit $U_A \cap U_B = \emptyset$.

Dann existiert zu abgeschlossenen disjunkten Mengen $A, B \subset X$ eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f|_A = 1$ und $f|_B = 0$.

6.18 Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) mit Trennungseigenschaft (T) heißt normal.

Vor dem Beweis des Satzes folgt noch eine Bemerkung zur Voraussetzung (T).

6.19 Bemerkung. a) Die Voraussetzung (T) gilt immer in metrischen Räumen. Sei (X, d) metrischer Raum und seien $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Da B abgeschlossen ist, gilt für $a \notin B$

$$d_{aB} := \frac{1}{2} \inf_{x \in B} d(a, x) > 0.$$

Dann sind $U_A := \bigcup_{a\in A} B(a, d_{aB})$ und $U_B := \bigcup_{b\in B} B(b, d_{bA})$ offene disjunkte Umgebungen von A bzw. B.

b) Die Voraussetzung (T) gilt in kompakten Hausdorffräumen X. Zu $a \in A$ und $b \in B$ existieren offene disjunkte Umgebungen $U(a,b)$ von a und $V(a,b)$ von b, da X hausdorffsch ist. Da X (und damit A und B) kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung der Form

$$V(a) := V(a, b_1) \cup \dots \cup V(a, b_r) \supset B.$$

Setzt man nun

$$U(a) := U(a, b_1) \cap \dots \cap U(a, b_r),$$

so sind $U(a)$ und $V(a)$ offene disjunkte Mengen mit $a \in U(a)$ und $B \subset V(a)$.

Wegen Kompaktheit von A existiert eine endliche Überdeckung

$$U := U(a_1) \cup \dots \cup U(a_t) \supset A.$$

Mit $V := V(a_1) \cap \dots V(a_t)$ erhält man damit zwei offene disjunkte Mengen U, V mit $A \subset U$ und $B \subset V$.

Beweis von Satz 6.17. Die Idee des Beweises besteht darin, eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Stufenfunktionen zu konstruieren, wobei $0 \le f_n \le 1$, $f_n|_A = 0$ und $f_n|_B = 1$ gilt. Die Stufenfunktion f_n besitzt Sprunghöhe 2^{-n}. Genauer wird eine Kette von Mengen

$$A = A_0^n \subset A_1^n \subset \dots \subset A_{2^n}^n \subset B^c$$

konstruiert und f_n dann definiert durch

$$\begin{aligned}
f_n &:= 1 && \text{auf } A_0^n,\\
f_n &:= 1 - 2^{-n} && \text{auf } A_1^n \setminus A_0^n,\\
f_n &:= 1 - 2 \cdot 2^{-n} && \text{auf } A_2^n \setminus A_1^n,\\
&\vdots\\
f_n &:= 2^{-n} && \text{auf } A_{2^n-1}^n \setminus A_{2^n-2}^n,\\
f_n &:= 0 && \text{auf } A_{2^n}^n \setminus A_{2^n-1}^n,\\
f_n &:= 0 && \text{auf } X \setminus A_{2^n}^n (\supset B),
\end{aligned}$$

Die Mengen A_i werden so gewählt, dass $\overline{A}_i \subset \mathring{A}_{i+1}$ gilt.

Der Beweis besteht nun aus folgenden Schritten:

(i) Definition der ersten Funktion f_0.

(ii) Zwischen zwei Mengen einer Kette mit obigen Eigenschaften kann eine neue Menge eingefügt werden, welche die Kette verfeinert.

(iii) Durch Einfügen neuer Mengen wie in (ii) erhalten wir eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Stufenfunktionen.

(iv) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon X\to\mathbb{R}$.

(v) Die Funktion f ist stetig.

Zu (i). Setze $A_0^0 := A$ und $A_1^0 := B^c$. Dann ist A_0^0 abgeschlossen und A_1^0 offen. Dann hat $f_0 := \chi_{A_0^0}$ die gewünschten Eigenschaften.

Zu (ii). Verfeinerung der Kette: Seien $M, N \subset X$ mit $\overline{M} \subset \mathring{N}$. Dann existieren nach Voraussetzung (T) offene disjunkte Umgebungen U, V mit $U \supset \overline{M}$ und $V \supset X \setminus \mathring{N}$. Es folgt $\overline{U} \cap V = \emptyset$ und $V \supset X \setminus \mathring{N}$ und damit

$$\overline{M} \subset U \subset \overline{U} \subset \mathring{N}.$$

Die Menge U erfüllt somit $\overline{M} \subset \mathring{U} \subset \overline{U} \subset \mathring{N}$, liegt also „zwischen“ M und N.

Zu (iii). Wir wenden (ii) auf auf $M := A_0^0$ und $N := A_1^0$ an und erhalten eine neue Zwischenmenge $A_1^1 := U$. Mit $A_0^1 := A_0^0 = A$ und $A_2^1 := A_1^0$ haben wir eine verfeinerte Kette $A = A_0^1 \subset A_1^1 \subset A_2^1$ und können wie oben f_1 definieren. Zwischen je zwei Mengen dieser Kette fügen wir wieder eine Menge ein und erhalten f_2. Wiederholte Anwendung der Verfeinerung liefert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Man beachte, dass $f_0 \le f_1 \le \dots \le 1$ gilt.

Zu (iv). Als monoton wachsende und beschränkte Folge besitzt $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ für jedes $x \in X$ einen Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Nach Konstruktion gilt $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le 2^{-n-1}$ und damit

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| \le |f_{n+m}(x) - f_{n+m-1}(x)| + \dots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le \sum_{j=n+1}^{m} 2^{-j}.$$

Für $m \to \infty$ erhält man $|f(x) - f_n(x)| \le \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-n}$. Da dies unabhängig von $x \in X$ gilt, konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen f.

Zu (v). Nach Konstruktion gilt $f|_A = 1$ und $f|_B = 0$. Zu zeigen ist noch die Stetigkeit von f.

Sei $x \in X$. Nach Bemerkung 6.11 und Beispiel 6.6 a) genügt es zu zeigen, dass $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)) \subset X$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung von x ist.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n = n(\varepsilon)$ mit $2^{-n} < \frac{\varepsilon}{3}$. Sei $A = A_0^n \subset A_1^n \subset \dots \subset A_{2^n}^n \subset B^c$ die zugehörige Mengenkette. Setzt man $A_n^{-1} := \emptyset$, $A_{2^n+1}^n := X$ und

$$B_j^n := \left(A_{j+1}^n\right)^\circ \setminus \overline{A_{j-1}^n} \quad (j = 1, \dots, 2^n),$$

so erhält man eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{j=1}^{2^n} B_j^n$. Zu $x \in X$ existiert also ein $j = j(n,x)$ mit $x \in B_j^n$. Nach Konstruktion von f_n gilt für alle $y \in B_j^n$ die Abschätzung $|f_n(x) - f_n(y)| \le 2^{-n}$.

Damit erhält man für alle $y \in B_j^n$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\le 2^{-n} + 2^{-n} + 2^{-n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Es gilt also $x \in B_j^n \subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$. Damit ist $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ eine Umgebung von $x \in X$, d.h. f ist stetig. □

Das Lemma von Urysohn erlaubt es, stetige Funktionen, welche auf einer abgeschlossenen Teilmenge von X definiert sind, auf den ganzen Raum stetig fortzusetzen.

6.20 Satz (Erweiterungslemma von Tietze). *Sei (X,τ) ein topologischer Raum mit Trennungseigenschaft (T) (siehe Satz 6.17). Sei $M \subset X$ abgeschlossen, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon M \to [a,b]$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $F\colon X \to [a,b]$ von f.*

Beweis. (i) Reduktion auf das Intervall $[-1,1]$: Zu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ betrachte die stetige Bijektion $\psi_{\alpha,\beta}\colon [0,1] \to [\alpha,\beta]$, $t \mapsto \alpha + t(\beta - \alpha)$. Dann genügt es, die Behauptung für

$$\widetilde{f} := \psi_{-1,1} \circ f \circ \psi_{a,b}^{-1}\colon M \to [-1,1]$$

zu zeigen. Denn falls $\widetilde{F}$ eine stetige Fortsetzung von $\widetilde{f}$ ist, so ist $F := \psi^{-1} \circ \widetilde{F}$ eine stetige Fortsetzung von f. O.E. sei also $f\colon M \to [-1,1]$.

(ii) Sei $s_1 := \sup_{x \in M} |f(x)| (\le 1)$. Dann sind $A := f^{-1}([\frac{s_1}{3}, s_1])$ und $B := f^{-1}([-s_1, -\frac{s_1}{3}])$ abgeschlossen (da f stetig ist) und disjunkt. Nach dem Lemma von Urysohn existiert eine stetige Funktion $\varphi\colon X \to [0,1]$ mit $\varphi|_A = 1$ und $\varphi|_B = 0$. Die Funktion $F_1 := \psi_{-s_1/3, s_1/3} \circ \varphi\colon X \to [-\frac{s_1}{3}, \frac{s_1}{3}]$ erfüllt dann $F_1|_A = \frac{s_1}{3}$ und $F_1|_B = -\frac{s_1}{3}$.

Wegen $A = f^{-1}([\frac{s_1}{3}, s_1])$ gilt

$$|F_1(x) - f(x)| = \Big|\frac{s_1}{3} - f(x)\Big| \le \frac{2}{3}\, s_1 \quad (x \in A).$$

Analog erhält man

$$|F_1(x) - f(x)| = \Big| -\frac{s_1}{3} - f(x)\Big| \le \frac{2}{3}\, s_1 \quad (x \in B).$$

Für $x \in X \setminus (A \cup B)$ gilt aber $|f(x)| \le \frac{s_1}{3}$ und $|F_1(x)| \le \frac{s_1}{3}$. Insgesamt erhalten wir also $\sup_{x \in X} |f(x) - F_1(x)| \le \frac{2}{3} s_1$.

(iii) Definiere
$$s_2 := \sup_{x\in M} |f(x) - F_1(x)|.$$
Dann ist $s_2 \le \frac{2}{3}s_1$ nach (ii). Wie in (ii) konstruiert man nun eine stetige Funktion $F_2\colon X \to [-\frac{1}{3}s_2, \frac{1}{3}s_2]$ mit
$$s_3 := \sup_{x\in M} \Big| f(x) - F_1(x) - F_2(x)\Big| \le \frac{2}{3}s_2.$$
Iterativ erhält man eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$s_{n+1} := \sup_{x\in M} \Big| f(x) - (F_1(x) + \cdots + F_n(x))\Big| \le \frac{2}{3}s_n. \tag{6-1}$$
Damit ist $s_{n+1} \le \frac{2}{3}s_n \le \cdots \le (\frac{2}{3})^n s_1 \le (\frac{2}{3})^n$. Wegen $|F_{n+1}(x)| \le \frac{1}{3}s_{n+1}$ gilt
$$|F_{n+1}(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (x \in X).$$

(iv) Nach (iii) konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty F_n(x)$ absolut und gleichmäßig in X. Genauso wie in metrischen Räumen sieht man, dass $F(x) := \sum_{n=1}^\infty F_n(x)$ als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen wieder stetig ist. Wegen
$$\sum_{n=1}^\infty |F_n(x)| \le \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$$
ist $F(X) \subset [-1,1]$. Nimmt man in (6-1) den Grenzwert $n \to \infty$, so sieht man $F(x) = f(x)$ für alle $x \in M$. Damit ist F die gesuchte Fortsetzung von f. □

6.21 Bemerkung. a) Die Aussage des Erweiterungslemmas von Tietze gilt analog für stetige Funktionen $f\colon M \to (a,b)$. In diesem Fall existiert eine stetige Fortsetzung $F\colon X \to (a,b)$. Um dies einzusehen, sei o.E. $(a,b) = (-1,1)$. Nach Satz 6.20 existiert eine stetige Fortsetzung $F_1\colon X \to [a,b]$ von f. Setze nun $N := F_1^{-1}(\{-1,1\})$. Dann ist N abgeschlossen und disjunkt von M. Setze $\widetilde{f} := 0$ auf N und $\widetilde{f} := f$ auf M. Wieder nach Satz 6.20 existiert eine stetige Fortsetzung F_2 von $\widetilde{f}$. Die Funktion $F := \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ ist eine stetige Fortsetzung von f mit $F\colon X \to (-1,1)$.

b) Die Aussage von Satz 6.20 gilt auch, falls $f\colon M \to \mathbb{R}$ stetig ist. Denn $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist eine stetige Bijektion mit stetigem Inversen. Ebenso sieht man durch komponentenweise Anwendung, dass die analoge Aussage für stetige Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ gilt.

7. Der Satz von Tychonov

7.1 Worum geht's? Dieser Abschnitt setzt die topologischen Überlegungen des letzten Kapitels fort. Jetzt geht es um die Kompaktheit, bekanntermaßen ein zentraler Begriff in der Topologie.

Es ist nicht verwunderlich, dass das kartesische Produkt zweier kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}$ wieder kompakt ist. Hier stellt man sich etwa abgeschlossene Rechtecke als das Produkt zweier abgeschlossener Intervalle vor. Viel erstaunlicher ist es, dass auch unendliche kartesische Produkte kompakter Mengen wieder kompakt sind, selbst wenn es überabzählbar viele sind. Diese Eigenschaft ist die Aussage des Satzes von Tychnonov.

Um den Satz von Tychnonov zu formulieren und zu verstehen, muss man unendliche kartesische Produkte und die zugehörige Produkttopologie betrachten. Der Beweis des Satzes von Tychonov verwendet Ultrafilter und das Lemma von Zorn, reicht also weit in die Mengenlehre. Man beachte, dass das Lemma von Zorn äquivalent ist zum Auswahlaxiom und nicht aus den übrigen Axiomen der Mathematik hergeleitet werden kann.

Die Anwendungen des Satzes von Tychonov finden sich größtenteils erst im Hauptstudium, etwa in der Funktionalanalysis, wo schwache Topologien diskutiert werden. Neben der Aussage ist aber auch die Methodik und vor allem der Begriff der Filter und Ultrafilter wichtig.

a) Unendliche Produkte topologischer Räume, Ultrafilter

7.2 Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

a) Eine Menge $\mathscr{U}$ von Umgebungen eines Punktes $x \in X$ heißt eine Umgebungsbasis von x, falls für jede Umgebung V von x ein $U \in \mathscr{U}$ existiert mit $x \in U \subset V$.

b) Der Raum X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, falls jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Der Raum X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, falls X eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

c) Der Raum X heißt separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

7.3 Bemerkung. a) Falls X das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so auch das erste. Denn für eine abzählbare Basis $\mathscr{B} \subset \tau$ ist $\{B \in \mathscr{B} : x \in B\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x.

b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom, da $\{B(x, \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x ist.

7.4 Definition (Unendliche Produkte). Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge und $\{X_i : i \in I\}$ eine Familie von Mengen. Dann heißt

$$\prod_{i\in I} X_i := \Big\{ f \colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid f(i) \subset X_i \quad (i \in I) \Big\} = \{(x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i \quad (i \in I)\}$$

das Produkt der Mengen X_i. Falls $X_i = X$ für alle $i \in I$ gilt, schreibt man $X^I := \prod_{i\in I} X$.

Zu $j \in I$ heißt

$$\mathrm{pr}_j \colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j,\ (x_i)_{i\in I} \mapsto x_j,$$

die kanonische Projektion auf die j-te Komponente.

b) Falls $(X_i, \tau_i) \quad (i \in I)$ topologische Räume sind, so ist die Produkttopologie auf $X := \prod_{i\in I} X_i$ definiert als die kleinste (gröbste) Topologie, für welche alle kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_j \colon X \to X_j \quad (j \in I)$ stetig sind. Versehen mit dieser Topologie, heißt X auch das topologische Produkt von $(X_i)_i$ oder der Produktraum.

7.5 Bemerkung. Offensichtlich ist

$$\mathscr{S}_{\mathrm{pr}} := \{\mathrm{pr}_j^{-1}(U_j) : U_j \in \tau_j,\ j \in I\}$$

eine Subbasis der Produkttopologie, und die Menge der endlichen Durchschnitte dieser Mengen

$$\mathscr{B}_{\mathrm{pr}} := \{\mathrm{pr}_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \ldots \mathrm{pr}_{j_k}^{-1}(U_{j_k}) :\ j_1, \ldots, j_k \in I,\ U_{j_1} \in \tau_{j_1}, \ldots, U_{j_k} \in \tau_{j_k},\ k \in \mathbb{N}\}$$

eine Basis der Produkttopologie.

7.6 Beispiel. Der Produktraum $X = \{0,1\}^{\mathbb{R}} = \prod_{i\in\mathbb{R}}\{0,1\}$ erfüllt weder das erste noch das zweite Abzählbarkeitsaxiom (wobei $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie $\mathscr{P}(\{0,1\})$ versehen wird).

Denn angenommen, $0 = (0)_{i\in\mathbb{R}} \in X$ besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Da $\mathscr{B}_{\mathrm{pr}}$ eine Basis der Topologie ist, existiert zu U_n ein $B_n \in \mathscr{B}_{\mathrm{pr}}$ mit $x := 0 \in B_n \subset U_n$, und $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist wieder eine Umgebungsbasis von 0. Die Anzahl der in $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ als Projektionsrichtungen auftretenden Indizes ist für jedes einzelne B_n nur endlich und damit insgesamt nur abzählbar. Also existiert ein $i_0 \in \mathbb{R}$, welches als Projektionsrichtung nicht auftritt. Die Menge $U := \mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(\{0\}) \subset X$ ist dann eine (offene) Umgebung von x, für welche kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $U \supset B_n$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $\mathscr{B}_{\mathrm{pr}}$ eine Umgebungsbasis ist.

Die Menge aller Umgebungen eines Punktes in einem topologischen Raum ist ein wichtiger Begriff der Topologie, da damit etwa die Begriffe Konvergenz und Cauchyfolge definiert werden (siehe Definition 6.9). Die Eigenschaften der Menge aller Umgebungen finden sich wieder im Begriff eines Filters.

7.7 Definition. Sei X eine Menge.

a) Eine Familie von Teilmengen $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt ein Filter auf X, falls gilt:

(i) Für alle $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ ist $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$.

(ii) Falls $F \in \mathscr{F}$ und $F \subset F'$, so ist auch $F' \in \mathscr{F}$.

(iii) Es gilt $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

b) Ein Filter $\mathscr{F}$ heißt Ultrafilter auf X, falls es keinen Filter $\mathscr{F}'$ auf X gibt mit $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{F}'$ (d.h. falls $\mathscr{F}$ maximal ist).

c) Ein Filter $\mathscr{F}$ auf einem topologischen Raum (X, τ) heißt konvergent gegen ein $x \in X$, falls für jede Umgebung U von x gilt: $U \in \mathscr{F}$.

7.8 Bemerkung. a) Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist die Menge aller Umgebungen von x offensichtlich ein Filter.

b) Sei (X, τ) ein topologischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge und $x \in X$. Definiere den Filter

$$\mathscr{F} := \{F \subset X : \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_0 : x_n \in F\}.$$

Dann konvergiert $(x_n)_n$ genau dann gegen x, falls $\mathscr{F}$ gegen x konvergiert. Dies folgt sofort aus der Definition der Konvergenz in Definition 6.9.

7.9 Lemma. *Sei X eine Menge und $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter auf X. Dann gilt für jede Menge $A \subset X$ entweder $A \in \mathscr{F}$ oder $A^c \in \mathscr{F}$ (aber nicht beides).*

Beweis. Beides kann nicht gelten, da sonst $\emptyset = A \cap A^c \in \mathscr{F}$.

(i) Es gilt $A \cap F \neq \emptyset \quad (F \in \mathscr{F})$ oder $A^c \cap F \neq \emptyset \quad (F \in \mathscr{F})$: Denn sonst existieren $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ mit $A \cap F_1 = \emptyset$ und $A \cap F_2 = \emptyset$. Damit gilt $F_1 \subset A^c$ und $F_2 \subset A$ und damit

$$\mathscr{F} \ni F_1 \cap F_2 \subset A^c \cap A = \emptyset$$

im Widerspruch zur Filtereigenschaft von $\mathscr{F}$. O.E. sei $A \cap F \neq \emptyset \quad (F \in \mathscr{F})$.

(ii) Definiere nun

$$\mathscr{F}' := \{\widetilde{F} \subset X : \exists\, F \in \mathscr{F} : \widetilde{F} \supset F \cap A\}.$$

Dann ist $\mathscr{F}'$ offensichtlich ein Filter, und es gilt $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$ und $A \in \mathscr{F}'$ (wegen $X \in \mathscr{F}$). Da $\mathscr{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$ und damit $A \in \mathscr{F}$. □

b) Das Lemma von Zorn und der Satz von Tychonov

Das Lemma von Zorn ist eine der wichtigsten Aussagen der Mathematik und handelt von partiell geordneten Mengen. Wir beginnen mit der entsprechenden Definition.

7.10 Definition. a) Eine Menge M heißt partiell geordnet durch eine Relation „$\preceq$“, falls gilt

(i) Reflexivität: Für alle $m \in M$ gilt $m \preceq m$.

(ii) Antisymmetrie: Für alle $m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 \preceq m_2$ und $m_2 \preceq m_1$ folgt $m_1 = m_2$.

(iii) Transitivität: Für alle $m_1, m_2, m_3 \in M$ mit $m_1 \preceq m_2$ und $m_2 \preceq m_3$ gilt $m_1 \preceq m_3$.

Man beachte, dass nicht verlangt wird, dass für je zwei Elemente $m_1, m_2 \in M$ eine der beiden Relationen $m_1 \preceq m_2$ oder $m_2 \preceq m_1$ gilt.

b) Sei $(M, \preceq)$ partiell geordnet. Eine Menge $K \subset M$ heißt eine Kette, falls für alle $m_1, m_2 \in K$ (mindestens) eine der beiden Relationen $m_1 \preceq m_2$ oder $m_2 \preceq m_1$ gilt, d.h. falls je zwei Elemente von K vergleichbar sind. Die Menge K heißt beschränkt, falls ein $m \in M$ existiert mit $k \leq m \quad (k \in K)$. Ein Element $m \in M$ heißt maximal (in M), falls es kein $m' \in M$ gibt mit $m \preceq m'$ und $m \neq m'$.

7.11 Beispiele. a) Sei X eine Menge. Dann ist $(\mathscr{P}(X), \subset)$ eine partielle Ordnung mit maximalem Element X. Man beachte, dass „$\subset$“ keine totale (vollständige) Ordnung ist, falls X mindestens zwei Elemente besitzt.

b) Sei V ein Vektorraum und $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ die Familie aller linear unabhängigen Teilmengen von V. (D.h. jedes Element $B \in \mathscr{B}$ ist von der Form $B = \{b_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ mit einer Indexmenge Λ, wobei die Menge $\{b_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ linear unabhängig ist.) Dann ist $\mathscr{B}$ durch Mengeninklusion partiell geordnet.

Sei nun $U \subset V$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren. Dann ist die Familie aller linear unabhängiger Obermengen von U ebenfalls durch Mengeninklusion partiell geordnet.

c) Sei X eine Menge und $\mathscr{F}$ ein Filter auf X. Dann ist die Menge

$$\Big\{\mathscr{F}' : \mathscr{F}' \quad \text{ist Filter auf } X \text{ mit } \mathscr{F} \subset \mathscr{F}'\Big\}$$

durch Mengeninklusion partiell geordnet.

7.12 Satz (Lemma von Zorn). *Sei $(M, \preceq)$ eine nichtleere partiell geordnete Menge. Falls jede Kette $K \subset M$ beschränkt ist, so besitzt M mindestens ein maximales Element.*

Das Lemma von Zorn kann nicht aus den gewöhnlichen Axiomen der Analysis hergeleitet werden. Es ist logisch äquivalent zu jedem der beiden folgenden Aussagen. Die Gültigkeit einer (und damit aller drei) dieser Aussagen ist ein zusätzliches Axiom, welches (fast immer) in der Analysis als wahr angenommen wird. Auch wir werden im folgenden das Lemma von Zorn als gültig annehmen. Die Äquivalenz des Zornschen Lemmas mit dem Auswahlaxiom und mit dem Wohlordnungssatz ist Teil der Mengenlehre und wird hier nicht bewiesen.

7.13 Axiom (Auswahlaxiom). *Sei* Λ *eine Menge und* $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *eine Familie von Mengen. Falls* $M_\lambda \neq \emptyset$ *für jedes* $\lambda \in \Lambda$ *gilt, so ist auch* $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \neq \emptyset$.

Für die nächste Aussage wird an den Begriff der Wohlordnung erinnert. Eine Menge heißt wohlgeordnet, wenn jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element (bzgl. der Ordnung) besitzt. So ist z.B. $\mathbb{N}$ wohlgeordnet, aber $\mathbb{R}$, versehen mit der natürlichen Ordnung, ist nicht wohlgeordnet, da etwa die Menge $(0,1)$ kein kleinstes Element besitzt. Der folgende Satz – wie erwähnt äquivalent zum Auswahlaxiom und zum Zornschen Lemma – ist daher nicht so leicht einsichtlich.

7.14 Satz (Wohlordnungssatz). *Jede Menge kann wohlgeordnet werden.*

Aus dem Zornschen Lemma folgen eine ganze Reihe wichtiger Existenzaussagen der Analysis und Linearen Algebra. Hier nur zwei Beispiele.

7.15 Korollar. *a) Jeder Vektorraum besitzt eine Vektorraumbasis. Jede linear unabhängige Teilmenge zu einer Basis ergänzt werden.*

b) Jeder Filter auf einer Menge ist in einem Ultrafilter enthalten.

Beweis. a) Wir greifen Beispiel 7.11 b) auf und zeigen, dass jede Kette in V beschränkt ist. Sei also $\mathscr{K} = \{U_i : i \in I\}$ eine Kette linear unabhängiger Teilmengen von V. Dann ist $U := \bigcup_{i\in I} U_i$ wieder linear unabhängig und damit eine obere Schranke der Kette K. Denn zu je endlich vielen Elementen $u_1, \dots, u_n \in U$ existieren Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $u_\ell \in U_{i_\ell}$. Da $\mathscr{K}$ eine Kette ist, ist eine der Mengen $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ maximal, etwa U_{i_1}. Es folgt $u_\ell \in U_{i_1}$ für alle $\ell = 1, \dots, n$. Da aber U_{i_1} linear unabhängig ist, existiert keine nichttriviale Linearkombination der Form $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$, d.h. $\{u_1, \dots, u_n\}$ ist linear unabhängig.

Nach dem Zornschen Lemma besitzt V eine maximale linear unabhängige Menge, also eine Vektorraumbasis.

Genauso zeigt man den Satz von der Basisergänzung, indem man jetzt nur solche linear unabhängigen Mengen betrachtet, welche die gegebene enthalten.

b) Die Existenz mindestens eines Ultrafilters zeigt man genauso, indem man nun die Menge aller Filter $\mathscr{F}'$ betrachtet, welche $\mathscr{F}$ enthalten. Jede Kette ist beschränkt durch die Vereinigung der Mengen in der Kette, und die nach dem Lemma von Zorn existierenden maximalen Elemente sind nach Definition gerade die Ultrafilter. □

Das Lemma von Zorn geht auch in den Beweis des nächsten Satzes ein, welcher schon ein wichtiger Schritt für den Satz von Tychonov darstellt.

7.16 Satz. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $\mathscr{S} \subset \tau$ eine Subbasis von τ. Falls jede Überdeckung der Form $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ mit $S_\lambda \in \mathscr{S}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, so ist X bereits kompakt.*

Beweis. (i) Wir zeigen, dass jeder Ultrafilter auf X konvergiert. Angenommen, $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ sei ein nicht konvergenter Ultrafilter auf X.

Sei $x \in X$ und $\mathscr{S}_x := \{S \in \mathscr{S} : x \in S\}$. Dann gilt $S_x \not\subset \mathscr{F}$, denn sonst wären alle endlichen Durchschnitte aus $\mathscr{S}_x$ ebenfalls in $\mathscr{F}$ und damit alle Umgebungen von x, d.h. der Filter $\mathscr{F}$ konvergiert gegen x.

Wegen $\mathscr{S}_x \not\subset \mathscr{F}$ existiert zu $x \in X$ ein $S_x \in \mathscr{S}_x \setminus \mathscr{F}$. Nach Voraussetzung besitzt

$$X = \bigcup_{x\in X} S_x$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$X = S_{x_1} \cup \cdots \cup S_{x_n}.$$

Wegen $S_{x_i} \notin \mathscr{F}$ folgt aus Lemma 7.9 $S_{x_i}^c \in \mathscr{F}$ und damit

$$\emptyset = S_{x_1}^c \cap \cdots \cap S_{x_n}^c \in \mathscr{F}$$

im Widerspruch zur Filtereigenschaft von $\mathscr{F}$.

(ii) Wir zeigen, dass X kompakt ist. Angenommen, es existiert eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, welche keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Definiere

$$\mathscr{F} := \Big\{ V \subset X :\ V \supset X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i} : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda,\ n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

(D.h. $\mathscr{F}$ besteht aus allen Obermengen aller Komplemente endlicher Vereinigungen der Mengen U_λ.)

Dann ist $\mathscr{F}$ ein Filter, wie man sofort sieht (insbesondere ist $\emptyset \notin \mathscr{F}$, da es sonst eine endliche Teilüberdeckung von X gäbe). Nach Korollar 7.15 b) zum Zornschen Lemma existiert ein Ultrafilter $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$. Nach (i) konvergiert $\mathscr{F}'$ gegen ein Element $x_0 \in X$. Wegen $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ existiert ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $x_0 \in U_{\lambda_0}$.

Da U_{λ_0} eine Umgebung von x_0 ist und $\mathscr{F}$ gegen x_0 konvergiert, folgt $U_{\lambda_0} \in \mathscr{F}$. Andererseits gilt nach Definition von $\mathscr{F}$ auch $U_{\lambda_0}^c = X \setminus U_{\lambda_0} \in \mathscr{F}$ und damit $\emptyset \in \mathscr{F}$ im Widerspruch zu den Filteraxiomen. □

Damit können wir nun den Hauptsatz dieses Abschnitts beweisen.

7.17 Satz (von Tychonov). *Sei I eine Menge und $\{X_i : i \in I\}$ eine Familie kompakter topologischer Räume (X_i, τ_i). Dann ist der Produktraum $X = \prod_{i\in I} X_i$ ebenfalls kompakt.*

Beweis. Wir rechnen das Kriterium aus Satz 7.16 nach. Die kanonische Subbasis der Produkttopologie ist nach Bemerkung 7.5 gegeben durch

$$\mathscr{S}_{\mathrm{pr}} = \{\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i, i \in I\}.$$

Angenommen, es existiert eine Überdeckung der Form

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$$

mit $S_\lambda \in \mathscr{S}_{\mathrm{pr}}$, welche keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(i) Für jedes $i \in I$ und jedes $x_i \in X_i$ gilt eine der beiden folgenden Alternativen:

(I) Es existiert ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $\mathrm{pr}_i^{-1}(\{x_i\}) \subset S_{\lambda_0}$, wobei S_{λ_0} die Form $S_{\lambda_0} = \mathrm{pr}_i^{-1}(U(x_i))$ mit $x_i \in U(x_i) \in \tau_i$ hat.

(II) Die Menge $\mathrm{pr}_i^{-1}(\{x_i\}) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda (= X)$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung.

Denn falls (II) nicht gilt, d.h. wenn eine endliche Teilüberdeckung existiert, muss diese bereits aus einer Menge bestehen, da sonst bereits der ganze Raum endlich überdeckt wird.

(ii) Für jedes $i \in I$ existiert ein $x_i^{(0)} \in X_i$, bei welchem die Alternative (II) zutrifft. Denn sonst wäre $\bigcup_{x_i\in X_i} U(x_i) = X_i$ eine offene Überdeckung von X_i. Da (X_i, τ_i) kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$X_i = U(x_i^{(1)}) \cup \dots \cup U(x_i^{(n)}).$$

Aber dann ist

$$X = \mathrm{pr}_i^{-1}(U(x_i^{(1)})) \cup \dots \cup \mathrm{pr}_i^{-1}(U(x_i^{(n)}))$$

eine endliche Teilüberdeckung von X, Widerspruch.

(iii) Setze nun $x^{(0)} := \big(x_i^{(0)}\big)_{i\in I} \in X$. Wegen $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ existiert ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $x^{(0)} \in S_{\lambda_0}$. Da $S_{\lambda_0} \in \mathscr{S}_{\mathrm{pr}}$, existiert ein $j \in I$ und ein $U_j \in \tau_j$ mit $S_{\lambda_0} = \mathrm{pr}_j^{-1}(U_j)$.

Also gilt $\mathrm{pr}_j^{-1}(\{x_j^{(0)}\}) \subset \mathrm{pr}_j^{-1}(U_j)$, d.h. für $x_j^{(0)}$ trifft die Alternative (I) zu. Dies steht aber im Widerspruch zur Wahl von $x_j^{(0)}$. □

III. Anwendungen und Ergänzungen

8. Eigenschaften der L^p-Räume

8.1 Worum geht's? Die L^p-Räume (als Äquivalenzklassen) sind uns bereits bekannt. Es handelt sich um normierte Räume. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die L^p-Räume vollständig und damit Banachräume sind. Bemerkenswert an dieser Aussage ist auch, dass keine Bedingungen an den zugrunde liegenden Maßraum gestellt wird und dass die Aussage für alle $1 \leq p \leq \infty$ gilt. Besonders wichtig ist der Fall $p = 2$: Hier hat man sogar einen Hilbertraum. Die L^2-Räume sind die Grundlage für viele weitergehende Untersuchungen der Analysis und der Physik. Z.B. ist $L^2(\mathbb{R}^n)$ einer der fundamentalen Räume der Quantenmechanik.

Die Testfunktionen (d.h. die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger) liegen dicht in L^p für alle p mit $1 \leq p < \infty$. Diese Aussage ist wichtig, da sie es erlaubt, sich bei Abschätzungen in L^p-Normen auf Testfunktionen zu beschränken. Der Beweis der Dichtheit der Testfunktionen wird unter Verwendung der Faltung geführt. Die Faltung einer recht allgemeinen Funktion mit einer glatten Funktion ergibt wieder eine glatte Funktion; man spricht auch vom Friedrichschen Glättungsoperator.

Die Faltung hat aber auch selbst eine wichtige Bedeutung: Betrachtet man etwa recht allgemeine lineare und zeitinvariante Übertragungssysteme, so kann die Ausgabe als Faltung beschrieben werden. Dieser Zugang ist etwa wichtig in der Signaltheorie; so wird etwa der Kanal eines Rundfunk- oder Fernsehsystems mit Hilfe der Faltung beschrieben.

a) Die Faltung

Im folgenden beziehen sich die Begriffe wie Messbarkeit und Integrierbarkeit stets auf das Lebesgue-Maß. Dabei heißt messbar zunächst Borel-messbar, falls nötig, verwenden wir auch die Vervollständigung des Lebesgue-Maßes, also Lebesgue-messbare Mengen.

8.2 Bezeichnung. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

Für eine Menge $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ setzen wir $L^p(A) := L^p(\lambda|_A; \mathbb{C})$ mit dem n-dimensionalen Lebesgue-Maß λ. Wir schreiben häufig $\int f(y)dy$ statt $\int f d\lambda$. In der Literatur ist auch die Schreibweise $L_p(A)$ üblich.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Träger einer Funktion $f \colon U \to \mathbb{C}$ ist definiert als $\operatorname{supp} f :=$

$\overline{\{f \neq 0\}}$. Wir wiederholen wichtige Funktionenräume:

$$\begin{aligned}
B(U) &:= \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \text{ messbar und beschränkt}\},\\
C(U) &:= \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \text{ stetig}\},\\
BC(U) &:= C_b(U) := \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \text{ stetig und beschränkt}\},\\
BUC(U) &:= \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \text{ gleichmäßig stetig und beschränkt}\},\\
C_c(U) &:= \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \text{ stetig mit kompaktem Träger}\},\\
C^k(U) &:= \{f\colon U \to \mathbb{C} | f \;\; k\text{-mal stetig differenzierbar}\} \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}),\\
C_c^k(U) &:= C^k(U) \cap C_c(U),\\
\mathscr{D}(U) &:= C_c^\infty(U),\\
C_0(\mathbb{R}^n) &:= \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} | f \;\text{ stetig },\; \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\},
\end{aligned}$$

Der Raum $\mathscr{D}(U)$ heißt auch der Raum der Testfunktionen auf U.

8.3 Definition. Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar. Definiere

$$N_{f,g} := \{x \in \mathbb{R}^n : \int |f(y)| \cdot |g(x-y)| dy = \infty\}$$

und das Faltungsprodukt $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ durch

$$(f*g)(x) := \begin{cases} \int f(y)g(x-y)dy, & x \notin N_{f,g},\\ 0, & x \in N_{f,g}. \end{cases}$$

8.4 Bemerkung. Definiere die Abbildung $\delta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $\delta(x,y) = x - y$. Dann ist δ stetig und damit messbar. Also ist die Abbildung $(x,y) \mapsto f(y)g(x-y) = (f \cdot (g \circ \delta))(x,y)$ ebenfalls messbar. Nach Lemma 4.8 ii) ist $N_{f,g} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und $f * g$ messbar.

8.5 Lemma. *Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar.*

a) Es ist $f * g = g * f$, d.h. die Faltung ist kommutativ.

b) Es gilt $\{f * g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\} = \{y_1 + y_2 : f(y_1) \neq 0,\ g(y_2) \neq 0\}$.

c) Falls $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\lambda(N_{f,g}) = 0$ und $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

d) Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ist dann $\lambda(N_{f,g}) = 0$ und $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

e) Falls $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $(f*g)*h = f*(g*h)$, d.h. die Faltung ist assoziativ.

Beweis. a) folgt sofort aus dem Transformationssatz mit der Transformation $y \mapsto x - y$, einmal angewendet auf den Integranden $|f(\cdot)g(x-\cdot)|$ und einmal auf den Integranden $f(\cdot)g(x-\cdot)$.

b) Falls $x \notin \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$ und $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig, so ist $f(y)g(x-y) = 0$ wegen $x = y + (x-y)$. Also ist $(f * g)(x) = 0$.

c) Nach dem Satz von Fubini und mit der Translationsinvarianz des Lebesgue-Integrals gilt

$$\int \Big(\int |f(y)| \cdot |g(x-y)| dy \Big) dx = \int |f(y)| dy \int |g(x-y)| dx = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Nach Lemma 2.16 a) folgt $\lambda(N_{f,g}) = 0$ und

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int \Big| \int f(y)g(x-y)dy \Big| dx \\ &\leq \int \Big(\int |f(y)| \cdot |g(x-y)| dy \Big) dx = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \end{aligned}$$

d) Nach der Hölderschen Ungleichung gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

$$|(f * g)(x)| \leq \int |f(y)| \cdot |g(x-y)| dy = \big\| f(\cdot)g(x-\cdot) \big\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

wobei wieder die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes verwendet wurde.

e) folgt mit Fubini. □

8.6 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt lokal integrierbar in U, falls f messbar ist und $f \cdot \chi_K \in L^1(U)$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset U$ gilt. Man schreibt auch $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$.

8.7 Bemerkung. a) Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Dann gilt $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ für $1 \leq p \leq q \leq \infty$, da für alle $f \in L^q(\mu)$ gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int |f|^p d\mu = \int_{\{|f|>1\}} |f|^p d\mu + \int_{\{|f|\leq 1\}} |f|^p d\mu \\ &\leq \int_{\{|f|>1\}} |f|^q d\mu + \mu(X) \leq \|f\|_q^q + \mu(X) < \infty. \end{aligned}$$

b) Insbesondere folgt $L^p(U) \subset L^1_{\text{loc}}(U)$ für alle $U \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $1 \leq p \leq \infty$.

8.8 Lemma. *a) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} g$ kompakt. Dann ist auch $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$, dann ist $f * g$ stetig. Das Gleiche gilt, falls $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $L := K - \operatorname{supp} g$. Als stetiges Bild der kompakten Menge $K \times \operatorname{supp} g$ unter der Abbildung $\delta\colon (x, y) \mapsto x - y$ ist L wieder kompakt. Für $x \in K$ und $y \in \mathbb{R}^n$ ist $f(x-y)g(y) = (f \cdot \chi_L)(x-y)g(y)$. Wegen $f \cdot \chi_L \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\chi_K \cdot (f * g) = \chi_K \cdot [(f \cdot \chi_L) * g] \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

nach Lemma 4.9 c).

b) folgt aus dem Satz über die Parameterabhängigkeit des Integrals 3.7 a). □

8.9 Satz. *Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$, und es gilt*

$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g) \quad (|\alpha| \le k).$$

Insbesondere ist $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, falls $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Nach Lemma 8.8 ist $f * g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Da die Differenzierbarkeit eine lokale Aussage ist, kann man $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Dann folgt die Aussage aus Satz 3.7 b) über Parameterabhängigkeit der Integrale, da $D^\alpha g$ als stetige Funktion mit kompaktem Träger beschränkt ist. □

b) Vollständigkeits- und Dichtheitsaussagen

Wir wissen bereits, dass die L^p-Räume normierte Räume sind. Sie sind aber auch vollständig, also Banachräume.

8.10 Satz. *Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \le p \le \infty$. Dann ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.*

Beweis. Nach Satz 3.16 ist $L^p(\mu)$ ein normierter Raum, es ist also nur noch die Vollständigkeit zu zeigen.

(i) Sei $1 \le p < \infty$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ eine Cauchyfolge. Wähle eine Teilfolge $(f_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\|f_{k,j} - f_{k,j+1}\|_p \le 2^{-j}$ und definiere

$$g_\ell := \sum_{j=1}^{\ell} |f_{k,j} - f_{k,j+1}|, \quad g := \sum_{j=1}^{\infty} |f_{k,j} - f_{k,j+1}|.$$

Aus der Minkowskischen Ungleichung folgt $\|g_\ell\|_p \le 1$, und nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$\|g\|_p^p = \int |g|^p d\mu = \int |\lim_{\ell\to\infty} g_\ell|^p d\mu = \lim_{\ell\to\infty} \int |g_\ell|^p d\mu \le 1.$$

Nach Lemma 2.16 ist g μ-fast überall endlich und damit ist die Reihe

$$f(x) := f_{k,1}(x) + \sum_{j=1}^\infty (f_{k,j}(x) - f_{k,j+1}(x))$$

für μ-fast alle $x \in X$ absolut konvergent. Somit gilt $f = \lim_{j\to\infty} f_{k,j}$ μ-fast überall. Setze noch $f = 0$, falls die obige Reihe nicht absolut konvergent ist, so ist f messbar als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen.

Wir zeigen $\|f - f_k\|_p \to 0 \quad (k \to \infty)$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f_\ell\|_p < \varepsilon$ für alle $k, \ell \ge N$. Nach dem Lemma von Fatou ist

$$\int |f - f_k|^p d\mu = \int \lim_{j\to\infty} |f_{k,j} - f_k|^p d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int |f_{k,j} - f_k|^p d\mu \le \varepsilon^p.$$

Insbesondere ist $f - f_k \in L^p(\mu)$ und damit $f = f_k + (f - f_k) \in L^p(\mu)$, und $f_k \to f$ in $L^p(\mu)$.

(ii) Sei nun $p = \infty$. Definiere $N_k := \{|f_k| > \|f_k\|_\infty\}$ und $N_{k,\ell} := \{|f_k - f_\ell| > \|f_k - f_\ell\|_\infty\}$. Dann sind all diese Mengen Nullmengen, also auch ihre Vereinigung N. Außerhalb von N ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bzgl. Supremumsnorm von beschränkten Funktionen. Also konvergiert diese Folge in $X \setminus N$ gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion f. Setzt man noch $f = 0$ auf N, so ist $f \in L^\infty(\mu)$ und $f_k \to f$ in $L^\infty(\mu)$. □

8.11 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $1 \le p \le \infty$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ eine Folge mit $f_n \to f \in L^p(\mu) \quad (n \to \infty)$. Dann besitzt $(f_n)_n$ eine Teilfolge, welche μ-fast überall gegen f konvergiert.*

Beweis. Das wurde im Beweis von Satz 8.10 mit gezeigt. □

8.12 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann wird durch*

$$\langle f, g\rangle_2 := \int f\, \overline{g}\, d\mu \quad (f, g \in L^2(\mu))$$

ein Skalarprodukt auf $L^2(\mu)$ erklärt. Der Raum $(L^2(\mu), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis. Die Wohldefiniertheit des Skalarprodukts folgt aus der Hölderschen Ungleichung, die Eigenschaften eines Skalarprodukts sind klar, und die Vollständigkeit wurde in Satz 8.10 gezeigt. □

8.13 Satz (von Lusin). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\lambda(U) < \infty$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$ messbar. Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \subset U$ mit $\lambda(U \setminus K) < \varepsilon$, so dass $f|_K$ stetig ist.*

Beweis. O.E. sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wähle zu festem $i \in \mathbb{N}$ Mengen $B_{ij} \subset \mathbb{R}$ ($j \in \mathbb{N}$) mit $(B_{ij})_j$ disjunkt, B_{ij} messbar, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_{ij} = \mathbb{R}$ und

$$\operatorname{diam}(B_{ij}) := \sup_{s,t\in B_{ij}} |s-t| < \frac{1}{i}\,.$$

Setze

$$A_{ij} := U \cap f^{-1}(B_{ij}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{ij} = U$. Wir verwenden die Regularität des Lebesgue-Maßes (Satz 1.26):

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakt}\} \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)).$$

Somit können wir kompakte Mengen $K_{ij} \subset A_{ij}$ wählen mit $\lambda(A_{ij} \setminus K_{ij}) < \varepsilon \cdot 2^{-(i+j)}$. Dann ist

$$\lambda\Big(U \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_{ij}\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_{ij} \setminus K_{ij})\Big) < \frac{\varepsilon}{2^i}\,.$$

Somit existiert ein $N(i) \in \mathbb{N}$ mit

$$\lambda\Big(U \setminus \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}\Big) < \frac{\varepsilon}{2^i}\,.$$

Definiere $D_i := \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}$. Dann ist D_i kompakt.

Wähle nun für alle i, j ein $b_{ij} \in B_{ij}$ und definiere

$$g_i\colon D_i \to \mathbb{R},\ g_i(x) := b_{ij} \text{ für } x \in K_{ij} \quad (j = 1, \dots, N(i)).$$

Da die Mengen K_{ij} disjunkt und kompakt sind, haben sie einen positiven Abstand, d.h. g_i ist stetig.

Es gilt

$$|f(x) - g_i(x)| \le \frac{1}{i} \quad (x \in D_i). \tag{8-1}$$

Setzt man schließlich $K := \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$, so ist K kompakt, und es gilt

$$\lambda(U \setminus K) \le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(U \setminus D_i) < \varepsilon.$$

Andererseits konvergiert wegen (8-1) die Folge $(g_i)_i$ gleichmäßig auf K gegen f. Damit ist $f|_K$ stetig. □

8.14 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$. Dann ist $C_c(U)$ dicht in $L_p(U)$.*

Beweis. O.E. sei $f \in L^p(U;\mathbb{R})$ mit $f \ge 0$ (sonst verwende man eine Zerlegung). Sei $\varepsilon > 0$.

Wegen
$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k \quad \text{mit } U_k := \Big\{x \in U : |x| < k,\ \operatorname{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{k}\Big\}$$
gilt $\int_U |f - f \cdot \chi_{U_k}|^p d\lambda \to 0 \quad (k \to \infty)$. Wähle ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_k\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$ für $f_k := f \cdot \chi_{U_k}$.

Zu f_k existiert eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit $s_n \nearrow f_k$ punktweise. Wegen $0 \le s_n \le f_k$ ist $s_n \in L_p(U)$. Wegen $(f_k - s_n)^p \le f_k^p$ folgt mit majorisierter Konvergenz $s_n \to f_k$ in $L_p(U)$. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$\|f_k - s_{n_0}\|_p < \frac{\varepsilon}{4}\ .$$

Da $\lambda(U_k) < \infty$, existiert nach dem Satz von Lusin 8.13 eine kompakte Menge $K \subset U_k$ mit $s_{n_0}|_K$ stetig und
$$\lambda(U_k \setminus K) < \Big(\frac{\varepsilon}{4\|s_{n_0}\|_\infty}\Big)^p.$$
Setze nun
$$\widetilde{\varphi}(x) := \begin{cases} s_{n_0}(x), & x \in K, \\ 0, & x \in U \setminus U_k. \end{cases}$$
Da K und $U \setminus U_k$ disjunkt und beide abgeschlossen (in der Relativtopologie von U) sind, existiert nach dem Erweiterungslemma von Tietze (Satz 6.20) eine Fortsetzung $\varphi \in C(U)$ mit $|\varphi(x)| \le \|s_{n_0}\|_\infty \quad (x \in U)$. Wegen $\varphi = 0$ auf $U \setminus U_k$ ist $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{U_k} \subset U$, d.h. $\varphi \in C_c(U)$.

Es gilt
$$\begin{aligned}\|s_{n_0} - \varphi\|_p^p &= \int_U |s_{n_0} - \varphi|^p d\lambda = \int_{U_k\setminus K} |s_{n_0} - \varphi|^p d\lambda \\ &\le 2^p \|s_{n_0}\|_\infty^p\, \lambda(U_k \setminus K) < \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p.\end{aligned}$$

Damit ist $\|f - \varphi\|_p \le \|f - f_k\|_p + \|f_k - s_{n_0}\|_p + \|s_{n_0} - \varphi\|_p < \varepsilon$. □

8.15 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann liegt $\mathscr{D}(U)$ dicht in $L^p(U)$ für alle $1 \le p < \infty$.*

Beweis. Der Beweis wird unter Verwendung des Friedrichschen Glättungsoperators geführt. Seien $f \in L^p(U)$ und $\varepsilon > 0$.

Nach Satz 8.14 existiert ein $g \in C_c(U)$ mit $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Wähle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$, $\int \varphi(x)dx = 1$ und $\operatorname{supp} \varphi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. Setze dann $\varphi_\eta(x) := \eta^{-n}\varphi(\frac{x}{\eta})$ für $\eta > 0$. Dann gilt $\operatorname{supp} \varphi_\eta \subset \{|x| \leq \eta\}$.

Nach Satz 8.9 gilt $g * \varphi_\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nach Lemma 8.6 b) ist für hinreichend kleine η die Menge

$$K := \operatorname{supp} g \cup \operatorname{supp}(g * \varphi_\eta) \subset U$$

kompakt, d.h. $g * \varphi_\eta \in \mathscr{D}(U)$.

Für $x \in K$ gilt

$$\begin{aligned} |g * \varphi_\eta(x) - g(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\eta(x-y)\big(g(x) - g(y)\big)dy \Big| \\ &\leq \Big(\sup_{|x-y|\leq\eta} |g(x) - g(y)| \Big) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\eta(x-y)dy \\ &= \sup_{|x-y|\leq\eta} |g(x) - g(y)|. \end{aligned}$$

Da K kompakt und $g \in C(K)$, ist g auf K gleichmäßig stetig. Damit existiert ein $\eta > 0$ mit

$$\sup_{|x-y|\leq\eta} |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \Big(\frac{1}{\lambda(K)} \Big)^{1/p}.$$

Damit folgt

$$\int_U |g * \varphi_\eta(x) - g(x)|^p dx \leq \lambda(K) \sup_{x \in K} |g * \varphi_\eta(x) - g(x)|^p < \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^p.$$

Damit erhalten wir $\|f - (g * \varphi_\eta)\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - (g * \varphi_\eta)\|_p < \varepsilon$. □

9. Die Fourier-Transformation

9.1 Worum geht's? Die Fourier-Transformation beschreibt mathematisch die Zerlegung einer Funktion oder eines akustischen oder elektromagnetischen Signals in Grundschwingungen. Innerhalb der Mathematik tritt die Fourier-Transformation insbesondere im Rahmen der partiellen Differentialgleichungen auf. Dies liegt daran, dass die Ableitung in der Fourier-Transformierten zur Multiplikation mit der Koordinatenfunktion wird.

Die Fourier-Transformierte ist zunächst für Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert. Schränkt man die Fourier-Transformation auf den Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein, so erhalten wir eine Isometrie bzgl. $\|\cdot\|_2$-Norm. Damit können wir die Fourier-Transformation auch auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ definieren, was für Anwendungen wichtig ist, da es sich bei $L^2(\mathbb{R}^n)$ um einen Hilbertraum handelt.

Im folgenden wird die Multiindex-Schreibweise aus Definition 6.13 verwendet.

9.2 Definition. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt $\mathscr{F}f$, definiert durch

$$(\mathscr{F}f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n),$$

die Fourier-Transformierte von f.

9.3 Lemma (Elementare Eigenschaften). *Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$ und $a \in \mathbb{R}^n$.*

a) Für $g(x) := f(x)e^{iax}$ gilt $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$.

b) Für $g(x) := f(x - a)$ gilt $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-ia\xi}$.

c) Für $g(x) := \overline{f(-x)}$ gilt $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$.

d) Für $g(x) := f(\frac{x}{\alpha})$ gilt $\hat{g}(\xi) = \alpha^n \hat{f}(\alpha\xi)$.

e) Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $h := f * g$. Dann gilt $\hat{h}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$.

Beweis. Die Aussagen a)-c) folgen unmittelbar aus der Definition, Teil d) folgt aus dem Transformationssatz. Für e) verwende man den Satz von Fubini und erhalte

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int \Big[\int f(x-y)g(y)dy \Big] e^{-ix\xi} dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int \Big[\int f(x-y)g(y)dy \Big] e^{-i(x-y)\xi} e^{-iy\xi} dx \\
&= (2\pi)^{n/2} \cdot (2\pi)^{-n/2} \int g(y) \Big[(2\pi)^{-n/2} \int f(z) e^{-iz\xi} dz \Big] e^{-iy\xi} dy \\
&= (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

□

9.4 Satz. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathscr{F}f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Die Fourier-Transformation $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to (C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein stetiger linearer Operator mit Norm $\|\mathscr{F}\| \leq (2\pi)^{-n/2}$.*

Beweis. Offensichtlich ist $\mathscr{F}f$ messbar mit $\|\mathscr{F}f\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_1$, d.h. $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist stetig mit Norm nicht größer als $(2\pi)^{-n/2}$.

(i) Wir zeigen, dass $\mathscr{F}f$ stetig ist. Sei dazu $(\xi^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\xi^{(k)} \to \xi$. Dann gilt $e^{-ix\xi^{(k)}} \to e^{-ix\xi} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$ und

$$|\mathscr{F}f(\xi^{(k)}) - \mathscr{F}f(\xi)| \le (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot \underbrace{|e^{-ix\xi^{(k)}} - e^{-ix\xi}|}_{\le 2} dx \to 0$$

mit majorisierter Konvergenz.

(ii) Es gilt $\mathscr{F}f(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$. Dazu verwenden wir, dass nach Satz 8.15 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Da $\mathscr{F} : L^1 \to L^\infty$ stetig ist, reicht es, $\mathscr{F}f(\xi) \to 0$ für $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen.

Sei $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $R > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| \ge R$. Wähle j mit $|\xi_j| \ge \frac{R}{\sqrt{n}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\mathscr{F}f(\xi)| &= \Big| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx \Big| \\
&= \Big| - \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} f(x) \, \frac{1}{-i\xi_j} \, e^{-ix\xi} dx \Big| \\
&\le (2\pi)^{-n/2} \|\partial_{x_j} f\|_1 \cdot \frac{\sqrt{n}}{R} \; \to 0 \quad (R \to \infty).
\end{aligned}$$

□

9.5 Bemerkung. a) Im folgenden wird die Fourier-Transformation insbesondere für Funktionen $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ betrachtet. Der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ wurde bereits in Definition 6.14 definiert. Durch die Familie $L = \{p_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$ mit

$$p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$$

wird $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ zu einem lokalkonvexen topologischen Raum und sogar zu einem Fréchetraum.

Definiere die Familie $\widetilde{L} := \{p_N : N \in \mathbb{N}\}$ von Normen auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$p_N(f) := \sup\{(1+|x|)^N |D^\alpha f(x)| : |\alpha| \le N, \; x \in \mathbb{R}^n\} \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Dann wird durch $\widetilde{L}$ dieselbe lokalkonvexe Topologie auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt. Im folgenden wird $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stets mit dieser lokalkonvexen Topologie versehen.

Man beachte, dass $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ als metrisierbarer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und dass für eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$f_k \to f \; (k \to \infty) \text{ in } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, N \in \mathbb{N} : \; p_N(f - f_k) \to 0 \; (k \to \infty).$$

b) Der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $1 \le p < \infty$. Denn jedes $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt in $L^p(\mathbb{R}^n)$ wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \le \int_{\mathbb{R}^n} c(1+|x|)^{-mp} dx < \infty$$

für $mp > n$. Die Dichtheit von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ ist klar wegen $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) Für Funktionen $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ kann man partiell integrieren, da alle Ableitungen im Unendlichen verschwinden. Man erhält

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(x) g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{R^n} f(x)(D^\alpha g)(x) dx.$$

Dies gilt insbesondere für Testfunktionen $f, g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Für $f, g \in \mathscr{D}(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt analog

$$\int_U (D^\alpha f)(x) g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U f(x)(D^\alpha g)(x) dx,$$

da die nach dem Satz von Gauß auftretenden Randterme alle verschwinden.

9.6 Lemma. *Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:*

(i) $\mathscr{F} f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $D^\alpha(\mathscr{F} f) = (-i)^{|\alpha|} \mathscr{F}(x^\alpha f)$.

(ii) $\mathscr{F}(D^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha (\mathscr{F} f)(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$.

(iii) $\mathscr{F} f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. (i) Da $x \mapsto x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine integrierbare Majorante der Ableitung des Integranden ist, folgt aus dem Satz von der Parameterabhängigkeit des Integrals (Satz 3.7)

$$\begin{aligned} D^\alpha(\mathscr{F} f)(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} e^{-ix\xi} d\xi \\ &= \frac{(-i)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x^\alpha e^{-ix\xi} d\xi = \big(\mathscr{F}(x^\alpha f)(\xi). \end{aligned}$$

(ii) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(D^\alpha f)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D_x^\alpha e^{-ix\xi} dx = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathscr{F} f(\xi). \end{aligned}$$

(iii) Nach (i) gilt $\mathscr{F} f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt

$$x^\alpha D^\beta(\mathscr{F} f)(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathscr{F}(\underbrace{D^\alpha x^\beta f}_{\in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)})(\xi) \to 0 \quad (|\xi| \to \infty),$$

wobei wir Satz 9.4 verwendet haben. □

9.7 Lemma. *Für* $\gamma(x) := \exp(-\frac{x^2}{2})$ *gilt* $\mathscr{F}\gamma = \gamma$.

Beweis. (i) Sei $n = 1$. Die Funktion γ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + xy = 0, \quad y(0) = 1. \tag{9-1}$$

Damit gilt

$$0 = \mathscr{F}(\gamma' + x\gamma) = i\xi(\mathscr{F}\gamma) + i(\mathscr{F}\gamma)'.$$

Wegen

$$(\mathscr{F}\gamma)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

löst $\mathscr{F}\gamma$ ebenfalls das Anfangswertproblem (9-1). Also gilt $\gamma = \mathscr{F}\gamma$.

(ii) Für $n > 1$ schreiben wir

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\gamma)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} \cdot \prod_{j=1}^n e^{-ix_j\xi_j} \Big) dx \\ &= \prod_{j=1}^n \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2/2} e^{-ix_j\xi_j} dx_j \Big) \\ &= \prod_{j=1}^n e^{-\xi_j^2/2} = \gamma(\xi).\end{aligned}$$

$\square$

9.8 Lemma. *a) Für* $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathscr{F}g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}f(x)g(x)dx,$$

d.h. $\langle f, \overline{\mathscr{F}g}\rangle_2 = \langle \mathscr{F}f, \overline{g}\rangle_2$.

b) Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *gilt* $\mathscr{F}^2 f(x) = f(-x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) folgt sofort aus dem Satz von Fubini, da $(x, y) \mapsto f(x)g(y)e^{-ixy} \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$.

b) Sei $\gamma_a(x) := \gamma(ax)$ für $a > 0$ mit γ wie in Lemma 9.7. Nach Lemma 9.3 gilt

$$(\mathscr{F}\gamma_a)(\xi) = a^{-n}(\mathscr{F}\gamma)\Big(\frac{\xi}{a}\Big).$$

Sei $g(x) := e^{-ix\xi_0}\gamma(ax)$ für $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ fest und $a > 0$ fest. Dann ist $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und

$$(\mathscr{F}g)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi_0}\gamma(ax)e^{-ix\xi} = (\mathscr{F}\gamma_a)(\xi + \xi_0) = a^{-n}\gamma\Big(\frac{\xi + \xi_0}{a}\Big).$$

Unter Verwendung von a) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{F}f)(x)g(x)dx &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mathscr{F}g)(x)dx\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)a^{-n}(\mathscr{F}\gamma)\Big(\frac{x+\xi_0}{a}\Big)dx\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(au-\xi_0)\gamma(u)du. \qquad (9\text{-}2)
\end{aligned}
$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir die Substitution $u = \frac{x+\xi_0}{a}$ und die Identität $\mathscr{F}\gamma = \gamma$ verwendet.

Wir nehmen den Grenzwert $a \to 0$. Es gilt dann $\gamma(au) \to 1$ punktweise und $g(x) \to e^{-ix\xi_0}$ punktweise. Wegen $\mathscr{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ können wir majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{F}f)(x)g(x)dx \to (\mathscr{F}^2 f)(\xi_0).$$

Um den Grenzwert für die rechte Seite von (9-2) zu berechnen, verwenden wir $f(au-\xi_0) \to f(-\xi_0)$ punktweise. Da $\|f\|_\infty \cdot \gamma$ eine integrierbare Majorante ist, erhalten wir

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(au-\xi_0)\gamma(u)du \to f(-\xi_0).$$

Also gilt $(\mathscr{F}^2 f)(\xi_0) = f(-\xi_0)$. □

9.9 Definition und Satz. *a) Die Fourier-Transformation $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Bijektion mit*

$$(\mathscr{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

b) (Satz von Plancherel.) Es gilt

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathscr{F}f, \mathscr{F}g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Somit ist $\mathscr{F}|_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}$ eine Isometrie und damit eindeutig zu einem isometrischen Isomorphismus $\mathscr{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzbar, der ebenfalls Fourier-Transformation genannt wird. Insbesondere gilt

$$\|\mathscr{F}_2 f\|_2 = \|f\|_2 \quad (f \in L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Beweis. a) Nach Lemma 9.8 gilt $\mathscr{F}^2 f(x) = f(-x)$, d.h. $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}$. Damit gilt

$$(\mathscr{F}^{-1}g)(x) = (\mathscr{F}^3 g)(x) = (\mathscr{F}g)(-x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

b) Im Beweis von Lemma 9.8 sahen wir

$$\langle \mathscr{F}f, \overline{g}\rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, \overline{\mathscr{F}g}\rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Setze nun $h := \overline{\mathscr{F}g}$, d.h.

$$\overline{g} = \overline{\mathscr{F}^{-1}\overline{h}} = (2\pi)^{-n/2}\overline{\int \overline{h(x)}e^{ix\xi}dx} = \mathscr{F}h.$$

Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ dicht ist, ist die Fortsetzung $\mathscr{F}_2 : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert und ebenfalls isometrisch. Zu zeigen ist noch, dass $\mathscr{F}_2$ surjektiv ist. Sei dazu $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|g - g_k\|_2 \to 0 \quad (k \to \infty)$. Dann ist $(g_k)_k \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ eine Cauchyfolge. Setzt man $f_k := \mathscr{F}^{-1}g_k$, so ist wegen $\|f_k - f_j\|_2 = \|g_k - g_j\|_2$ auch die Folge der Urbilder $(f_k)_k$ eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Da $L^2(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist, existiert $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f \quad (k \to \infty)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Die Fortsetzung $\mathscr{F}_2$ ist stetig, also folgt

$$\mathscr{F}_2 f = \lim_{k\to\infty} \mathscr{F}f_k = \lim_{k\to\infty} g_k = g.$$

Somit ist $\mathscr{F}_2$ surjektiv. □

Der letzte Satz zeigt insbesondere die Stetigkeit von $\mathscr{F}: \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, wenn man $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit der Spurtopologie von $L^2(\mathbb{R}^n)$, also mit der $\|\cdot\|_2$-Norm versieht. Eine andere Frage ist, ob $\mathscr{F}$ auch in der lokalkonvexen Topologie von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist. Dazu dient folgendes Lemma, in welchem p_N wie in Bemerkung 9.5 definiert ist.

9.10 Lemma. *a) Eine lineare Abbildung $T: \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig (bzgl. der lokalkonvexen Topologie von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$), falls ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C > 0$ existiert mit*

$$|Tf| \le Cp_N(f) \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

b) Eine lineare Abbildung $F: \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann stetig, falls gilt

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, N = N(k) \in \mathbb{N}\ \exists\, C = C(k) > 0 : p_k(Ff) \le Cp_N(f) \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Beweis. Wie im normierten Fall sieht man auch bei topologischen Vektorräumen, dass eine lineare Abbildung genau dann stetig ist, falls sie stetig an der Stelle 0 ist.

Setze

$$B_N(f, \varepsilon) := \{g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) : p_N(f - g) < \varepsilon\}.$$

Nach Beispiel 6.6 b) ist

$$\mathscr{U} := \{B_N(0,\delta) : N \in \mathbb{N},\ \delta > 0\}$$

eine Umgebungs-Subbasis von 0. Nach Definition von p_N gilt $p_N(f) \le p_M(f) \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$ für alle $N \ge M$. Damit sind endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathscr{U}$ selbst wieder Obermenge einer Menge in $\mathscr{U}$, d.h. $\mathscr{U}$ ist sogar eine Umgebungsbasis von 0.

a) Die lineare Abbildung $T\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ist nach Definition 6.12 genau dann stetig an der Stelle 0, falls für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $T^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\})$ eine Umgebung von $0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, d.h. falls gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \exists\, \delta > 0 : B_N(0,\delta) \subset T^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}).$$

Aber die Bedingung $B_N(0,\delta) \subset T^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\})$ ist äquivalent zur Bedingung

$$|Tf| < \varepsilon \quad (f \in B_N(0,\delta)).$$

Da T linear und p_N eine Norm ist und damit skaliert werden kann, ist dies äquivalent zur Bedingung

$$|Tf| < \frac{\varepsilon}{\delta}\, p_N(f) \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Dies zeigt die Behauptung a).

b) Wieder ist das Kriterium aus Definition 6.12 nachzurechnen. Während in Teil a) eine Umgebungsbasis der $0 \in \mathbb{C}$ durch Mengen der Form $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ gegeben war, wählt man jetzt eine Umgebungsbasis der $0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ der Form $\{B_N(0,\varepsilon)$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Wie in a) erhält man die Bedingung

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\, \exists\, C > 0 :\ p_k(Ff) \le C p_N(f) \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)),$$

welche für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten muss. □

9.11 Satz. *Die Fourier-Transformation $\mathscr{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.*

Beweis. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\begin{aligned} p_{\alpha,\beta}(\mathscr{F}f) &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta(\mathscr{F}f)(\xi)| \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \Big| \mathscr{F}\big(D^\alpha(x^\beta f)\big)(\xi) \Big| \\ &\le \text{const} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha(x^\beta f(x)) e^{-ix\xi} dx \Big| \\ &\le \text{const} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} dx \ \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big[(1+|x|)^{n+1} |D^\alpha(x^\beta f(x))| \Big] \end{aligned}$$

$$\leq \text{const} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\leq N} (1+|x|)^N |D^\alpha f(x)|$$

für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 9.10 ist $\mathscr{F}$ stetig. □

Damit lässt sich die Fourier-Transformierte auf Distributionen übertragen. Die folgende Definition mit anschließender Bemerkung beendet die Analysis IV, soll aber zugleich den Weg ins Hauptstudium weisen.

9.12 Definition. a) Eine temperierte Distribution ist eine stetige lineare Abbildung $u\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Der Raum der temperierten Distributionen wird mit $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

b) Für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird die Fourier-Transformierte $\mathscr{F}u$ definiert durch

$$(\mathscr{F}u)(\varphi) := u(\mathscr{F}\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

9.13 Bemerkung. Nach Satz 9.11 ist $\mathscr{F}u\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ wieder stetig als Komposition stetiger Funktionen. Damit ist

$$\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$$

linear und bijektiv mit $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)}$.

Anhang A. Übungsaufgaben

Aufgabe 1. Es seien X und Y nichtleere Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Ferner sei $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra über X bzw. Y. Zeigen Sie:

(i) $f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ ist eine σ-Algebra über X.

(ii) $f_*(\mathcal{A}) := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra über Y.

Aufgabe 2. Es sei X eine nichtleere Menge. Zeigen Sie: Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Dynkin-System, wenn gilt:

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt $B \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Für $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $A_1 \subset A_2 \subset ...$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 3. Es sei X eine beliebige Menge und $A_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$. Wir definieren

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} A_n$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n.$$

Zeigen Sie: $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass es keine σ-Algebra gibt, die aus einer unendlichen, aber abzählbaren Anzahl von Elementen besteht.

Definition. Es sei X eine beliebige Menge. Eine Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt konvergent gegen $A \subset X$, falls

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$$

gilt. Man schreibt $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 5. Es sei φ ein σ-additiver Inhalt auf einem Ring Re über X. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Mengen aus Re (d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$: $A_n \subset A_{n+1}$) mit $A = \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathrm{Re}$, so gilt

$$\varphi\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n).$$

(ii) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Mengen aus Re (d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$: $A_{n+1} \subset A_n$) mit $A = \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathrm{Re}$ und $\varphi(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\varphi\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n).$$

Aufgabe 6. Es sei X eine nichtleere Menge, Re ein Ring in X und μ ein Prämaß auf Re (d.h. μ ist ein Inhalt und μ ist σ-additiv). Weiter sei

$$\widetilde{\mathrm{Re}} := \{A \in \mathcal{P}(X) | \forall R \in \mathrm{Re} : A \cap R \in \mathrm{Re}\}$$

und

$$\widetilde{\mu}(A) := \sup\{\mu(R) : R \subset A, R \in \mathrm{Re}\}$$

Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

(i) Das Mengensystem $\widetilde{\mathrm{Re}}$ ist eine Algebra in X mit $\mathrm{Re} \subset \widetilde{\mathrm{Re}}$.

(ii) Die Abbildung $\widetilde{\mu}$ ist ein Prämaß auf $\widetilde{\mathrm{Re}}$, welches μ fortsetzt.

Definition. Ein äusseres Maß $\widetilde{\mu}$ auf einem metrischen Raum (X, d) heißt metrisches äußeres Maß, falls für beliebige Mengen $A, B \subset X$ mit $\inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$ gilt $\widetilde{\mu}(A \cup B) = \widetilde{\mu}(A) + \widetilde{\mu}(B)$.

Aufgabe 7. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\widetilde{\mu}$ ein äusseres Maß auf X, so dass jede offene Menge $\widetilde{\mu}$-messbar ist. Zeigen Sie, dass $\widetilde{\mu}$ dann ein metrisches äusseres Maß ist.

Aufgabe 8. Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und seien μ, ν zwei Maße auf $\mathcal{A}$. Wenn für $A \in \mathcal{A}$ aus $\mu(A) = 0$ schon $\nu(A) = 0$ folgt, so nennen wir ν absolutstetig bezüglich μ und schreiben $\nu \ll \mu$. Es gelte nun $\nu(X) < \infty$. Zeigen Sie

$$\nu \ll \mu \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \mathcal{A} : (\mu(A) < \delta \Longrightarrow \nu(A) < \varepsilon)$$

Definition. Es seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar, falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt.

Aufgabe 9. Es seien X und Y nichtleere Mengen und $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für festes $y \in Y$ ist die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ mit $f(x) = y$ $(x \in X)$ messbar.

(ii) Es sei $\mathcal{B} = \sigma(\mathscr{E})$ (d.h. $\mathscr{E}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}$). Dann ist $f : X \longrightarrow Y$ genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar, wenn $f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathcal{A}$ gilt.

Aufgabe 10. Für $b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $(-\overline{\infty}, b] := (-\infty, b_1] \times \cdots \times (-\infty, b_n]$. Damit seien

$$
\begin{aligned}
J_1 &:= \big\{(a,b] \mid a,\, b \in \mathbb{R}^n\big\}, & J_2 &:= \big\{(a,b] \mid a,\, b \in \mathbb{Q}^n\big\}, \\
J_3 &:= \big\{(-\overline{\infty}, a] \mid a \in \mathbb{R}^n\big\}, & J_4 &:= \big\{(-\overline{\infty}, a] \mid a \in \mathbb{Q}^n\big\}, \\
J_5 &:= \big\{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ abgeschlossen}\big\}, & J_6 &:= \big\{K \subset \mathbb{R}^n \mid K \text{ kompakt}\big\}.
\end{aligned}
$$

Beweisen Sie, dass J_1 bis J_6 jeweils die σ-Algebra der Borelmengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugen.

Aufgabe 11. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Zeigen Sie: Es existieren Borelmengen $F, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $F \subset M \subset G$ und $\lambda(G \setminus M) = \lambda(M \setminus F) = 0$.

Aufgabe 12. Es sei μ ein endlicher, σ-additiver Inhalt auf einer Algebra $\mathcal{A}$ und μ^* das zu μ gehörige äussere Maß. Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ definieren wir weiter

$$d_{\mu^*}(A, B) := \mu^*(A \Delta B),$$

hierbei ist $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die „symmetrische Differenz“ von A und B. Zeigen Sie: Für das Mengensystem $\overline{\sigma}(\mathcal{A})$ aller μ^*-meßbaren Mengen gilt

$$\overline{\sigma}(\mathcal{A}) \subset \{B \in \mathcal{P}(X) : \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathcal{A} : d_{\mu^*}(A, B) < \varepsilon\}.$$

Aufgabe 13. Es sei $T \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine bijektive, lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $T(A)$ für jedes $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue-messbar ist und dass die durch $\mu(A) := \lambda(T(A))$ definierte Abbildung $\mu \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Aufgabe 14. Es sei $f \in L^1(X,\mu)$ beliebig gewählt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann gilt mit $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$:

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu.$$

(ii) Ist $A \in \mathcal{A}$ beliebig gewählt und $N \in \mathcal{A}$ eine μ-Nullmenge, so folgt

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_{A\cup N} f \mathrm{d}\mu.$$

Definition. Wir setzen $\overline{\mathbb{R}}^n := \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$ und definieren die Borel-Sigma-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}^n$ durch

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n) := \sigma\left(\{(a, \overline{\infty}] \subset \overline{\mathbb{R}}^n : a \in \mathbb{R}^n\}\right)$$

Aufgabe 15. Es sei $(X,\mathcal{A})$ ein Messraum und $f_1, ..., f_n \colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}-$meßbare Abbildungen. Ferner sei die Abbildung $F\colon \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)-$meßbar. Zeigen Sie: $h\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $h(x) := F(f_1(x), ..., f_n(x))$, $(x \in X)$ ist $\mathcal{A}$-meßbar.

Aufgabe 16. Eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Radon-Maßen auf einem lokal-kompakten Raum $\mathfrak{E}$ konvergiert genau dann vag gegen ein Radon-Maß μ, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jede kompakte Menge $K \subset \mathfrak{E}$ und jede offene relativ kompakte Menge $G \subset \mathfrak{E}$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K) \text{ bzw. } \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$$

Man hat dabei nur zu beachten, dass das Radon-Maß μ das zur Linearform I_μ gehörige essentielle Maß $\mu_{\mathfrak{Ess}}$ ist. Unterstreichen Sie den Begriff „offen“ mit einem Farbstift Ihrer Wahl, wobei auf ein Lineal nicht verzichtet werden darf. Diskutieren Sie dann den unterstrichenen Begriff mit Ihrem Nebensitzer (sofern vorhanden).

Aufgabe 17. Es seien X und Y nichtleere Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ beliebige $\sigma-$Algebren über Y, so gilt $f^{-1}(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = f^{-1}(\mathcal{A}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{A}_2)$.

(ii) Ist $\mathscr{E} \subset P(Y)$ gegeben, so gilt:

$$f^{-1}\left(\sigma(\mathscr{E})\right) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \ \sigma-Algebra \\ \mathscr{E}\subset\mathcal{A}}} f^{-1}(\mathcal{A}).$$

Aufgabe 18.

(i) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Die Abbildungen $g, f_n \colon X \longrightarrow [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ seien messbar, wobei $\int g \mathrm{d}\mu < \infty$ sei. Weiter gelte $f_n(x) \leq g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu.$$

(ii) Zeigen Sie, dass man in (i) auf die Majorisierungsvoraussetzung, also auf die Existenz einer Funktion g mit den angegebenen Eigenschaften nicht verzichten kann.

Aufgabe 19. Sei $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und beschränkt mit $0 < \lambda(E)$. Ferner sei $\alpha \in [0, 1)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es existiert eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ mit $E \subset U$ und $\alpha\lambda(U) \leq \lambda(E)$.

(ii) Es existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass $\alpha\lambda(I) \leq \lambda(E \cap I)$ gilt.

Hinweis. Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten offenen Intervallen in $\mathbb{R}$, so dass $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gilt. Diese Aussage dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 20. Sei $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und beschränkt mit $0 < \lambda(E)$. Zeigen Sie, dass ein $b > 0$ existiert, so dass $(-b, b) \subset E - E := \{x - y : x, y \in E\}$ gilt.
Hinweis. Verwenden Sie die Aussage von Aufgabe 19: Setzen Sie $\alpha := \frac{3}{4}$ und beweisen Sie dann, dass $\left(-\frac{1}{2}\lambda(I), \frac{1}{2}\lambda(I)\right) \subset E - E$ gilt.

Aufgabe 21. (Wiederholung)

(a) Finden Sie einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ für welchen die folgenden Aussagen falsch sind. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(i) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von offenen Mengen in X und $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, so ist $A \in \mathcal{T}$.

(*ii*) Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Mengen in X, so ist $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ abgeschlossen.

(*iii*) Ist $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Mengen in X, so ist $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ kompakt.

(*b*) Zeigen Sie: Eine Topologie ist im Allgemeinen keine σ-Algebra.

Aufgabe 22. (Wiederholung) Es seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume. Ferner sei $\mathcal{B}$ von $\mathscr{E} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugt und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{E})).$$

Aufgabe 23. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und beschränkt. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(*i*) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $U \subset M$ mit $\lambda(M \setminus U) < \varepsilon$.

(*ii*) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \supset M$ mit $\lambda(K \setminus M) < \varepsilon$.

Aufgabe 24. Wir erklären auf $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation $x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ und bezeichnen die Äquivalenzklasse eines Elements $x \in [-1, 1]$ mit $[x]$. Sei A ein Vertretersystem dieser Äquivalenzrelation, also $[-1, 1] = \bigcup_{x\in A}[x]$, wobei $[x_1] \neq [x_2]$ für $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ (die Existenz eines solchen Vertretersystems sichert das sogenannte Auswahlaxiom). Zeigen Sie, dass A nicht Lebesgue-messbar ist.

Aufgabe 25. (Wiederholung) Es sei $(X, \mathcal{C})$ ein Messraum. Ferner seien $f_n\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ messbare Funktionen. Beweisen Sie, dass die Menge

$$\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existiert in } \mathbb{R}\}$$

messbar ist.

Definition. Es sei $y \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in jedem Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ Riemann-integrierbar. Existieren die Grenzwerte

$$\lim_{c\to-\infty+} \int_c^y f(t)\mathrm{d}t$$

und

$$\lim_{c\to\infty-}\int_y^c f(t)\mathrm{d}t$$

so definiert man das uneigentliche (Riemann-) Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t := \lim_{c\to-\infty+}\int_c^y f(t)\mathrm{d}t + \lim_{c\to\infty-}\int_y^c f(t)\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 26.

(i) Eine auf $\mathbb{R}$ definierte, messbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ sei auf jedem abgeschlossenen Intervall Riemann-integrierbar. Zeigen Sie: f ist genau dann Lebesgue-integrierbar über $\mathbb{R}$, wenn das uneigentliche Riemann-Integral existiert. Es ist dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\lambda.$$

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie: Aus der Existenz des uneigentlichen Riemann-Integrals folgt im Allgemeinen nicht die Lebesgue-Integrierbarkeit.

Hinweis. Sie dürfen verwenden, dass $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ uneigentlich Riemann-integrierbar über $[0,\infty)$ ist.

Aufgabe 27. Es sei $f\colon [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ für $(x,y)\in[0,1]\times\mathbb{R}$ durch $f(x,y) := e^{x^2y^2}$ definiert. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(y) := \int_{[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda(x), \qquad (y\in\mathbb{R})$$

stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 28. (Wiederholung) Zeigen Sie mit Hilfsmitteln der Analysis IV:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathrm{d}\lambda(x) = 1.$$

Aufgabe 29. Es sei $p\geq 1$ und $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\mathrm{d}\lambda(x) = p\int_{[0,\infty)} t^{p-1}\lambda\left(\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)>t\}\right)\mathrm{d}\lambda(t)$$

Aufgabe 30. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $\zeta \colon \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ das Zählmaß auf X und $f \colon X \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann summierbar ist, falls $f \in \mathscr{L}^1(\zeta)$, und dass in diesem Fall die Gleichheit $\sum_{x\in X} f(x) = \int f d\zeta$ gilt.

Aufgabe 31.

(*i*) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und rechtsstetige Funktion. Zeigen Sie, dass genau ein Maß $\mu_g \colon \mathscr{B}([a, b]) \to [0, \infty]$ existiert mit

$$\mu_g((s, t]) = g(t) - g(s) \quad (a \leq s < t \leq b)$$

und $\mu_g(\{a\}) = 0$.

(*ii*) Sei nun $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monton wachsend und rechtsstetig. Zeigen Sie, dass genau ein Maß $\mu_g \colon \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ existiert mit $\mu_g((s, t]) = g(t) - g(s) \quad (s < t)$. Wann ist μ_g endlich?

Aufgabe 32. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n; \quad \alpha_1, ..., \alpha_n \in (0, 1)\}$$

messbar ist und bestimmen Sie deren Maß.

Definition. Es sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum.

(*i*) Eine Menge $U \subset X$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement offen ist.

(*ii*) Eine Menge $U \subset X$ heißt eine Umgebung von $x \in X$, falls ein $V \in \mathcal{T}$ existiert mit $x \in V \subset U$.

(*iii*) Sei $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum. Eine Funktion $f \colon X \longrightarrow Y$ heißt stetig, falls das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Aufgabe 33. Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f \colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(*i*) f ist stetig im Sinn von Definition 9.1.

(*ii*) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge von Y ist abgeschlossen.

(*iii*) Für jedes $x \in X$ und jede Umgebung V von $f(x)$ ist die Menge $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

Aufgabe 34. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(*i*) Die Menge $\mathcal{T}_1 := \{X, \emptyset\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

(*ii*) Die Menge $\mathcal{T}_2 := \{X, \emptyset\} \cup \{(q, \infty) : q \in \mathbb{Q}\}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 35. Es sei X eine Menge und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum. Ferner sei $f \colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Finden Sie eine bezüglich Mengeninklusion kleinste Topologie auf X, so dass f stetig wird. Ist diese Topologie eindeutig? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 36. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ferner sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein System von Halbnormen auf X, so dass aus $p_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass $x = 0$ ist. Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} d \colon X \times X &\longrightarrow [0, \infty), \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \end{aligned}$$

eine Metrik auf X gegeben ist.

Hinweis. Untersuchen Sie die Funktion $f \colon [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $t \longmapsto \frac{t}{1+t}$ auf Monotonie.

Aufgabe 37. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Sind A und B abgeschlossene Teilmengen von X mit $A \cap B = \emptyset$, so existieren offene Teilmengen G und H von X, so dass $A \subset G$, $B \subset H$ und $G \cap H = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 38. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $1 \leq i \leq n$ sei $\pi_i \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Komponente. Damit definieren wir $p_i \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ durch $p_i(x) := |\pi_i(x)|$. Zeigen Sie, dass p_i für $i = 1, ..., n$ eine Halbnorm ist und dass die lokalkonvexe Topologie zu $\{p_i : i = 1, ..., n\}$ auf $\mathbb{R}^n$ gleich der üblichen (Norm-) Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 39.

(*i*) Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Die Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ sei eine Subbasis der Topologie $\mathcal{T}_Y$. Beweisen Sie: Eine Abbildung $f \colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$ für alle $S \in \mathcal{S}$ gilt.

(*ii*) Es sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $[0,1] \subset \mathbb{R}$ mit der Relativtopologie bezüglich der Normtopologie auf $\mathbb{R}$ versehen und $f\colon X \to [0,1]$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Sind $f^{-1}((a,1]), f^{-1}([0,b)) \in \mathcal{T}_X$ für alle $0 < a, b < 1$, so ist f stetig.

Definition. Es sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Ferner sei $X := \prod_{i\in I} X_i$. Die gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf X für welche alle Projektionen $\pi_i\colon X \longrightarrow X_i$ stetig sind, heißt die Produkttopologie auf X.

Aufgabe 40. Es sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Hausdorffräumen und $X := \prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ versehen. Beweisen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum ist.

Aufgabe 41. Es sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen, $X := \prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ versehen und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sei ein weiterer topologischer Raum. Zeigen Sie: Eine Funktion $f\colon Y \longrightarrow X$ ist genau dann stetig, wenn für jede Projektion $\pi_i\colon X \longrightarrow X_i$ die Komposition $\pi_i \circ f\colon Y \longrightarrow X_i$ stetig ist.

Definition. Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt stetig in $p \in X$, falls für jede Umgebung U von $f(p)$ die Menge $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von p ist.

Aufgabe 42. Es sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein beliebiger topologischer Raum. Zeigen Sie: Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann im Punkt $p \in X$ stetig, wenn für jede Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $p_n \to p$ die Folge $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(p)$ konvergiert.

Aufgabe 43. Es sei X ein separabler metrischer Raum. Zeigen Sie: X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 44. Vermutlich ist das Ausscheiden der deutschen Nationalelf auf die ungünstige Wahl der Topologie auf dem Fußballfeld zurückzuführen. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass ein Fußballspieler als Punkt des $\mathbb{Q}^2$ aufgefaßt werden kann. Die Tore des Fußballfeldes $F := ([0,2] \times [0,1]) \cap \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ seien $I := ([0, \frac{1}{8}] \times [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]) \cap F$ (Italien) und $D := ([\frac{15}{8}, 2] \times [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]) \cap F$ (Deutschland). Ein Positionswechsel des Balles wird durch eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ beschrieben. Ein Tor fällt genau dann, wenn ein Fußballspieler einen Positionswechsel $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Balles auslöst, so dass $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $p \in (0, \frac{1}{8}) \times (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ oder gegen einen Punkt $p' \in (\frac{15}{8}, 2) \times (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ konvergiert. Nun zur Aufgabe: Finden Sie eine Topologie auf F, so dass es für Deutschland möglichst einfach und für Italien möglichst schwer ist, das Tor des Gegners zu treffen.

Literatur

[1] H. Bauer: Maß- und Integrationstheorie. De Gruyter, Berlin 1990.

[2] L. Breiman: Probability. Addison-Wesley, Reading 1968.

[3] Th. Bröcker: Analysis II. B.I. Wissenschaftsverlag Mannheim 1992.

[4] K. L. Chung: A Course in Probability Theory. 2nd edition. Academic Press, New York 1974.

[5] W. Hackenbroch: Integrationstheorie. Teubner, Stuttgart 1987.

[6] P. R. Halmos: Measure Theory. Van Nostrand Reinhold, New York 1969.

[7] D. Hoffmann, F.-W. Schäfke: Integrale. BI-Wiss.-Verl., Mannheim 1992.

[8] K. Jänich: Topologie. Springer, Berlin 2001.

[9] J. C. Oxtoby: Maß und Kategorie. Springer, Berlin 1971.

[10] H. Schubert: Topologie. Teubner Stuttgart 1964.

[11] W. Rudin: Reelle und komplexe Analysis. Oldenburg-Verlag, München 1999.

[12] W. Rudin: Functional analysis. McGraw-Hill, New York 1973.