

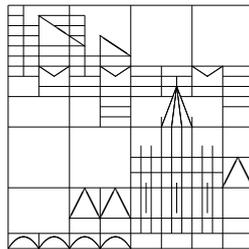
Skript zur Vorlesung

Analysis III

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/22

Robert Denk



Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

14.02.2022

Inhaltsverzeichnis

1	Existenz- und Eindeutigkeitsätze	1
	a) Grundbegriffe	1
	b) Der Satz von Picard-Lindelöf	5
	c) Der Satz von Peano	15
2	Spezielle Lösungsmethoden	20
	a) Separable Gleichungen (Trennung der Variablen)	20
	b) Homogene Differentialgleichungen und Substitution	21
	c) Potenzreihenansatz	23
	d) Exakte Differentialgleichungen	25
3	Lineare Differentialgleichungen	27
	a) Homogene lineare Dgl.	27
	b) Inhomogene Gleichungen	30
	c) Systeme mit konstanten Koeffizienten	31
	d) Lineare Dgl. höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	36
4	Qualitative Aspekte	41
	a) Stabilität	41
	b) Phasenportraits	53
5	Rand- und Eigenwertprobleme	60
	a) Randwertaufgaben für lineare Dgl.-Systeme	61
	b) Sturm-Liouville-Randwertprobleme	63
A	Zur Berechnung der Jordan-Normalform	69
	Literatur	78
	Index	78

1. Existenz- und Eindeutigkeitsätze

1.1 Worum geht's? Nach einer Diskussion des Begriffs einer gewöhnlichen Differentialgleichung werden wir in diesem Abschnitt die zentralen Sätze zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung besprechen. Es handelt sich um den Satz von Picard-Lindelöf (in einer globalen und einer lokalen Version) und den Satz von Peano zur Lösbarkeit. Unter der Bedingung der lokalen Lipschitz-Stetigkeit ist die Lösung eindeutig.

Die oben genannten Sätze beruhen jeweils auf abstrakten Sätzen der Analysis, welche auch außerhalb der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen wichtig sind. Es handelt sich dabei um

- den Banachschen Fixpunktsatz,
- den Satz von Arzelá-Ascoli und
- das Lemma von Gronwall.

a) Grundbegriffe

In der Modellierung treten häufig Gleichungen der Form $y' = \alpha y$ oder (bis auf Konstanten) $y'' + y = 0$ auf. Die erste Gleichung beschreibt z.B. radioaktiven Zerfall (dann ist $\alpha < 0$) oder die Geldmenge bei kontinuierlicher fester Verzinsung α (in diesem Fall ist $\alpha > 0$ und wird meist mit r bezeichnet). Die zweite Gleichung beschreibt etwa die Bewegung eines ungedämpften Pendels.

Was sollen diese Gleichungen bedeuten? Genauer müsste man schreiben:

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (1-1)$$

Man sucht hierbei eine Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Gleichung (1-1) an jeder Stelle erfüllt. Derartige Gleichungen nennt man eine (gewöhnliche) Differentialgleichung (Dgl.). Natürlich gibt es hiervon mehrere Varianten:

- Die Funktion y ist nur auf einem Teilintervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert.
- Die Funktion y hat Werte in \mathbb{R}^n . In diesem Fall stehen links und rechts von (1-1) Vektoren der Länge n .
- Die Funktion y hat einen komplexen Wertebereich, d.h. $y : I \rightarrow \mathbb{C}^n$. Diesen Fall werden wir im Folgenden nur selten explizit aufschreiben, aber immer im Hinterkopf behalten.

Damit eine Funktion eine Lösung von (1-1) sein kann, muss man zumindest fordern, dass $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist. Häufig will man sogar $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

Im Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen stellen sich in natürlicher Weise folgende Fragen (und noch viel mehr):

- Gibt es eine Lösung der Differentialgleichung, d.h. eine Funktion y , welche (1-1) erfüllt?
- Kann man die Lösung explizit angeben?
- Existiert die Lösung vielleicht nur für einen Teilbereich des Intervalls I (also lokal), oder gibt es eine globale Lösung?
- Wieviele Lösungen gibt es?
- Kann man noch mehr über die Lösung sagen, ohne sie gleich auszurechnen? Ist die Lösung z.B. sogar zweimal differenzierbar oder beschränkt? Kann man die Lösung abschätzen?
- Wie hängt die Lösung von den Daten ab? Ersetzt man z.B. in (1-1) den Parameter α durch ein $\tilde{\alpha}$ mit $|\alpha - \tilde{\alpha}|$ klein, was weiß man dann über die neue Lösung?

In unseren Beispielen kann man mehr sagen:

a) Eine Lösung von (1-1) ist die Funktion $y(t) = e^{\alpha t}$. Eine weitere Lösung ist z.B. $y(t) = 2e^{\alpha t}$. Falls man aber noch eine *Anfangsbedingung*

$$y(0) = 1$$

an die Lösung stellt, so ist $y(t) = e^{\alpha t}$ die einzige Lösung. Man spricht hier von einem *Anfangswertproblem* (AWP).

b) Die Dgl. $y'' + y = 0$ hat z.B. die Lösungen $y(t) = \sin t$ und $y(t) = \cos t$. Jede Lösung dieser Dgl. hat die Form

$$y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

mit reellen Konstanten c_1, c_2 . Die Menge der Lösungen ist also ein zweidimensionaler Untervektorraum von $C(I; \mathbb{R})$. Durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

wird die Lösung eindeutig festgelegt, nämlich $y(t) = \cos t$.

c) Das AWP

$$y''(t) + \cos t \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

hat eine eindeutige Lösung, die man aber nicht explizit hinschreiben kann. Man kann diese Gleichung recht einfach numerisch lösen; es handelt sich übrigens um die sogenannte Hillsche Differentialgleichung. Dass man die Lösung nicht einfach analytisch ausrechnen und elementar hinschreiben kann, ist bei Dgl. der Normalfall! Man sollte sich also nicht durch die Lösungsmethoden täuschen lassen, die im Folgenden in der Vorlesung noch kommen.

d) Das AWP

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

im Intervall $[0, \infty)$ hat unendlich viele linear unabhängige Lösungen.

In diesem ersten Abschnitt geht es darum zu sehen, unter welchen Bedingungen eine Dgl. eine Lösung besitzt und wann diese eindeutig ist.

1.2 Definition. a) Eine (gewöhnliche) Differentialgleichung (Dgl.) ist eine Gleichung der Form

$$f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0 \quad (t \in I). \quad (1-2)$$

Dabei ist $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto y(t)$ eine unbekannte Funktion, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $D \subset I \times \mathbb{R}^{(k+1)n}$. Häufig schreibt man (1-2) in der verkürzten Form

$$f(t, y, \dots, y^{(k)}) = 0.$$

Falls f von der höchsten Ableitung $y^{(k)}$ wirklich abhängt, ist (1-2) eine Dgl. k -ter Ordnung.

Falls $m > 1$, spricht man auch von einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Falls sich die Gleichung (1-2) durch äquivalente Umformungen auf eine Gleichung der Form

$$y^{(k)} = \tilde{f}(t, y, \dots, y^{(k-1)})$$

bringen lässt (d.h. man kann die Gleichung nach der höchsten Ableitung auflösen), so spricht man von einer expliziten Dgl. k -ter Ordnung, ansonsten von einer impliziten Dgl.

Falls f nicht explizit von t abhängt, d.h. es gilt $f(t, y, \dots, y^{(k)}) = \tilde{f}(y, \dots, y^{(k)})$, so spricht man von einer autonomen Dgl.

Falls f linear in $y, \dots, y^{(k)}$ ist, so heißt (1-2) eine lineare Dgl.

b) Ein Anfangswertproblem (AWP) ist eine Dgl. (1-2), welche zusätzlich mit Anfangsbedingungen der Form $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1}$ versehen ist. Dabei ist $t_0 \in I$ und $y_0, \dots, y_{k-1} \in \mathbb{R}^n$.

c) Eine Lösung der Dgl. (1-2) ist eine Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, für welche gilt:

- y ist k -mal differenzierbar in I ,

- $\forall t \in I : (t, y(t), \dots, y^{(k)}(t)) \in D,$
- $\forall t \in I : f(t, y(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0.$

1.3 Beispiele. $y'' + y = 0$: linear, autonom, explizit, 2. Ordnung.

$y'' + \cos(t) \cdot y = 0$: linear, nicht autonom, explizit, 2. Ordnung.

$y'' + \sin(y) = 0$: nichtlinear, autonom, explizit, 2. Ordnung.

$(y')^2 + y^2 = 1$ in $[-1, 1]$: nichtlinear, autonom, nicht explizit (implizit), 1. Ordnung.

Bei impliziten Gleichungen beachte man den Satz über implizite Funktionen, der eventuell doch eine (lokale) Auflösbarkeit ergeben kann. Wir werden im Folgenden fast ausschließlich explizite Dgl. betrachten.

1.4 Bemerkung. a) (Rückführung auf Dgl. 1. Ordnung) Betrachte die (explizite) Dgl. k -ter Ordnung

$$y^{(k)} = F(t, y, \dots, y^{(k-1)}), \quad y: I \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1-3)$$

Setze für $t \in I$

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= y(t), \\ x_2(t) &:= y'(t), \\ &\vdots \\ x_k(t) &:= y^{(k-1)}(t). \end{aligned}$$

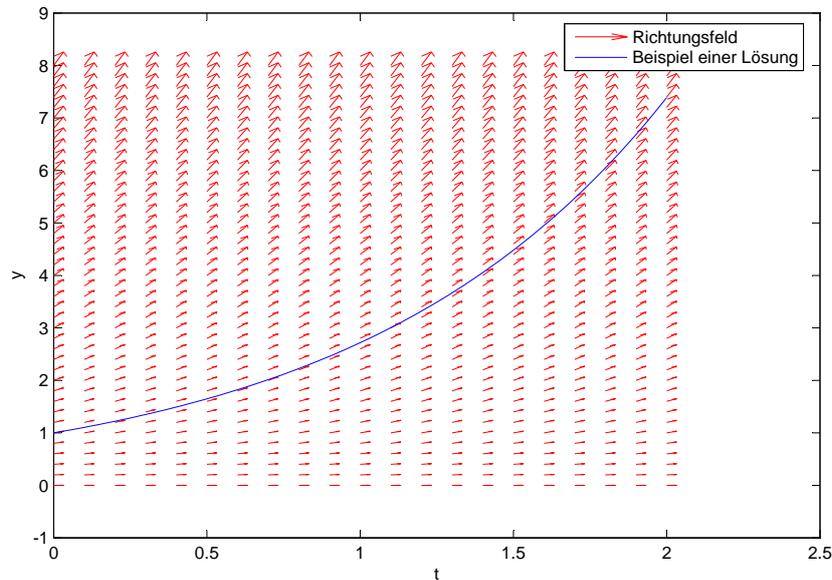
Dann ist y genau dann eine Lösung von (1-3), falls die Funktion

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^{k \cdot n}$$

eine Lösung ist von

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ F(t, x_1(t), \dots, x_k(t)) \end{pmatrix} =: f(t, x(t)).$$

b) (Richtungsfelder) Betrachte das skalare AWP $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$. Zu $t_1 \in I$ gibt dann $f(t_1, y(t_1))$ die Steigung von y an der Stelle t_1 an. Auch ohne die Lösung y zu kennen, kann man daher das Richtungsfeld zeichnen. Die Abbildungen 1–3 zeigen die Richtungsfelder verschiedener Dgl.

Abbildung 1: Das Richtungsfeld der Dgl. $y'(t) = y(t)$

b) Der Satz von Picard-Lindelöf

Der Satz von Picard-Lindelöf ist einer der Hauptsätze für die Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung. Wir betrachten nur explizite Dgl., und nach Bemerkung 1.4 a) können wir o.E. von einem System 1. Ordnung ausgehen.

Die wesentliche Voraussetzung an die Dgl. ist dabei eine Stetigkeitsbedingung an die rechte Seite. Man beachte für Teil b) der folgenden Definition, dass eine Menge $U(a)$ eine Umgebung eines Punktes a heißt, wenn eine offene Teilmenge V existiert mit $a \in V \subset U(a)$.

1.5 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(t, z) \mapsto f(t, z)$ eine Funktion.

a) Die Funktion f erfüllt eine globale Lipschitz-Bedingung (in D bzgl. x), wenn eine Konstante $L > 0$ so existiert, dass für alle $(t, z_1), (t, z_2) \in D$ gilt

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|.$$

Man sagt dann auch, dass f global Lipschitz bezüglich z ist.

b) Die Funktion f erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung, wenn für alle $(t_0, z_0) \in D$ eine Umgebung $U(t_0, z_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und eine (lokale) Lipschitz-Konstante $L(t_0, z_0) > 0$ so existieren, dass für alle $(t, z_1), (t, z_2) \in U(t_0, z_0) \cap D$ gilt

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L(t_0, z_0) \cdot |z_1 - z_2|.$$

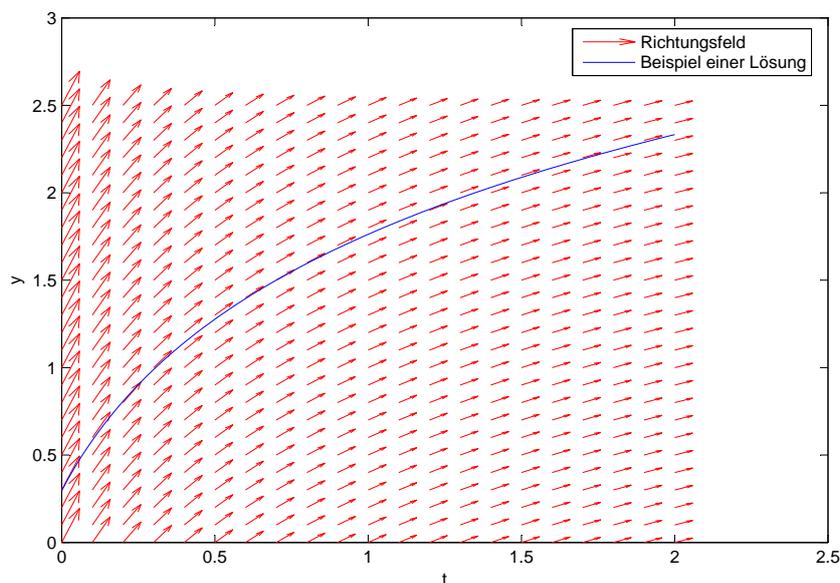


Abbildung 2: Das Richtungsfeld der Dgl. $y'(t) = (0.3 + t)^{-1}$

1.6 Lemma. a) Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f in D lokal Lipschitz.

b) Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz in D , und sei $K \subset D$ kompakt. Dann ist $f|_K$ global Lipschitz auf K .

Beweis. a) In einer kompakten Umgebung eines Punktes $(t_0, x_0) \in D$ sind alle Ableitungen von f als stetige Funktionen beschränkt. Damit folgt die Lipschitz-Stetigkeit aus dem Mittelwertsatz.

b) Angenommen, $f|_K$ ist nicht global Lipschitz. Dann existieren Folgen $(t_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ und $(t_n, \tilde{z}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ mit

$$|f(t_n, z_n) - f(t_n, \tilde{z}_n)| > n|z_n - \tilde{z}_n|. \quad (1-4)$$

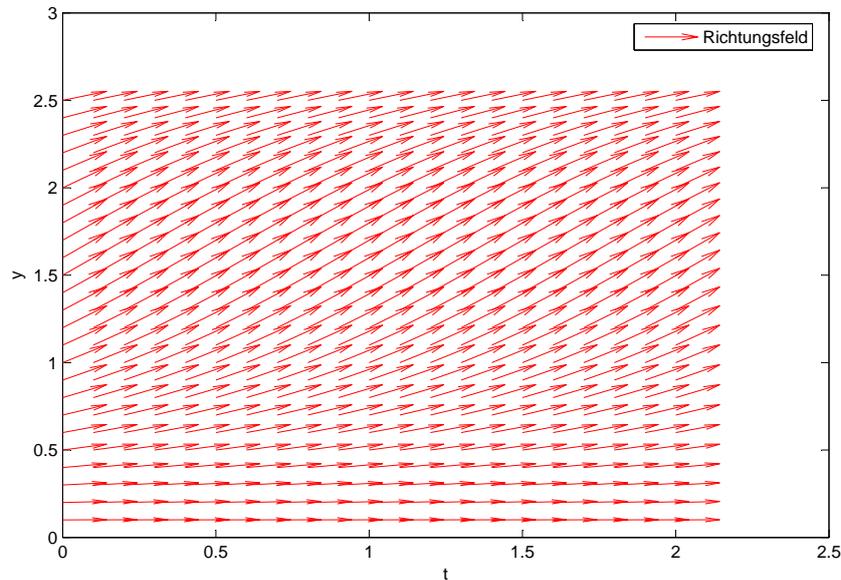
Da K kompakt ist, existieren jeweils konvergente Teilfolgen, d.h. wir können o.E. annehmen, dass $(t_n, z_n) \rightarrow (t_0, z_0)$ und $(t_n, \tilde{z}_n) \rightarrow (t_0, \tilde{z}_0)$ gilt. Da f stetig ist, ist $f|_K$ beschränkt, d.h. $M := \max_{(t,z) \in K} |f(t, z)| < \infty$.

Nach (1-4) gilt

$$|z_n - \tilde{z}_n| \leq \frac{1}{n} |f(t_n, z_n) - f(t_n, \tilde{z}_n)| \leq \frac{2M}{n}.$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhält man $z_0 = \tilde{z}_0$. Da f lokal Lipschitz ist, existiert eine offene Umgebung $U(t_0, z_0)$ und ein $L(t_0, z_0) > 0$ mit

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L(t_0, z_0) |y_1 - y_2| \quad ((t, y_1), (t, y_2) \in U(t_0, z_0)). \quad (1-5)$$

Abbildung 3: Das Richtungsfeld der Dgl. $y'(t) = \sin^2(y(t))$

Da $(t_n, z_n) \rightarrow (t_0, z_0)$ und $(t_n, \tilde{z}_n) \rightarrow (t_0, z_0)$, gilt $(t_n, z_n), (t_n, \tilde{z}_n) \in U(t_0, z_0)$ für große n . Mit (1-4) und (1-5) gilt für große n

$$n < \frac{|f(t_n, z_n) - f(t_n, \tilde{z}_n)|}{|z_n - \tilde{z}_n|} \leq L(t_0, z_0),$$

Widerspruch. □

In einer ersten Version des Satzes von Picard-Lindelöf wird globale Lipschitz-Stetigkeit vorausgesetzt. Der Beweis enthält zwei wichtige Elemente: Die Transformation in eine Integralgleichung und den Banachschen Fixpunktsatz, den wir hier noch einmal wiederholen.

1.7 Satz (Banachscher Fixpunktsatz). Sei (M, d) vollständiger metrischer Raum und $\Phi: M \rightarrow M$ eine Kontraktion, d.h. es existiere ein $c \in [0, 1)$ mit

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq cd(x, y) \quad (x, y \in M).$$

Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt $z \in M$, d.h. $\Phi(z) = z$.

Definiert zu $x_0 \in M$ die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset M$ durch $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}_0$), so gilt $x_n \rightarrow z$ ($n \rightarrow \infty$) und $d(x_n, z) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$ (a priori-Abschätzung).

1.8 Satz (von Picard-Lindelöf, globale Version). Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei ferner $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und global Lipschitz. Dann existiert genau eine Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ des AWP

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Beweis. (i) Transformation in eine Integralgleichung: Falls $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ eine Lösung ist, so folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds =: (Ty)(t). \quad (1-6)$$

Ist andererseits eine Funktion $y \in C(I; \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $Ty = y$, so folgt $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ und $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, d.h. y ist eine Lösung.

(ii) Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes: Wir betrachten den Operator $T: C(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I; \mathbb{R}^n)$, $(Ty)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$. Dabei versehen wir $C(I; \mathbb{R}^n)$ mit einer neuen Norm:

$$\|g\|_L := \max_{t \in I} |e^{-(L+1)t} g(t)| \quad (g \in C(I; \mathbb{R}^n)).$$

Wegen

$$c_1 := e^{-(L+1)b} \leq e^{-(L+1)t} \leq c_2 := e^{-(L+1)a} \quad (t \in [a, b])$$

ist diese Norm äquivalent zur Supremumsnorm, d.h. es gilt $c_1 \|g\|_\infty \leq \|g\|_L \leq c_2 \|g\|_\infty$ ($g \in C(I; \mathbb{R}^n)$), und $(C(I; \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_L)$ ist ein Banachraum. Wir rechnen nach, dass T eine Kontraktion bzgl. der durch die Norm induzierten Metrik $d_L(g, h) := \|g - h\|_L$ ist.

Zu $g, h \in C(I; \mathbb{R}^n)$ ist

$$d_L(Tg, Th) = \sup_{t \in I} e^{-(L+1)t} \left| \int_{t_0}^t f(s, g(s)) - f(s, h(s)) ds \right|.$$

Für $t \geq t_0$ ist

$$\begin{aligned} e^{-(L+1)t} \left| \int_{t_0}^t f(s, g(s)) - f(s, h(s)) ds \right| &\leq e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^t L |g(s) - h(s)| ds \\ &= L e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^t \underbrace{e^{(L+1)s} e^{-(L+1)s} |g(s) - h(s)|}_{\leq d_L(g, h)} ds \\ &\leq L \cdot d_L(g, h) \cdot e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^t e^{(L+1)s} ds \\ &= L \cdot d_L(g, h) \cdot e^{-(L+1)t} \left(\frac{e^{(L+1)s}}{L+1} \right) \Big|_{s=t_0}^t \\ &= L \cdot d_L(g, h) \cdot e^{-(L+1)t} \cdot \frac{e^{(L+1)t} - e^{(L+1)t_0}}{L+1} \\ &\leq \frac{L}{L+1} d_L(g, h). \end{aligned}$$

Genauso sieht man dies für $t \leq t_0$. Damit folgt

$$d_L(Tg, Th) \leq \frac{L}{L+1} d_L(g, h) \quad (g, h \in C(I; \mathbb{R}^n)).$$

Wegen $\frac{L}{L+1} < 1$ ist die Abbildung $T: C(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I; \mathbb{R}^n)$ eine Kontraktion. Damit existiert genau ein Element $y \in C(I; \mathbb{R}^n)$ mit $Ty = y$ (Gleichheit in $C(I; \mathbb{R}^n)$, also insbesondere an jeder Stelle t). Dieses y ist also die eindeutige Lösung des AWP. \square

1.9 Bemerkung. a) Wendet man den Satz von Picard-Lindelöf auf explizite Dgl. k -ter Ordnung

$$y^{(k)} = F(t, y, \dots, y^{(k-1)}), \quad y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

an, so erhält man die eindeutige Lösbarkeit für diese Dgl. mit den Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = y^0, \quad y'(t_0) = y^1, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y^{k-1}$$

mit $y^j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 0, \dots, k-1$.

b) Mit dem wörtlichen gleichen Beweis gilt der Satz von Picard-Lindelöf auch für komplexwertige Funktionen, indem man \mathbb{R}^n durch \mathbb{C}^n ersetzt.

1.10 Bemerkung. Wie wir aus dem Banachschen Fixpunktsatz wissen, konvergiert die Iteration $x_n := Tx_{n-1}$ für jeden Startwert $x_0 \in C(I; \mathbb{R}^n)$ gegen den Fixpunkt y , also die Lösung der Differentialgleichung. Man hat also ein konstruktives Verfahren. Numerisch ist es allerdings weniger geeignet, dafür gibt es wesentlich bessere Verfahren. Wir wissen auch die a priori-Fehlerabschätzung $d(y, x_n) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$ mit der Konstanten $c := \frac{L}{L+1}$. Die Abbildung 4 zeigt das Ergebnis der Picard-Iteration für die Dgl. $y' = \sin^2 y$ mit Startwert 0. Man sieht, dass die Konvergenz recht langsam ist. In Abbildung 5 wird die Konvergenz der Lösung an der Stelle $t = 4$ dargestellt.

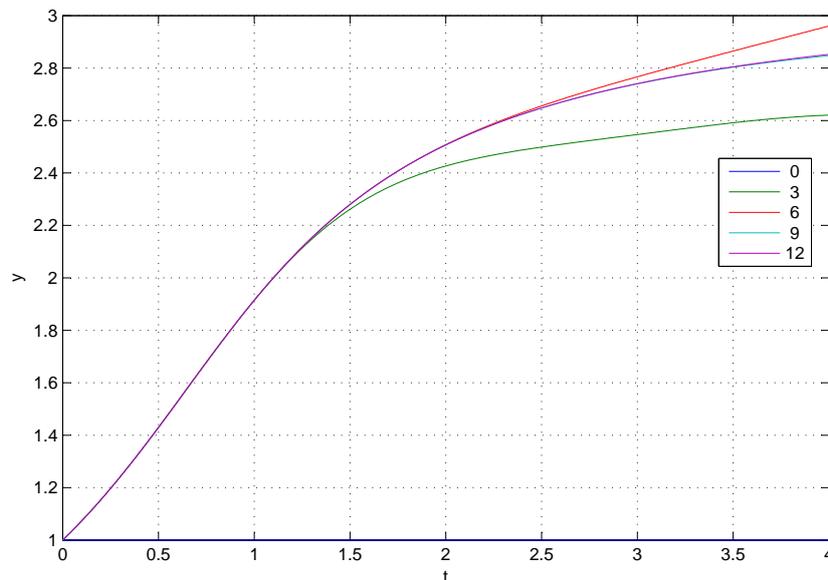
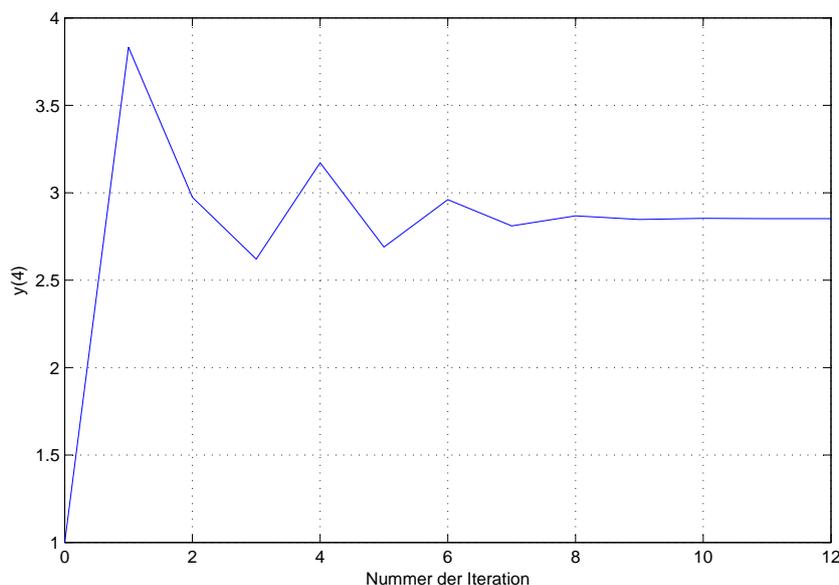


Abbildung 4: Die Picard-Iteration für die Dgl. $y' = \sin^2 y$

Abbildung 5: Der Wert $y(4)$ für obige Picard-Iteration

Wenn die rechte Seite nur noch lokal Lipschitz ist, erhält man immer noch die eindeutige Lösbarkeit, aber nur noch lokal, d.h. in einer Umgebung des Anfangswertes. Bevor wir dies beweisen, zeigen wir die Eindeutigkeit bei lokaler Lipschitz-Bedingung. Man beachte dazu, dass der Banachsche Fixpunktsatz bei globaler Lipschitz-Bedingung die Eindeutigkeit gleich mit geliefert hat. Für die Eindeutigkeit wird die folgende Abschätzung verwendet, welche in vielen Bereichen der Analysis nützlich ist.

1.11 Lemma (von Gronwall). Sei $a > 0$ und seien $y, f \in C([0, a]; \mathbb{R})$ mit $f \geq 0$. Für eine Konstante $b \in \mathbb{R}$ gelte

$$y(t) \leq b + \int_0^t y(s)f(s)ds \quad (t \in [0, a]).$$

Dann gilt

$$y(t) \leq b \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right) \quad (t \in [0, a]).$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ definiere $z(t) := (b + \varepsilon) \exp(\int_0^t f(s)ds)$. Dann gilt $z'(t) = z(t)f(t)$ und damit

$$z(t) = z(0) + \int_0^t z(s)f(s)ds = (b + \varepsilon) + \int_0^t z(s)f(s)ds.$$

Wir zeigen, dass

$$y(t) < z(t) \quad (t \in [0, a]). \quad (1-7)$$

Für $t = 0$ ist (1-7) klar. Falls (1-7) nicht für alle $t \in [0, a]$ gilt, so existiert ein minimales t_0 mit $y(t_0) = z(t_0)$ (beide Seiten sind stetig). Es folgt

$$y(t_0) \leq b + \int_0^{t_0} y(s)f(s)ds < b + \varepsilon + \int_0^{t_0} z(s)f(s)ds = z(t_0),$$

Widerspruch. Also gilt (1-7), und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. \square

1.12 Satz (Eindeutigkeitsatz). Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die der lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $y_1, y_2: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Dgl. $y' = f(t, y)$ über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Falls $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ gilt, so folgt $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in I$.

Beweis. (i) Wir zeigen: Falls $y_1(a) = y_2(a)$ für ein $a \in I$ gilt, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $y_1 = y_2$ in $I \cap [a, a + \varepsilon]$. Sei dazu $L = L(a, y_1(a))$ die lokale Lipschitz-Konstante von f . Dann gilt für $t \in [a, a + \varepsilon]$ mit $\varepsilon > 0$ hinreichend klein:

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &= \left| \int_a^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))) ds \right| \\ &\leq \int_a^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \\ &\leq L \int_a^t |y_1(s) - y_2(s)| ds. \end{aligned}$$

Wende nun das Lemma von Gronwall an (mit $b = 0$, $y(s) = |y_1(s) - y_2(s)|$ und $f(s) = L$) und erhalte $y_1 = y_2$ in $[a, a + \varepsilon]$.

(ii) Wir zeigen jetzt, dass $y_1 = y_2$ in $[t_0, \infty) \cap I$ gilt. Sei dazu $\tau := \sup\{t \in I : y_1 = y_2 \text{ in } [t_0, t]\}$. Falls $\tau = \infty$ oder falls τ das rechte Intervallende von I ist, sind wir fertig. Ansonsten existiert ein $\delta > 0$, so dass $[\tau, \tau + \delta] \subset I$. Da y_1, y_2 stetig sind, gilt $y_1(\tau) = y_2(\tau)$. Nach (i) existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $y_1 = y_2$ in $[\tau, \tau + \varepsilon]$, Widerspruch zur Definition von τ . Also gilt $y_1 = y_2$ in $[t_0, \infty) \cap I$.

(iii) Dass $y_1 = y_2$ in $(-\infty, t_0] \cap I$ gilt, folgt entweder analog oder mit dem Trick der Zeitumkehr: Die Funktion $z(t) := y(t_0 - t)$ ist genau dann eine Lösung der Dgl. $z'(t) = -f(t_0 - t, z(t))$ im Intervall $t_0 - I := \{t_0 - t : t \in I\}$, wenn y eine Lösung von $y'(t) = f(t, y(t))$ im Intervall I ist. Nach (ii) sind die entsprechenden Lösungen z_1, z_2 im Intervall $[0, \infty) \cap (t_0 - I)$ identisch. Also sind die ursprünglichen Lösungen y_1, y_2 in $(-\infty, t_0] \cap I$ identisch. \square

1.13 Satz (von Picard-Lindelöf, lokale Version). Sei $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Dann existiert zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ eine Umgebung $U(t_0, y_0)$, in welcher das AWP

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung besitzt.

Beweis. (i) Existenz der Lösung: Sei $(t_0, y_0) \in D$. Wir wählen eine kompakte Teilmenge $K \subset D$ von der Form $K = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(y_0, r)$ mit $\varepsilon, r > 0$. Nach Lemma 1.6 ist $f|_K$ global Lipschitz mit einer Lipschitz-Konstanten L_1 . Wähle nun eine Funktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \varphi \text{ kompakt}\}$ mit $\text{supp } \varphi \subset B(y_0, r)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\varphi(z) = 1$ für $z \in \overline{B}(y_0, \frac{r}{2})$.

Dann ist $F(t, z) := f(t, z) \cdot \varphi(z)$ stetig. Wir zeigen, dass F global Lipschitz ist, d.h. dass eine Konstante $\tilde{L} > 0$ existiert mit

$$|F(t, z_1) - F(t, z_2)| \leq \tilde{L}|z_1 - z_2| \quad (t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n). \quad (1-8)$$

Falls $|y_0 - z_1| \geq r$ und $|y_0 - z_2| \geq r$, gilt $F(t, z_1) = F(t, z_2) = 0$, und (1-8) gilt trivialerweise. Wir können also annehmen, dass mindestens ein z_j in $B(y_0, r)$ liegt, o.E. $z_2 \in B(y_0, r)$. Dann gilt

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| |\varphi(z_1)| \leq L_1 |z_1 - z_2|.$$

Man beachte dabei, dass die linke Seite 0 ist, falls $z_1 \notin B(y_0, r)$. Als stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger ist φ global Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten L_φ . Daher gilt für alle $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ und $z_1 \in \mathbb{R}^n$, $z_2 \in B(y_0, r)$

$$\begin{aligned} |F(t, z_1) - F(t, z_2)| &\leq |f(t, z_1) - f(t, z_2)| |\varphi(z_1)| + |f(t, z_2)| |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \\ &\leq L_1 |z_1 - z_2| + L_\varphi M |z_1 - z_2| \\ &\leq \tilde{L} |z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

wobei $M := \max_{(t,z) \in K} |f(t, z)|$ und $\tilde{L} := L_1 + L_\varphi M$. Dies zeigt (1-8). Nach Satz 1.8 existiert also genau ein $y \in C^1([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]; \mathbb{R}^n)$ mit $y'(t) = F(t, y(t))$ und $y(t_0) = y_0$.

Sei $\tilde{\varepsilon} := \frac{r}{2M}$. Dann gilt für $|t - t_0| < h := \min\{\varepsilon, \tilde{\varepsilon}\}$ die Abschätzung

$$|y(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds \right| \leq M |t - t_0| \leq \frac{r}{2}.$$

Für diese t gilt somit $\varphi(y(t)) = 1$ und damit $F(t, y(t)) = f(t, y(t))$. Also ist y eine Lösung von $y'(t) = f(t, y(t))$ im Intervall $[t_0 - h, t_0 + h]$.

(ii) Die Eindeutigkeit der Lösung folgt sogar global aus Satz 1.12. \square

Man beachte, dass im obigen Beweis die Lebensdauer h nur von den Größen ε, r und M abhängt, nicht aber von den Lipschitz-Konstanten L_1 und L_φ .

1.14 Definition (Maximales Existenzintervall und maximale Lösung). Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz, und $(t_0, y_0) \in D$. Betrachte das AWP

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1-9)$$

Man definiert $t_+ \in [t_0, \infty]$ und $t_- \in [-\infty, t_0]$ durch

$$\begin{aligned} t_+ &:= \sup \{t_1 \geq t_0 : \text{Es existiert eine Lösung } y_1 \text{ von (1-9) auf } [t_0, t_1]\}, \\ t_- &:= \inf \{t_2 \leq t_0 : \text{Es existiert eine Lösung } y_2 \text{ von (1-9) auf } [t_2, t_0]\}. \end{aligned}$$

Dann heißt (t_-, t_+) das maximale Existenzintervall des AWP (1-9). Für $t \in (t_-, t_+)$ wird die maximale Lösung $y_{\max}(t)$ definiert durch

$$y_{\max}(t) := \begin{cases} y_1(t), & \text{falls } t \in [t_0, t_1], \\ y_2(t), & \text{falls } t \in [t_2, t_0]. \end{cases}$$

Dabei werden $t_1 \in (t, t_+)$ und $t_2 \in (t_-, t)$ beliebig gewählt.

1.15 Bemerkung. a) Nach Satz 1.13 ist $t_- < t_0 < t_+$ und y_{\max} wohldefiniert. Man beachte, dass wegen der Stetigkeit von f die Lösung y_{\max} auch an der Stelle t_0 stetig differenzierbar ist.

b) Das Intervall $I := (t_-, t_+)$ und die Lösung y_{\max} sind in folgendem Sinn maximal: Sei \tilde{I} ein Intervall mit $t_0 \in \tilde{I}$, und sei $\tilde{y}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1-9). Dann gilt $\tilde{I} \subset I$ und $(y_{\max})|_{\tilde{I}} = \tilde{y}$.

1.16 Satz. In der Situation von Definition 1.14 ist t_+ charakterisiert durch die folgenden Alternativen:

- (i) Es gilt $t_+ = \infty$, d.h. y_{\max} ist eine globale Lösung nach rechts.
- (ii) Es gilt $t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \nearrow t_+} \text{dist}((t, y_{\max}(t)), \partial D) = 0$, d.h. die Lösung $y_{\max}(t)$ kommt dem Rand von D beliebig nahe.
- (iii) Es gilt $t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \nearrow t_+} \text{dist}((t, y_{\max}(t)), \partial D) > 0$ sowie $\lim_{t \nearrow t_+} |y(t)| = \infty$ („blow-up in endlicher Zeit“).

Insbesondere folgt im Fall $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aus $t_+ < \infty$ bereits $\lim_{t \nearrow t_+} |y_{\max}(t)| = \infty$. Analoge Aussagen gelten für $t \searrow t_-$.

Beweis. Es gelte $t_+ < \infty$ und $\liminf_{t \nearrow t_+} \text{dist}((t, y_{\max}(t)), \partial D) > 0$. Wir müssen zeigen, dass dann $|y(t)| \rightarrow \infty$ ($t \nearrow t_+$) folgt. Falls dies nicht gilt, existiert eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n \nearrow t_+$ und $C > 0, \delta > 0$ mit

$$|y_{\max}(t_n)| \leq C, \quad \text{dist}((t_n, y_{\max}(t_n)), \partial D) \geq \delta \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (1-10)$$

Wir setzen $y_n := y_{\max}(t_n)$. Da die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge, o.E. $y_n \rightarrow y_0$. Somit gilt $(t_n, y_n) \rightarrow (t_+, y_0)$ für ein $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Daher und wegen (1-10) existieren $\varepsilon > 0$ und $r > 0$ mit $(t_n, y_n) \in K := [t_+ - \varepsilon, t_+ + \varepsilon] \times \overline{B}(y_0, r) \subset D$ für $n \geq n_0$. Insbesondere folgt $(t_+, y_0) \in D$. Wie der Beweis von Satz 1.13 zeigt, existiert ein von n unabhängiges $h > 0$, so dass das AWP

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_n) = y_n$$

für alle $n \geq n_0$ eine eindeutige Lösung im Intervall $[t_n, t_n + h]$ besitzt. Somit ist y_{\max} im Intervall $[t_n, t_n + h]$ fortsetzbar. Wegen $t_n \rightarrow t_+$ gilt $t_n + h > t_+$ für großes n , was der Definition von t_+ widerspricht. \square

Die folgende Aussage zeigt, dass die Lösung eines AWP's stetig von den Daten f und x_0 abhängt. Die entscheidende Bedingung ist dabei wieder die Lipschitz-Stetigkeit. In Abbildung 6 wird das Beispiel $y' = \sqrt{|y|}$ dargestellt, bei welchem die Lipschitz-Stetigkeit verletzt ist. Es wird die numerisch berechnete Lösung (mit einem Runge-Kutta-Verfahren) gezeigt zu den Anfangswerten $y(0) = 0$ bzw. $y(0) = 10^{-12}$. Man sieht, wie die Ungenauigkeit im Anfangswert schon für kleine Werte von t explodiert. Eine solche berechnete Lösung ist nicht sinnvoll, da man stets Ungenauigkeiten in den Daten hat (z.B. durch Rundungsfehler).

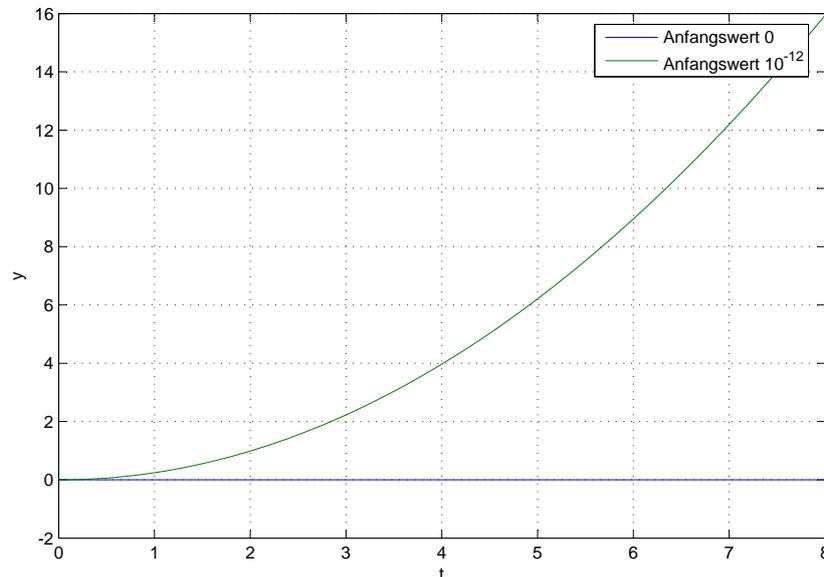


Abbildung 6: Lösungen der Dgl. $y' = \sqrt{|y|}$ zu verschiedenen Anfangswerten

1.17 Satz (Stetige Abhängigkeit von den Daten). Seien $T > 0$ und $f, g \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ global Lipschitz mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$. Die

Funktion $x \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$ sei die Lösung des AWP

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

die Funktion $y \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$ sei die Lösung von

$$y'(t) = g(t, y(t)), \quad y(0) = y_0.$$

Dann gilt

$$\sup_{t \in [0, T]} |x(t) - y(t)| \leq (|x_0 - y_0| + T\|f - g\|_\infty)e^{LT}.$$

Dabei ist $\|f - g\|_\infty := \sup_{t \in [0, T], z \in \mathbb{R}^n} |f(t, z) - g(t, z)|$.

Beweis. Wir verwenden

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t g(s, y(s))ds$$

und erhalten

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \int_0^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds \\ &\quad + \int_0^t |f(s, y(s)) - g(s, y(s))|ds \\ &\leq |x_0 - y_0| + \int_0^t L|x(s) - y(s)|ds + T\|f - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Gronwall (mit $b = |x_0 - y_0| + T\|f - g\|_\infty$ und $f(s) = L$) folgt

$$|x(t) - y(t)| \leq (|x_0 - y_0| + T\|f - g\|_\infty)e^{Lt}$$

und damit die Behauptung. \square

c) Der Satz von Peano

Der nächste Satz ist wichtig in vielen Bereichen der Analysis.

1.18 Satz (von Arzelá-Ascoli). Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, und sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C(K; \mathbb{R}^n)$ eine Folge von Funktionen. Die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei gleichgradig stetig, d.h. es gelte

$$\forall z \in K \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \tilde{z} \in K, \quad |z - \tilde{z}| < \delta \quad \forall k \in \mathbb{N} : |f_k(z) - f_k(\tilde{z})| < \varepsilon,$$

und punktweise beschränkt, d.h. es gelte

$$\forall z \in K \quad \exists C_z > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} : |f_k(z)| \leq C_z.$$

Dann gibt es eine konvergente Teilfolge $(\tilde{f}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_k)_k$ und ein $f \in C(K; \mathbb{R}^n)$ mit

$$\|\tilde{f}_k - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Beweis. (i) Wir zeigen, dass die Folge $(f_k)_k$ gleichmäßig gleichgradig stetig ist, d.h. dass gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z_1, z_2 \in K, |z_1 - z_2| < \delta \forall k \in \mathbb{N} : |f_k(z_1) - f_k(z_2)| < \varepsilon. \quad (1-11)$$

Falls dies nicht gilt, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall \delta > 0 \exists y, z \in K |y - z| < \delta, \exists k \in \mathbb{N} : |f_k(y) - f_k(z)| \geq \varepsilon. \quad (1-12)$$

Zu $\delta := \frac{1}{N}$ existieren also y_N, z_N mit $|y_N - z_N| < \frac{1}{N}$ und k_N mit

$$|f_{k_N}(y_N) - f_{k_N}(z_N)| \geq \varepsilon.$$

Da K kompakt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge von $(y_N)_{N \in \mathbb{N}}$, o.E. gelte $y_N \rightarrow y$. Wegen $|y_N - z_N| < \frac{1}{N}$ gilt auch $z_N \rightarrow y$. Damit erhalten wir

$$|f_{k_N}(y_N) - f_{k_N}(z_N)| \leq |f_{k_N}(y_N) - f_{k_N}(y)| + |f_{k_N}(y) - f_{k_N}(z_N)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

falls k hinreichend groß ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu (1-12).

(ii) Konstruktion einer punktweise konvergenten Teilfolge: Sei $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ eine dichte abzählbare Teilmenge von K und $f_{k,0} := f_k$. Sei $f_{k,1}$ eine Teilfolge von $f_{k,0}$, für welche $(f_{k,1}(z_1))_k \subset \mathbb{R}^n$ konvergent ist. (Beachte hier, dass $(f_k(z_1))_k \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist und wende den Satz von Bolzano-Weierstraß an.)

Wähle eine Teilfolge $(f_{k,2})_k$ von $(f_{k,1})_k$, welche (zusätzlich) an der Stelle z_2 konvergent ist etc.

Man erhält iterativ eine Teilfolge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}} := (f_{k,k})_{k \in \mathbb{N}}$, welche an jeder Stelle z_N konvergiert.

(iii) Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz von $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in K : Sei $\varepsilon > 0$. Nach (i) existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall y, z \in K, |y - z| < \delta \forall k \in \mathbb{N} : |g_k(y) - g_k(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1-13)$$

Da Z dicht in K und K kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $Z_0 = \{z_{N_1}, \dots, z_{N_M}\} \subset Z$ mit

$$\forall z \in K \exists z_{N_j} \in Z_0 : |z - z_{N_j}| < \delta. \quad (1-14)$$

Nach (ii) konvergiert die Folge $(g_k)_k$ punktweise an der Stelle z_{N_j} . Daher ist $(g_k(z_{N_j}))_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Cauchyfolge, d.h. zu jedem $z_{N_j} \in Z_0$ existiert ein $k_j \in \mathbb{N}$ mit

$$|g_k(z_{N_j}) - g_\ell(z_{N_j})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (k, \ell \geq k_j). \quad (1-15)$$

Für $k_0 := \max\{k_1, \dots, k_M\}$ gilt dann

$$\forall j \in \{1, \dots, M\} \forall k, \ell \geq k_0 : |g_k(z_{N_j}) - g_\ell(z_{N_j})| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sei nun $z \in K$ beliebig. Wähle nach $z_{N_j} \in Z_0$ aus (1-14). Dann gilt für alle $k, \ell \geq k_0$

$$\begin{aligned} |g_k(z) - g_\ell(z)| &\leq |g_k(z) - g_k(z_{N_j})| + |g_k(z_{N_j}) - g_\ell(z_{N_j})| + |g_\ell(z_{N_j}) - g_\ell(z)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hier wurden (1-15) und (1-13) verwendet. Da k_0 nicht von $z \in K$ abhängt, ist $(g_k)_k \subset C(K; \mathbb{R}^n)$ eine gleichmäßige Cauchyfolge und damit gleichmäßig konvergent. \square

Der Satz von Peano liefert die Existenz einer lokalen Lösung (aber nicht die Eindeutigkeit), falls die rechte Seite der Dgl. nur stetig (aber nicht lokal Lipschitz) ist. Im Beweis wird die Lösung durch eine stückweise lineare Funktion approximiert, ein Verfahren, welches in der Numerik als explizites Euler-Verfahren bekannt ist. Die Idee des Euler-Verfahrens besteht darin, im AWP

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1-16}$$

die Ableitung durch den Differenzenquotienten zu ersetzen:

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

Löst man nach $y(t+h)$ auf, erhält man

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)).$$

Ausgehend von $y(t_0) = y_0$ kann man jetzt iterativ Näherungen für $y(t_0+h), y(t_0+2h), \dots$ berechnen. Für echte numerische Anwendungen ist das explizite Euler-Verfahren nicht präzise genug und wird etwa durch Runge-Kutta-Verfahren ersetzt.

1.19 Satz (Satz von Peano). *Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, y_0) \in D$. Dann existieren ein $\delta > 0$ und $y \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta]; \mathbb{R}^n)$ so, dass $(t, y(t)) \in D$ ($t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$) gilt und y das AWP (1-16) im Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ löst.*

Beweis. (i) Wir setzen zunächst voraus, dass $D = [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$ gilt und f stetig und beschränkt in D ist. Zu $m \in \mathbb{N}$ setze $h := h^{(m)} := \frac{T-t_0}{m}$ und $t_j := t_j^{(m)} := t_0 + jh^{(m)}$ sowie iterativ $y_m(t_0) := y_0$ und

$$y_m(t) := y_m(t_j) + (t - t_j)f(t_j, y_m(t_j)) \quad (t \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, \dots, m-1).$$

Dies ist das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite h , wobei zwischen den Gitterpunkten $(t_j, y_m(t_j))$ linear interpoliert wird (Polygonzug-Verfahren). Die Funktion y_m ist nach Definition stetig und stückweise linear.

Betrachte die stückweise konstante Funktion

$$g_m(t) := f(t_j, y_m(t_j)) \quad (t \in [t_j, t_{j+1}), j = 0, \dots, m-1).$$

Nach Konstruktion gilt für $t \in [t_j, t_{j+1}]$

$$\begin{aligned} y_m(t) &= y_m(t_j) + \int_{t_j}^t g_m(s) ds = y_m(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_m(s) ds + \int_{t_j}^t g_m(s) ds \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t g_m(s) ds. \end{aligned} \quad (1-17)$$

Da f beschränkt in D ist, gilt $|g_m(t)| \leq M := \sup_{(t,z) \in D} |f(t, z)|$ und damit

$$|y_m(t)| \leq |y_0| + (T - t_0)M =: C.$$

Wegen

$$|y_m(t_1) - y_m(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} g_m(s) ds \right| \leq M|t_1 - t_2| \quad (m \in \mathbb{N}, t_1, t_2 \in [t_0, T])$$

ist die Folge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzelá-Ascoli existiert eine bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ konvergente Teilfolge, d.h. o.E. gelte $y_m \rightarrow y \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Zu $t \in [t_0, T]$ und $m \in \mathbb{N}$ wähle $j(m)$ so, dass $t \in [t_j^{(m)}, t_{j+1}^{(m)}]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |t - t_j^{(m)}| &\leq h^{(m)} = \frac{T-t_0}{m}, \\ |y_m(t) - y_m(t_j^{(m)})| &\leq M|t - t_j^{(m)}| \leq M \frac{T-t_0}{m}. \end{aligned}$$

Als stetige Funktion auf $[t_0, T]$ ist y beschränkt, und wegen $\|y_m - y\|_\infty \rightarrow 0$ existiert eine kompakte Teilmenge $K \subset [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$ mit $(t, y_m(t)) \in K$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $t \in [t_0, T]$. Da f auf K gleichmäßig stetig ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|g_m(t) - f(t, y(t))| = |f(t_j^{(m)}, y_m(t_j^{(m)})) - f(t, y(t))| < \varepsilon \quad (t \in [t_0, T], m \geq m_0).$$

Wir erhalten $\|g_m(\cdot) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). Nehmen wir nun $m \rightarrow \infty$ in (1-17), so erhalten wir

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (t \in [t_0, T]),$$

d.h. y ist eine Lösung des AWP (1-16) im Intervall $[t_0, T]$.

(ii) Seien nun D und f wie im Satz. Man geht genauso vor wie im Beweis von Satz 1.13. Man wählt $T > t_0$ und $r > 0$ mit $[t_0, T] \times \overline{B}(y_0, r) \subset D$ und definiert $F(t, z) := f(t, z)\varphi(z)$ mit φ wie im Beweis von Satz 1.13. Dann ist F stetig und beschränkt in $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n$. Nach Teil (i) existiert eine Lösung y des AWP

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

im Intervall $[t_0, T]$. Falls $|t - t_0|$ hinreichend klein ist, gilt $|y(t) - y_0| < \frac{r}{2}$ und damit $\varphi(y(t)) = 1$, d.h. $F(t, y(t)) = f(t, y(t))$. Somit löst y das ursprüngliche AWP (1-16) in einem Intervall $[t_0, t_0 + \delta]$ mit $\delta > 0$. Analog zeigt man die Existenz der Lösung in einem kleinen Intervall links von t_0 . \square

2. Spezielle Lösungsmethoden

2.1 Worum geht's? Jetzt wissen wir zwar schon, wann eine Dgl. zumindest lokal eine eindeutige Lösung besitzt. Es ist aber nochmal was anderes, diese wirklich zu berechnen. Es gibt für bestimmte Typen von Gleichungen bestimmte Methoden, die mehr oder weniger funktionieren, um die Lösung explizit zu bestimmen. Im einzelnen sind dies:

- separable Gleichungen,
- homogene Gleichungen,
- Potenzreihenansatz,
- exakte Differentialgleichungen.

Ein weiterer Typ von Dgl. sind die linearen Dgl., welche im nachfolgenden Abschnitt behandelt werden. Hier werden wir Ansätze zur Lösung oben genannter Dgl. behandeln und auch einige speziellere Gleichungen lösen. Man sollte sich aber nicht verleiten lassen zu glauben, dass alle oder zumindest fast alle Dgl. explizit lösbar seien.

a) Separable Gleichungen (Trennung der Variablen)

Wir behandeln im Folgenden nur den eindimensionalen Fall $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Dgl. heißt separabel, falls sie von der Form

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \quad (2-1)$$

ist, d.h. in diesem Fall haben wir $f(t, y(t)) = g(t) \cdot h(y(t))$.

2.2 Satz. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $g \in C(I; \mathbb{R})$, $h \in C(J; \mathbb{R})$ mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Sei $(t_0, x_0) \in I \times J$. Definiere $G(t) := \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau$ und $H(x) := \int_{x_0}^x \frac{dz}{h(z)}$. Es gelte $G(I) \subset H(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ der Dgl. (2-1) mit $y(t_0) = x_0$. Für diese Lösung gilt

$$H(y(t)) = G(t) \quad (t \in I). \quad (2-2)$$

Beweis. (i) Sei $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung. Dann folgt aus (2-1) und der Anfangsbedingung durch Integration bezüglich t :

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(\tau)}{h(y(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau.$$

Substituiert man nun im linken Integral $z = y(\tau)$, so erhält man $H(y(t)) = G(t)$, also (2-2).

(ii) Es gilt $H'(x) = \frac{1}{h(x)} \neq 0$ in J , also ist H streng monoton. Damit existiert eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $H^{-1}: H(J) \rightarrow \mathbb{R}$. Für jede Lösung y gilt nach Teil (i) die Gleichung (2-2) und damit

$$y(t) = H^{-1}(G(t)). \quad (2-3)$$

Somit ist die Lösung eindeutig.

(iii) Wir zeigen noch die Existenz der Lösung. Definiere y durch (2-3). Dann ist y stetig differenzierbar mit $y(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0$. Weiter folgt aus (2-2) durch Differenzieren

$$H'(y(t)) \cdot y'(t) = \frac{y'(t)}{h(y(t))} = G'(t) = g(t),$$

d.h. $y'(t) = g(t)h(y(t))$. Somit ist y eine Lösung von (2-1). \square

2.3 Beispiel. Betrachte das AWP $y' = y^2$, $y(0) = 1$. Die rechte Seite der Dgl. ist lokal Lipschitz-stetig, also gilt lokale Existenz und Eindeutigkeit. Wir schreiben die Aussage von Satz 2.2 etwas einprägsamer in folgender Form:

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \cdot h(y) \quad \implies \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt + \text{const.}$$

In unserem Beispiel haben wir $g(t) = 1$ und $h(x) = x^2$, d.h. wir erhalten mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$

$$G(t) = \int_0^t dt = t,$$

$$H(x) = \int_1^x \frac{dz}{z^2} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Somit gilt

$$1 - \frac{1}{y(t)} = t,$$

d.h. $y(t) = \frac{1}{1-t}$.

b) Homogene Differentialgleichungen und Substitution

In vielen Fällen ist eine Substitution nützlich, um eine Dgl. in eine lösbare Form zu transformieren. Hierzu ein Beispiel:

2.4 Beispiel. Betrachte eine Dgl. der Form

$$x'(t) = f(ax(t) + bt + c)$$

mit Konstanten a, b, c . Substituiert man $y(t) := ax(t) + bt + c$, dann erhält man

$$y'(t) = ax'(t) + b = af(y(t)) + b,$$

also eine separable Dgl.

2.5 Beispiel (homogene Dgl.). Ein ähnlicher Trick funktioniert bei homogenen Dgl. Diese haben die Form

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right).$$

Substituiert man $y(t) := \frac{x(t)}{t}$, so folgt

$$y'(t) = \frac{x'(t)t - x(t)}{t^2} = \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = \frac{1}{t} (f(y(t)) - y(t)).$$

Dies ist wieder eine separable Dgl.

2.6 Beispiel (Bernoullische Dgl.). Die Bernoullische Dgl. hat die Form

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \cdot (x(t))^\alpha$$

mit einem reellen Parameter α . Für $\alpha = 0$ handelt es sich um eine lineare Dgl., die später behandelt werden, für $\alpha = 1$ um eine separable Dgl. Für $\alpha \neq 0, 1$ substituiert man $y(t) := x(t)^{1-\alpha}$. Dann ist

$$y'(t) = (1 - \alpha)x(t)^{-\alpha}(a(t)x(t) + b(t)x(t)^\alpha) = (1 - \alpha)(a(t)y(t) + b(t)).$$

Dies ist wieder eine lineare Dgl.

2.7 Beispiel (Riccatische Dgl.). Die Riccatische Dgl. ist von der Form

$$x'(t) = k(t)x^2(t) + g(t)x(t) + h(t) \tag{2-4}$$

mit $k, h, g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Die Anfangsbedingung sei $x(t_0) = x^0$. Im Falle $h = 0$ handelt es sich um die Bernoullische Dgl. mit Exponenten $\alpha = 2$. Am Beispiel der Riccati-Gleichung soll gezeigt werden, wie eine Substitution helfen kann, die Gleichung auf eine andere Dgl. zu transformieren, welche von einfacherer Struktur ist.

(i) Transformation zur Bernoullischen Dgl.: Dies ist nur möglich, falls eine Lösung p mit $p(t_0) =: p^0 \neq x^0$ der Riccati-Gleichung bereits bekannt ist. In diesem Fall setzt man $y := x - p$ und erhält den Anfangswert $y(t_0) = x^0 - p^0$ und

$$y' = x' - p' = kx^2 + gx + h - kp^2 - gp - h$$

$$\begin{aligned}
&= ky^2 - 2kp^2 + 2kxp + gx - gp \\
&= ky^2 + (2kp + g)y.
\end{aligned}$$

Man sieht, dass y wieder eine Riccati-Dgl. erfüllt. Allerdings besitzt die neue Gleichung für y keinen h -Term mehr, und damit handelt es sich um die Bernoullische Gleichung mit $\alpha = 2$.

(ii) Ohne das Wissen einer Lösung p kann man durch eine Substitution die Riccati-Gleichung (2-4) auf eine lineare Dgl. zweiter Ordnung zurückführen. Dazu setzt man

$$u(t) := \exp\left(-\int_{t_0}^t k(s)x(s)ds\right).$$

Damit folgt $u' = -kxu$ und somit

$$\begin{aligned}
u'' &= k^2x^2u - k'xu - kx'u \\
&= k^2x^2u - k'xu - k^2x^2u - kgxu - kxu \\
&= -k'xu - kgxu - kxu \\
&= \frac{k'}{k}u' + gu' - kxu,
\end{aligned}$$

wobei $ux = -\frac{u'}{k}$ benutzt wurde. Damit ist u eine Lösung des AWP

$$u'' - u'\left(\frac{k'}{k} + g\right) + kxu = 0, \quad u(t_0) = 1, \quad u'(t_0) = -k(t_0)x^0.$$

Dies ist wieder eine lineare Dgl.

c) Potenzreihenansatz

Der Potenzreihenansatz ist in vielen Fällen möglich, um eine Darstellung der Lösung einer Dgl. in Form einer konvergenten Potenzreihe zu erhalten. Wir diskutieren diesen Ansatz nur für lineare Dgl. zweiter Ordnung, Verallgemeinerungen sind leicht möglich.

Betrachte die lineare Dgl.

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = s(t) \quad (2-5)$$

mit den Anfangsbedingungen $y(t_0) = y^0, y'(t_0) = y^1$. Die Koeffizienten a, b und die rechte Seite s seien in einem offenen Intervall $J := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ in eine Potenzreihe um t_0 entwickelbar, d.h. in Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t - t_0)^k$, welche mindestens in J konvergieren. In diesem Fall kann man den Ansatz

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t - t_0)^k \quad (2-6)$$

in die Differentialgleichung einsetzen und erhält eine Rekursionsformel für die unbekannt Koeffizienten $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Es kann leicht gezeigt werden, dass dieser Ansatz gerechtfertigt ist und dass die Lösung die Form (2-6) besitzt. Man beachte dazu, dass eine Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises unendlich oft differenzierbar ist und die Ableitung mit der Summation vertauscht werden kann (siehe Analysis I).

2.8 Beispiel (Hermitesche Dgl.). Die Hermitesche Dgl. lautet

$$y''(t) - 2ty'(t) + \lambda y(t) = 0 \quad (2-7)$$

mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Koeffizienten sind Polynome, also insbesondere in eine überall konvergente Potenzreihe um 0 entwickelbar. Mit dem Ansatz (2-6) mit $t_0 = 0$ erhält man

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} t^k,$$

$$y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} t^k.$$

Eingesetzt in die Hermitesche Dgl. ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2} x^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^{k+1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen müssen alle Koeffizienten der Potenzreihe auf der linken Seite verschwinden (Koeffizientenvergleich). Also haben wir

$$2c_2 + \lambda c_0 = 0,$$

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2kc_k + \lambda c_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Die Koeffizienten c_0 und c_1 sind frei wählbar, die anderen sind dann gegeben durch die Rekursion

$$c_{k+2} = \frac{2k - \lambda}{(k+2)(k+1)} c_k \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Dieses Beispiel zeigt auch noch eine Besonderheit: Falls $\lambda = 2n_0 \in 2\mathbb{N}$, so ist $c_{k+2} = 0$ für alle $k = n_0, n_0 + 2, \dots$. In diesem Falle existiert ein Polynom, welches die Hermitesche Dgl. löst. Z.B. kann man für $\lambda = 4$ die Anfangskoeffizienten $c_0 := 1$ und $c_1 := 0$ wählen und erhält $c_2 = \frac{-4}{2} = -\frac{1}{2}$, $c_4 = c_6 = \dots = 0$ und $c_3 = c_5 = \dots = 0$. Also ist $y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2$ eine Lösung der Hermiteschen Dgl. mit $\lambda = 4$. Auf diese Weise erhält man (bis auf Normierung) die Hermite-Polynome $H_n(t)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

d) Exakte Differentialgleichungen

Wir verwenden im Folgenden den Begriff Gebiet. Dabei ist eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, falls G offen und zusammenhängend ist.

2.9 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und seien $f_1, f_2 \in C(G; \mathbb{R})$. Dann heißt die Dgl.

$$f_1(t, y(t)) + f_2(t, y(t)) \cdot y'(t) = 0 \quad (2-8)$$

exakt, falls eine Stammfunktion $F \in C^1(G; \mathbb{R})$ existiert mit $\nabla F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.

2.10 Bemerkung. Definiert man die 1-Form $\omega: G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\omega(x, h) := f_1(x)h_1 + f_2(x)h_2 = f_1(x)dx_1(h) + f_2(x)dx_2(h),$$

so ist die Dgl. (2-8) genau dann exakt, wenn ω exakt ist. Formal erhält man ω durch die Umformung

$$f_1(t, y)dt + f_2(t, y)dy = 0 \quad (2-9)$$

und die Umbenennung $x_1 := t$, $x_2 := y$. Die Form (2-9) ist eine „symmetrische“ Version der ursprünglichen Dgl. (2-8).

2.11 Satz. a) Sei die Dgl. (2-8) exakt mit Stammfunktion F und $y: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Es gelte $(t, y(t)) \in G$ für alle $t \in J$. Dann ist y genau dann eine Lösung von (2-8), wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$F(t, y(t)) = c \quad (t \in J).$$

b) Sei G sternförmig und $f_1, f_2 \in C^1(G)$. Dann ist die Dgl. (2-8) genau dann exakt, falls $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$.

Beweis. a) folgt aus

$$\frac{d}{dt} F(t, y(t)) = f_1(t, y(t)) + f_2(t, y(t)) \cdot y'(t).$$

b) folgt aus dem bekannten Kriterium für Exaktheit von 1-Formen (Analysis II). \square

Zur Lösung einer exakten Dgl. muss man nach Satz 2.11 eine Stammfunktion F bestimmen. Wir wiederholen die Vorgehensweise aus der Analysis II: Gegeben sei die exakte Dgl. (2-8) mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y^0$. Um eine Stammfunktion $F: G \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmen, wählen wir zu $(t, x) \in G$ eine stückweise glatte Kurve

$\Gamma = [\gamma]$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Anfangspunkt $\gamma(a) = (t_0, y^0)$ und Endpunkt (t, x) . Dann ist $F(t, x)$ durch das (wegunabhängige!) Kurvenintegral

$$F(t, x) = \int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t)) dt$$

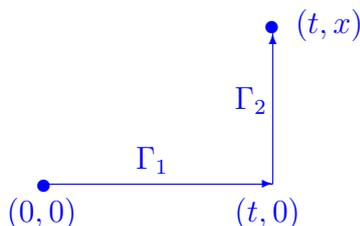
gegeben. Dabei kann die Wegunabhängigkeit ausgenutzt werden, um lokal einen Weg entlang der Koordinatenachsen zu wählen.

2.12 Beispiel. Betrachte die Dgl.

$$(3t^2 + 4ty(t)) + (2t^2 + 3y(t)^2) \cdot y'(t) = 0.$$

Hier ist $f_1(t, x) = 3t^2 + 4tx$, $f_2(t, x) = 2t^2 + 3x^2$, und wegen $\partial_2 f_1 = 4t = \partial_1 f_2$ handelt es sich um eine exakte Dgl. Wir wählen zu $(t_0, y^0) := (0, 0)$ und zu $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ die Wegstücke

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= [\gamma_1], & \gamma_1: [0, t] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & s &\mapsto (s, 0), \\ \Gamma_2 &= [\gamma_2], & \gamma_2: [0, x] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & s &\mapsto (t, s). \end{aligned}$$



Damit ist

$$F(t, x) = \int_0^t (3s^2 + 4s \cdot 0) \cdot 1 ds + \int_0^x (2t^2 + 3s^2) \cdot 1 ds = t^3 + 2t^2x + x^3.$$

Die Lösung der Dgl. erhält man nach Satz 2.11 durch (lokale) Lösung der Gleichung $F(t, y(t)) = \text{const.}$

3. Lineare Differentialgleichungen

3.1 Worum geht's? Lineare Dgl. bilden eine besonders wichtige Klasse von Dgl., in welcher die Menge der Lösungen im wesentlichen eine Vektorraumstruktur besitzt. Das ist eine erste wichtige Verbindung zur Linearen Algebra, die im Falle von linearen Dgl. mit konstanten Koeffizienten besonders deutlich zu Tage tritt. Es kann in diesem Abschnitt nicht schaden, nochmal einen Blick in das Skript der Vorlesung Lineare Algebra zu werfen.

Auf den ersten Blick besitzen lineare Dgl. eine deutlich einfachere Struktur als nicht-lineare Gleichungen. Das gilt z.B. schon in Hinblick auf die eindeutige Lösbarkeit, die hier eine direkte Folgerung aus dem Satz von Picard-Lindelöf ist. Dennoch sei hier nochmal deutlich darauf hingewiesen, dass viele lineare Dgl. nicht elementar lösbar sind.

a) Homogene lineare Dgl.

Lineare Dgl.-Systeme haben die Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (3-1)$$

wobei $A \in C(J; \mathbb{C}^{n \times n})$, $b \in C(J; \mathbb{C}^n)$, $t_0 \in J$ und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ für ein (beliebiges) Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Eine Lösung ist eine differenzierbare Funktion $y: J \rightarrow \mathbb{C}^n$, welche (3-1) erfüllt. Man beachte, dass dann wegen (3-1) auch $y \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$ gilt.

Es ist hier günstiger, gleich in \mathbb{C} zu arbeiten, wie wir später noch sehen werden. In vielen Anwendungsfällen ist man natürlich an reellwertigen Funktionen interessiert. Man beachte, dass auf \mathbb{C}^n und $\mathbb{C}^{n \times n}$ nach Analysis II alle Normen äquivalent sind, insbesondere der Begriff der Stetigkeit nicht von der Wahl der Norm abhängt. Meist werden wir die euklidische Norm $|\cdot|$ oder die $|\cdot|_\infty$ -Norm auf \mathbb{C}^n und die zugehörige Operatornorm auf $\mathbb{C}^{n \times n}$ wählen (meist mit $\|\cdot\|$ bezeichnet).

3.2 Satz. *Unter den obigen Voraussetzungen an A und b existiert zu jedem $t_0 \in J$ und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ genau ein $y \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$, welches das AWP (3-1) löst.*

Beweis. Falls J ein kompaktes Intervall ist, folgt der Satz direkt aus dem Satz von Picard-Lindelöf (Satz 1.8): Denn für $f(t, x) := A(t)x + b(t)$ gilt

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |A(t)(x_1 - x_2)| \leq \sup_{t \in J} \|A(t)\| \cdot |x_1 - x_2|,$$

d.h. f ist global Lipschitz-stetig.

Falls J ein beliebiges Intervall ist, so kann man J durch kompakte Intervalle (die t_0 enthalten) ausschöpfen. Damit folgt die Existenz und Eindeutigkeit für ganz J . \square

3.3 Korollar. a) In der Situation von Satz 3.2 sei $t_0 \in J$ fest. Dann definiert

$$T: C^1(J; \mathbb{C}^n) \rightarrow C(J; \mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n, y \mapsto (y' - Ay, y(t_0))$$

einen Vektorraumisomorphismus.

b) Für festes $t_0 \in J$ sei $H: C^1(J; \mathbb{C}^n) \rightarrow C(J; \mathbb{C}^n)$, $y \mapsto y' - Ay$ und $\ker H := \{y \in C^1(J; \mathbb{C}^n) : Hy = 0\}$. Dann ist $\ker H \rightarrow \mathbb{C}^n$, $y \mapsto y(t_0)$ ein Vektorraumisomorphismus. Insbesondere ist $\dim \ker H = n$.

Beweis. Die Linearität der Abbildung ist jeweils klar, die Injektivität und Surjektivität folgt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz 3.2. \square

3.4 Satz. Es existieren genau n linear unabhängige Lösungen in $C^1(J; \mathbb{C}^n)$ von $y'(t) = A(t)y(t)$. Ein System $\{z_1, \dots, z_n\}$ von Lösungen ist genau dann eine Basis, falls die Vektoren $\{z_1(t_0), \dots, z_n(t_0)\}$ eine Basis von \mathbb{C}^n sind.

Beweis. Folgt direkt aus Korollar 3.3. \square

3.5 Definition. a) Sei $\{z_1, \dots, z_n\}$ ein System von Lösungen von $y'(t) = A(t)y(t)$. Dann heißt die aus den Spalten gebildete Matrix $Z := (z_1 \dots z_n): J \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ die Wronski-Matrix und $w(t) := \det Z(t)$ die Wronski-Determinante.

b) Eine Basis $\{z_1, \dots, z_n\}$ des Lösungsraums von $y'(t) = A(t)y(t)$ heißt ein Fundamentalsystem. Die Wronskimatrix heißt in diesem Fall eine Fundamentalmatrix.

3.6 Bemerkung. a) Aus Satz 3.4 sehen wir: Seien z_1, \dots, z_n Lösungen der Dgl. $y' = Ay$. Dann ist $\{z_1, \dots, z_n\}$ genau dann ein Fundamentalsystem, falls $w(t) = \det Z(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $w(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in J$ ist.

b) Eine Wronski-Matrix Z löst die Matrix-Dgl. $Z'(t) = A(t)Z(t)$ (wobei die Ableitung $Z'(t)$ komponentenweise definiert ist). Falls Z eine Fundamentalmatrix ist, so ist eine Funktion $z \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$ genau dann eine Lösung von $y' = Ay$, falls ein $c \in \mathbb{C}^n$ existiert mit $z(t) = Z(t)c$ ($t \in J$). Denn z ist genau dann Lösung, falls z eine Linearkombination der Spalten z_1, \dots, z_n von Z ist.

c) Sei nun $A(t) = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ von t unabhängig. Sei $t_0 = 0$ und Z die (eindeutig bestimmte) Fundamentalmatrix der Dgl. $y' = Ay$ mit $Z(0) = I_n$, wobei I_n die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix bezeichne. Dann gilt für alle $t, s \in J$ mit $t + s \in J$:

$$Z(t + s) = Z(t)Z(s).$$

Denn für $c \in \mathbb{C}^n$ und festes s ist sowohl $u(t) := Z(t+s)c$ als auch $v(t) := Z(t)Z(s)c$ eine Lösung des AWP's $u'(t) = Au(t)$, $u(0) = Z(s)c$. Da diese Lösung eindeutig ist, gilt $u(t) = v(t)$ für alle t .

3.7 Satz (Formel von Liouville). Die Wronski-Determinante ist differenzierbar mit $w'(t) = (\operatorname{tr} A(t)) \cdot w(t)$. Damit gilt

$$w(t) = w(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right).$$

Beweis. O.E. sei $w \neq 0$, d.h. $\det Z(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Mit der Ähnlichkeitstransformation

$$(b_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n} = B(t) := Z(t)^{-1}A(t)Z(t) \quad (t \in J)$$

erhält man $Z'(t) = A(t)Z(t) = Z(t)B(t)$, d.h. für $j = 1, \dots, n$ gilt

$$z'_j(t) = (Z(t)e_j)' = Z'(t)e_j = Z(t)B(t)e_j = \sum_{k=1}^n b_{kj}(t)z_k(t).$$

Für die Determinante erhalten wir

$$\begin{aligned} w'(t) &= \left(\det(z_1(t), \dots, z_n(t)) \right)' \\ &= \sum_{j=1}^n \det(z_1(t), \dots, \underbrace{z'_j(t)}_{j\text{-te Spalte}}, \dots, z_n(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{kj}(t) \det(z_1(t), \dots, \underbrace{z_k(t)}_{j\text{-te Spalte}}, \dots, z_n(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n b_{jj}(t) \det Z(t) \\ &= (\operatorname{tr} B(t))w(t) \\ &= (\operatorname{tr} A(t))w(t). \end{aligned}$$

Damit (Trennung der Variablen)

$$w(t) = w(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right).$$

□

b) Inhomogene Gleichungen

Wir betrachten nun den inhomogenen Fall

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad (3-2)$$

mit $A \in C(J; \mathbb{C}^{n \times n})$, $b \in C(J; \mathbb{C}^n)$ wie oben.

3.8 Lemma. Sei $y_p \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$ eine spezielle (partikuläre) Lösung von (3-2) und $Z \in C^1(J; \mathbb{C}^{n \times n})$ eine Fundamentalmatrix. Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch $y(t) = y_p(t) + Z(t)c$ mit $c \in \mathbb{C}^n$.

Beweis. Wegen $y' = y_p' + (Zc)' = Ay_p + b + A(Zc) = Ay + b$ ist jedes solche y eine Lösung. Falls andererseits y eine beliebige Lösung von (3-2) ist, so ist $\tilde{y} := y - y_p$ eine Lösung von $\tilde{y}' = Ay + b - Ay_p - b = A\tilde{y}$ und damit $\tilde{y} = Zc$ mit einem $c \in \mathbb{C}^n$ nach Bemerkung 3.6 b). \square

3.9 Satz (Variation der Konstanten). Sei $Z: J \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Dgl. $y' = Ay$. Dann erhält man eine Lösung der inhomogenen Dgl. $y' = Ay + b$ durch den Ansatz

$$y_p(t) = Z(t)c(t),$$

wobei $c \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$ eine Lösung von $Z(t)c'(t) = b(t)$ ist, d.h.

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t Z(s)^{-1}b(s)ds.$$

Falls $A(t) = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nicht von t abhängt und die Fundamentalmatrix so gewählt wird, dass $Z(0) = I_n$ gilt, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(t) = \int_{t_0}^t Z(t-s)b(s)ds + Z(t)d$$

mit $d \in \mathbb{C}^n$.

Beweis. Das folgt aus

$$\begin{aligned} (Z(t)c(t))' &= Z'(t)c(t) + Z(t)c'(t) = A(t)Z(t)c(t) + Z(t)c'(t) \\ &= A(t)y_p(t) + Z(t)c'(t). \end{aligned}$$

Man beachte, dass $Z(t)c'(t) = b(t)$ genau dann gilt, falls $c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t Z(s)^{-1}b(s)ds$. Die letzte Aussage folgt aus $Z(t) = Z(t-s)Z(s)$ und damit $Z(t)Z(s)^{-1} = Z(t-s)$, siehe Bemerkung 3.6 c). \square

3.10 Beispiel. Gegeben sei das Dgl.-System

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= -y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) + t.\end{aligned}$$

In Matrix-Schreibweise:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Wegen $Z(0) = I_2$ liefert Variation der Konstanten als eine spezielle Lösung

$$y_p(t) = \int_0^t Z(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds.$$

Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}y_p(t) &= \int_0^t \begin{pmatrix} -\sin(t-s)s \\ \cos(t-s)s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} -\cos(t-s)s \\ -\sin(t-s)s \end{pmatrix} \Big|_{s=0}^t + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) \\ \sin(t-s) \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(t-s) \\ \cos(t-s) \end{pmatrix} \Big|_{s=0}^t = \begin{pmatrix} -t + \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung hat die Form $y(t) = Z(t)d + y_p(t)$, wobei $d \in \mathbb{R}^2$ durch die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ bestimmt wird.

c) Systeme mit konstanten Koeffizienten

Nun soll es um Dgl. der Form

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{3-3}$$

gehen, wobei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine konstante Matrix ist. Man beachte, dass im skalaren Fall $y' = \alpha y$ die Lösung durch $y(t) = c \exp(\alpha t)$ mit $c \in \mathbb{C}$ gegeben ist. Eine Möglichkeit, (3-3) zu lösen, besteht in einer Erweiterung der exp-Funktion für Matrizen.

Sei $|\cdot|$ die euklidische Norm in \mathbb{C}^n und $\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow [0, \infty)$ die zugehörige Operatornorm. Man beachte, dass $\|\cdot\|$ submultiplikativ ist, d.h. es gilt

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}).$$

3.11 Definition. Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist

$$e^A := \exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

die exp-Funktion von A .

3.12 Satz. a) Die exp-Reihe ist normkonvergent, d.h. es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{A^n}{n!}\| < \infty$ und damit konvergent. Es gilt $\exp(0) = I_n$ ($n \times n$ -Einheitsmatrix) und $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

b) Für $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $AB = BA$ gilt $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.

c) Durch $Z(t) := \exp(tA)$ ($t \in \mathbb{R}$) ist die eindeutige Lösung der (Matrizen-)Dgl. $Z'(t) = AZ(t)$ mit $Z(0) = I_n$ gegeben. Eine Funktion $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ ist genau dann eine Lösung der Dgl. (3-3), falls ein $c \in \mathbb{C}^n$ existiert mit $y(t) = \exp(tA)c$ ($t \in \mathbb{R}$).

Beweis. a) und b) folgt wörtlich wie im skalaren Fall, wobei es sich jetzt um die Konvergenz im normierten Raum $\mathbb{C}^{n \times n}$ handelt.

c) Betrachtet man $\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ komponentenweise, sieht man, dass jede Komponente (sogar unendlich oft) differenzierbar ist und sich die Ableitung durch gliedweises Differenzieren ergibt:

$$Z'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = AZ(t).$$

Die Eindeutigkeit ist klar nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz. \square

Mit diesem Satz ist die Lösung der Dgl. (3-3) zurückgeführt auf die Berechnung der exp-Funktion einer Matrix. Um explizite Lösungen zu erhalten, verwenden wir den Satz über die Jordan-Normalform, der aus der Linearen Algebra bekannt ist:

Zu $\lambda \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}$ sei

$$J_p(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

die Jordan-Elementarmatrix (das Jordan-Kästchen) der Dimension p . Nach dem Satz von der Jordan-Normalform existiert zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine invertier-

bare Matrix $S \in GL(n, \mathbb{C})$ mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J(\lambda_1) & & \\ & & & J(\lambda_2) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & J(\lambda_\ell) \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A sind und $J(\lambda_k)$ ein Jordan-Kästchen geeigneter Dimension zum Eigenwert λ_k ist.

Dies ist eine spezielle Darstellung der Form $S^{-1}AS = D + N$ mit $DN = ND$, wobei D eine Diagonalmatrix und N nilpotent ist. Dabei hat D auf der Diagonalen die Eigenwerte entsprechend ihrer (algebraischen) Vielfachheit und N hat nur auf der ersten Nebendiagonalen die Werte 0 und 1, sonst nur 0. Es folgt $S^{-1}(tA)S = tD + tN$ und $S^{-1} \exp(tA)S = \exp(S^{-1}tAS) = \exp(tD + tN) = \exp(tD) \exp(tN)$, d.h.

$$\exp(tA) = S \exp(tD) \exp(tN) S^{-1}.$$

Zu einem Jordan-Kästchen $J_p(\lambda_k)$ der Dimension p zu einem Eigenwert λ_k sind die zugehörigen Hauptvektoren h_1, \dots, h_p definiert durch

$$(A - \lambda_k I_n)h_j = h_{j-1} \quad (j = 1, \dots, p),$$

wobei $h_0 := 0$ gesetzt wurde. Dabei ist h_1 ein Eigenvektor und h_j heißt Hauptvektor der Stufe j . Die Transformationsmatrix aus dem Satz über die Jordan-Normalform besteht gerade aus allen Hauptvektoren der Matrix A , denn

$$S^{-1}AS e_j = \lambda e_j + e_{j-1}$$

bedeutet für $h_j := S e_j$ (j -te Spalte der Matrix S) gerade

$$Ah_j = S(\lambda e_j + e_{j-1}) = \lambda h_j + h_{j-1}.$$

3.13 Satz. Sei h_j für $j = 1, \dots, p$ der Hauptvektor der Stufe j zum Eigenwert λ der Matrix A . Dann ist

$$y_j(t) := e^{\lambda t} \left(h_j + t h_{j-1} + \frac{t^2}{2} h_{j-2} + \dots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} h_1 \right)$$

eine Lösung der Dgl. $y' = Ay$. Das System aller so gebildeten Lösungen (zu allen Jordan-Kästchen) bildet ein Fundamentalsystem der Dgl.

Beweis. Wir wissen nach Satz 3.12, dass die Spalten von $\exp(tA)$ ein Fundamentalsystem bilden. Für jedes $S \in GL(n, \mathbb{C})$ ist wegen $\frac{d}{dt}(\exp(tA)S) = A \exp(tA)S$ und $\det(\exp(tA)S)|_{t=0} = \det(S) \neq 0$ auch $Y(t) := \exp(tA)S$ ein Fundamentalsystem.

Wir verwenden die Transformationsmatrix S aus dem Satz über die Jordan-Normalform. Hier ist $\exp(tA)S = S \exp(tD) \exp(tN)$. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir an, dass A nur ein Jordan-Kästchen $J_p(\lambda)$ zum Eigenwert λ der Dimension p besitzt. In diesem Fall ist

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad N^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^p = 0.$$

Damit ist

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & & \\ & e^{\lambda t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t} I_n$$

und

$$\exp(tN) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k N^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir mit den Hauptvektoren $S = (h_1, \dots, h_p)$

$$\begin{aligned} S \exp(tD) \exp(tN) &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} h_1, \dots, h_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{\lambda t} \left(h_1, \quad h_2 + th_1, \quad \dots, \quad h_p + th_{p-1} + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} h_1 \right). \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall besitzt A mehrere Jordan-Kästchen, und die obige Darstellung zu verschiedenen Jordan-Kästchen ergibt die Spalten der Matrix $Y(t) := \exp(tA)S$ und damit ein Fundamentalsystem. \square

3.14 Beispiel. Betrachte $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(1 - \lambda)(-\lambda) + 1 \cdot (-1 \cdot 0 - (-1)(1 - \lambda)) \\ &= -(\lambda - 1)^3. \end{aligned}$$

Damit ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3. Das lineare Gleichungssystem $(A - 1 \cdot I_3) = 0$ besitzt nur 2 linear unabhängige Lösungen (Eigenvektoren), etwa

$$h_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin gilt

$$(A - \lambda)h_2^{(1)} = h_1^{(1)} \quad \text{für } h_2^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Transformationsmatrix

$$S := (h_1^{(1)}, h_2^{(1)}, h_1^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man daher die Jordan-Normalform

$$S^{-1}AS = J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jede Lösung der Dgl. $y' = Ay$ hat somit die Form

$$y(t) = c_1 e^t h_1^{(1)} + c_2 e^t (h_2^{(1)} + t h_1^{(1)}) + c_3 e^t h_1^{(2)}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$.

d) Lineare Dgl. höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Überlegungen des vorherigen Abschnitts lassen sich übertragen auf Dgl. der Form

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \dots + a_k x(t) = 0. \quad (3-4)$$

Wir setzen (vgl. Bemerkung 1.4 a)

$$y(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist (3-4) äquivalent zu $y'(t) = Ay(t)$.

3.15 Satz. a) Das charakteristische Polynom der Matrix A ist gegeben durch

$$\chi_A(\lambda) := \det(\lambda I_k - A) = \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k.$$

b) Sei λ eine p -fache Nullstelle von χ_A . Dann sind

$$x_1(t) := e^{\lambda t}, \quad x_2(t) := t e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad x_p(t) := t^{p-1} e^{\lambda t}$$

linear unabhängige Lösungen der Dgl. (3-4). Betrachtet man diese Lösungen für alle Nullstellen von χ_A , so erhält man ein Fundamentalsystem.

Beweis. a) wird hier nicht bewiesen (Beweis z.B. möglich durch Induktion).

b) Wir konstruieren explizit eine Kette von Hauptvektoren. Dazu sei

$$c(\mu) := \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \\ \vdots \\ \mu^{k-1} \end{pmatrix}$$

und $h_j := \frac{1}{(j-1)!} c^{(j-1)}(\lambda)$. Es gilt

$$Ac(\mu) = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu^{k-1} \\ \mu^k - \chi_A(\mu) \end{pmatrix} = \mu c(\mu) - \chi_A(\mu) e_k.$$

Wir leiten j -mal nach μ ab. Per Induktion sieht man

$$Ac^{(j)}(\mu) = \mu c^{(j)}(\mu) + jc^{(j-1)}(\mu) - \chi_A^{(j)}(\mu)e_k \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Falls nun λ eine p -fache Nullstelle ist, so gilt $\chi_A(\lambda) = \dots = \chi_A^{(p-1)}(\lambda) = 0$ und damit

$$(A - \lambda I_k)c^{(j)}(\lambda) = \begin{cases} 0, & j = 0, \\ jc^{(j-1)}(\lambda), & j = 1, \dots, p-1. \end{cases}$$

Für die Vektoren h_j folgt damit

$$(A - \lambda I_k)h_j = \begin{cases} 0, & j = 1, \\ h_{j-1}, & j = 2, \dots, p. \end{cases}$$

Damit ist h_1, \dots, h_p eine Kette von Hauptvektoren. Nach Satz 3.13 sind

$$y_j(t) := e^{\lambda t} \left(h_j + th_{j-1} + \frac{t^2}{2} h_{j-2} + \dots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} h_1 \right) \quad (j = 1, \dots, p)$$

linear unabhängige Lösungen von $y' = Ay$. Wir brauchen davon nur die erste Komponente. Da die erste Komponente von h_j für $j = 1$ gleich 1 ist und für $j > 1$ verschwindet, erhalten wir

$$x_j(t) = e^{\lambda t} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \quad (j = 1, \dots, p)$$

für die ersten Komponenten. Wir können auf den Faktor $\frac{1}{(j-1)!}$ noch verzichten. Die ersten Komponenten sind linear unabhängig, da sonst auch die Vektoren y_j linear abhängig wären. \square

Bei speziellen Inhomogenitäten kann man eine partikuläre Lösung direkt hinschreiben:

3.16 Satz. *Betrachte die Dgl.*

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \dots + a_k x(t) = t^s e^{\lambda t} \quad (3-5)$$

mit $s \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei λ eine p -fache Nullstelle von χ_A mit $p \in \mathbb{N}_0$, d.h. $\chi_A(\mu) = (\mu - \lambda)^p \psi(\mu)$ mit $\psi(\lambda) \neq 0$. Dann ist

$$x(t) := \frac{s!}{(p+s)!} \frac{\partial^{p+s}}{\partial \mu^{p+s}} \left(\frac{\exp(\mu t)}{\psi(\mu)} \right) \Big|_{\mu=\lambda}$$

eine partikuläre Lösung von (3-5).

Beweis. Betrachte den Differentialoperator

$$L: C^k(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow C(\mathbb{R}; \mathbb{C}), \quad u \mapsto u^{(k)} + a_1 u^{(k-1)} + \cdots + a_k u =: \chi_A(D)u$$

mit

$$\chi_A(D) := D^k + a_1 D^{k-1} + \cdots + a_k D^0, \quad D := \frac{d}{dt}.$$

Dann gilt für die Funktion $f(t) := e^{\mu t}$ mit $\mu \in \mathbb{C}$ offensichtlich

$$(Lf)(t) = (\chi_A(D)f)(t) = \chi_A(\mu)f(t) = (\mu - \lambda)^p \psi(\mu)f(t).$$

Somit

$$L\left(\frac{1}{\psi(\mu)}f\right)(t) = (\mu - \lambda)^p e^{\mu t}.$$

Wir differenzieren die letzte Gleichung $(p + s)$ -mal nach μ an der Stelle $\mu = \lambda$. Auf der rechten Seite verwenden wir

$$\frac{\partial^j}{\partial \mu^j} (\mu - \lambda)^p \Big|_{\mu=\lambda} = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ p!, & j = p. \end{cases}$$

Mit der Produktregel erhält man für die oben definierte Funktion x :

$$\begin{aligned} (Lx)(t) &= \frac{s!}{(p+s)!} L\left[\frac{\partial^{p+s}}{\partial \mu^{p+s}}\left(\frac{\exp(\mu t)}{\psi(\mu)}\right)\Big|_{\mu=\lambda}\right] \\ &= \frac{s!}{(p+s)!} \frac{\partial^{p+s}}{\partial \mu^{p+s}}\left[(\mu - \lambda)^p e^{\mu t}\right]\Big|_{\mu=\lambda} \\ &= \frac{s!}{(p+s)!} \binom{p+s}{p} p! t^s e^{\lambda t} \\ &= t^s e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

□

3.17 Bemerkung (Leibniz-Formel). Im letzten Beweis wurde die Produktregel gleich für höhere Ableitungen verwendet, die sogenannte Leibniz-Formel: Seien f, g n -fach differenzierbar. Dann gilt

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Diese Formel kann man leicht induktiv beweisen.

3.18 Bemerkung. Bei Dgl. mit reellen Koeffizienten führen die bisherigen Ansätze auf komplexwertige Lösungen. Falls y eine Lösung von $y' = Ay$ ist, so ist auch $\operatorname{Re} y$

und $\operatorname{Im} y$ eine Lösung. Wenn die Matrix A reell ist, treten komplexe Eigenwerte stets in konjugiert komplexen Paaren auf. Wegen

$$e^{\lambda t} = e^{\operatorname{Re} \lambda t} (\cos(\operatorname{Im} \lambda t) + i \sin(\operatorname{Im} \lambda t))$$

treten dann noch \cos - und \sin -Terme auf. Diese Überlegungen gelten analog für Dgl. höherer Ordnung.

3.19 Beispiel. a) Betrachte

$$x^{(4)}(t) - 2x''(t) + x(t) = 24 t \sin t. \quad (3-6)$$

(i) Fundamentalsystem der homogenen Dgl.: Es ist

$$\chi_A(\mu) = \mu^4 - 2\mu^2 + 1 = (\mu - 1)^2(\mu + 1)^2.$$

Nach Satz 3.15 ist also

$$e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.

(ii) Übergang zum Komplexen: Wegen $t \sin t = \operatorname{Im}(te^{it})$ betrachten wir zunächst die rechte Seite te^{it} .

(iii) Bestimmung einer partikulären Lösung: In der Bezeichnung von Satz 3.16 ist $s = 1$, $\lambda = i$ und $p = 0$. Damit ist $\psi(t) = \chi_A(t)$, und der Ansatz für die spezielle Lösung lautet für die Inhomogenität $t e^{it}$:

$$x_0(t) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{e^{\mu t}}{\psi(\mu)} \right) \Big|_{\mu=i} = \frac{\psi(\mu) t e^{\mu t} - \psi'(\mu) e^{\mu t}}{\psi^2(\mu)} \Big|_{\mu=i} = \dots = \frac{t + 2i}{4} e^{it}.$$

Für die rechte Seite $24 te^{it}$ erhalten wir damit die komplexwertige spezielle Lösung

$$\begin{aligned} 24x_0(t) &= (6t + 12i)e^{it} = (6t + 12i)(\cos t + i \sin t) \\ &= (6t \cos t - 12 \sin t) + i(6t \sin t + 12 \cos t). \end{aligned}$$

(iv) Rückkehr zur reellen Lösung: Da die ursprüngliche rechte Seite der Imaginärteil der in (iii) betrachteten Inhomogenität war, ist auch der Imaginärteil von $x_0(t)$ eine partikuläre Lösung der ursprünglichen Gleichung. Somit ist

$$\operatorname{Im} 24x_0(t) = 6t \sin t + 12 \cos t$$

eine spezielle Lösung von (3-6).

(v) Allgemeine Lösung: Die allgemeine Lösung ist somit gegeben durch

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} + 6t \sin t + 12 \cos t$$

mit Konstanten $c_j \in \mathbb{C}$.

b) Alternativ kann man in obigem Beispiel statt mit der expliziten Lösungsformel von Satz 3.16 auch mit einem Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten arbeiten. Da mit der Bezeichnung des Satzes $\lambda = i$, $s = 1$ und $p = 0$ gilt, hat die Lösung (in der komplexen Variante) die Form

$$x_0(t) = c_0 e^{it} + c_1 t e^{it}.$$

Durch Ableiten und Einsetzen in die Dgl. erhält man

$$x_0^{(4)}(t) - 2x_0''(t) + x_0(t) = (4c_0 - 8c_1 i)e^{it} + 4c_1 t e^{it}.$$

Die rechte Seite ist gleich der gegebenen rechten Seite $t e^{it}$ für $c_1 = \frac{1}{4}$ und $c_0 = \frac{1}{2}i$.

4. Qualitative Aspekte

4.1 Worum geht's? Für viele Anwendungen ist nicht nur die Frage der eindeutigen Lösbarkeit einer Dgl. wichtig, sondern auch die Frage, wie sich die Lösungen verhalten. Insbesondere die Stabilität der Lösungen, d.h. das Verhalten der Lösung für $t \rightarrow \infty$ ist wichtig. Eine Lösung heißt stabil, falls eine kleine Abweichung im Anfangswert eine (für alle Zeiten) kleine Abweichung in der Lösung bewirkt. Man beachte, dass kleine Abweichungen in den Daten in den Anwendungen stets vorhanden sind.

Die Stabilität der Lösung einer gewöhnlichen Dgl. (und erst recht einer partiellen Dgl.) ist sehr schwer zu beweisen. Es gibt kein allgemein gültiges Rezept, diese Frage zu beantworten. Falls man jedoch Glück hat, kann man eine Ljapunov-Funktion zur Dgl. finden und somit die Stabilität beweisen.

Dieser Abschnitt soll nur einen kurzen Einblick in dieses Themengebiet liefern. Vertieft werden diese Fragen dann im Hauptstudium insbesondere auch bei partiellen Dgl.

a) Stabilität

Bei der qualitativen Beschreibung des Lösungsverhaltens von Dgl. werden einige Begriffe üblicherweise verwendet, die in folgender Definition zusammengestellt werden.

4.2 Definition. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in J), \quad y(t_0) = y_0. \quad (4-1)$$

mit einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und einer Funktion $f: J \times X \rightarrow X$, $X := \mathbb{K}^n$, wobei wieder $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Der Raum X heißt der Zustandsraum oder Phasenraum der Gleichung (4-1).

Sei nun das Anfangswertproblem (4-1) eindeutig lösbar und $t_0 \in J$ fest. Dann heißt die Abbildung

$$\Phi: J \times X \rightarrow X, \quad (t, y_0) \mapsto \Phi(t, y_0) := y(t)$$

der Fluss der Dgl. (wobei y wieder die Lösung des Anfangswertproblems ist). Der zugehörige Wertebereich

$$\gamma(y_0) := \{\Phi(t, y_0) : t \in J\}$$

heißt der Orbit (oder Phasenkurve, Trajektorie). Ein $y_0 \in X$ heißt ein Fixpunkt, falls gilt

$$\Phi(t, y_0) = y_0 \quad (t \in J).$$

Offensichtlich ist y_0 genau dann ein Fixpunkt, wenn

$$f(t, y_0) = 0 \quad (t \in J).$$

In diesem Fall heißt y_0 ein singulärer Punkt von f . So besitzt z.B. die logistische Gleichung

$$y'(t) = y(t)(y(t) - 1)$$

die singulären Punkte $y_0 = 0$ und $y_0 = 1$.

4.3 Beispiel. Die Dgl.

$$x'' + x = 0$$

(ungedämpftes lineares Pendel) ist äquivalent zum System

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix},$$

wobei wie üblich $y := \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ gesetzt wurde. Zu $y_0 \in \mathbb{R}^2$ ist die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = y_0$ gegeben durch

$$\Phi(t, y_0) = y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} y_0.$$

Damit ist der Orbit periodisch mit Periode 2π .

4.4 Beispiel (Orbits bei 2×2 -Matrizen). Das qualitative Verhalten lässt sich gut beschreiben, falls man die lineare Dgl. $y' = Ay$ mit einer konstanten 2×2 -Matrix A betrachtet. Die Lösung ist natürlich durch $y(t) = \exp(tA)y(t_0)$ gegeben, das qualitative Verhalten wird durch die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ von A bestimmt. Wir sehen an den Phasenportraits (Orbits) der Lösung folgende Möglichkeiten:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: Quelle (siehe Abbildung 7).
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d.h. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: Senke (siehe Abbildung 8).
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d.h. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$: instabiler Sattelpunkt (siehe Abbildung 9).
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. doppelter Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ mit einfacher geometrischer Vielfachheit (Jordan-Normalform): instabiler eintangentiger Knoten (siehe Abbildung 10).

- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d.h. doppelter Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ mit einfacher geometrischer Vielfachheit (Jordan-Normalform): stabiler eintangentiger Knoten (siehe Abbildung 11).
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, d.h. zwei rein imaginäre (und zueinander konjugiert komplexe) Eigenwerte $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$: Zentrum oder Wirbelpunkt (siehe Abbildung 12).
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. zwei komplexe (und zueinander konjugierte) Eigenwerte $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ mit $\text{Re } \lambda_j > 0$: instabiler Strudelpunkt (siehe Abbildung 13).
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, d.h. zwei komplexe (und zueinander konjugierte) Eigenwerte $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ mit $\text{Re } \lambda_j < 0$: stabiler Strudelpunkt (siehe Abbildung 14).

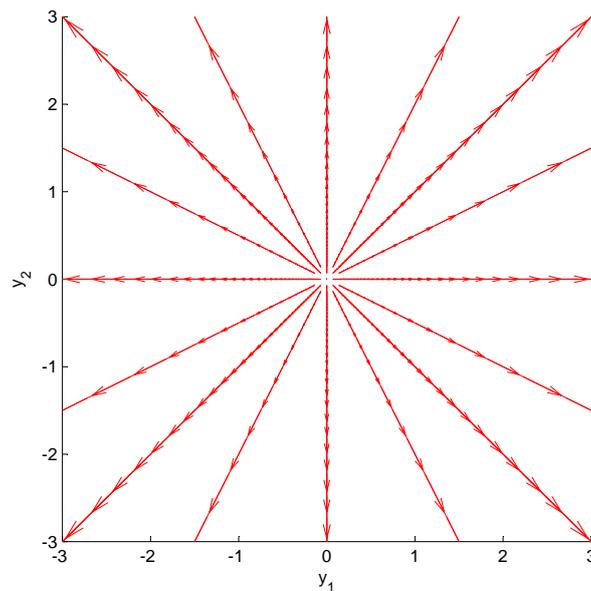


Abbildung 7: Orbits bei zwei positiven Eigenwerten (Quelle)

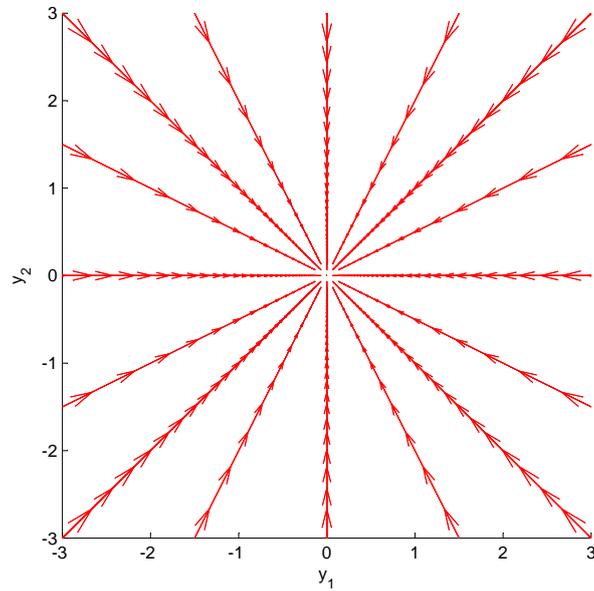


Abbildung 8: Orbits bei zwei negativen Eigenwerten (Senke)

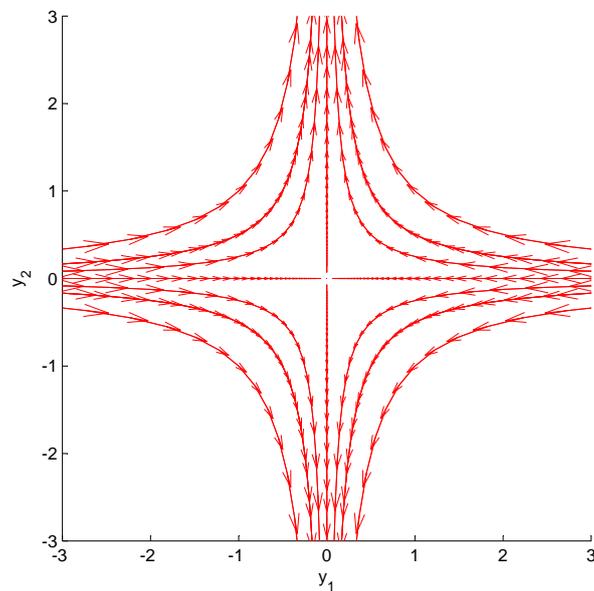


Abbildung 9: Ein positiver und ein negativer Eigenwert (instabiler Sattelpunkt)

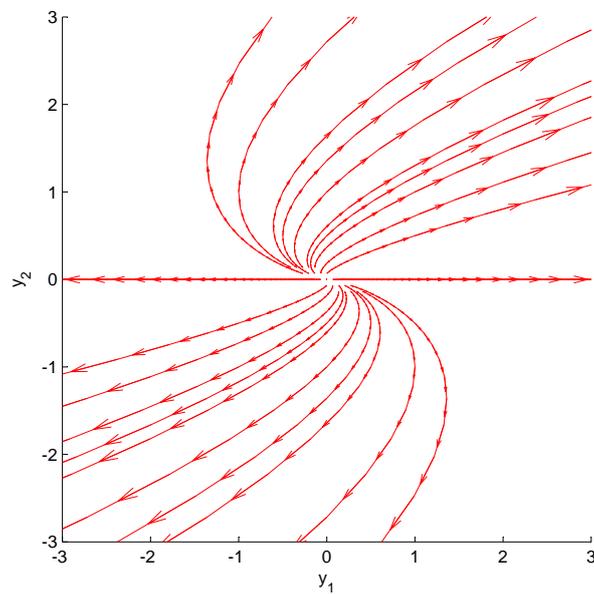


Abbildung 10: Doppelter positiver Eigenwert mit Jordan-Normalform (instabiler eintangentiger Knoten)

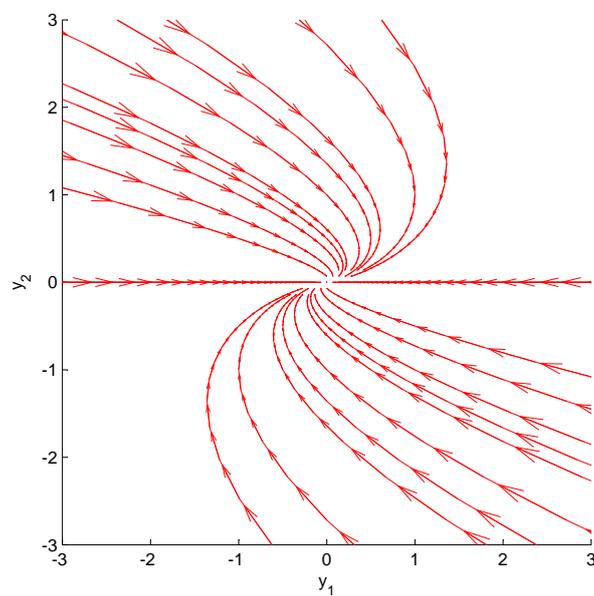


Abbildung 11: Doppelter negativer Eigenwert mit Jordan-Normalform (stabiler eintangentiger Knoten)

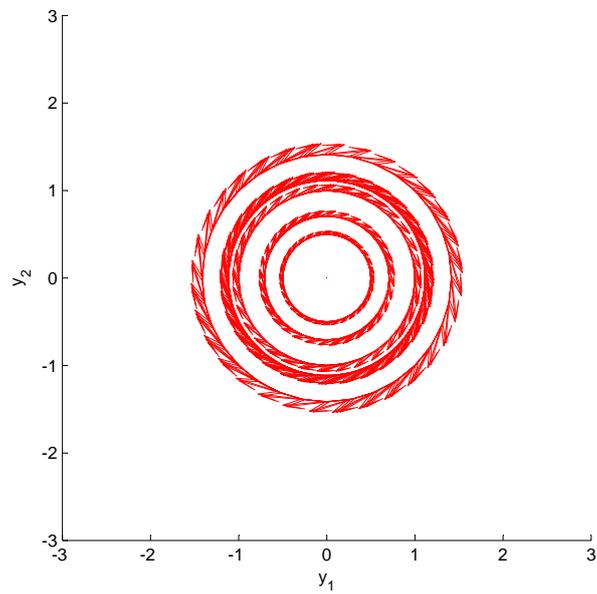
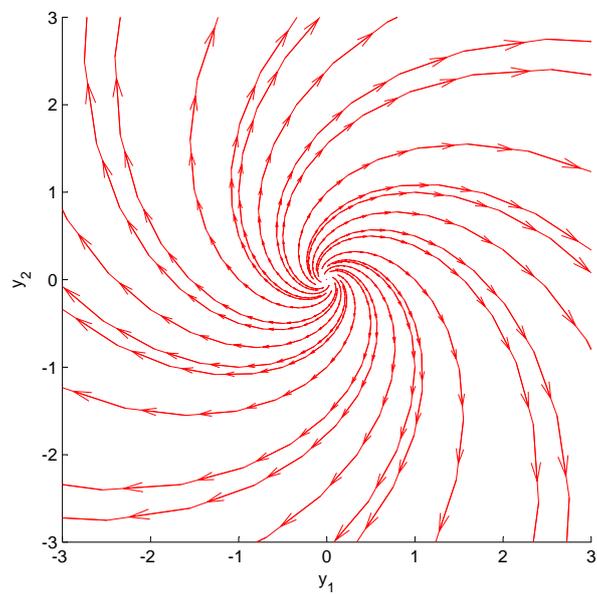


Abbildung 12: Rein imaginärer Eigenwert (Wirbelpunkt)

Abbildung 13: Zwei komplexe Eigenwerte mit positivem Realteil (instabiler Strudel-
punkt)

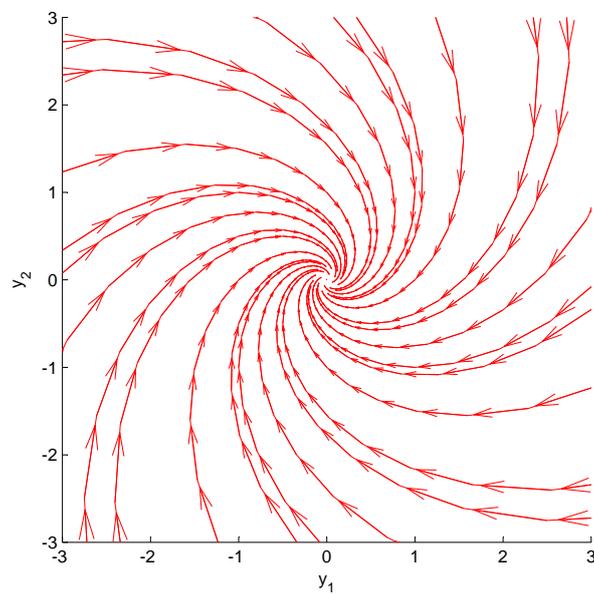


Abbildung 14: Zwei komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil (stabiler Strudel-punkt)

4.5 Definition. Eine Lösung y des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0$$

heißt stabil, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Lösungen x des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

mit $|x_0 - y_0| < \delta$ gilt:

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon \quad (t \in [0, \infty)).$$

Die Lösung y heißt instabil, falls sie nicht stabil ist.

Die Lösung y heißt asymptotisch stabil, falls sie stabil ist und falls für x wie oben zusätzlich gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0.$$

In obigen Beispielen ist etwa ein Wirbelpunkt stabil, eine Senke ist asymptotisch stabil, eine Quelle ist instabil. Allgemein ist die triviale Lösung $y = 0$ der Dgl. $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau dann

- instabil, falls ein Eigenwert λ von A existiert mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$ oder falls ein Eigenwert λ von A existiert mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$, für welchen die algebraische Vielfachheit größer ist als die geometrische Vielfachheit,
- stabil, falls für alle Eigenwerte λ von A gilt: $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ und für alle Eigenwerte λ mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit ist,
- asymptotisch stabil, falls für alle Eigenwerte λ gilt $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

4.6 Satz. Gegeben sei die nichtlineare Dgl.

$$x'(t) = Ax(t) + g(t, x(t)) \quad (t \geq 0), \quad x(0) = x_0 \quad (4-2)$$

mit $g \in C([0, \infty) \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Dabei erfülle g die Bedingung

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sup_{t \geq 0} |g(t, z)|}{|z|} = 0.$$

Für alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A gelte $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$. Dann ist die triviale Lösung $y = 0$ (zu $x_0 = 0$) asymptotisch stabil. Insbesondere existiert zu jedem hinreichend kleinen $x_0 \in \mathbb{C}^n$ eine globale Lösung der Dgl. (4-2).

Beweis. Wegen da $g(t, 0) = 0$ ($t \geq 0$) ist $y = 0$ eine Lösung von (4-2) mit $x_0 = 0$. Jede Lösung z des homogenen Systems $z'(t) = Az(t)$ ist gegeben durch $z(t) = e^{tA}z(0)$. Da die Koeffizienten der Matrix e^{tA} nur Terme der Form $t^s e^{\lambda_j t}$ enthalten, existieren $a \geq 1$ und $b > 0$ mit

$$\|\exp(tA)\| \leq ae^{-bt} \quad (t \geq 0).$$

Sei nun x eine Lösung von (4-2). Nach Satz 3.9 (Variation der Konstanten) gilt dann

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}g(s, x(s))ds.$$

Es folgt

$$|x(t)| \leq ae^{-bt}|x_0| + a \int_0^t e^{-b(t-s)}|g(s, x(s))|ds. \quad (4-3)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen der Bedingung an g existiert dann ein $r \in (0, \varepsilon)$ so, dass für alle $z \in \mathbb{C}^n$ mit $|z| < r$ die Abschätzung

$$\sup_{t \geq 0} |g(t, z)| < \frac{b}{2a}|z|$$

gilt. Wir setzen $\delta := \frac{r}{a}$. Für $x_0 \in \mathbb{C}^n$ mit $|x_0| < \delta$ folgt $|x(0)| = |x_0| < \frac{r}{a} \leq r$ wegen $a \geq 1$. Sei $t_0 := \inf\{t \geq 0 : |x(t)| = r\} \in (0, \infty]$. Falls t_0 endlich ist, so erhalten wir mit (4-3) für alle $t \in [0, t_0]$

$$|x(t)| \leq re^{-bt} + a \int_0^t e^{-b(t-s)} \frac{b}{2a} |x(s)| ds = re^{-bt} + \frac{b}{2} \int_0^t e^{-b(t-s)} |x(s)| ds.$$

Nach dem Lemma von Gronwall folgt für alle $t \in [0, t_0]$

$$|x(t)| \leq re^{-bt} \exp\left(\frac{b}{2} \int_0^t e^{-b(t-s)} ds\right) \leq re^{-bt} \exp\left(\frac{b}{2} \int_0^t 1 ds\right) = re^{-bt/2} \quad (4-4)$$

und damit $r = |x(t_0)| \leq re^{-bt_0/2} < r$, Widerspruch. Somit ist $t_0 = \infty$, d.h. es gilt $|x(t)| < r < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$, d.h. $y = 0$ ist stabil. Weiter erhalten wir (4-4) für alle $t \geq 0$, und es folgt $|x(t)| \leq re^{-bt/2}$ ($t \geq 0$) und damit $x(t) \rightarrow 0$ für alle Lösungen x von (4-2) mit $|x_0| < \delta$. Somit ist $y = 0$ asymptotisch stabil. \square

4.7 Bemerkung. a) Wir haben im obigen Beweis gezeigt, dass für kleine z die Funktion $g(t, z)$ eine kleine Störung von Az ist. Tatsächlich kann man mit einem ähnlichen Beweis zeigen, dass in der Situation von Satz 4.6 die Nulllösung instabil ist, falls mindestens ein Eigenwert positiven Realteil hat (siehe etwa [Wa], §29, Abschnitt VIII).

b) Bei autonomen Dgl $x'(t) = f(x(t))$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion f kann der obige Satz einfach angewendet werden: Man schreibt diese in der Form $x'(t) = Ax(t) + g(x(t))$, wobei $A := f'(0)$ die Jacobimatrix von f an der Stelle 0 ist und $g(z) := f(z) - f'(0)z$. Dann erfüllt g die Bedingung des Satzes, und man kann Stabilität bzw. Instabilität an den Eigenwerten von $f'(0)$ erkennen.

4.8 Beispiel (Räuber–Beute–Modell). Wir betrachten das Dgl-System

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = f(x(t)) := \begin{pmatrix} (a - bx_2(t) - mx_1(t))x_1(t) \\ (-d + cx_1(t) - nx_2(t))x_2(t) \end{pmatrix} \quad (t \geq 0). \quad (4-5)$$

Dabei sind $a, b, c, d, m, n > 0$ Parameter. Dieses System modelliert die Populationen einer Beutespezies x_1 und einer Räuberspezies x_2 . Die Änderungsrate der Beutespezies wird somit beschrieben durch

$$x_1'(t) = r_1(x(t))x_1(t),$$

wobei $r_1(x(t)) := a - bx_2(t) - mx_1(t)$. Dabei ist a die Reproduktionsrate (ohne Anwesenheit von Räubern), b die Reduktion durch die Anwesenheit der Räuber und m die Reduktion durch Konkurrenz der eigenen Spezies. Analog wird die Änderungsrate der Beutespezies beschrieben durch

$$x_2'(t) = r_2(x(t))x_2(t)$$

mit $r_2(x(t)) := (-d + cx_1(t) - nx_2(t))$. Hier ist d die Sterberate ohne Anwesenheit der Beute, c die Zunahme der Rate durch die Beute und n die Reduktion wegen Konkurrenz.

Für die Stabilität bestimmen wir zunächst die Fixpunkte von (4-5), d.h. die singulären Punkte von f . Die Gleichung $f(x) = 0$ besitzt offensichtlich die Lösungen

$$x^1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{d}{n} \end{pmatrix}, \quad x^3 := \begin{pmatrix} \frac{a}{m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Falls $x_1, x_2 \neq 0$, erhalten wir

$$a - bx_2 - mx_1 = 0, \quad -d + cx_1 - nx_2 = 0$$

mit der Lösung $x^4 = (x_1^4, x_2^4)^\top$, wobei

$$x_1^4 = \frac{bd + an}{bc + nm}, \quad x_2^4 = \frac{ac - md}{bc + mn}.$$

Zur Bestimmung der Stabilität bzw. Instabilität verwenden wir Satz 4.6 und Bemerkung 4.7, d.h. wir untersuchen die Jacobimatrix von f . Diese ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{pmatrix} a - bx_2 - 2mx_1 & -bx_1 \\ cx_2 & -d + cx_1 - 2nx_2 \end{pmatrix}.$$

(i) Der Punkt x^1 (genauer: die konstante Lösung $y(t) = x^1$ ($t \geq 0$)) ist instabil, da

$$f'(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

den Eigenwert $a > 0$ besitzt.

(ii) Zur Stabilität von x^3 wenden wir Satz 4.6 auf die verschobene Funktion $\tilde{f}(x) := f(x + x^3)$ an, d.h. die Stabilität wird durch die Eigenwerte von $(\tilde{f})'(0) = f'(x^3)$ bestimmt. Es gilt

$$f'(x^3) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ba}{m} \\ 0 & -d + \frac{ac}{m} \end{pmatrix},$$

also ist x^3 asymptotisch stabil, falls $-d + \frac{ac}{m} < 0$, d.h. falls $ac < md$, und instabil im Fall $ac > md$.

(iii) Analog zeigt man, dass x^2 instabil ist und dass x^4 asymptotisch stabil ist, falls $ac > md$ gilt.

4.9 Beispiel. Betrachte die Dgl. einer gedämpften Schwingung

$$y''(t) + y(t) + ry'(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

mit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $r > 0$ der Dämpfungsfaktor ist. Wir multiplizieren mit y' :

$$y''y' + yy' + r(y')^2 = 0$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dt} (|y'|^2 + |y|^2) = -2r(y')^2 \leq 0.$$

Also ist die linke Seite als Funktion von t monoton fallend, d.h.

$$|y'(t)|^2 + |y(t)|^2 \leq |y'(0)|^2 + |y(0)|^2.$$

Damit ist die Lösung $y_0(t) = 0$ ($t \in \mathbb{R}$) eine stabile Lösung der Dgl., denn eine kleine Abweichung der Startwerte $(y(0), y'(0))$ an der Stelle 0 kann für alle $t \in \mathbb{R}$ nicht größer werden.

Schreibt man dieses Beispiel als System erster Ordnung, erhält man mit $x := \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ die (autonome) Gleichung

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) - rx_2(t) \end{pmatrix} =: f(x(t)).$$

Für $E(x) := |x|^2$ erhält man für eine Lösung $x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$

$$\frac{d}{dt} E(x(t)) = \langle \nabla E(x(t)), x'(t) \rangle = 2\langle x(t), x'(t) \rangle = -2rx_2^2(t) \leq 0.$$

Die Funktion E heißt eine Lyapunov-Funktion zur Dgl. $x'(t) = f(x(t))$.

4.10 Definition. Der Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sei ein isolierter singulärer Punkt des Vektorfeldes $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Dann heißt $L \in C^1(U(x_0); \mathbb{R})$, $U(x_0)$ eine Umgebung von x_0 , eine Lyapunov-Funktion zur autonomen Dgl. $x'(t) = f(x(t))$ am Punkt x_0 , falls gilt:

- (i) $L(x) \geq 0$ und $L(x) = 0$ nur an der Stelle x_0 ,
- (ii) Es gilt $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq 0 \quad (x \in U(x_0))$.

4.11 Satz. Sei $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ ein isolierter singulärer Punkt des Vektorfeldes $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Falls eine Lyapunov-Funktion L zur autonomen Dgl. $x'(t) = f(x(t))$ am Punkt x_0 existiert, so ist die konstante Lösung $y = 0$ stabil.

Beweis. Die Funktion L sei in $B(0, \varepsilon_0)$ definiert. Für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ setze $m(\varepsilon) := \min_{|x|=\varepsilon} L(x)$. Nach Eigenschaft (i) in Definition 4.10 ist $m(\varepsilon) > 0$. Da L stetig ist und $L(0) = 0$, existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ mit $L(x) < m(\varepsilon) \quad (x \in B(0, \delta))$.

Sei nun $x \in C^1([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $x'(t) = f(t, x(t))$ mit $|x(0)| < \delta$. Dann folgt $L(x(0)) < m(\varepsilon)$, und damit

$$\frac{d}{dt} L(x(t)) = \langle \nabla L(x(t)), x'(t) \rangle = \langle \nabla L(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq 0$$

für alle t mit $|x(t)| < \varepsilon_0$ nach Eigenschaft (ii). Damit folgt $L(x(t)) < m(\varepsilon)$ für alle $t \geq 0$ mit $|x(t)| < \varepsilon$.

Sei $t_1 := \inf\{t \geq 0 : |x(t)| \geq \varepsilon\}$. Falls $t_1 < \infty$, so gilt aufgrund der Stetigkeit $|x(t_1)| = \varepsilon$ und damit $L(x(t_1)) \geq m(\varepsilon)$. Wegen $|x(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in [0, t_1)$ folgt $\frac{d}{dt} L(x(t)) \leq 0$ ($t \in [0, t_1)$) und $L(x(t_1)) \leq L(x(0)) < m(\varepsilon)$, Widerspruch. Also gilt $t_1 = \infty$, d.h. $|x(t)| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$, und die Nulllösung ist stabil. \square

4.12 Bemerkung. a) Die Schwierigkeit in der Anwendung dieses Satzes liegt darin, eine Lyapunov-Funktion zu finden. Auch bei partiellen Dgl. ist derselbe Ansatz möglich, aber dort ist es noch schwerer, eine Lyapunov-Funktion zu konstruieren. Manchmal hilft ein physikalischer Zugang (Energie).

b) Falls in Definition 4.10 (ii) sogar

$$\langle \nabla L(x), f(x) \rangle < 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}),$$

so spricht man von einer strengen Lyapunov-Funktion, und man kann die asymptotische Stabilität beweisen.

b) Phasenportraits

4.13 Definition. Sei x eine maximale Lösung der Dgl. $x' = f(t, x)$ im Intervall (a, b) . Dann heißt $\xi \in X$ ein Grenzpunkt von x bezüglich $t \rightarrow b$, falls eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n \uparrow b$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = \xi$ existiert. Analog werden Grenzpunkte bezüglich $t \rightarrow a$ definiert. Die Menge M_b aller Grenzpunkte von x (bezüglich $t \rightarrow b$) heißt ω -Limesmenge von x . Analog definieren wir die α -Limesmenge M_a von x für $t \rightarrow a$. Dabei sind $a = -\infty$, $b = \infty$ möglich.

Wir betrachten die autonome Dgl.

$$x'(t) = v(x(t)) \quad (t \geq 0), \quad x(0) = x_0, \quad (4-6)$$

wobei $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^\top \in \mathbb{R}^2$. Dabei sind insbesondere periodische Orbits interessant, d.h. Orbits von Lösungen mit $x(t + T_p) = x(t)$ ($t \geq 0$), diese entsprechen im Phasenportrait geschlossenen Kurven. Wir zitieren ohne Beweis:

4.14 Satz (Poincaré–Bendixson). Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, und sei x eine Lösung von (4-6) mit $x(t) \in K$ für alle $t \geq 0$. Falls K keine singulären Punkte von v enthält, dann ist die ω -Limesmenge M_∞ von x ein periodischer Orbit, und es gilt $\gamma(x_0) = M_\infty$ oder $x(t)$ strebt spiralförmig dagegen.

4.15 Beispiel. Betrachte die Dgl.

$$y''(t) + (y(t)^2 + 2(y'(t))^2 - 1)y'(t) + y(t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

Wir setzen $x(t) := (y(t), y'(t))^\top$ und erhalten $x'(t) = v(x(t))$ mit

$$v(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - 2x_2^2) \end{pmatrix}.$$

Für jede Lösung $x = x(t)$ der Dgl. folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |x|^2 = x_1 x_1' + x_2 x_2' = (1 - x_1^2 - 2x_2^2) x_2^2. \quad (4-7)$$

Sei nun x eine lokale Lösung der Dgl. mit $|x(0)|^2 \in (\frac{1}{2}, 1)$. Wir wollen zeigen, dass $|x(t)| \leq 1$ für alle $t > 0$ gilt. Falls dies nicht der Fall ist, existieren $t_1 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ mit $|x(t_1)| = 1$ und $|x(t)| > 1$ für alle $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$. Wegen (4-7) gilt $\frac{d}{ds} |x(s)|^2 < 0$ für alle $s \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$, und es folgt

$$|x(t)|^2 = |x(t_1)|^2 + \int_{t_1}^t \frac{d}{ds} |x(s)|^2 ds \leq |x(t_1)|^2 = 1$$

für alle $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$, Widerspruch. Analog zeigt man $|x(t)| \geq \frac{1}{2}$ ($t \geq 0$), beachte $1 - x_1^2 - 2x_2^2 \geq 0$ für $|x|^2 < 1/2$.

Damit gilt $x(t) \in K := \{z \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq |z|^2 \leq 1\}$ für alle $t \geq 0$. Die Menge K enthält keinen singulären Punkt von v , denn aus $v(x) = 0$ folgt sofort $x = 0$. Somit ist Satz 4.14 anwendbar.

Im Folgenden werden einige Phasenportraits von Dgl. skizziert.

4.16 Beispiele. Wir skizzieren einige Phasenportraits von Dgl.

(i) $y'' = y - y^3$: siehe Abbildung 15.

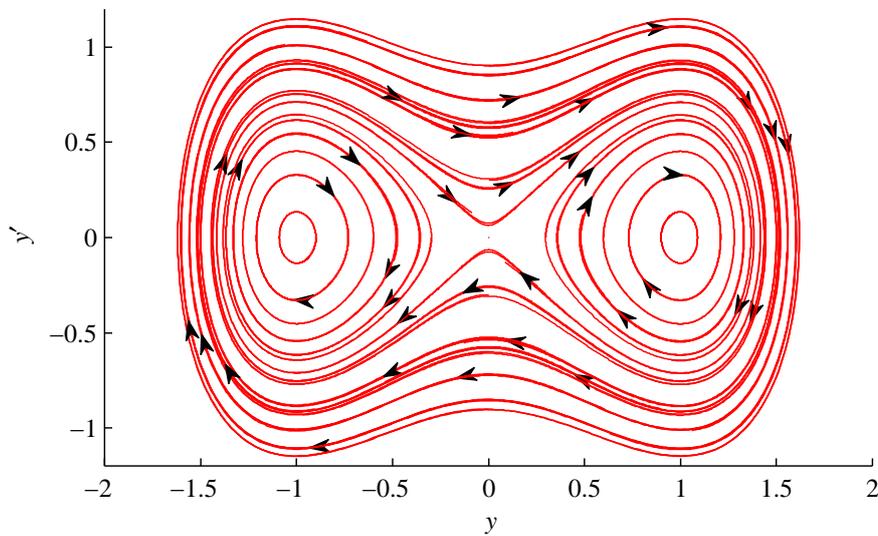


Abbildung 15: Phasenportrait von Beispiel 4.16 (i)

(ii) Wir betrachten das System

$$x_1(t) = r(t) \cdot \cos t, \quad x_2(t) = r(t) \cdot \sin t,$$

wobei die Funktion r die Differentialgleichung

$$r'(t) = r(t)(r(t) - 1), \quad r(0) = r_0$$

erfüllt. Falls $r_0 = 0$, gilt $r \equiv 0$, und falls $r_0 = 1$, gilt $r \equiv 1$. Ist $0 < r_0 < 1$ so ist $r(t) \leq 1$ für alle t , und falls $r_0 > 1$, so gilt $r(t) > 1$ ($t \geq 0$). Durch Separation der Variablen ergibt sich:

$$r(t) = \frac{1}{1 - \frac{r_0 - 1}{r_0} e^t}, \quad (r_0 \neq 0, 1).$$

Abbildung 16 zeigt das Phasenportrait.

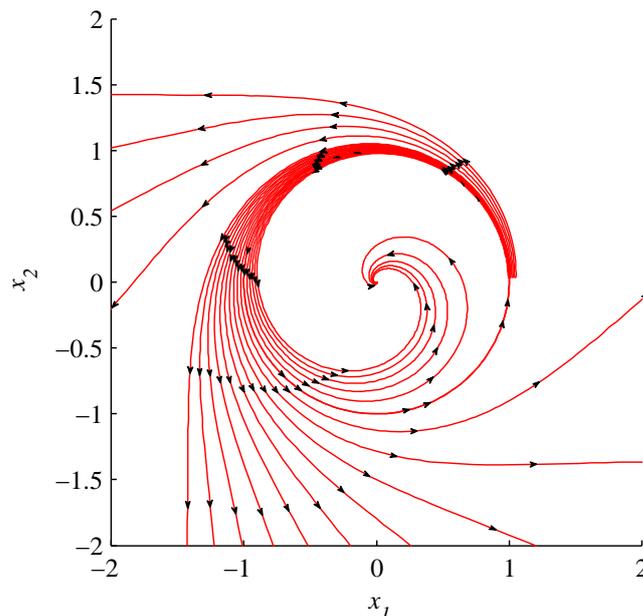


Abbildung 16: Phasenportrait von Beispiel 4.16 (ii)

(iii) Wir betrachten

(a) das lineare Pendel: $y'' + y = 0$,

(b) das nichtlineare Pendel: $y'' + \sin y = 0$,

die entsprechenden Phasenportraits sind in Abbildung 17 und 18 zu finden. Man beachte, dass beim linearen Pendel alle Orbits periodisch sind, nicht aber beim nichtlinearen Pendel.

(iv) Wir wählen im Räuber-Beute-Modell (Beispiel 4.8) die Parameter folgendermaßen:

(a) $a = 6$, $b = c = d = m = n = 1$: Hier ist $x^4 = (3.5, 2.5)^\top$ eine asymptotisch stabile stationäre Lösung, siehe Abbildung 19.

(b) $a = b = c = d = 1$, $m = n = 10^{-2}$: Hier ist $x^4 \approx (1, 1)^\top$ wieder asymptotisch stabil. In Abbildung 20 ist der Orbit der Lösung mit $x(0) = (0.6, 2.4)^\top$ zu sehen, der sehr langsam gegen x^4 konvergiert.

(v) Das Phasenportrait der Dgl. aus Beispiel 4.8 zeigt die spiralförmige Konvergenz der Orbits gegen die ω -Limesmenge, die hier nach dem Satz von Poincaré–Bendixson ein periodischer Orbit ist, siehe Abbildung 21.

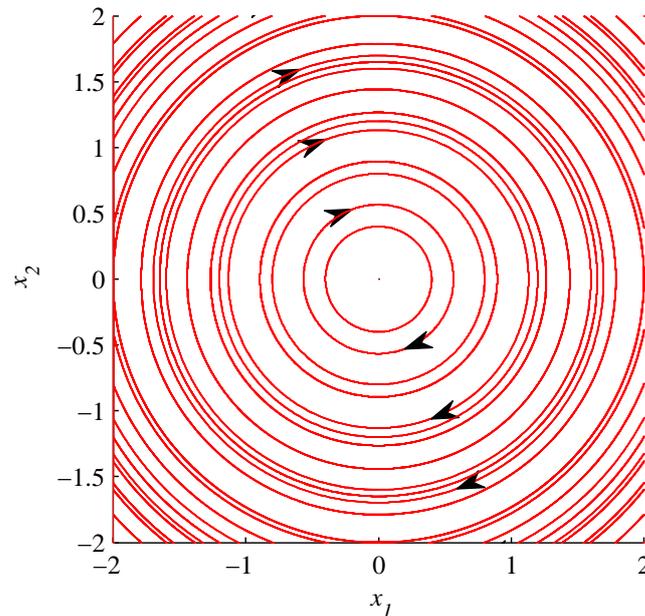


Abbildung 17: Phasenportrait von Beispiel (iii) 4.16 (a), lineares Pendel

(vi) Lorenz-Attraktor: Wir betrachten das System

$$x' = \begin{pmatrix} \sigma(-x_1 + x_2) \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ -bx_3 + x_1x_2 \end{pmatrix},$$

mit $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, welches zur Modellierung von Vorgängen in der Strömungsmechanik (Konvektionsströmung) verwendet wird. In Abbildung 22 wurde ein einzelner Orbit gezeichnet, man sieht, dass die ω -Limesmenge sehr ungewöhnlich ist: Die Bahn springt immer wieder zwischen den beiden sichtbaren Anteilen. Der Lorenz-Attraktor ist ein mathematisches Modell dafür, dass kleine Änderungen im Startwert die Bahn stark verändern kann, und spielt eine Rolle in der Chaostheorie. Im gezeichneten Beispiel sind die Parameter $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$, die Bahn startet beim Punkt $(-10, 10, 25)^\top$.

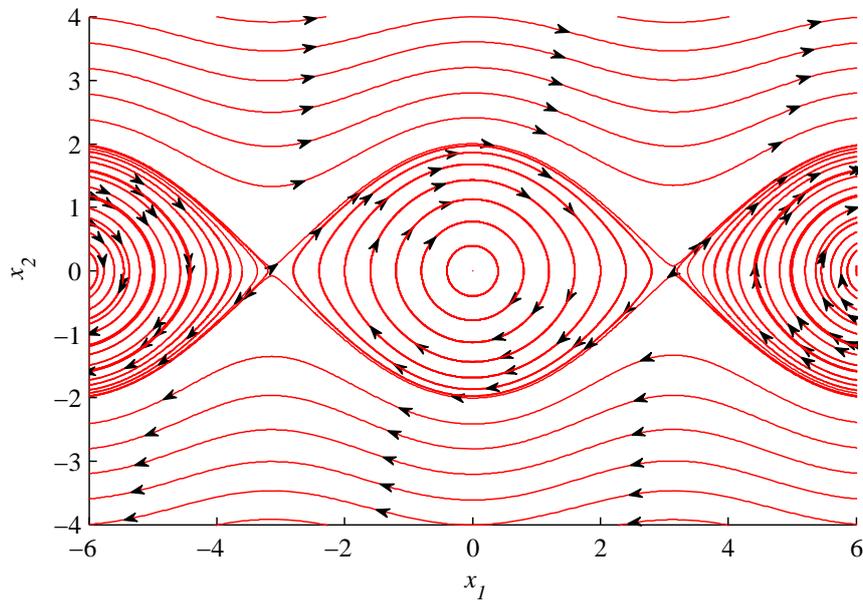


Abbildung 18: Phasenportrait von Beispiel 4.16 (iii) (b), nichtlineares Pendel

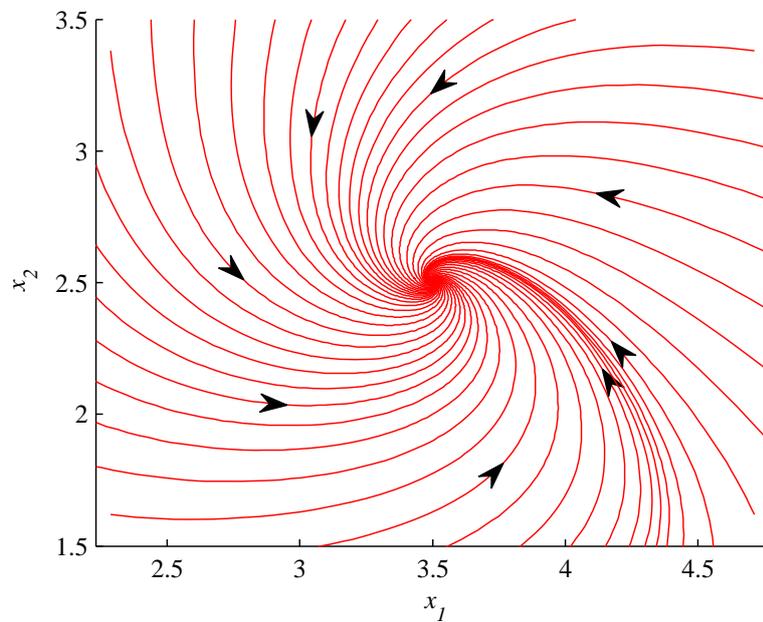


Abbildung 19: Das Räuber-Beute-Modell, Beispiel 4.16 (iv) (a)

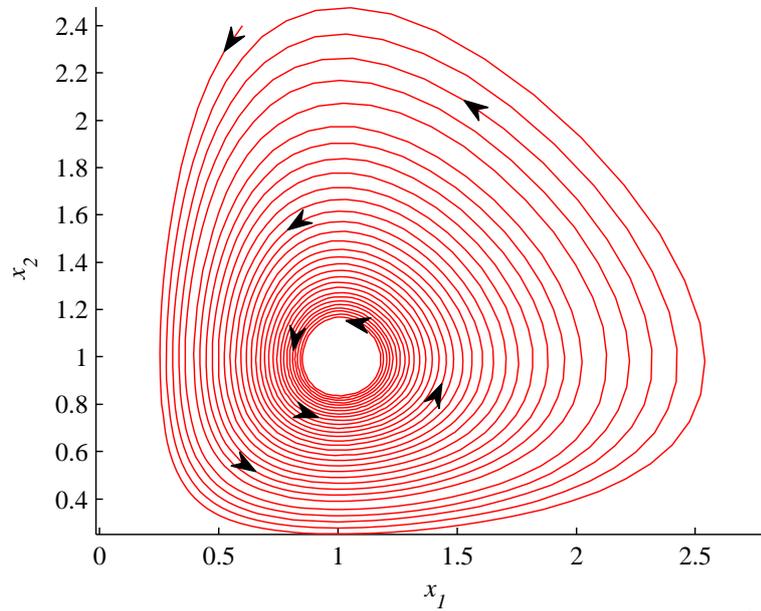


Abbildung 20: Das Räuber-Beute-Modell, Beispiel 4.16 (iv) (b)

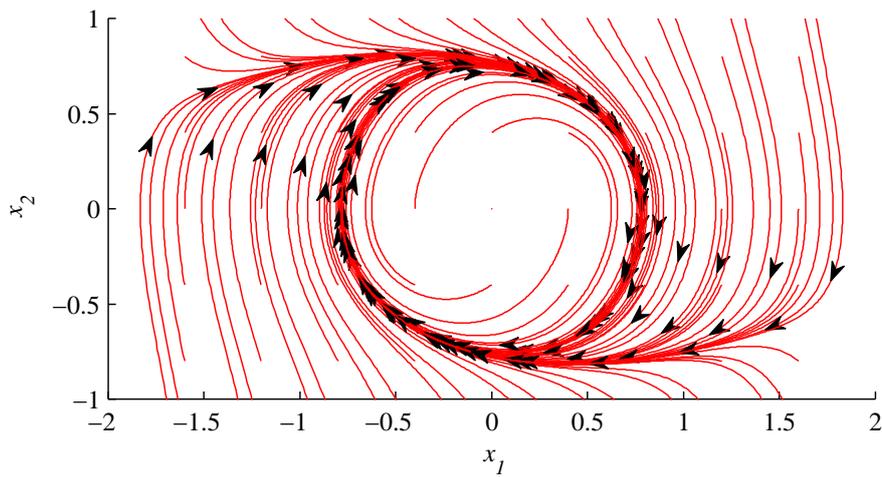


Abbildung 21: Phasenportrait von Beispiel 4.16 (v)

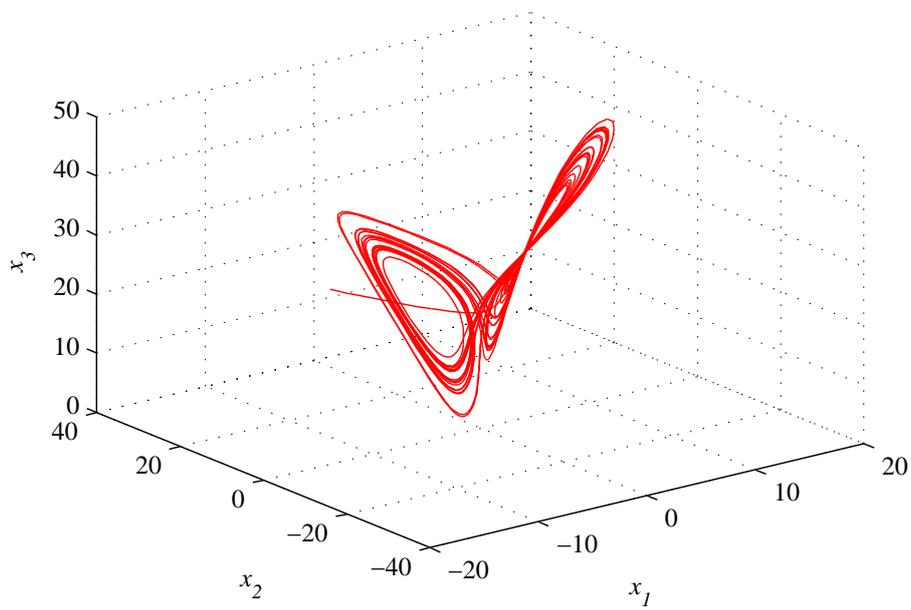


Abbildung 22: Der Lorenz-Attraktor, Beispiel 4.16 (vi)

5. Rand- und Eigenwertprobleme

5.1 Worum geht's? Die Schwingung einer Saite führt zur partiellen Differentialgleichung

$$\partial_t^2 u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = 0,$$

wobei t die Zeit und $x \in [0, L]$ den Ort auf der Saite der Länge L beschreibt. Die Lösung $u(t, x)$ ist dann die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t . Eine natürliche Bedingung ist die, dass die Saite am Rand fest eingespannt ist:

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0.$$

Wir geben noch die Auslenkung und die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ vor:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x).$$

Macht man den Ansatz $u(t, x) = a(t)v(x)$, so erhält man aus der Dgl. $a''(t)v(x) - a(t)v''(x) = 0$ und damit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{a''(t)}{a(t)} =: -\lambda$$

mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$. Für die Funktion v , welche jetzt nur noch von x abhängt, erhalten wir eine gewöhnliche Dgl.:

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v(L) = 0.$$

Im Vergleich zu bisher behandelten Dgl. unterscheidet sich diese in zwei Punkten:

- Es ist nicht der Wert und die erste Ableitung an einer Stelle vorgegeben (AWP), sondern der Wert der Lösung an zwei verschiedenen Stellen (Randwertproblem, RWP).
- In der Gleichung taucht ein unbekannter Parameter λ auf, es handelt sich um eine sogenannte Eigenwertaufgabe.

Um derartige Probleme geht es in diesem Abschnitt. Die erste Frage ist wieder die nach der eindeutigen Lösbarkeit eines Randwertproblems. Jetzt stellt sich allerdings heraus, dass das RWP nicht in jedem Fall eindeutig lösbar ist. Es gibt die Fälle, in denen keine Lösung existiert, es kann aber auch unendlich viele Lösungen geben. Wenn aber eindeutige Lösbarkeit gegeben ist, kann man die Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktion berechnen.

Wir werden später sehen, dass das zugehörige Eigenwertproblem nur für bestimmte Werte von λ eine nichttriviale Lösung besitzt. Tatsächlich kann man von diesen Eigenwerten und zugehörigen Eigenfunktionen noch mehr sagen, ja sogar beliebige Funktionen nach diesen Eigenfunktionen in Reihen entwickeln, ähnlich der Theorie der Fourier-Reihen.

a) Randwertaufgaben für lineare Dgl.-Systeme

Betrachte das Randwertproblem

$$y'(t) = F(t)y(t) + h(t) \quad (t \in [a, b]), \quad (5-1)$$

$$Ay(a) + By(b) = c. \quad (5-2)$$

Hier seien $a < b$, $F \in C([a, b], \mathbb{C}^{n \times n})$, $h \in C([a, b]; \mathbb{C}^n)$, $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $c \in \mathbb{C}^n$. Im Folgenden sei $Y \in C^1([a, b]; \mathbb{C}^{n \times n})$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems, d.h.

$$Y'(t) = F(t)Y(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann erhält man durch Variation der Konstanten eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems durch

$$y_0(t) := Y(t) \left(\int_a^t Y(s)^{-1} h(s) ds \right).$$

Die allgemeine Lösung hat die Form

$$y(t) = y_0(t) + Y(t)d$$

mit $d \in \mathbb{C}^n$.

5.2 Satz. Das Randwertproblem (5-1)–(5-2) ist genau dann für beliebiges h und c eindeutig lösbar, wenn die charakteristische Matrix

$$C_Y := AY(a) + BY(b)$$

invertierbar ist. Dies ist äquivalent dazu, dass das zugehörige homogene Randwertproblem

$$y'(t) = F(t)y(t), \quad Ay(a) + By(b) = 0$$

nur die triviale Lösung $y = 0$ besitzt.

Beweis. Wir setzen die allgemeine Lösung in die Randbedingung ein und erhalten wegen $y_0(a) = 0$ die Bedingung

$$(AY(a) + BY(b))d + By_0(b) = c.$$

Dies ist genau dann eindeutig nach d auflösbar, falls $\det C_Y \neq 0$. □

5.3 Bemerkung. Seien Y und Z zwei verschiedene Fundamentalmatrizen der Dgl. (5-1). Da das zu (5-1) gehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist, gilt $Z(t) = Y(t)S$ mit der invertierbaren Matrix $S := Y(a)^{-1}Z(a)$. Für die charakteristischen Matrizen erhalten wir

$$C_Z = AZ(a) + BZ(b) = C_Y S.$$

Also ist C_Z genau dann invertierbar, falls C_Y dies ist.

Der folgende Satz liefert eine Darstellung der Lösung des Randwertproblems mit homogenen Randbedingungen

$$y'(t) = F(t)y(t) + h(t), \quad Ay(a) + By(b) = 0. \quad (5-3)$$

5.4 Satz. Sei C_Y invertierbar. Dann existiert eine matrizenwertige Abbildung $G: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ (die Greensche Matrix) mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die Einschränkung von G auf die Bereiche $\{(t, s) : a \leq t < s \leq b\}$ und $\{(t, s) : a \leq s \leq t \leq b\}$ ist jeweils stetig.

(ii) $G(t+0, t) - G(t-0, t) = I_n$ für $a < t < b$.

(iii) Für jedes $h \in C([a, b]; \mathbb{C}^k)$ ist durch

$$y(t) := \int_a^b G(t, s)h(s)ds$$

die Lösung des Randwertproblems (5-3) gegeben.

Beweis. Die eindeutige Lösung des Randwertproblems ergibt sich mit obigen Bezeichnungen als $y(t) = y_0(t) + Y(t)d$ mit $d := -C_Y^{-1}By_0(b)$. Wir setzen die Darstellung von y_0 ein und erhalten

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^t Y(t)Y(s)^{-1}h(s)ds - Y(t)C_Y^{-1}B \int_a^b Y(b)Y(s)^{-1}h(s)ds \\ &= \int_a^b G(t, s)h(s)ds \end{aligned}$$

mit

$$G(t, s) := \begin{cases} Y(t)[I_n - C_Y^{-1}BY(b)]Y(s)^{-1}, & a \leq s \leq t \leq b, \\ -Y(t)C_Y^{-1}BY(b)Y(s)^{-1}, & a \leq t < s \leq b. \end{cases}$$

Die Gleichung (ii) folgt sofort durch Einsetzen. \square

5.5 Bemerkung. Aus der Definition von C_Y erhalten wir

$$I_n - C_Y^{-1}BY(b) = C_Y^{-1}AY(a)$$

und damit eine symmetrische Darstellung der Greenschen Matrix:

$$G(t, s) = \begin{cases} Y(t)C_Y^{-1}AY(a)Y(s)^{-1}, & a \leq s \leq t \leq b, \\ -Y(t)C_Y^{-1}BY(b)Y(s)^{-1}, & a \leq t < s \leq b. \end{cases}$$

Da sich die Lösung des Randwertproblems durch Integration über $G(t, \cdot)$ ergibt, spielen die Werte von G auf der Diagonalen $\Delta := \{(t, t) : t \in [a, b]\}$ keine Rolle.

5.6 Lemma. Sei C_Y invertierbar. Dann ist die Greensche Matrix durch die folgenden vier Eigenschaften eindeutig bestimmt.

- (i) G ist auf $[a, b]^2 \setminus \Delta$ stetig.
- (ii) Es gilt $G(t+0, t) - G(t-0, t) = I_n$ ($a < t < b$) („aktiver Sprung“).
- (iii) Für jedes feste $s \in [a, b]$ löst $G(\cdot, s)$ die homogene Matrix-Dgl. $\partial_t G(t, s) = F(t)G(t, s)$ ($t \in [a, b] \setminus \{s\}$).
- (iv) Für jedes feste $s \in (a, b)$ erfüllt $G(\cdot, s)$ die homogenen Randbedingungen $AG(a, s) + BG(b, s) = 0$.

Beweis. Dass die Greensche Matrix die Eigenschaften (i) und (ii) besitzt, ist klar nach Satz 5.4. Nach Bemerkung 5.5 ist in jedem der beiden Dreiecke $\{(t, s) : t < s\}$ und $\{(t, s) : t > s\}$ die Greensche Matrix $G(t, s)$ für festes s von der Form $Y(t)S$ mit einer Matrix S und löst daher die Matrix-Dgl. in (iii).

Für festes s ist

$$\begin{aligned} AG(a, s) + BG(b, s) &= A[-Y(a)C_Y^{-1}BY(b)Y(s)^{-1}] + B[Y(b)C_Y^{-1}AY(a)Y(s)^{-1}] \\ &= [-AY(a)C_Y^{-1}BY(b) + BY(b)C_Y^{-1}AY(a)]Y(s)^{-1} \\ &= [-AY(a)C_Y^{-1}(C_Y - AY(a)) + (C_Y - AY(a))C_Y^{-1}AY(a)]Y(s)^{-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei $BY(b) = C_Y - AY(a)$ verwendet wurde. Also gilt (iv).

Sei nun \tilde{G} eine weitere Abbildung mit den Eigenschaften (i)-(iv). Dann ist $H := G - \tilde{G}$ wegen (i) stetig ergänzbar auf $[a, b]^2$, und H erfüllt für festes s die Dgl. $\partial_t H(t, s) = F(t)H(t, s)$ in $[a, b] \setminus \{s\}$ und damit, da H stetig ist, im ganzen Intervall $[a, b]$. Nach (iv) erfüllt $H(\cdot, s)$ die homogenen Randbedingungen. Somit ist $H(\cdot, s)$ eine Lösung des homogenen Randwertproblems und damit (da die Lösung eindeutig ist) gleich Null. \square

b) Sturm-Liouville-Randwertprobleme

Wir wenden die Ergebnisse des letzten Abschnitts auf folgende skalare Dgl. zweiter Ordnung an:

$$(Lx)(t) := -(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = r(t), \quad (5-4)$$

$$R_1 x := \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) = 0,$$

$$R_2 x := \beta_{21}x(b) + \beta_{22}x'(b) = 0. \quad (5-5)$$

Dabei sind $p \in C^1([a, b]; \mathbb{C})$ mit $p(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$, $q, r \in C([a, b]; \mathbb{C})$ und $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{C}$ mit $(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \neq 0$ und $(\beta_{21}, \beta_{22}) \neq 0$. Ein Randwertproblem der Form (5-4)–(5-5) heißt ein Sturm-Liouville-Randwertproblem.

Im folgenden Satz ist wieder $\Delta := \{(t, t) : t \in [a, b]\}$.

5.7 Satz. a) Das homogene Randwertproblem (5-4)–(5-5) mit $r = 0$ besitze nur die triviale Lösung $y = 0$. Dann existiert eine Funktion $g: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ so, dass durch

$$x(t) := \int_a^b g(t, s)r(s)ds \quad (t \in [a, b])$$

die Lösung des Randwertproblems (5-4)–(5-5) gegeben ist. Die Funktion g heißt Greensche Funktion oder Fundamentallösung des Randwertproblems.

b) Die Greensche Funktion von (5-4)–(5-5) ist durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt:

- (i) Es gilt $g \in C([a, b]^2) \cap C^2([a, b]^2 \setminus \Delta)$.
- (ii) Es gilt $\partial_t g(t+0, t) - \partial_t g(t-0, t) = -\frac{1}{p(t)}$ ($t \in (a, b)$) („aktiver Knick“).
- (iii) Für jedes feste $s \in [a, b]$ löst $g(\cdot, s)$ die homogene Dgl. (5-4) in $[a, b] \setminus \{s\}$.
- (iv) Für jedes feste $s \in [a, b]$ erfüllt $g(\cdot, s)$ die homogenen Randbedingungen (5-5).

Beweis. a) Wir schreiben (5-4) als System erster Ordnung für $y := (x, x')^\top$:

$$y'(t) = F(t)y(t) + h(t)$$

mit

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{q(t)}{p(t)} & -\frac{p'(t)}{p(t)} \end{pmatrix}, \quad h(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{r(t)}{p(t)} \end{pmatrix}.$$

Die Randbedingungen haben die Form $Ay(a) + By(b) = 0$ mit

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}.$$

Falls (5-4)–(5-5) für $r = 0$ nur die triviale Lösung besitzt, bedeutet das für das zugehörige System erster Ordnung $\det C_Y \neq 0$. Nach Satz 5.4 existiert die Greensche Matrix $G: [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$, $(t, s) \mapsto (G_{ij}(t, s))_{i,j=1,2}$ dazu, und die Lösung des Randwertproblems erster Ordnung ist gegeben durch

$$y(t) = \int_a^b G(t, s)h(s)ds.$$

Wegen $y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ und $h = \begin{pmatrix} 0 \\ -r/p \end{pmatrix}$ ist die gesuchte Lösung x des skalaren Randwertproblems gegeben durch

$$x(t) = \int_a^b g(t, s)r(s)ds,$$

wobei $g(t, s) := -\frac{G_{12}(t, s)}{p(t)}$.

b) Falls $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix von $y' = Fy$ ist, so ist die zweite Zeile von Y die Ableitung nach t der ersten Zeile. Aus der expliziten Darstellung von $G(t, s)$ in Satz 5.4 sieht man, dass dies auch für $G(t, s)$ gilt, d.h. wir erhalten $G_{22}(t, s) = \partial_t G_{12}(t, s)$. Nun folgen die Eigenschaften (i)–(iv) aus den entsprechenden Eigenschaften von Lemma 5.6. Wie im Beweis von Lemma 5.6 folgt auch, dass g bereits durch (i)–(iv) eindeutig bestimmt ist. \square

5.8 Satz. *Das zu (5-4)–(5-5) gehörige homogene Randwertproblem besitze nur die triviale Lösung. Seien φ und ψ Lösungen von $Lx = 0$ mit $R_1\varphi = 0$, $R_2\varphi \neq 0$ und $R_2\psi = 0$, $R_1\psi \neq 0$ und*

$$W(t) := W(\varphi, \psi)(t) := \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)$$

die Wronski-Determinante zu $\{\varphi, \psi\}$.

Dann ist die Greensche Funktion des Randwertproblems gegeben durch

$$g(t, s) = \begin{cases} c_0\varphi(t)\psi(s), & a \leq t \leq s \leq b, \\ c_0\varphi(s)\psi(t), & a \leq s \leq t \leq b \end{cases}$$

mit $c_0 := -\frac{1}{p(a)W(a)}$.

Beweis. (a) Existenz von φ und ψ : Da das homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung besitzt, ist etwa das Randwertproblem $Lu = 0$, $R_1u = 0$, $R_2u = 1$ eindeutig lösbar mit Lösung φ . Analog sieht man die Existenz von ψ .

(b) Lineare Unabhängigkeit von $\{\varphi, \psi\}$: Falls etwa $\varphi = \alpha\psi$ mit einem $\alpha \in \mathbb{C}$, so folgt $L\varphi = 0$, $R_1\varphi = 0$ und $R_2\varphi = \alpha R_2\psi = 0$ und damit $\varphi = 0$ im Widerspruch zu $R_2\varphi \neq 0$.

(c) Betrachtung der Wronski-Determinante: Wir schreiben (5-4) in ein System $y' = Fy$ erster Ordnung um und erhalten

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{q(t)}{p(t)} & -\frac{p'(t)}{p(t)} \end{pmatrix} y(t).$$

Die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems $\left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix} \right\}$ ist nach der Formel von Liouville (Satz 3.7) gegeben durch

$$\begin{aligned} W(t) &= W(a) \exp\left(\int_a^t \operatorname{tr} F(s) ds\right) = W(a) \exp\left(\int_a^t -\frac{p'(s)}{p(s)} ds\right) \\ &= W(a) \exp(-\ln p(t) + \ln p(a)) = \frac{W(a)p(a)}{p(t)}. \end{aligned}$$

Da $\{\varphi, \psi\}$ ein Fundamentalsystem ist, gilt $W(a) \neq 0$.

(d) Wir prüfen die Eigenschaften (i)–(iv) aus Satz 5.7 nach. Nach Definition gilt (i). Für (ii) schreiben wir

$$\begin{aligned} \partial_t g(t+0, t) - \partial_t g(t-0, t) &= -\frac{1}{p(a)W(a)} (\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)) \\ &= -\frac{1}{p(a)W(a)} W(t) = -\frac{1}{p(t)}. \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt (c) verwendet.

Sei $s \in [a, b]$ fest. Für $t < s$ ist

$$[Lg(\cdot, s)](t) = -\frac{\psi(s)}{p(a)W(a)} (L\varphi)(t) = 0,$$

analog $Lg(\cdot, s) = 0$ für $t > s$. Dies zeigt (iii). Für die Randterme gilt

$$R_1 g(\cdot, s) = -\frac{1}{p(a)W(a)} \psi(s) R_1 \varphi = 0$$

und ebenso $R_2 g(\cdot, s) = 0$. Somit gilt (iv). Nach Satz 5.7 ist g also die Greensche Funktion zu (5-4)–(5-5). \square

5.9 Bemerkung. a) In der Situation von Satz 5.8 gilt $g(t, s) = g(s, t)$ (Symmetrie der Greenschen Funktion).

b) Nach Bemerkung 5.3 ist das Randwertproblem (5-4)–(5-5) genau dann eindeutig lösbar, falls für ein Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ von (5-4) gilt

$$\det \left((R_i \varphi_j)_{i,j=1,2} \right) = \det \begin{pmatrix} R_1 \varphi_1 & R_1 \varphi_2 \\ R_2 \varphi_1 & R_2 \varphi_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

In diesem Fall gilt dies für alle Fundamentalsysteme.

5.10 Beispiel. Betrachte für einen reellen Parameter $\mu \geq 0$

$$\begin{aligned} (Lx)(t) &:= -x''(t) - \mu^2 x(t) = r(t) \quad (t \in [0, 1]), \\ R_1 x &:= x(0) = 0, \quad R_2 x := x(1) = 0. \end{aligned} \tag{5-6}$$

Hier ist $p = 1$ und $q = -\mu^2$.

Falls $\mu = 0$, so ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ mit $\varphi_1(t) := 1$ und $\varphi_2(t) := t$ ein Fundamentalsystem. Dafür gilt

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \varphi_1 & R_1 \varphi_2 \\ R_2 \varphi_1 & R_2 \varphi_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

d.h. das Randwertproblem (5-6) ist eindeutig lösbar.

Falls $\mu \neq 0$, so ist ein Fundamentalsystem von $Lx = 0$ gegeben durch $\varphi_1 = \sin \mu t$, $\varphi_2 = \cos \mu t$. Dafür gilt

$$\det \begin{pmatrix} R_1\varphi_1 & R_1\varphi_2 \\ R_2\varphi_1 & R_2\varphi_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} = -\sin \mu \neq 0,$$

falls $\mu \notin \pi\mathbb{Z}$.

Sei also $\mu \notin \pi\mathbb{Z}$, d.h. das Randwertproblem eindeutig lösbar. Um die Greensche Matrix zu berechnen, bestimmen wir φ und ψ aus Satz 5.8. Eine Lösung von $Lx = 0$ mit der Randbedingung $R_1x = 0$ ist $\varphi(t) := \sin \mu t$. Eine Lösung von $Lx = 0$ mit der Randbedingung $R_2x = 0$ ist $\psi(t) := \sin \mu(1 - t)$. Die Wronski-Determinante an der Stelle $a = 0$ ist

$$W(0) = \varphi(0)\psi'(0) - \varphi'(0)\psi(0) = 0 \cdot (-\mu \cos \mu) - \mu \sin \mu = -\mu \sin \mu \neq 0.$$

Nach Satz 5.8 ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$g(t, s) = \frac{1}{\mu \sin \mu} \sin(\mu t) \sin(\mu(1 - s)) \quad (0 \leq t \leq s \leq 1)$$

und durch $g(t, s) = g(s, t)$ für $0 \leq s \leq t \leq 1$.

Die Lösung des Randwertproblems $Lx = r$, $R_1x = R_2x = 0$ für $\gamma \in C([0, 1]; \mathbb{C})$ ist also gegeben durch

$$(Lx)(t) = \int_0^1 g(t, s)r(s)ds$$

mit obiger Greenscher Funktion g .

5.11 Beispiel. Wir betrachten nun das zum obigen Beispiel gehörige Eigenwertproblem. Gesucht sind $\lambda \in \mathbb{C}$ und $u \in C^2([0, 1]; \mathbb{C})$, $u \neq 0$, mit

$$\begin{aligned} Lu &:= -u'' = \lambda u, \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{5-7}$$

In diesem Fall heißt λ ein Eigenwert von (5-7) und u eine zugehörige Eigenfunktion.

(i) Alle Eigenwerte von (5-7) sind reell und größer als Null. Denn falls $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert ist, so multiplizieren wir die erste Zeile von (5-7) mit \bar{u} und integrieren über $[0, 1]$. Mit partieller Integration erhält man

$$0 = \int_0^1 (-u''(t)\bar{u}(t))dt - \int_0^1 \lambda|u(t)|^2dt = \int_0^1 |u'(t)|^2dt + \lambda \int_0^1 |u(t)|^2dt.$$

(ii) Wir schreiben $\lambda = \mu^2$ mit $\mu \in [0, \infty)$. Nach Beispiel 5.10 gilt $\mu \in \pi\mathbb{N}$, also sind die Eigenwerte von (5-7) gegeben durch

$$\lambda = \lambda_k := k^2\pi^2 (k \in \mathbb{N}).$$

Zugehörige normierte Eigenfunktionen sind

$$u_k(t) := d_k \sin(k\pi t) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

wobei die Konstante d_k so gewählt wird, dass

$$\|u_k\|_{L^2([0,1])}^2 := \int_0^1 |u_k(t)|^2 dt = 1.$$

Man kann zeigen, dass sich jedes $f \in C^1([0, 1]; \mathbb{C})$ mit $f(0) = f(1) = 0$ in eine Reihe von Eigenfunktionen entwickeln lässt:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k\pi t) \quad (t \in [0, 1]),$$

wobei

$$f_k := \langle f, u_k \rangle_{L^2([0,1])} := d_k \int_0^1 f(t) \sin(k\pi t) dt.$$

Hier erhalten wir eine Verbindung zur Theorie der Fourier-Reihen.

Das letzte Beispiel ist nur eines von vielen. Je nach Wahl des Randwertproblems erhält man weitere Entwicklungen, z.B. nach orthogonalen Polynomen (etwa Hermite-Polynome, Legendre-Polynome, siehe Abschnitt 2 c)) damit beweisen.

A. Zur Berechnung der Jordan-Normalform

A.1 Worum geht's? Bei kleineren Matrizen kann man oft schon durch die Bestimmung der algebraischen und geometrischen Vielfachheit der Eigenvektoren bestimmen, wie die Jordan-Normalform aussieht, und auch die Berechnung eines Hauptvektors ist dann relativ einfach. Bei großen Matrizen muss man jedoch systematischer vorgehen. Dieses Kapitel beschreibt die systematische Berechnung der Jordan-Normalform inklusive der Transformationsmatrix.

Wir wiederholen zunächst einige zentrale Begriffe. Im Folgenden sei stets $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine n -dimensionale komplexe (oder reelle) Matrix. Wir schreiben kurz $A - \lambda$ statt $A - \lambda I_n$ und setzen $(A - \lambda)^0 := I_n$, wobei I_n die n -dimensionale Einheitsmatrix sei.

Wir fixieren eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und einen Eigenwert λ von A . Die folgenden Definitionen gelten alle für diesen Eigenwert λ , wir verzichten aus Gründen der Lesbarkeit bei der Bezeichnung auf das λ .

A.2 Definition. a) Sei $j \in \mathbb{N}$. Dann heißt ein Vektor h_j ein Hauptvektor der Stufe j zum Eigenwert λ , falls

$$h_j \in \ker(A - \lambda)^j \setminus \ker(A - \lambda)^{j-1}.$$

(Im Fall $j = 1$ ist h_1 ein Eigenvektor von A .) Der algebraische Eigenraum (oder Hauptraum) zum Eigenwert λ ist definiert als die Menge aller Hauptvektoren zu λ .

b) Sei $j \in \mathbb{N}$, und sei h_j ein Hauptvektor der Stufe j zum Eigenwert λ . Dann heißt die Folge

$$h_j, h_{j-1} := (A - \lambda)h_j, h_{j-2} := (A - \lambda)h_{j-1}, \dots, h_1 := (A - \lambda)h_2$$

eine Jordan-Kette der Länge j von A zum Eigenwert λ .

c) Für $j \in \mathbb{N}$ definiert man

$$\begin{aligned} N_j &:= \ker(A - \lambda)^j, \\ d_j &:= \dim N_j - \dim N_{j-1} \end{aligned}$$

sowie $N_0 := \{0\}$.

A.3 Bemerkung. a) In einer Jordan-Kette h_j, h_{j-1}, \dots, h_1 ist h_ℓ ein Hauptvektor der Stufe ℓ für $\ell = 1, \dots, j$.

b) Wegen $N_{j-1} = \ker(A - \lambda)^{j-1} \subset N_j = \ker(A - \lambda)^j$ gilt $d_j \geq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Weiter ist $d_1 = \dim \ker(A - \lambda)$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ . Falls $d_j = 0$ für ein $j \in \mathbb{N}$ gilt, so folgt $\ker(A - \lambda)^{j-1} = \ker(A - \lambda)^j$ und damit auch $\ker(A - \lambda)^{j+1} = \ker(A - \lambda)^j$. Somit ist in diesem Fall $d_{j+1} = d_{j+2} = \dots = 0$.

Somit existiert ein eindeutiges $m \in \mathbb{N}$ mit $d_m > 0$ und $d_{m+1} = 0$, und dann gilt $d_j > 0$ für $j = 1, \dots, m$ sowie $d_j = 0$ für $j = m + 1, m + 2, \dots$. Für dieses m ist

$$\dim N_m = d_1 + \dots + d_m$$

die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ (diese ist gegeben durch die Vielfachheit der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms, ist aber auch gleich der Dimension des algebraischen Eigenraums).

A.4 Bemerkung. Sei $j \in \{1, \dots, m\}$. Da N_{j-1} ein Untervektorraum von N_j ist, existiert eine direkte Zerlegung der Form

$$N_j = N_{j-1} \oplus V_j$$

mit einem Untervektorraum $V_j \subset N_j$. Man kann V_j konstruieren, indem man eine Basis von N_{j-1} zu einer Basis von N_j ergänzt und als V_j den von den zusätzlichen Basiselementen aufgespannten Raum wählt. Für $j = 1$ gilt $\ker(A - \lambda)^0 = \ker I_n = \{0\}$ und damit $V_1 = N_1 = \ker(A - \lambda)$. Man erhält iterativ eine Zerlegung

$$\begin{aligned} N_m &= N_{m-1} \oplus V_m \\ &= N_{m-2} \oplus V_{m-1} \oplus V_m = \dots \\ &= N_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m \\ &= V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m. \end{aligned}$$

Nach Definition gilt also

$$d_j = \dim V_j \quad (j = 1, \dots, m).$$

A.5 Bemerkung. Sei $\{f_1, \dots, f_K\} \subset \mathbb{C}^n$ eine Basis von V_j mit $j \geq 2$, und sei $g_k := (A - \lambda)f_k$ ($k = 1, \dots, K$).

a) Es gilt $g_k \in N_{j-1}$ wegen $(A - \lambda)^{j-1}g_k = (A - \lambda)^j f_k = 0$ (beachte $f_k \in N_j$).

b) Betrachte die Zerlegung

$$N_j = N_{j-2} \oplus V_{j-1} \oplus V_j.$$

Sei $\{b_1, \dots, b_L\}$ eine Basis von N_{j-2} . Dann ist die Menge

$$\{b_1, \dots, b_L, g_1, \dots, g_K, f_1, \dots, f_K\}$$

linear unabhängig. Um dies zu sehen, seien $\alpha_\ell, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell b_\ell + \sum_{k=1}^K \beta_k g_k + \sum_{k=1}^K \gamma_k f_k = 0.$$

Wegen $b_\ell \in N_{j-1}$ und $g_k \in N_{j-1}$ ist dann

$$\sum_{k=1}^K \gamma_k f_k \in V_j \cap N_{j-1} = \{0\},$$

und da $\{f_1, \dots, f_K\}$ linear unabhängig ist, folgt $\gamma_k = 0$ für alle k . Somit gilt

$$\sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell b_\ell + \sum_{k=1}^K \beta_k g_k = 0.$$

Wegen $b_\ell \in N_{j-2}$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^K \beta_k (A - \lambda) f_k = \sum_{k=1}^K \beta_k g_k \in N_{j-2},$$

also wieder $\sum_{k=1}^K \beta_k f_k \in N_{j-1}$ und wie oben $\beta_k = 0$ für alle k . Es bleibt

$$\sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell b_\ell = 0,$$

und aus der linearen Unabhängigkeit der b_ℓ folgt $\alpha_\ell = 0$ für alle ℓ .

c) Aus b) folgt insbesondere $\dim V_{j-1} \geq \dim V_j$, d.h. für die Zahlen d_j gilt

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_m > d_{m+1} = 0.$$

A.6 Bemerkung. Aus den obigen Bemerkungen ergibt sich folgender Algorithmus zur Berechnung der Jordan-Normalform, der für jeden Eigenwert λ ausgeführt werden muss. Erläuterungen finden sich unter den •-Kommentaren.

(1) Für $j = 1, 2, \dots$:

- (i) Berechne $(A - \lambda)^j$ und $N_j := \ker(A - \lambda)^j$
- (ii) Setze $d_j := \dim N_j - \dim N_{j-1}$ (mit $N_0 = \{0\}$)

so lange, bis $d_j = 0$ (d.h. $N_j = N_{j-1}$) gilt (äquivalent: so lange, bis $\dim N_{j-1}$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ ist).

(2) Man erhält die Kette

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_m > d_{m+1} = 0.$$

Diese impliziert bereits die Struktur aller Jordan-Kästchen zum Eigenwert λ :

- d_1 ist die geometrische Vielfachheit von λ und die Anzahl der Jordan-Kästchen.
 - $d_1 + \dots + d_m$ ist die algebraische Vielfachheit von λ und die Anzahl der insgesamt für den Eigenwert λ zu bestimmenden Haupt- und Eigenvektoren.
 - Es gibt genau d_j Jordan-Kästchen der Größe $\geq j$.
 - Somit gibt es genau d_m Jordan-Kästchen der Größe m , genau $d_{m-1} - d_m$ Jordan-Kästchen der Größe $m - 1$ etc.
- (3) Berechnung der Hauptvektoren: Man berechnet iterativ die Hauptvektoren der Stufe $m, m - 1, \dots, 1$ (in dieser Reihenfolge)

(i) Für $j = 1, 2, \dots, m$:
Bestimme eine Basis $B_j \subset \mathbb{C}^n$ von N_j . Wähle dabei $B_j \supset B_{j-1}$, d.h. ergänze die Basis von N_{j-1} zu einer Basis von N_j . Dabei sei $B_0 := \emptyset$.

(ii) Sei $H_m := B_m \setminus B_{m-1}$.

- Das sind schon alle Hauptvektoren der Stufe m .
- Die Menge H_m hat d_m Elemente.
- Für $V_m := \text{span}\{f_1, \dots, f_K\}$ gilt dann $N_m = N_{m-1} \oplus V_m$.

(iii) Für $j = m - 1, \dots, 1$ (in dieser Reihenfolge) berechne die Hauptvektoren der Stufe j :

Sei $H_{j+1} := \{f_1, \dots, f_K\}$. Definiere

$$g_k := (A - \lambda)f_k \quad (k = 1, \dots, K).$$

- Falls $d_{j+1} = d_j$, ist man fertig. Setze $H_j := \{g_1, \dots, g_K\}$.

- Falls $d_{j+1} < d_j$, muss man noch mehr Hauptvektoren finden. Dazu wählt man Elemente

$$b_\ell \in B_j \setminus B_{j-1} \quad (\ell = 1, \dots, L)$$

so, dass

$$B_{j-1} \cup \{g_1, \dots, g_K\} \cup \{b_1, \dots, b_L\}$$

eine Basis von N_j ist. Setze

$$H_j := \{g_1, \dots, g_K\} \cup \{b_1, \dots, b_L\}.$$

- Die Elemente $\{g_1, \dots, g_K\}$ sind die Hauptvektoren der Stufe j , die Teil einer längeren Jordan-Kette sind und von Hauptvektoren der Stufe $j + 1$ kommen.
- Die zusätzlichen Hauptvektoren b_1, \dots, b_L (ebenfalls der Stufe j) sind der Beginn einer Jordan-Kette der Länge j .
- Für $V_j := \text{span } H_j$ gilt wieder $N_j = N_{j-1} \oplus V_j$.
- Die Menge H_j hat genau d_j Elemente.

- Die Menge H_1 besteht aus Eigenvektoren und ist eine Basis des Eigenraums N_1 .
- (4) Die Menge $H_1 \cup \dots \cup H_m$ bilden die Jordan-Ketten von Hauptvektoren zum Eigenwert λ und werden als Spalten in die Matrix S geschrieben. Hierbei muss man die Reihenfolge beachten: Wenn h_j, \dots, h_1 eine Jordan-Kette der Länge j ist (wobei h_ℓ ein Hauptvektor der Stufe ℓ ist), dann werden diese Vektoren in der Reihenfolge h_1, h_2, \dots, h_j als Spalten in die Matrix S eingetragen. Man beginnt also immer mit einem Eigenvektor (= Hauptvektor der Stufe 1).

Man beachte in Schritt (3), dass man zunächst (in Schritt (i)) aufsteigend immer mehr Basiselemente hinzufügt, diese dann aber (in den Schritten (ii) und (iii)) absteigend wieder ersetzt durch die Elemente g_k , welche Teil einer weiter oben startenden Jordan-Kette sind.

Dieser allgemeine Algorithmus funktioniert zwar immer, es gibt aber viele Vereinfachungen, siehe Bemerkung A.8, vor allem bei nicht allzu großen Matrizen. In Abbildung 23 sieht man das Schema, nach welchem die Hauptvektoren in diesem Algorithmus generiert werden (in Stufe j werden die Vektoren in H_j definiert). Der grüne Pfeil bedeutet die Anwendung von $(A - \lambda)$. Im Beispiel ist $d_1 = 5, d_2 = d_3 = 3, d_4 = d_5 = 2$, d.h. bei $j = 4$ und $j = 2$ starten keine neuen Jordan-Ketten (d.h. die berechneten g_k sind schon alle Hauptvektoren dieser Stufe), während in Stufe $j = 3$ und $j = 1$ neue Jordan-Ketten starten.

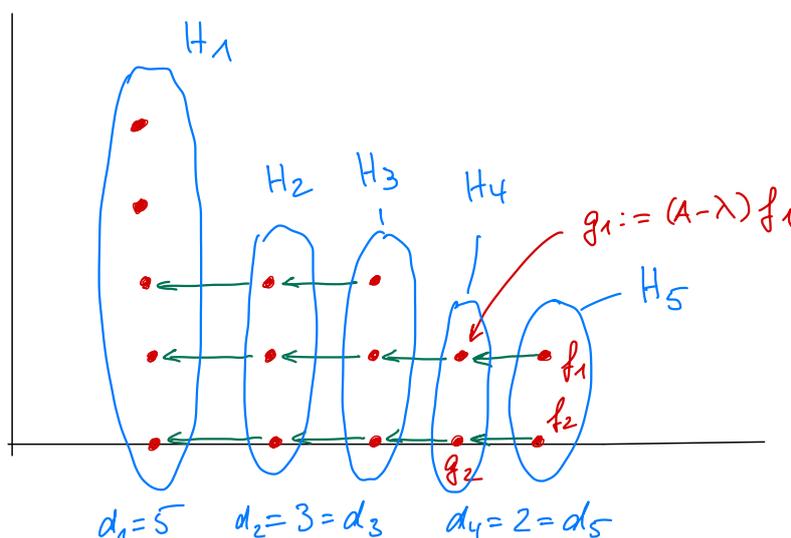


Abbildung 23: Berechnung der Hauptvektoren nach Algorithmus A.6

A.7 Beispiel. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Mit Entwicklung nach der zweiten, vierten und fünften Zeile folgt

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda) &= \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)^2(4 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)^2(4 - \lambda)(16 - 8\lambda + \lambda^2) \\ &= (1 - \lambda)^2(4 - \lambda)^3. \end{aligned}$$

Also hat A den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert 4 mit algebraischer Vielfachheit 3.

a) Eigenwert 1:

(1) (i) Es ist

$$N_1 = \ker(A - 1) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{span}\{e_2, e_4\}.$$

(ii) Also gilt $d_1 = 2$. Da dies die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 ist, gilt $m = 1$, d.h. es ist schon $d_2 = 0$.

(2) Damit gibt es genau zwei Jordan-Kästchen der Größe 1.

(3) Eine Basis B_1 von N_1 ist $\{e_2, e_4\}$. Wegen $m = 1$ sind wir fertig.

b) Eigenwert 4:

(1) (i) Für $j = 1$ erhalten wir

$$N_1 = \ker(A - 4) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:b_2} \right\}.$$

Beachte, dass man die Basis von N_1 auf viele Weisen wählen kann. Für $j = 2$ folgt

$$N_2 = \ker(A - 4)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}\{b_1, b_2, e_3\}.$$

Wir haben also die Basis $B_1 = \{b_1, b_2\}$ von N_1 durch das Element $f_1 := e_3$ zu einer Basis $B_2 = \{b_1, b_2, f_1\}$ von N_2 ergänzt.

(ii) Aus (i) sehen wir $d_1 = 2$ und $d_2 = 1$, also ist

$$\dim N_2 = d_1 + d_2 = 3$$

bereits die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 4. Somit gilt $m = 2$ und $d_3 = 0$.

(2) Wegen $d_1 = 2$ gibt es 2 Jordan-Kästchen, wegen $d_2 = 1$ gibt es genau ein Jordan-Kästchen der Länge 2 und ein Jordan-Kästchen der Länge 1.

(3) Für $j = 2$ haben wir $B_2 \setminus B_1 = \{f_1\}$. Also setzen wir

$$g_1 := (A - 4)f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir ergänzen $\{g_1\}$ durch eines der beiden Elemente b_1, b_2 zu einer neuen Basis von N_1 , z.B. $B'_1 := \{g_1, b_2\}$.

Damit ist f_1, g_1 eine Jordan-Kette der Länge 2, und b_2 eine Jordan-Kette der Länge 1, und wir sind fertig.

Insgesamt haben wir folgende Haupt- und Eigenvektoren gefunden, die wir als Spalten in die Transformationsmatrix S schreiben (Reihenfolge beachten):

$$S := (e_2, e_4, g_1, f_1, b_2).$$

Die Jordan-Normalform von A ist dann gegeben durch

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 4 & 1 & \\ & & & 4 & \\ & & & & 4 \end{pmatrix},$$

alle anderen Elemente sind 0.

A.8 Bemerkung. a) Alle Verfahren zur Berechnung der Jordan-Normalform beginnen mit der Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren. Man könnte auch versuchen, die Hauptvektoren der Stufe 2 (in obigem Beispiel f_1) durch Lösen der Gleichung

$$(A - \lambda)f_1 = h$$

mit einem Eigenvektor h zu finden. Aber es ist nicht klar, welchen Eigenvektor man nehmen muss. So hat in obigem Beispiel für $\lambda = 4$ diese Gleichung weder mit $h = b_1$ noch mit $h = b_2$ eine Lösung! Da aber klar ist, dass es einen Eigenvektor h geben muss, für den eine Lösung f_1 existiert (und jeder Eigenvektor eine Linearkombination von b_1 und b_2 ist), kann man den Ansatz

$$(A - \lambda)f_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$$

mit unbekanntem Parametern $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ verwenden. Beim Lösen dieses Gleichungssystems sieht man, wie man α_j wählen kann, damit es eine Lösung gibt. Mit dieser Methode erspart man sich das Quadrieren der Matrix.

b) Aus dem obigen Schema wird klar, dass man den Algorithmus in vielen Fällen variieren kann:

- Falls die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen ist, haben alle Jordan-Kästchen die Länge 1 und man ist fertig, wenn man eine Basis des Eigenraums gewählt hat. Hier gilt $d_2 = 0$.
- Falls zu einem Eigenwert nur ein Jordan-Kästchen existiert, so gilt $d_1 = \dots = d_m = 1$. In diesem Fall kann man mit einem Eigenvektor h_1 starten und dann die Jordan-Kette h_m, h_{m-1}, \dots, h_1 durch die iterative Lösung der Gleichungssysteme

$$(A - \lambda)h_j = h_{j-1} \quad (j = 2, \dots, m)$$

berechnen. Alternativ kann man in diesem Fall mit einem beliebigen Vektor $h_m \in N_m \setminus N_{m-1}$ (dazu muss man Matrizen multiplizieren) beginnen und durch

$$h_{j-1} := (A - \lambda)h_j \quad (j = m, \dots, 2)$$

eine Jordan-Kette erzeugen (und ist dann für diesen Eigenwert fertig).

- Falls alle Jordan-Kästchen die gleiche Größe haben (d.h. falls $d_1 = d_2 = \dots = d_m$), haben alle H_j dieselbe Anzahl von Elementen. Auch dann kann man mit einer Basis H_1 des Eigenraums beginnen und die Hauptvektoren H_j für $j \geq 2$ durch obige Iteration berechnen. Man erhält für jeden Eigenvektor aus H_1 eine Jordan-Kette der Länge m .
- Allgemein kann man, wie in a) beschrieben, mit einer Basis $H_1 = \{b_1, \dots, b_K\}$ des Eigenraums N_1 beginnen und dann die allgemeine Gleichung

$$(A - \lambda)h_2 = \sum_{k=1}^K \alpha_k b_k$$

mit unbekanntem Parametern lösen. Man erhält damit alle Hauptvektoren der Stufe 1, analog gilt dies für Hauptvektoren höherer Stufen.

In vielen Fällen ist es Geschmacksache, ob man lieber Matrizen multipliziert oder Gleichungssysteme löst (oder bei Wolfram Alpha nachschaut).

Literatur

- [Am] Amann, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. De Gruyter, Berlin 1983.
- [Ar] Arnold, V. I.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer Berlin 2001.
- [Br] Braun, M.: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen. Springer, Berlin 1979.
- [DR] Denk, R., Racke, R.: Kompendium der Analysis. Band 1: Differential- und Integralrechnung, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Vieweg + Teubner Wiesbaden 2011.
- [FH] Forst, W., Hoffmann, D.: Gewöhnliche Differentialgleichungen - Theorie und Praxis. Springer Berlin 2005.
- [Fo] Forster, O.: Analysis 2. Vieweg-Verlag 1979.
- [Heu] Heuser, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3. Aufl., Teubner Stuttgart 1995.
- [PW] Prüss, J., Wilke, M.: Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme. Birkhäuser Basel 2010.
- [Wa] Walter W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 7. Aufl., Springer Berlin 2000.

Index

- Anfangswertproblem, 3
- autonome Dgl., 3
- Banachscher Fixpunktsatz, 7
- blow-up, 13
- Differentialgleichung, 3
 - autonome, 3
 - explizite, 3
 - implizite, 3
 - lineare, 3
- Eindeutigkeitssatz, 11
- Euler-Verfahren, 18
- explizite Dgl., 3
- explizites Euler-Verfahren, 18
- gewöhnliche Differentialgleichung, 3
- globale Lipschitz-Bedingung, 5
- Hillsche Differentialgleichung, 3
- implizite Dgl., 3
- Integralgleichung, 8
- Kontraktion, 7
- Lösung einer Dgl., 3
- Lemma von Gronwall, 10
- lineare Dgl., 3
- Lipschitz-Bedingung, 5
- lokale Lipschitz-Bedingung, 5
- Lorenz-Attraktor, 56
- maximale Lösung, 13
- maximales Existenzintervall, 13
- Ordnung einer Dgl., 3
- Polygonzug-Verfahren, 18
- Rückführung auf System erster Ordnung,
4
- Richtungsfeld, 4
- Satz
 - Banachscher Fixpunkt-, 7
 - Eindeutigkeits-, 11
 - Lemma von Gronwall, 10
 - von Arzelá-Ascoli, 15
 - von Peano, 17
 - von Picard-Lindelöf (global), 7
 - von Picard-Lindelöf (lokal), 11
- System gewöhnlicher Differentialgleichungen, 3