Skript zur Vorlesung

Theorie partieller Differentialgleichungen II

Wintersemester 2014/15

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 26. 2. 2015

Inhaltsverzeichnis

1. Spektraltheorie für elliptische Operatoren

1.1 Worum geht's? Häufig werden Randwertprobleme in beschränkten Gebieten betrachtet. Hier kann die Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren viele nützliche Informationen liefern. Wir betrachten exemplarisch eine Gleichung zweiter Ordnung mit Dirichlet-Randbedingungen. Es stellt sich heraus, dass unter geeigneten Voraussetzungen eine Spektraldarstellung für den zugehörigen Operator existiert, welche es unter anderem erlaubt, Funktionen des Operators zu definieren. Dies kann für die Lösungsdarstellung von physikalisch relevanten Gleichungen verwendet werden.

Viele Aussagen setzen nur einen selbstadjungierten Operator voraus. Im Hinblick auf spätere Anwendungen, etwa auf die Wellengleichung oder Elastizitätsgleichungen, formulieren wir daher einen großen Teil dieses Kapitels allgemein für selbstadjungierte Operatoren bzw. koerzitive Bilinearformen.

a) Entwicklungen nach Eigenfunktionen

Im Folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir verwenden die Abkürzungen $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(G)}$ und $\| \cdot \| := \| \cdot \|_{L^2(G)}$, wobei $L^2(G) := L^2(G; \mathbb{C})$ sei.

1.2 Beispiel. Gegeben sei ein formaler Differentialoperator

$$A(D) := -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i a_{ik} \partial_k + a$$

mit $a_{ik}, a \in L^\infty(G)$ (wobei $\partial_i := \partial_{x_i}$). Bei der Anwendung auf eine Funktion $u \in H^1(G)$ ist dabei die Ableitung $\partial_i a_{ik} \partial_k$ im schwachen Sinn zu verstehen, d.h. für $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ ist

$$-\langle \partial_i a_{ik} \partial_k u, \varphi \rangle = \langle a_{ik} \partial_k u, \partial_i \varphi \rangle = \int_G a_{ik}(x) \partial_k u(x) \overline{\partial_i \varphi(x)} dx.$$

Da $\mathscr{D}(G)$ dicht in $H_0^1(G)$ ist, gilt diese Gleichheit für alle $\varphi \in H_0^1(G)$.

Die zu obigem Operator gehörige Bilinearform $B\colon H_0^1(G) \times H_0^1(G) \to \mathbb{K}$ ist gegeben durch

$$B(u,v) := \sum_{i,k=1}^{n} \langle a_{ik} \partial_k u, \partial_i v \rangle + \langle au, v \rangle \quad (u, v \in H_0^1(G)).$$

Man beachte, dass nach Definition der schwachen Ableitung der Operator A jedem $u \in H_0^1(G)$ eine Abbildung $Au\colon H_0^1(G) \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto (Au)(\varphi) = B(u, \varphi)$ zuweist. Damit wird Au als lineares Funktional auf $H_0^1(G)$ betrachtet, d.h. $A \in$

$L(H_0^1(G),(H_0^1(G))')$. Der Raum $(H_0^1(G))'$ der stetigen linearen Funktionale wird auch als $H^{-1}(G)$ bezeichnet, d.h. $A \in L(H_0^1(G), H^{-1}(G))$.

Versieht man den formalen Differentialoperator $A(D)$ mit Dirichlet-Randbedingungen, so entspricht dies im Sinn von schwachen Lösungen der Bedingung $u \in H_0^1(G)$. Damit wird der zugehörige Operator (L^2-Realisierung) $A\colon L^2(G) \supset D(A) \to L^2(G)$ definiert durch

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{u \in H_0^1(G) : A(D)u \in L^2(G)\}, \\ Au &:= A(D)u \quad (u \in D(A)). \end{aligned}$$

Nach Definition gilt $\langle Au, v\rangle = B(u,v)$ $(u \in D(A), v \in H_0^1(G))$. Nach Definition der schwachen Ableitung gilt

$$D(A) = \{u \in H_0^1(G) : \exists\, f_u \in L^2(G)\, \forall\, v \in H_0^1(G) : B(u,v) = \langle f_u, v\rangle\}.$$

Wir werden im Folgenden voraussetzen, dass die Matrix $(a_{ik})_{i,k=1,\dots,n} \subset (L^\infty(G))^{n\times n}$ gleichmäßig positiv definit ist, d.h. es existiert eine Konstante $p > 0$ so, dass

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\xi_i\overline{\xi_k} \geq p|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{K}^n) \tag{1-1}$$

für fast alle $x \in G$ gilt. Damit folgt insbesondere $a_{ik}(x) = \overline{a_{ki}(x)}$ $(i,k = 1,\dots,n)$ für fast alle $x \in G$. Wir setzen weiter voraus, dass a reellwertig ist, d.h. $a \in L^\infty(G;\mathbb{R})$.

1.3 Bemerkung. a) Der Operator A ist symmetrisch, d.h. es gilt $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ für alle $u, v \in D(A)$.

b) Die Bilinearform $B\colon H_0^1(G) \times H_0^1(G) \to \mathbb{C}$ ist stetig, d.h. es existiert ein $C_b \geq 0$ mit

$$|B(u,v)| \leq C_b\|u\|_{H^1(G)}\|v\|_{H^1(G)} \quad (u, v \in H_0^1(G)). \tag{1-2}$$

Weiter ist B symmetrisch, d.h. $B(u,v) = \overline{B(v,u)}$, und koerzitiv, d.h. es existieren Konstanten $q > 0$ und $C_q \geq 0$ mit

$$B(u,u) \geq q\|u\|^2_{H^1(G)} - C_q\|u\|^2_{L^2(G)} \quad (u \in H_0^1(G)). \tag{1-3}$$

Ersetzt man A durch $A + C_q$ und damit B durch die Bilinearform $(u,v) \mapsto B(u,v) + C_q\langle u,v\rangle$, so erhält man eine streng koerzitive Bilinearform, d.h. (1-3) gilt mit $C_q = 0$.

Wir werden später noch andere Bilinearformen betrachten. Daher werden wir einige Aussagen bereits jetzt allgemeiner formulieren. Ein zentraler Begriff ist dabei der eines Gelfand-Tripels. Vor der Definition sei nochmal an die obige Situation erinnert: Wir hatten $A \in L(H_0^1(G),(H_0^1(G))')$ mit $(Au)(\varphi) = B(u,\varphi) = \langle f_u, \varphi\rangle$ für $u \in D(A)$. Das Tripel von Hilberträumen $H_0^1(G) \subset L^2(G) \subset (H_0^1(G))'$ ist ein Beispiel eines Gelfand-Tripels.

1.4 Definition. Ein Gelfand-Tripel ist von der Form $V \subset H \subset V'$, wobei V und H Hilberträume mit $V \subset H$ sind und folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) V ist dicht in H (bzgl. der Topologie in H).

(ii) Die Inklusion $i\colon V \to H$ ist stetig (bzgl. der Topologien in V und H).

(iii) Die duale (adjungierte) Einbettung $i'\colon H = H' \to V'$ ist stetig und $H \subset V'$ ist dicht.[1] Hierbei wird H' nach dem Satz von Riesz mit seinem Dualraum H' identifiziert.

(iv) Die duale Paarung zwischen V und V' ist kompatibel mit dem Skalarprodukt in H, d.h. es gilt

$$v(u) = \langle v, u\rangle_{V'\times V} = \langle u, v\rangle_H \quad (u \in V \subset H,\, v \in H = H' \subset V').$$

Im Folgenden sei $V \subset H \subset V'$ ein Gelfand-Tripel mit $\mathbb{C}$-Hilberträumen V und H.

1.5 Definition. a) Sei $\mathcal{A} \in L(V, V')$. Dann ist die H-Realisierung A von $\mathcal{A}$ als unbeschränkter Operator in H definiert durch $D(A) := \{u \in V : \mathcal{A}u \in H\} \subset H$ und $Au := \mathcal{A}u$ $(u \in D(A))$.

b) Die zu $\mathcal{A}$ gehörige Bilinearform $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$B(u, v) := \langle \mathcal{A}u, v\rangle_{V'\times V} = (\mathcal{A}u)v \quad (u, v \in V).$$

Die Bilinearform B (und der Operator $\mathcal{A}$) heißen koerzitiv, falls positive Konstanten α, β existieren mit

$$\operatorname{Re} B(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 - \beta \|u\|_H^2 \quad (u \in V). \tag{1-4}$$

Die Form B und der Operator $\mathcal{A}$ heißen streng koerzitiv oder V-elliptisch, falls die Gleichung (6-3) mit $\beta = 0$ gilt.

Die Bilinearform B heißt symmetrisch, falls $B(u, v) = \overline{B(v, u)}$ $(u, v \in V)$ gilt. Man beachte, dass in diesem Fall $B(u, u)$ bereits reell ist, d.h. in (6-3) steht links $B(u, u)$.

1.6 Lemma. *Sei $\mathcal{A} \in L(V, V')$ streng koerzitiv. Dann ist $\mathcal{A}\colon V \to V'$ ein Isomorphismus, und die H-Realisierung $A\colon H \supset D(A) \to H$ ist ein dicht definierter und abgeschlossener Operator mit $0 \in \rho(A)$.*

Beweis. Für die zugehörige Bilinearform $B(u, v) := \langle \mathcal{A}u, v\rangle_{V'\times V}$ gilt nach Voraussetzung die Abschätzung $\operatorname{Re} B(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$ $(u \in V)$ mit $\alpha > 0$. Wegen $\mathcal{A} \in L(V, V')$ ist $|B(u, v)| \leq \|\mathcal{A}\|_{L(V,V')} \|u\|_V \|v\|_V$, d.h. $B\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ist eine streng koerzitive

[1] Dies folgt tatsächlich bereits aus (i) und (ii).

und stetige Bilinearform. Nach dem Satz von Lax-Milgram existiert zu jedem $f \in V'$ genau ein $u \in V$ mit

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle_{V'\times V} = \langle f, v\rangle_{V'\times V} \quad (v \in V).$$

Also ist $\mathcal{A}\colon V \to V'$ bijektiv und stetig, und nach dem Satz vom stetigen Inversen ist auch $\mathcal{A}^{-1}$ stetig, d.h. $\mathcal{A}$ ist ein Isomorphismus.

Nach Definition gilt $D(A) = \mathcal{A}^{-1}(H)$. Da $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus ist, gilt

$$\overline{\mathcal{A}^{-1}(H)}^{V} = \mathcal{A}^{-1}(\overline{H}^{V'}) = \mathcal{A}^{-1}(V') = V \overset{d}{\subset} H,$$

also ist $D(A) \overset{d}{\subset} V \overset{d}{\subset} H$, und damit ist A dicht definiert.

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $u_n \to u$ in H und $Au_n \to v$ in H. Dann gilt auch $Au_n \to v$ in V', und mit der Stetigkeit von $\mathcal{A}^{-1}$ erhalten wir für $u_0 := \mathcal{A}^{-1}v$

$$u_n = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}u_n) \to \mathcal{A}^{-1}v = u_0 \text{ in } V.$$

Damit gilt auch $u_n \to u_0$ in H und somit $u = u_0 \in D(A)$ und $Au = \mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 = v$. Also ist A abgeschlossen.

Da $\mathcal{A}\colon V \to V'$ ein Isomorphismus ist, existiert zu jedem $f \in H$ genau ein $u \in V$ mit $\mathcal{A}u = f$. Nach Definition von A gilt $u \in D(A)$. Also ist $A\colon H \supset D(A) \to H$ bijektiv, und da A abgeschlossen ist, gilt $A^{-1} \in L(H)$ und damit $0 \in \rho(A)$. □

1.7 Lemma. *Sei $\mathcal{A} \in L(V, V')$ koerzitiv und $B\colon V\times V \to \mathbb{K}$, $B(u, v) = \langle \mathcal{A}u, v\rangle_{V'\times V}$ die zugehörige Bilinearform. Dann sind äquivalent:*

(i) Die Bilinearform B ist symmetrisch.

(ii) Der Operator $A\colon H \supset D(A) \to H$ ist selbstadjungiert.

Beweis. Sei o.E. $\mathcal{A}$ streng koerzitiv, sonst betrachte $\mathcal{A} + \beta$ mit zugehöriger Bilinearform $B(u, v) + \beta\langle u, v\rangle_H$. Nach Lemma 1.6 ist $\mathcal{A}\colon V \to V'$ ein Isomorphismus, und A ist ein abgeschlossener, dicht definierter Operator mit $0 \in \rho(A)$.

(i)⇒(ii): Sei B symmetrisch. Für $u, v \in D(A)$ gilt dann

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle_H = \langle \mathcal{A}u, v\rangle_{V'\times V} = B(u, v) = \overline{B(v, u)} = \overline{\langle \mathcal{A}v, u\rangle} = \langle u, \mathcal{A}v\rangle.$$

Damit ist A ein symmetrischer Operator mit $\rho(A)\cap\mathbb{R} \neq \emptyset$ und damit selbstadjungiert (siehe Lemma A.9).

(ii)⇒(i): Falls A selbstadjungiert ist, gilt für alle $u, v \in D(A)$ die Gleichheit $B(u, v) = \langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle = \overline{\langle Av, u\rangle} = \overline{B(v, u)}$. Da $D(A) = \mathcal{A}^{-1}(H) \subset V$ dicht ist und die Bilinearform stetig ist, gilt diese Gleichheit für alle $u, v \in V$, d.h. B ist symmetrisch. □

Wir werden im Folgenden eine Spektraldarstellung für den Operator A herleiten. Dabei werden wir stets folgende Voraussetzungen machen:

(V1) $V \subset H \subset V'$ sei ein Gelfand-Tripel mit unendlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Hilberträumen V und H. Wir setzen $\|\cdot\| := \|\cdot\|_H$.

(V2) Gegeben sei ein Operator $\mathcal{A} \in L(V, V')$, für welchen die zugehörige Bilinearform $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$ koerzitiv und symmetrisch sei. Die (nach Lemma 1.7 selbstadjungierte) H-Realisierung von $\mathcal{A}$ sei wieder mit A bezeichnet.

(V3) Die Einbettung $i\colon V \to H$ sei kompakt, d.h. jede in $\|\cdot\|_V$ beschränkte Folge besitzt eine in H konvergente Teilfolge.

Man beachte, dass die dritte Aussage in obigem Beispiel $V = H_0^1(G)$ und $H = L^2(G)$ erfüllt ist, falls G ein beschränktes Gebiet ist (Satz von Relllich-Kondrachov), nicht aber für $G = \mathbb{R}^n$. Wir beginnen mit einigen elementaren Aussagen über Eigenwerte.

1.8 Bemerkung. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, und $u \in D(A)$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt mit der Symmetrie von A

$$\lambda\|u\|^2 = \langle \lambda u, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \langle u, Au\rangle = \overline{\lambda}\|u\|^2,$$

d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$. Genauso sieht man, dass Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten zueinander orthogonal sind. Falls B streng koerzitiv ist, so folgt $\lambda \geq q$ wegen

$$\langle Au, u\rangle = B(u, u) \geq q\|u\|_V^2 \geq q\|u\|^2.$$

1.9 Satz. *Sei*

$$\lambda_1 := \inf\big\{B(u,u) : u \in V,\ \|u\| = 1\big\} = \inf_{u\in V\setminus\{0\}} \frac{B(u,u)}{\langle u, u\rangle}$$

(Rayleigh-Quotient). Dann gilt $\lambda_1 \in \sigma_p(A)$.

Beweis. O.E. sei $\lambda = 0$ (sonst betrachtet man $A - \lambda_1$). Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge mit $\|\varphi_n\| = 1$ und $\langle \mathcal{A}\varphi_n, \varphi_n\rangle = B(\varphi_n, \varphi_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Da $\mathcal{A}$ koerzitiv ist, gilt

$$\|\varphi\|_V^2 \leq \tfrac{1}{q} B(\varphi, \varphi) + \tfrac{C_q}{q}\|\varphi\|^2 \quad (\varphi \in V).$$

Daher existiert ein $R \geq 0$ mit $\|\varphi_n\|_V \leq R$ $(n \in \mathbb{N})$. Nach Voraussetzung (V3) existiert eine in H konvergente Teilfolge, d.h. o.E. sei $\varphi_n \to u_1$ in H. Es gilt $\|u_1\| = 1$. Wir zeigen, dass u_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 0 ist.

Da $B(\cdot,\cdot)$ eine positiv semidefinite Sesquilinearform ist, können wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung anwenden und erhalten für alle $v \in V$ mit $\|v\|_V \leq 2R$ die Abschätzung

$$|B(\varphi_n, v)| \leq B(\varphi_n,\varphi_n)^{1/2} B(v,v)^{1/2} \leq \sqrt{C_b(2R)^2 B(\varphi_n,\varphi_n)} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Somit existiert zu $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|B(\varphi_n, v)| < \tfrac{\delta}{2} \quad (n \geq N,\, v \in V \text{ mit } \|v\|_V \leq 2R).$$

Speziell für $v = \varphi_n - \varphi_m$, $n, m \geq N$, folgt

$$B(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) \leq |B(\varphi_n, \varphi_n - \varphi_m)| + |B(\varphi_m, \varphi_n - \varphi_m)| < \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} = \delta.$$

Mit der Abschätzung

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_V^2 \leq \tfrac{1}{q} B(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) + \tfrac{C_q}{q}\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 \to 0 \; (n, m \to \infty)$$

sieht man, dass $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Cauchyfolge und damit auch konvergent ist. Wegen $\varphi_n \to u_1$ in H ist der Grenzwert gleich u_1, d.h. wir erhalten $\varphi_n \to u_1$ $(n \to \infty)$ in V. Da $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$ stetig ist, gilt

$$\langle \mathcal{A}u_1, v\rangle = B(u_1, v) = \lim_{n\to\infty} B(\varphi_n, v) = 0 \quad (v \in V).$$

Also folgt $\mathcal{A}u_1 = 0$. Daran sieht man insbesondere, dass $u_1 \in D(A)$ gilt, und wegen $Au_1 = 0$ ist u_1 Eigenvektor zum Eigenwert 0. □

1.10 Satz. *Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man iterativ*

$$\lambda_n := \inf\big\{B(u,u) : u \in V,\, \|u\|_H = 1,\, \langle u, u_1\rangle = \ldots = \langle u, u_{n-1}\rangle = 0\big\}.$$

Dann gilt $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, und λ_n ist Eigenwert von A, d.h. es gibt ein $u_n \in D(A)$ mit $\|u_n\|_H = 1$ und $Au_n = \lambda_n u_n$.

Die Eigenwerte $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ besitzen keinen endlichen Häufungspunkt, d.h. kein Eigenwert hat unendliche Vielfachheit und es gilt $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Beweis. **(i)** Seien λ_1 und u_1 wie im obigen Beweis, und sei $\lambda_2 := \inf\{B(u,u) : u \in V,\, \|u\| = 1,\, \langle u, u_1\rangle = 0\}$. Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ mit $\|\varphi_n\| = 1$, $\langle \varphi_n, u_1\rangle = 0$ und $B(\varphi_n,\varphi_n) \to \lambda_2$. Dann zeigt man wie im Beweis von Satz 1.9, dass für alle $v \in V$ mit $\langle v, u_1\rangle = 0$

$$B(\varphi_n, v) - \lambda_2\langle \varphi_n, v\rangle \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1-5}$$

gilt, und dass $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Übergang zu einer Teilfolge in V konvergiert. Für $v = \alpha u_1$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt wegen $B(\varphi_n, u_1) = \lambda_1\langle \varphi_n, u_1\rangle$

$$B(\varphi_n, v) - \lambda_2\langle \varphi_n, v\rangle = \overline{\alpha}\lambda_1\langle \varphi_n, u_1\rangle - \lambda_2\overline{\alpha}\langle \varphi_n, u_1\rangle = 0.$$

Also gilt (1-5) für alle $v \in V$. Wie oben folgt, dass u_2 ein Eigenvektor und λ_2 der zugehörige Eigenwert ist.

(ii) Iterativ erhält man eine Folge $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ von Eigenwerten mit zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren $u_1, u_2, \dots$. Angenommen, es existieren nur endlich viele $u_1, \dots, u_N$. Da $\dim V = \infty$, existiert ein $\varphi \in V \setminus \{0\}$ mit $\langle \varphi, u_n \rangle = 0$ für alle $n \in \{1, \dots, N\}$. Damit ist

$$\lambda_{N+1} := \inf \big\{ B(\varphi, \varphi) : \varphi \in V,\ \|\varphi\| = 1,\ \langle \varphi, u_1 \rangle = \ldots = \langle \varphi, u_n \rangle = 0 \big\}$$

wohldefiniert. Dies liefert einen Eigenwert λ_{N+1} und eine Eigenfunktion u_{N+1} mit $u_{N+1} \notin \{u_1, \dots, u_N\}$.

(iii) Angenommen, es existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten mit $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda_n = \lambda_n \langle u_n, u_n \rangle = B(u_n, u_n) \ge q \|u_n\|_V^2 - C_q \|u_n\|^2.$$

Wie im Beweis von Satz 1.9 ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Übergang zu einer Teilfolge in H konvergent nach Voraussetzung (V3). Dies ist aber ein Widerspruch zu $\|u_n - u_m\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u_m\|^2 = 2$ für $n \neq m$. □

Der folgende Satz liefert eine Darstellung des n-ten Eigenwerts ohne vorherige Berechnung von $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

1.11 Satz (Courantsches Minimax-Prinzip). *Für $n \in \mathbb{N}$ und $h_1, \dots, h_{n-1} \in H$ definiert man*

$$\mu_n(h_1, \dots, h_{n-1}) := \inf \big\{ B(u, u) : u \in V,\ \|u\| = 1,\ \langle u, h_1 \rangle = \cdots = \langle u, h_{n-1} \rangle = 0 \big\}.$$

Dann gilt für die in Satz 1.10 konstruierten Eigenwerte

$$\lambda_n = \sup \big\{ \mu_n(h_1, \dots, h_{n-1}) : h_j \in H\ (j = 1, \dots, n-1) \big\}.$$

Beweis. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen, sei also $n \ge 2$. Nach Konstruktion gilt $\mu_n(u_1, \dots, u_{n-1}) = \lambda_n$, d.h. es ist zu zeigen, dass $\mu_n(h_1, \dots, h_{n-1}) \le \lambda_n$ für alle $h_1, \dots, h_{n-1} \in H$ gilt. Zu $h_1, \dots, h_{n-1} \in H$ definieren wir $v := \sum_{i=1}^n c_i u_i$ mit $\|v\| = 1$ und $\langle v, h_i \rangle = 0$ für $i = 1, \dots, n-1$. Dann gilt

$$B(v, v) = \sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} B(u_j, u_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j |c_j|^2 \le \lambda_n \sum_{j=1}^n |c_j|^2 = \lambda_n.$$

Ferner gilt nach Definition von μ_n

$$\mu_n(h_1, \dots, h_{n-1}) \le B(v, v) \le \lambda_n.$$

□

Wir werden nun Funktionen durch ihre Entwicklungen nach den Eigenfunktionen darstellen. Man spricht auch von verallgemeinerten Fourierreihen.

1.12 Lemma. *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die in Satz 1.10 konstruierte orthonormale Folge von Eigenfunktionen. Dann gilt für alle $f \in V$:*

(i) $\|f - \sum_{n=1}^N \langle f, u_n\rangle u_n\|_V \to 0 \quad (N \to \infty)$,

(ii) $\sum_{n=1}^\infty |\langle f, u_n\rangle|^2 = \|f\|_H^2$,

(iii) $\langle Af, f\rangle = B(f,f) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n |\langle f, u_n\rangle|^2$.

Beweis. Sei $f \in V$, $\alpha_n := \langle f, u_n\rangle$ und $f_N := \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n$ für $N \in \mathbb{N}$. Nach der Besselschen Ungleichung gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \le \|f\|^2$, und wegen $\|f_N - f_M\|^2 = \big\| \sum_{n=M+1}^N \alpha_n u_n \big\|^2 = \sum_{n=M+1}^N |\alpha_n|^2 \to 0$ $(N, M \to \infty)$ ist $(f_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset H$ eine Cauchyfolge und damit konvergent. Sei $\widetilde{f} \in H$ mit $f_N \to \widetilde{f}$ $(N \to \infty)$.

Es gilt

$$B(f_N, f_N) = \sum_{n,m=1}^N \alpha_n \overline{\alpha_m} B(u_n, u_m) = \sum_{n=1}^N \lambda_n |\alpha_n|^2 \quad (N \in \mathbb{N}).$$

Ebenso sieht man wegen $B(f, u_m) = \overline{B(u_m, f)} = \overline{\langle Au_m, f\rangle} = \lambda_m \langle f, u_m\rangle = \alpha_m \lambda_m$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} B(f - f_N, f - f_N) &= B(f,f) - 2\,\mathrm{Re}\Big(\sum_{n=1}^N \alpha_n B(u_n, f)\Big) + B(f_N, f_N) \\ &= B(f,f) - 2\sum_{n=1}^N \lambda_n |\alpha_n|^2 + \sum_{n=1}^N \lambda_n |\alpha_n|^2 \qquad (1\text{-}6) \\ &= B(f,f) - \sum_{n=1}^N \lambda_n |\alpha_n|^2. \end{aligned}$$

Als Cauchyfolge ist $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ in H beschränkt, also ist auch $\|f - f_N\|$ beschränkt. Aus der Koerzivität folgt

$$B(f - f_N, f - f_N) \ge -C_q \|f - f_N\|^2 \ge C_1$$

mit einer Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$. Mit (1-6) ergibt sich

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n |\alpha_n|^2 \le C_2 \quad (N \in \mathbb{N})$$

mit $C_2 \in \mathbb{R}$. Wegen $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ ist die Folge der Partialsummen für große N monoton wachsend und durch C_2 nach oben beschränkt und damit konvergent. Somit gilt

$$B(f_N - f_M, f_N - f_M) = \sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n |\alpha_n|^2 \to 0 \quad (N, M \to \infty).$$

Es folgt wieder mit Koerzivität

$$\|f_N - f_M\|_V^2 \le \tfrac{1}{q} B(f_N - f_M, f_N - f_M) + \tfrac{C_q}{q} \|f_N - f_M\|^2 \to 0 \quad (N, M \to \infty).$$

Somit konvergiert $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ auch in V, und wegen $f_N \to \widetilde{f}$ in H folgt $f_N \to \widetilde{f}$ in V.

Es gilt $\langle f - f_N, u_n\rangle = 0$ für alle $j = 1, \ldots, N$ und damit

$$\lambda_{N+1} \le \frac{B(f - f_N, f - f_N)}{\|f - f_N\|^2}\,,$$

also folgt

$$\|f - f_N\|^2 \le \frac{B(f - f_N, f - f_N)}{\lambda_{N+1}} \le \frac{2C_b(\|f_N\|_V^2 + \|f\|_V^2)}{\lambda_{N+1}} \to 0 \quad (N \to \infty),$$

da $(f_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset V$ als konvergente Folge beschränkt ist. Somit ist $f = \widetilde{f}$, d.h. $f_N \to f$ in V. Aus der Stetigkeit von B und dem oben Gezeigten folgen nun die Aussagen (i)-(iii). □

1.13 Satz. *Die in Satz 1.10 konstruierte orthonormale Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem von H, d.h. für alle $f \in H$ gilt*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n\rangle u_n \quad (\textit{Konvergenz in } H).$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 1.12 folgt $f_N \to \widetilde{f}$ in H. Für $F := f - \widetilde{f}$ gilt

$$\langle F, u_n\rangle = \langle f, u_n\rangle - \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, u_m\rangle\langle u_m, u_n\rangle = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Falls $F \ne 0$, wähle $\varphi \in V$ mit $\|F - \varphi\| < \frac{1}{2}\|F\|$ (dies ist möglich, da V dicht in H liegt). Sei nun $N \in \mathbb{N}$ mit $\big\|\varphi - \sum_{n=1}^{N} \langle \varphi, u_n\rangle u_n\big\| < \frac{1}{2}\|F\|$ (Lemma 1.12). Dann folgt (da $\langle F, u_n\rangle = 0$)

$$\|F\|^2 \le \|F\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle \varphi, u_n\rangle|^2 = \Big\|F - \sum_{n=1}^{N} \langle \varphi, u_n\rangle u_n\Big\|^2$$

$$\leq 2\Big(\|F-\varphi\|^2 + \Big\|\varphi - \sum_{n=1}^N \langle\varphi,u_n\rangle u_n\Big\|^2\Big) < \|F\|^2,$$

Widerspruch. □

1.14 Korollar. *Für alle $f \in D(A)$ gilt*

$$Af = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \langle f,u_n\rangle u_n \quad \textit{(Konvergenz in } H\textit{)}$$

sowie $\|Af\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^2 |\langle f,u_n\rangle|^2$.

Beweis. Wende Satz 1.13 auf $g := Af \in H$ an und erhalte die Behauptung wegen

$$\langle g,u_n\rangle = \langle Af,u_n\rangle = \langle f,Au_n\rangle = \lambda_n\langle f,u_n\rangle.$$

□

1.15 Bemerkung. Satz 1.13 und Korollar 1.14 liefern eine sogenannte Spektraldarstellung des Operators A. Sei E_n die orthogonale Projektion in H auf den eindimensionalen Unterraum $\{\alpha u_n : \alpha \in \mathbb{C}\}$. Dann lassen sich die obigen Aussagen in folgender Form schreiben:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n f \quad (f \in H),$$
$$Af = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n E_n f \quad (f \in D(A)).$$

Definiert man die Spektralschar $F\colon \mathbb{R} \to L(H)$ durch $F(\lambda) := \sum_{n:\lambda_n\leq\lambda} E_n$, so kann man die obigen Aussagen in Integralform schreiben:

$$f = \int_{\mathbb{R}} 1 dF(\lambda) f \quad (f \in H),$$
$$Af = \int_{\mathbb{R}} \lambda dF(\lambda) f \quad (f \in D(A)).$$

Eine analoge Darstellung ergibt sich in Form des Spektralmaßes (projektorwertiges Maß) $E(A) := \sum_{n:\lambda_n\in A} E_n$, welches für Borelmengen $A \subset \mathbb{R}$ definiert ist.

Die obige Bemerkung legt es nahe, Funktionen des Operators A zu definieren:

1.16 Definition. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Dann definiert man den Operator $g(A)\colon H \supset D(g(A)) \to H$ durch

$$D(g(A)) := \Big\{ f \in H : \sum_{n\in\mathbb{N}} |g(\lambda_n)|^2 |\langle f,u_n\rangle|^2 < \infty \Big\},$$

$$g(A)f := \sum_{n\in\mathbb{N}} g(\lambda_n)\langle f, u_n\rangle u_n \quad (f \in D(g(A))).$$

1.17 Beispiele. a) Sei $g(\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$D(g(A)) = \Big\{ f \in H : \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, u_n\rangle|^2 < \infty \Big\} = H$$

und $g(A)f = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle f, u_n\rangle u_n = f$, d.h. $g(A) = \mathrm{id}_H$.

b) Für $g(\lambda) = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) erhält man $g(A) = A$ (inklusive Gleichheit der Definitionsbereiche).

c) Weitere wichtige Funktionen sind $g(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ (falls alle Eigenwerte von A nichtnegativ sind) sowie $g(\lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}t)$ und $g(\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}$ für festes $t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$D(\cos\sqrt{A}t) = D(\tfrac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}) = H.$$

Die Bedeutung dieser beiden Funktionen liegt darin, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t) + Au(t) = 0 \quad (t \geq 0),\\ u|_{t=0} = u_0,\\ \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{aligned}$$

gegeben ist durch $u(t,\cdot) = \cos(\sqrt{A}t)(u_0) + \frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}(u_1)$, wie wir später sehen werden.

1.18 Lemma. *a) Es gilt $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit den Eigenwerten λ_n aus Satz 1.10.*

b) Für $\lambda \in \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist die Resolvente $(A-\lambda)^{-1} \in L(H)$ kompakt.

Beweis. a) **(i)** Angenommen, es existiert ein $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit zugehörigem Eigenvektor u. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda\langle u, u_n\rangle = \langle Au, u_n\rangle = \langle u, Au_n\rangle = \lambda_n\langle u, u_n\rangle,$$

d.h. $\langle u, u_n\rangle = 0$. Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem ist, folgt $u = 0$, Widerspruch.

(ii) Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $f \in D(A)$ gilt nach Korollar 1.14

$$(A-\lambda)f = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n - \lambda)\langle f, u_n\rangle u_n,$$

$$\|(A-\lambda)f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda|^2 |\langle f, u_n\rangle|^2 \geq d^2 \|f\|^2$$

mit $d := \min_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n - \lambda| > 0$. Somit ist $(A-\lambda)\colon D(A) \to R(A-\lambda)$ injektiv und $(A-\lambda)^{-1}\colon R(A-\lambda) \to L^2(G)$ stetig. Also ist $\sigma_c(A) = \emptyset$.

Für $g \in H$ schreibe $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle g, u_n\rangle u_n$ und definiere $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle g, u_n\rangle u_n$. Wegen

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_n^2 |\langle g, u_n\rangle|^2}{|\lambda_n - \lambda|^2} < \infty$$

folgt $f \in D(A)$, und mit Korollar 1.14 ist $(A-\lambda)f = g$. Also ist $A-\lambda$ auch surjektiv, d.h. $\lambda \in \rho(A)$ und damit auch $\sigma_r(A) = \emptyset$. (Man kann allgemein zeigen, dass das Restspektrum für selbstadjungierte Operatoren leer ist.)

b) Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ beschränkt, und sei $f_n := (A-\lambda)^{-1} g_n$. Da $(A-\lambda)^{-1} \in L(H)$, ist auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ beschränkt. Aus der Koerzivität folgt

$$\|f_n\|_V^2 \leq \tfrac{1}{q} \langle Af_n, f_n\rangle + \tfrac{C_q}{q} \|f_n\|^2 = \tfrac{1}{q} \langle g_n + \lambda f_n, f_n\rangle + \tfrac{C_q}{q} \|f_n\|^2,$$

somit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in V beschränkt. Nach Voraussetzung (V3) besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in H konvergente Teilfolge. □

1.19 Bemerkung. Die obigen Ergebnisse sind ein Spezialfall des Spektralsatzes, der in Abschnitt b) näher diskutiert wird. Die obigen Ergebnisse lassen sich auch als Folgerung aus dem Spektralsatz und der Theorie kompakter Operatoren erzielen. Dabei folgen die Diskretheit des Spektrums aus der Theorie kompakter Operatoren und die obigen Reihenentwicklungen aus dem Spektralsatz. Wir haben diese Eigenschaften allerdings ohne Verwendung dieser Theorien direkt gezeigt.

1.20 Beispiel. a) Wir kommen zurück auf die Situation von Beispiel 1.2, d.h. wir betrachten einen elliptischen Operator zweiter Ordnung mit Dirichlet-Randbedingungen.Wie oben erwähnt, sind alle Voraussetzungen (V1)-(V3) erfüllt, und alle obigen Aussagen gelten für dieses Beispiel. Falls $G = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ und $Au = -u''$, so erhält man die klassischen Fourierreihen.

b) In der Situation von a) betrachten wir nun (verallgemeinerte) Neumann-Randbedingungen, welche (bei hinreichend glattem G) die Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} \nu_i(x) a_{ik}(x) \partial_k u(x) = 0 \quad (x \in \partial G)$$

haben, wobei $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))^\top$ der äußere Normalenvektor an ∂G ist. Bei diesen Randbedingungen besitzt der zugehörige Operator A den Definitionsbereich

$$D(A) := \{u \in H^1(G) : \exists\, f_u \in L^2(G)\, \forall\, v \in H^1(G) : B(u,v) = \langle f_u, v\rangle\},$$

und die Bilinearform B wird nun auf $H^1(G) \times H^1(G)$ betrachtet. Wieder sind alle Voraussetzungen (V1)-(V3) erfüllt, und wir erhalten die obigen Resultate. Man beachte, dass jetzt stets $0 \in \sigma(A)$ gilt, da die konstanten Funktionen in $D(A)$ liegen.

Im Fall von Beispiel 1.2, d.h. bei Dirichlet-Randbedingungen, lässt sich noch eine Monotonie der Eigenwerte als Funktion des Gebietes zeigen:

1.21 Satz. *In der Situation von Beispiel 1.2 seien G und $\widetilde{G}$ beschränkte Gebiete mit $\widetilde{G} \subset G$, und seien λ_n bzw. $\widetilde{\lambda}_n$ die jeweils n-ten Eigenwerte des Operators A. Dann gilt $\widetilde{\lambda}_n \geq \lambda_n$.*

Beweis. Sei $e_0 \colon L^2(\widetilde{G}) \to L^2(G)$ die triviale Fortsetzung durch Null von $\widetilde{G}$ auf G. Für $\widetilde{u} \in H_0^1(\widetilde{G})$ gilt dann $u := e_0\widetilde{u} \in H_0^1(G)$. Denn es existiert eine Folge $(\widetilde{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\widetilde{G})$ mit $\widetilde{\varphi}_n \to \widetilde{u}$ in $H^1(\widetilde{G})$, und für $\varphi_n := e_0\widetilde{\varphi}_n$ gilt $\varphi_n \in \mathscr{D}(G)$ und $\varphi_n \to u$ in $H^1(G)$. Offensichtlich gilt $\|u\|_{L^2(G)} = \|\widetilde{u}\|_{L^2(\widetilde{G})}$ und $B(e_0\widetilde{u}, e_0\widetilde{u}) = \widetilde{B}(\widetilde{u},\widetilde{u})$, wobei $\widetilde{B}$ die Einschränkung von B auf $H_0^1(\widetilde{G}) \times H_0^1(\widetilde{G})$ bezeichne.

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}_1 &= \inf\big\{\widetilde{B}(\widetilde{u},\widetilde{u}) : \widetilde{u} \in H_0^1(\widetilde{G}),\ \|\widetilde{u}\|_{L^2(\widetilde{G})} = 1\big\}\\
&= \inf\big\{B(e_0\widetilde{u}, e_0\widetilde{u}) : \widetilde{u} \in H_0^1(\widetilde{G}),\ \|\widetilde{u}\|_{L^2(\widetilde{G})} = 1\big\}\\
&\geq \inf\big\{B(u,u) : u \in H_0^1(G),\ \|u\|_{L^2(G)} = 1\big\} = \lambda_1.
\end{aligned}$$

Sei nun $n \geq 2$, und seien $\widetilde{h}_1, \ldots, \widetilde{h}_{n-1} \in L^2(\widetilde{G})$. Sei $\widetilde{u} \in L^2(\widetilde{G})$ mit $\|\widetilde{u}\|_{L^2(\widetilde{G})} = 1$ und $\langle \widetilde{u}, \widetilde{h}_1\rangle = \cdots = \langle \widetilde{u}, \widetilde{h}_{n-1}\rangle = 0$. Wie oben definieren wir $u := e_0\widetilde{u}$. Dann gilt $\|u\|_{L^2(G)} = 1$, und u ist orthogonal zu $h_1, \ldots, h_{n-1}$, wobei $h_j \in L^2(G)$ eine beliebige Fortsetzung von $\widetilde{h}_j$ sei. Nimmt man das Infimum über alle $\widetilde{u}$, so erhält man

$$\widetilde{\mu}_n(\widetilde{h}_1, \ldots, \widetilde{h}_{n-1}) \geq \mu_n(h_1, \ldots, h_{n-1}).$$

Mit dem Courantschen Minimax-Prinzip folgt

$$\widetilde{\lambda}_n = \sup_{\widetilde{h}_1,\ldots,\widetilde{h}_{n-1} \in L^2(\widetilde{G})} \widetilde{\mu}_n(\widetilde{h}_1, \ldots, \widetilde{h}_{n-1}) \geq \sup_{h_1,\ldots,h_{n-1} \in L^2(G)} \mu_n(h_1, \ldots, h_{n-1}) = \lambda_n.$$

□

b) Anwendung des Spektralsatzes

Im Folgenden sei H wieder ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle$ und Norm $\|\cdot\|$ und $A \colon H \supset D(A) \to H$ ein selbstadjungierter Operator. In diesem Abschnitt wollen wir den Spektralsatz anwenden, um Cauchyprobleme erster und zweiter Ordnung zu lösen. Wir verwenden den Spektralsatz in folgender Form ohne Beweis:

1.22 Satz. *a) Zu A existiert genau eine Spektralschar $F\colon \mathbb{R} \to L(H)$ mit*

$$Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda dF(\lambda)x \quad (x \in D(A)).$$

Es gilt

$$D(A) = \Big\{x \in X : \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 d\|F(\lambda)x\|^2 < \infty\Big\}.$$

b) Zu jeder messbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wird durch

$$D(f(A)) := \Big\{x \in X : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\|F(\lambda)x\|^2 < \infty\Big\},$$
$$f(A)x := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dF(\lambda)x \quad (x \in D(f(A)))$$

ein normaler Operator definiert.

c) Die Abbildung $f \mapsto f(A)$ (ein sogenannter Funktionalkalkül) besitzt folgende Eigenschaften:

(i) *Für Polynome f stimmt $f(A)$ mit der üblichen Definition überein.*

(ii) *Falls $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt ist, so ist $f(A) \in L(H)$ und $\|f(A)\|_{L(H)} = \|f\|_\infty$.*

(iii) *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar. Dann gilt $(g(A))^* = \overline{g}(A)$, $f(A) + g(A) = (f+g)(A)$ und $f(A)g(A) = (fg)(A)$.*

(iv) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$. Dann gilt $f_n(T)x \to f(T)x$ $(x \in H)$.*

(v) *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion mit $f|_{\sigma(A)} = 0$. Dann ist $f(A) = 0$.*

1.23 Bemerkung. Die Aussagen a) und b) sind die übliche Formulierung des Spektralsatzes (in der Spektralschar-Form). Die Aussagen in c) sind hingegen Teil des messbaren Funktionalkalküls und ergeben sich aus dem Beweis des Spektralsatzes.

Die H-wertigen Integrale in a) und b) können als Riemann-Stieltjes-Integrale verstanden werden und zunächst in der skalaren Form definiert werden, etwa $\langle f(A)x, y\rangle$. Hier ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \to \langle F(\lambda)x, y\rangle$ eine Funktion von beschränkter Variation. Man beachte zur Darstellung der Definitionsbereiche, dass $\lambda \mapsto \|F(\lambda)x\|^2$ eine monoton wachsende und beschränkte Funktion (und damit von beschränkter Variation) ist und das Integral daher als (reellwertiges) Riemann-Stieltjes-Integral definiert werden kann. Die Aussage (iv) in c) folgt durch majorisierte Konvergenz, wieder angewendet auf die skalaren Integrale $\langle f_n(A)x, y\rangle \to \langle f(A)x, y\rangle$. Die Integrale in a) und b) konvergieren im Allgemeinen nicht in der Operatornorm, auch nicht für beschränkte f.

Nach c) (v) hängt $f(A)$ nur von den Werten von f auf $\sigma(A)$ ab. Mit der üblichen Schreibweise $\int_B f(\lambda)dF(\lambda)x := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\chi_B(\lambda)dF(\lambda)x$ gilt also $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)dF(\lambda)x = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)dF(\lambda)x$.

In der Anwendung des Spektralsatzes ist es oft wichtig, das Spektrum zu lokalisieren, da z.B. Funktionen wie $\sqrt{\lambda}$ auf $\sigma(A)$ wohldefiniert sein sollen. (Die Werte von f auf der Resolventenmenge haben keinen Einfluss auf das Integral.) Eine Möglichkeit der Lokalisierung liefert folgendes Resultat:

1.24 Lemma. *Man definiert den numerischen Wertebereich von A durch*

$$W(A) := \{\langle Ax, x\rangle : x \in D(A),\, \|x\| = 1\}.$$

Dann gilt $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$.

Beweis. Falls $\lambda \in \sigma_p(A)$, folgt $\lambda \in W(A)$. Sei also $\lambda \in \sigma_c(A)$. Dann ist $R(A-\lambda)$ nicht abgeschlossen, d.h. es existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(A-\lambda)$ mit $y_n \to y \in H \setminus R(A-\lambda)$. Wir nehmen an, dass gilt:

$$\exists\, C > 0\, \forall\, x \in D(A) : \|(A-\lambda)x\| \geq C\|x\|. \tag{1-7}$$

Wir setzen in (1-7) $y_n = (A-\lambda)x_n$ mit $x_n \in D(A)$ ein und erhalten, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ eine Cauchyfolge ist. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt $(x_n, y_n) \to (x, y)$, und da $A-\lambda$ abgeschlossen ist, folgt $x \in D(A)$ sowie $y = (A-\lambda)x$, im Widerspruch zu $y \notin R(A-\lambda)$.

Also gilt (1-7) nicht, d.h. es existiert eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $\|(A-\lambda)z_n\| \to 0$ und $\|z_n\| = 1$. Damit gilt $\langle (A-\lambda)z_n, z_n\rangle = \langle Az_n, z_n\rangle - \lambda \to 0$, d.h. $\lambda \in \overline{W(A)}$. □

Wir betrachten nun das abstrakte (parabolische) Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) + Au(t) &= 0 \quad (t > 0),\\ u|_{t=0} &= u_0 \end{aligned} \tag{1-8}$$

Man beachte für die Aussage des nächsten Satzes, dass $D(A)$ mit der Graphennorm versehen wird, $\|x\|_{D(A)} := \sqrt{\|x\|_H^2 + \|Ax\|_H^2}$. Da A abgeschlossen ist, ist $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ ein Hilbertraum. Im Folgenden sei stets $F\colon \mathbb{R} \to L(H)$ die zu A gehörige Spektralschar.

1.25 Satz. *In obiger Situation gelte zusätzlich $\sigma(A) \subset [0,\infty)$. Zu $u_0 \in D(A)$ definiert man*

$$u(t) := e^{-At}u_0 := \int_0^\infty e^{-\lambda t}dE(t)u_0.$$

Dann ist

$$u \in C^1([0,\infty), H) \cap C([0,\infty), D(A)),$$

und u ist eine Lösung von (1-8).

Beweis. **(i)** Wir zeigen zunächst: Für alle $v_0 \in H$ ist $v(t) := e^{-At}v_0 \in H$ wohldefiniert und $v \in C([0,\infty), H)$. Die Wohldefiniertheit folgt aus $\lambda \mapsto e^{-\lambda t} \in L^\infty([0,\infty))$. Für $f_h(\lambda) := e^{-\lambda(t+h)}$ mit $h \in \mathbb{R}$ und $f(\lambda) := e^{-\lambda t}$ gilt $f_h \to f$ punktweise sowie $\sup_{|h|\le 1} \|f_h\|_\infty < \infty$. Nach Satz 1.22 (iv) folgt $v(t+h) = f_h(A)x \to f(A)v_0 = v(t)$ $(h \to 0)$.

(ii) Nach (i) ist $Au(t) = Ae^{-At}u_0 = e^{-At}Au_0 = e^{-At}v_0$ mit $v_0 := Au_0$ wohldefiniert, und es gilt $u \in C([0,\infty), H)$ sowie $Au \in C([0,\infty), H)$ und damit $u \in C([0,\infty), D(A))$.

(iii) Nun sei $f_h(\lambda) := \frac{1}{\lambda h}(e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t})$ sowie $f(\lambda) := -e^{-\lambda t}$. Dann gilt $\sup_{|h|\le 1}\|f_h\|_\infty < \infty$ sowie $f_h \to f$ $(h \to 0)$ punktweise. Nach Satz 1.22 (iv) folgt wieder $f_h(A)v_0 \to f(A)v_0$ für alle $v_0 \in H$. Damit folgt mit den Eigenschaften des Funktionalkalküls für $v_0 := Au_0$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) &= \int_0^\infty f_h(\lambda)\lambda dF(\lambda)u_0 = f_h(A)Au_0 \\
&= f_h(A)v_0 \to f(A)v_0 = f(A)Au_0 = \int_0^\infty f(\lambda)\lambda dF(\lambda)u_0 \\
&= -e^{-tA}Au_0 = -Ae^{-tA}u_0 = -Au(t) \quad (h \to 0).
\end{aligned}$$

Dies zeigt $u \in C^1([0,\infty), H)$ und $\partial_t u(t) = -Au(t)$ $(t > 0)$. □

1.26 Korollar. *Falls in der Situation von Satz 1.25 sogar $u_0 \in D(A^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt für die oben konstruierte Lösung*

$$u \in \bigcap_{j=0}^{k} C^j([0,\infty), D(A^{k-j})).$$

Beweis. Für alle $j \in \{0, \dots, k\}$ gilt $A^{k-j}u(t) = A^{k-j}e^{-tA}u_0 = e^{-tA}(A^{k-j}u_0)$, und wie im Beweis von Satz 1.25 gesehen, folgt $A^{k-j}u \in C([0,\infty), H)$ und damit $u \in C([0,\infty), D(A^k))$. Wegen $\partial_t u = -Au$ erhalten wir damit auch $\partial_t^j u = (-1)^j A^j u \in C([0,\infty), D(A^{k-j}))$. □

Wir betrachten nun das abstrakte (hyperbolische) Cauchyproblem zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 u(t) + Au(t) &= 0, \\
u|_{t=0} &= u_0, \\
\partial_t u|_{t=0} &= u_1.
\end{aligned} \tag{1-9}$$

1.27 Satz. *In obiger Situation gelte wieder $\sigma(A) \subset [0,\infty)$. Zu $u_0 \in D(A)$ und $u_1 \in D(\sqrt{A})$ definiert man*

$$u(t) := \cos(\sqrt{A}t)u_0 + \Big(\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\Big)u_1 \quad (t \geq 0).$$

Dann gilt

$$u \in C^2([0,\infty),H) \cap C^1([0,\infty), D(\sqrt{A})) \cap C([0,\infty), D(A)),$$

und u ist eine Lösung von (1-9).

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 1.25. Wir schreiben

$$Au(t) = \cos(\sqrt{A}t)Au_0 + \Big(\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\Big)Au_1 = \cos(\sqrt{A}t)v_0 + \sin(\sqrt{A}t)v_1$$

mit $v_0 := Au_0$ und $v_1 := \sqrt{A}u_1$. Da $\lambda \mapsto \cos(\sqrt{\lambda}t)$ und $\lambda \mapsto \sin(\sqrt{\lambda}t)$ beschränkt sind, ist $u(t) \in D(A)$ wohldefiniert für alle $t \geq 0$, und es gilt $u \in C([0,\infty), D(A))$.

Für die Ableitung von $t \mapsto \cos(\sqrt{A}t)u_0$ betrachtet man analog zum obigen Beweis die Funktion $f_h(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{\lambda}h}(\cos(\sqrt{\lambda}(t+h)) - \cos(\sqrt{\lambda}t))$ und $f(\lambda) := -\sin(\sqrt{\lambda}t)$. Dann gilt wieder $f_h \to f$ punktweise und gleichmäßig beschränkt, und mit dem Funktionalkalkül folgt

$$\sqrt{A}\big(\tfrac{1}{h}(u(t+h) - u(t))\big) = \sqrt{A}f_h(A)\sqrt{A}u_0 = f_h(A)v_0 \to f(A)v_0 = -A\sin(\sqrt{A}t)u_0.$$

Damit ist $u \in C^1([0,\infty), D(\sqrt{A}))$. Analog geht man für den sin-Term in der Definition von $u(t)$ vor. Leitet man dies noch einmal ab, sieht man genauso, dass $u \in C^2([0,\infty),H)$ gilt und dass u eine Lösung von (1-9) ist. □

1.28 Korollar. *Falls in der Situation von Satz 1.27 sogar $u_0 \in D(A^k)$ und $u_1 \in D(A^{k-\frac{1}{2}})$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ gilt, so folgt für die obige Lösung*

$$u \in \bigcap_{j=0}^{2k} C^j([0,\infty), D(A^{(2k-j)/2})).$$

Beweis. Dies sieht man genauso wie in Korollar 1.26 wegen

$$A^{(2k-j)/2}u(t) = \cos(\sqrt{A}t)A^{(2k-j)/2}u_0 + \Big(\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\Big)A^{(2k-j)/2}u_1 \quad (t \geq 0).$$

□

2. Operatorhalbgruppen

2.1 Worum geht's? Wir betrachten wieder das abstrakte Cauchyproblem

$$\partial_t u = Au, \; u(0) = u_0.$$

Allerdings wird jetzt nicht mehr vorausgesetzt, dass der Operator A selbstadjungiert ist, d.h. der Spektralsatz ist nicht anwendbar. In diesem Fall ist es auch sinnvoll, diese Gleichung in Banachräumen zu betrachten, was in den Anwendungen manchmal von Vorteil ist (z.B. L^p-Theorie mit $p \neq 2$). Ein zentraler Begriff für die Behandlung derartiger Evolutionsgleichungen ist der der Operatorhalbgruppe. Dieser fasst die wesentlichen Eigenschaften zusammen, welche etwa die im endlich-dimensionalen Fall bekannte Fundamentalmatrix $\exp(tA)$ zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = Ay$ mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ besitzt. Dabei werden die Halbgruppen, welche im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen auftreten, nicht normstetig sein, sondern nur stark stetig.

Es zeigt sich, dass das obige Cauchyproblem genau dann wohlgestellt ist, wenn der Operator A eine C_0-Halbgruppe erzeugt. Damit wird die Lösbarkeit von Gleichungen zurückgeführt auf Eigenschaften des in der Gleichung auftretenden Operators. In Anwendungen, in welchen etwa A ein Differentialoperator (im Ort) ist, sind diese Eigenschaften oft leichter nachzurechnen als die Lösbarkeit selbst.

Im Folgenden sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum.

a) Generatoren von Halbgruppen

Eine Zusammenfassung einiger Bezeichnungen sowie grundlegender Begriffe und Aussage aus der Theorie linearer Operatoren findet sich in Anhang A. Wir beginnen mit dem zentralen Begriff der Operatorhalbgruppen.

2.2 Beispiel. Bevor wir die allgemeine Definition für Operatorhalbgruppen einführen, wollen wir zur Motivation den endlich-dimensionalen Fall betrachten: Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, und $T(t) := \exp(tA) := \sum_{k=0}^\infty \frac{(tA)^k}{k!}$. Es gilt

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ $(t, s \geq 0)$ (Halbgruppeneigenschaft),

(iii) $T \in C([0,\infty), L(\mathbb{C}^n))$.

Ferner sieht man schnell, dass $A = T'(0)$ gilt. Diese Formulierung der Eigenschaften von $\exp(tA)$ macht auch in einem allgemeineren Rahmen Sinn.

2.3 Bemerkung. Sei $T : [0,\infty) \to L(\mathbb{C}^n)$, so dass (i), (ii) und (iii) erfüllt sind. Dann gilt $T(t) = \exp(tA)$ mit $A = T'(0)$. Insbesondere gilt $T \in C^\infty\big((0,\infty), L(\mathbb{C}^n)\big)$.

Um dies zu beweisen, betrachtet man $V(t) := \int\limits_0^t T(s)ds$ und zeigt, dass $\lim_{t\searrow 0} \frac{V(t)}{t} = I$ gilt. Insbesondere ist $V(t)$ für kleine t invertierbar, und unter Verwendung von $T(t) = V^{-1}(t_0)V(t_0)T(t)$ für kleines t_0 kann man zeigen, dass $u := T(\cdot)x$ die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - Au(t) &= 0 \quad (t > 0), \\ u(0) &= x, \end{aligned}$$

mit $A := T'(0)$ löst. Die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen besagt aber, dass die eindeutige Lösung dieser Anfangswertaufgabe als $T(t)x = \exp(tA)x$ gegeben ist.

Die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) genügen somit, um eine Halbgruppe mit *Generator* A zu definieren. Dies motiviert

2.4 Definition. Eine Abbildung $T\colon [0,\infty) \to L(X)$ wird *C_0-Halbgruppe* oder *stark stetige Halbgruppe* genannt, falls

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$,

(iii) T ist stark stetig, d.h. für alle $x \in X$ ist $[0,\infty) \to X,\ t \mapsto T(t)x$ stetig.

Häufig schreibt man Halbgruppen auch in der Form $(T(t))_{t\geq 0}$

Für eine C_0-Halbgruppe setzen wir

$$D := \Big\{x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{existiert}\Big\}.$$

Im allgemeinen ist $D \neq X$. Wir werden später sehen, dass D immer eine dichte Teilmenge von X ist.

2.5 Definition. Sei $T\colon [0,\infty) \to L(X)$ eine C_0-Halbgruppe. Dann definiert man den *Generator* oder *Erzeuger* von T als den linearen Operator A, gegeben durch $D(A) := D$ und

$$Ax := \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad (x \in D(A)).$$

Falls A der Erzeuger der C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ ist, schreibt man auch oft $T(t) = e^{tA}$ in Analogie zum endlich-dimensionalen Fall.

2.6 Beispiel. $\big(\exp(tA)\big)_{t\geq 0}$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist C_0-Halbgruppe auf $\mathbb{C}^n$ mit Generator A.

2.7 Lemma (Translationshalbgruppe). *Definiere* $\big(T(t)f\big)(x) := f(x+t)$, $t \geq 0$. *Dann ist* $(T(t))_{t\geq 0}$ *eine* C_0 *- Halbgruppe auf* $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, *mit Generator*

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A) = \Big\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \frac{d}{dx} f \in L^p(\mathbb{R}) \Big\} = W_p^1(\mathbb{R}).$$

Beweis. Zunächst ist $T(t)$ beschränkt wegen

$$\|T(t)f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t+x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p \quad \Longrightarrow \quad \|T(t)\|_{L(L^p(\mathbb{R}))} \leq 1.$$

Bekannt ist, dass $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{R})$. Für $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\|T(t)f - f\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t+x) - f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} < |K|^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_{x \in K} |f(x+t) - f(x)| \overset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

für kompakte Intervalle $K := \{x + y : x \in \operatorname{supp}(f), y \in [-1, +1]\}$. Aus Bemerkung A.2 b) und Lemma A.3 folgt die starke Stetigkeit, d.h. Eigenschaft (iii). Eigenschaften (i) und (ii) sind trivial. Damit ist T eine C_0-Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$. Sei B der Generator von T. Aus der Gleichheit

$$\frac{T(t)f - f}{t} = \frac{f(\cdot + t) - f(\cdot)}{t}$$

für $f \in L^p(\mathbb{R})$ ergibt sich

$$D(B) = \Big\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{t \to 0} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existiert in } L^p(\mathbb{R}) \Big\} = W_p^1(\mathbb{R}) = D(A),$$

$$Bf = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)f - f}{t} = \frac{d}{dx} f = Af.$$

Also gilt $A = B$, d.h. A erzeugt T. □

2.8 Beispiele. a) Betrachte den *Gaußkern*

$$G_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t} \right).$$

Dann definiert $T(t) := G_t * f$ eine C_0 - Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Generator $A = \Delta$ und $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Dies sieht man unter Verwendung der Fouriertransformation und des Satzes von Plancherel.

b) Sei $A \in L(X)$. Dann ist

$$T(t) = \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A. Außerdem ist T gleichmäßig stetig wegen

$$\|T(t) - I\|_{L(X)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(t\|A\|\big)^k}{k!} = \exp\big(t\|A\|\big) - 1 \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

2.9 Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung zu Beispiel 2.8 b): Sei $\big(T(t)\big)_{t\ge 0}$ eine C_0-Halbgruppe mit Generator $A : D(A) \to X$, so dass

$$\|T(t) - I\|_{L(X)} \to 0.$$

Dann gilt $A \in L(X)$. Dies sieht man wie in Bemerkung 2.3.

Im Folgenden werden wir Integrale der Form $\int_0^t T(s)ds$ betrachten, d.h. es wird über Funktionen integriert, welche in einen Banachraum abbilden (in diesem Fall $L(X)$). Der zugehörige Integralbegriff ist das Bochner-Integral, die Banachraum-wertige Version des Lebesgue-Integrals. Im Wesentlichen bleiben alle bekannten Sätze aus der Lebesgueschen Integrationstheorie erhalten. Wir fassen die wichtigsten Definitionen und Sätze in Anhang B zusammen.

Im Zusammenhang mit Halbgruppen werden wir insbesondere über reelle Intervalle integrieren. Man beachte, dass stetige Funktionen auf kompakten reellen Intervallen Bochner-integrierbar sind. Wir zeigen einige Aussagen, die später noch nützlich sein werden.

2.10 Lemma. *Sei $A : X \supset D(A) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator und $f \in C\big([0,\infty), X\big)$ mit $f(t) \in D(A)$ für $t \ge 0$ und $Af \in C\big([0,\infty), X\big)$. Dann gilt $\int_0^t f(s)ds \in D(A)$ und*

$$A \int_0^t f(s)ds = \int_0^t Af(s)ds \quad (t \ge 0).$$

Beweis. Sei $t > 0$ fest. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $t_k := \frac{tk}{n}$ $(k = 0, \dots, n)$ und definieren die Stufenfunktionen f_n, g_n durch $f_n := \sum_{k=1}^n f(t_k)\chi_{(t_{k-1},t_k]}$ und $g_n := \sum_{k=1}^n A[f(t_k)]\chi_{(t_{k-1},t_k]}$. Als stetige Funktionen auf dem kompakten Intervall $[0,t]$ sind f und Af gleichmäßig stetig, und daher gilt $f_n \to f$ und $g_n \to Af$ gleichmäßig auf dem Intervall $(0,t]$. Somit folgt

$$\int_0^t f_n(s)ds \to \int_0^t f(s)ds \quad \text{und} \quad \int_0^t g_n(s)ds \to \int_0^t Af(s)ds \quad (n \to \infty)$$

(Konvergenz in der Norm von X). Aufgrund der Linearität von A, der Definition des Integrals über Stufenfunktionen und der Voraussetzung $f(s) \in D(A)$ $(s \ge 0)$

gilt $\int f_n(s)ds \in D(A)$ und

$$A\Big(\int_0^t f_n(s)ds\Big) = \int_0^t Af_n(s)ds = \int_0^t g_n(s)ds.$$

Da A abgeschlossen ist, erhalten wir $\int_0^t f(s)ds \in D(A)$ und

$$A\Big(\int_0^t f(s)ds\Big) = \int_0^t Af(s)ds.$$

$\square$

2.11 Bemerkung. Die Aussage des obigen Lemmas gilt allgemeiner: Falls $f \in L^1(\mu; X)$ mit $f(s) \in D(A)$ und $Af \in L^1(\mu; X)$ für einen abgeschlossener Operator A, so folgt bereits $\int f d\mu \in D(A)$ und $A\big(\int f d\mu\big) = \int Af d\mu$.

2.12 Definition. Sei X ein Banachraum. Eine Funktion $f \in C\big([0,\infty), X\big)$ heißt differenzierbar in $t_0 \in [0,\infty)$ genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} =: f'(t_0)$$

in X existiert. Man schreibt $f \in C^k\big([0,\infty), X\big)$, falls f k-mal stetig differenzierbar ist.

2.13 Bemerkung. a) Sei $f \in C([0,\infty), X)$. Dann gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f(s)ds = f(0).$$

Für $F(t) := \int_0^t f(s)ds$ $(t \geq 0)$ gilt $F \in C^1([0,\infty), X)$ und $F' = f$.

b) Falls $f \in C^1([0,\infty), X)$, so gilt

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds \quad (t \in [0,\infty)).$$

2.14 Lemma. *Sei T eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator $A : D(A) \to X$.*

a) Es gilt $T(t)x \in D(A)$ für alle $x \in D(A)$ und

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

b) Es gilt $\int\limits_0^t T(s)x ds \in D(A)$ *für alle* $x \in X$, *und*

$$T(t)x - x = A \int_0^t T(s)x ds \quad (x \in X) \tag{2-1}$$

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax ds \quad (x \in D(A)) \tag{2-2}$$

Beweis. a) Sei $x \in D(A)$ und $h \geq 0$. Dann ergibt sich

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \xrightarrow{h\to 0} T(t)Ax \quad (t \geq 0).$$

Damit existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} = AT(t)x$$

und stimmt mit dem obigen überein. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt die Abschätzung $\|T(s)\|_{L(X)} \leq M_t$, $s \in [0,t]$, für beliebiges $t > 0$. Damit folgt für $t > 0$ und $h \leq t$

$$\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = -T(t-h)\frac{x - T(h)x}{h} \xrightarrow{h\to 0} T(t)Ax,$$

d.h. auch die linksseitige Ableitung existiert und stimmt mit der rechtsseitigen überein. Somit ist Aussage a) gezeigt.

b) Sei $x \in X$ und $t \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big(T(h)\int_0^t T(s)x ds - \int_0^t T(s)x ds\Big) &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)x ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x ds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x ds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x ds \\
&\xrightarrow{h\to 0} T(t)x - x
\end{aligned}$$

nach Bemerkung 2.13 a). Also gilt $\int_0^t T(s)ds \in D(A)$ und die Gleichheit (2-1). Mit der Abschätzung $\|T(s)\|_{L(X)} \leq M_t$, $s \in [0,t]$, folgt für $x \in D(A)$

$$T(s)\,\frac{T(h)x - x}{h} \xrightarrow{h\to 0} T(s)Ax \ \text{ gleichmäßig für } s \in [0,t],$$

was schließlich

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h) - 1}{h} \int_0^t T(s)x ds = \lim_{h\to 0} \int_0^t T(s)\frac{T(h)x - x}{h} ds = \int_0^t T(s)Ax ds$$

impliziert. □

2.15 Lemma. *Sei T eine C_0-Halbgruppe auf X. Dann existieren $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ so, dass gilt*

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M \exp(\omega t) \quad (t \geq 0). \tag{2-3}$$

Hierzu zunächst

2.16 Definition. Sei T eine C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X.

a) Die Zahl

$$\omega(T) := \inf\Big\{\omega \in \mathbb{R} : \text{ Es existiert ein } M_\omega \geq 1 \text{ so, dass(2-3) gilt}\Big\}$$

heißt die *Wachstumsschranke* von T.

b) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega = 0$ gilt, so heißt T beschränkt.

c) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega = 0$ und $M = 1$ gilt, so heißt T eine *Kontraktionshalbgruppe.*

d) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega < 0$ gilt, so heißt T *exponentiell stabil.*

Beweis von Lemma 2.15. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M$ für $t \in [0,1]$, setze $\omega = \log M$. Für $t \in [0,\infty)$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $t \leq m \leq t+1$ gilt

$$\|T(t)\|_{L(X)} = \Big\|T\Big(\frac{t}{m}\Big)^m\Big\| \leq \Big\|T\Big(\frac{t}{m}\Big)\Big\|^m \leq M^m \leq M^{t+1} = M\exp(\omega t).$$

□

2.17 Satz. *Der Generator $A : D(A) \to X$ einer C_0 - Halbgruppe T auf X ist ein abgeschlossener, dicht definierter Operator, der die C_0-Halbgruppe T eindeutig bestimmt.*

Beweis. Abgeschlossenheit: Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \to x$ und $Ax_k \to y$ in X. Nach Lemma 2.14 b) gilt

$$T(t)x_k - x_k = \int_0^t T(s)Ax_k ds.$$

Die gleichmäßige Konvergenz von $T(s)Ax_k$ in $[0,t]$ impliziert

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds.$$

Damit erhält man

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds \longrightarrow y \in X \text{ für } t \to 0.$$

Daher existiert der Grenzwert links, d.h $x \in D(A)$ und $Ax = y$.
Dichtheit von $D(A)$: Nach Bemerkung 2.13 a) gilt für $x \in X$,

$$D(A) \ni \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds \xrightarrow{t\to 0} x.$$

Eindeutigkeit von T: Seien S eine weitere von A erzeugte Halbgruppe auf X, $x \in D(A)$, und $t > 0$. Setze

$$u(s) := T(s)S(t-s)x\ , \qquad 0 \le s \le t.$$

Dann folgt

$$\frac{du(s)}{ds} = AT(s)S(t-s)x + T(s)(-A)S(t-s)x = 0.$$

Nach Bemerkung 2.13 b) ist u konstant auf $[0,t]$, also

$$T(t)x = u(t) = u(0) = S(t)x \quad (t > 0, x \in D(A)),$$

d.h. es gilt $T = S$. □

Im letzten Teil dieses Abschnitts wollen wir zurückkommen zum Cauchyproblem im Banachraum X, was ja die ursprüngliche Motivation für die Einführung von Halbgruppen war. Die Frage ist nun, ob die bereitgestellte Theorie die Ausgangsfragen zur Lösung solcher Probleme in zufriedenstellender Weise beantwortet. Hierzu zunächst folgende

2.18 Definition. Sei $A : X \supset D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Das Cauchyproblem

$$\text{(CP)} \quad \left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u - Au &=& 0, & t > 0, \\ u(0) &=& x, & \end{array} \right.$$

heißt *(klassisch) wohlgestellt* in X, falls

(i) eine eindeutige klassische Lösung existiert, d.h. für alle $x \in D(A)$ existiert genau eine Lösung $u \in C^1([0,\infty), X)$ von (CP) mit $u(t) \in D(A)$ $(t \ge 0)$.

(ii) u stetig von den Daten abhängt, d.h. für alle $t > 0$ existiert eine Konstante $C_t > 0$ mit $\|u(t)\| \le C_t\|x\|$ $(x \in D(A))$.

2.19 Satz. *Sei $A : X \supset D(A) \to X$ abgeschlossen mit $\overline{D(A)} = X$. Das Cauchyproblem (CP) ist genau dann wohlgestellt, wenn A Generator einer C_0-Halbgruppe T auf X ist.*

Beweis. (i) Sei A Generator der C_0-Halbgruppe T, und sei $x \in D(A)$. Wir setzen $u(t) := T(t)x$. Nach Lemma 2.14 a) ist $u \in C^1\big([0,\infty), X\big)$ Lösung von (CP), $u(t) \in D(A)$ $(t \geq 0)$ und $u(t) \xrightarrow{t\to 0} x \in X$. Außerdem stellt Lemma 2.15 für $t > 0$ sicher, dass

$$\|u(t)\| = \|T(t)x\| \leq M \exp(\omega t)\|x\|,$$

d.h. u hängt stetig von den Daten ab.

Zur Eindeutigkeit: Sei v eine weitere klassische Lösung von (CP), $x \in D(A)$, und $t \geq 0$. Wir setzen

$$w(s) := T(s)v(t-s) \quad (0 \leq s \leq t).$$

Wie im Beweis von Satz 2.17 folgt $\frac{dw(s)}{ds} = 0$ und daher $w = \text{const}$. Dies impliziert

$$T(t)x = w(t) = w(0) = v(t) \quad (t > 0, x \in D(A)).$$

(ii) Sei (CP) wohlgestellt und sei $x \in D(A)$. Diesmal setzen wir $T(t)x := u(t,x)$, wobei $u(\cdot, x)$ die eindeutige Lösung von (CP) zum Anfangswert x sei. Aus (ii) folgt $T(t) \in L(X)$, $t \geq 0$. Klar sind die Eigenschaften $T(0) = I$ sowie $T(t)x \xrightarrow{t\to 0} x$, d.h. T ist stark stetig. Zum Nachweis der Halbgruppeneigenschaft seien $s, t \geq 0$. Man beachte, dass $u(t+s, x)$ und $u\big(t, u(s,x)\big)$ beides Lösungen von (CP) zum Anfangswert $u(s,x)$ sind. Aus der Eindeutigkeit folgt

$$u(t+s, x) = u\big(t, u(s,x)\big),$$

was zeigt, dass

$$T(t+s)x = u(t+s,x) = u\big(t, u(s,x)\big) = T(t)u(s,x) = T(t)T(s)x.$$

Damit ist T eine C_0 - Halbgruppe. Sei B der Generator von T. Für $x \in D(A)$ erhält man

$$Au(t,x) = \partial_t u(t,x) \xrightarrow{t\to 0} y := \partial_t u(0,x) \in X$$

nach Voraussetzung. Aus der Abgeschlossenheit von A folgt somit

$$Ax = y = \partial_t u(0,x) = T'(0)x.$$

Da der rechte Limes bei Existenz mit Bx übereinstimmt folgt also $x \in D(B)$ und $Ax = Bx$ für $x \in D(A)$. Sei umgekehrt $x \in D(B)$. Wegen $\overline{D(A)} = X$ können wir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ wählen mit $x_k \to x$. Nach Lemma 2.14 b) folgt weiter

$$A\int_0^t T(s)x_k ds = B\int_0^t T(s)x_k ds = T(t)x_k - x_k \xrightarrow{k\to\infty} T(t)x - x$$

und wegen Abgeschlossenheit von A, dass

$$A\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x ds = \frac{T(t)x - x}{t}\,, \qquad t > 0.$$

Da die rechte Seite für $t \to 0$ gegen Bx konvergiert, sehen wir unter erneuter Ausnutzung der Abgeschlossenheit von A, dass $x \in D(A)$. Somit haben wir $D(A) = D(B)$ und deshalb $A = B$. □

Mit Satz 2.19 reduziert sich das Lösen von linearen Cauchyproblemen auf den Nachweis, dass A ein Generator ist. Doch auch nichtlineare Probleme können mit Hilfe eines Generatorresultates angegangen werden. Wie das funktioniert wollen wir hier nur kurz skizzieren. Wir werden später bei der Anwendung auf konkrete Beispiele sehen, wie diese Methode im Einzelnen durchzuführen ist.

Wir betrachten das inhomogene Cauchyproblem

$$\text{(ICP)} \qquad \begin{cases} \partial_t u(t) - Au(t) = f(t) & (t > 0) \\ \qquad\qquad u(0) = x. \end{cases}$$

Dann ergibt *Variation der Konstanten* die formale Lösung

$$u(t) = \exp(tA)x + \int_0^t \exp\big((t-s)A\big) f(s) ds.$$

Falls (ICP) nichtlinear ist, d.h. $f = f(s,u)$ wie z.B. in der Navier - Stokes - Gleichung $f(u) = (u\cdot\nabla)u$, kann versucht werden ein Fixpunktargument (z.B. den *Banachschen Fixpunktsatz*) auf die Integralformel anzuwenden. Bei erfolgreicher Anwendung zieht diese Methode i.d.R. die Existenz einer lokalen Lösung nach sich, d.h. es existiert ein $T > 0$ und ein $u : [0,T) \to X$, die (ICP) im sogenannten milden Sinne löst. Wir möchten an dieser Stelle anmerken, dass im Allgemeinen keine Existenz einer globalen Lösung erwartet werden kann. Z.B. ist zur Gleichung

$$u_t - \Delta u = |u|^\alpha$$

bekannt, dass i.A. keine globale (milde) Lösung in $L^p(\Omega)$ für gewisse Werte von p und α existiert.

b) Die Sätze von Hille-Yosida und von Lumer-Phillips

Um zu zeigen, dass ein Operator der Generator einer C_0-Halbgruppe ist, gibt es zwei wesentliche Sätze: den Satz von Hille-Yosida (und seine Varianten) und den Satz von Lumer-Phillips.

2.20 Bemerkung. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A und $\omega(T) = \omega_0$.

(ii) $\big(\exp(-\lambda t)T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist C_0-Halbgruppe auf X mit Generator $A - \lambda I$ und $\omega\big(\exp(-\lambda\,\cdot)T\big) = \omega_0 - \lambda$.

2.21 Satz (Satz von Hille-Yosida; Kontraktionshalbgruppen-Fall)**.** *Für einen linearen Operator $A : X \supset D(A) \to X$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) A ist der Generator einer C_0 - Kontraktionshalbgruppe T auf X.

(ii) Es gilt $\overline{D(A)} = X$, $(0,\infty) \subset \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq 1$ für $\lambda > 0$.

In diesem Fall gilt

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty \exp(-\lambda s)T(s)ds \quad (\lambda > 0). \tag{2-4}$$

2.22 Bemerkung. a) Die rechte Seite von (2-4) ist gerade die (vektorwertige) Laplace-Transformation von T, welche somit die Verbindung zwischen der Halbgruppe und der Resolvente des Operators A herstellt.

b) Die rechte Seite von (2-4) ist holomorph im Gebiet $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ und kann dort durch $\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$ abgeschätzt werden. Da die Resolvente eines Operators am Rand der Resolventenmenge in der Operatornorm unbeschränkt wird, folgt aus der Gleichheit (2-4) und der Holomorphie, dass $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ und dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ die Gleichheit (2-4) sowie die Abschätzung $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$ gilt.

Beweisskizze von Satz 2.21 . Wir führen den Beweis des Satzes von Hille-Yosida nicht aus, sondern erwähnen nur einige Schritte.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Mit Hilfe von Lemma 2.14 b) zeigt man, dass $R(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds$ absolut konvergiert und eine Rechts- und Links-Inverses zu $(\lambda - A)$ darstellt. Die Abschätzung für die Resolvente folgt direkt aus der Tatsache, dass T eine Kontraktionshalbgruppe ist.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Für die andere Richtung verwendet man die Yosida-Approximation $A_k := kA(k-A)^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Für $k \to \infty$ gilt $k(k-A)^{-1}x \to x$ für alle $x \in X$ und $A_k x \to Ax$ für alle $x \in D(A)$. Da $A_k \in L(X)$, ist die zugehörige Halbgruppe $T_k(t) := \exp(tA_k)$ über die Reihe wohldefiniert. Man rechnet nach, dass für $t \geq 0$ und $x \in D(A)$ die Folge $(T_k(t)x)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Somit kann man $T(t)x := \lim_{k\to\infty} T_k(t)x$ ($t \geq 0$, $x \in D(A)$) definieren. Nun kann man wieder durch Grenzwertbildung zeigen, dass T selbst eine C_0-Halbgruppe ist und A ihr Generator. □

2.23 Beispiele. (a) Schrödinger - Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Betrachte das zur Schrödingergleichung gehörige Resolventenproblem

$$(\lambda - i\Delta)u(x) = f(x) \ , \qquad x \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{2-5}$$

Da die Fourier-Transformation ein Isomorphismus im Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen ist, ist die obige Gleichung äquivalent zur Gleichung

$$\big(\lambda + i|\xi|^2\big)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \ , \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \ , \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{2-6}$$

Als Lösungsansatz für u wähle

$$u = \mathscr{F}^{-1}\hat{u} = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda + i|\xi|^2}\right]\hat{f} \ , \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Man benutzt die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\lambda + i|\xi|^2}\right| &\leq \frac{1}{\big|\mathrm{Re}\big\{\lambda + i|\xi|^2\big\}\big|} = \frac{1}{\lambda} \ , \qquad \lambda > 0, \\ \left|\frac{i|\xi|^2}{\lambda + i|\xi|^2}\right| &\leq \frac{|\xi|^2}{\big|\mathrm{Im}\big\{\lambda + i|\xi|^2\big\}\big|} \leq 1 \ , \qquad \lambda > 0, \end{aligned}$$

und die Plancherelsche Formel, um

$$\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2 \leq \frac{\|\hat{f}\|_2}{\lambda} = \frac{\|f\|_2}{\lambda}, \quad \lambda > 0, \tag{2-7}$$

$$\|i\Delta u\|_2 = \big\|-i|\cdot|^2\hat{u}\big\|_2 \leq \|f\|_2, \quad \lambda > 0, \tag{2-8}$$

zu erhalten. Klar ist, dass $\hat{u}$ eindeutige Lösung von (2-6) in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, d.h. wegen der Unitarität von $\mathscr{F}$ ist also u eindeutige Lösung von (2-5) in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Als $L^2(\mathbb{R}^n)$ - Realisierung des Schrödingeroperators definiere $A_s u := i\Delta u$ mit

$$\begin{aligned} D(A_s) &= \Big\{v \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathscr{F}^{-1}|\xi|^2\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)\Big\} \\ &= \Big\{v \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta v \in L^2(\mathbb{R}^n)\Big\} \\ &= H^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset D(A_s)$ implizieren $D(A_s) \overset{d}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^n)$, also ist A_s dicht definiert.

Weiterhin setzen wir $R(\lambda)f := u_f$, wobei u_f die Lösung zu (2-5) mit rechter Seite f bezeichnet. Aus (2-8) folgt für $\lambda > 0$, dass $R(\lambda) : L^2(\mathbb{R}^n) \to D(A_s)$ und wir erhalten

$$(\lambda - i\Delta)R(\lambda)f = (\lambda - i\Delta)u_f = f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

sowie

$$R(\lambda)(\lambda - i\Delta)v = u_{(\lambda - i\Delta)v} = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda + i|\xi|^2}\right]\mathscr{F}(\lambda - i\Delta)v = v.$$

$$\Longrightarrow R(\lambda) = (\lambda - A_s)^{-1}\ , \qquad \lambda > 0.$$

Mit (2-7) folgt ferner $(0,\infty) \subset \rho(A_s)$, sowie

$$\|\lambda(\lambda - A_s)^{-1}f\|_2 = \|\lambda R(\lambda)f\|_2 = \|\lambda u_f\|_2 \le \|f\|_2\ , \qquad \lambda > 0, f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Nach Theorem 2.21 generiert A_s also eine C_0 - Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Diese ist gegeben durch

$$\exp(tA_s) = \mathscr{F}^{-1}\exp\big(i|\xi|^2 t\big)\mathscr{F}\ , \qquad t \ge 0.$$

b) Wärmeleitungs - Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Das zugehörige Resolventenproblem lautet

$$(\lambda - \Delta)u(x) = f(x)\ , \qquad x \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

$$\overset{FT}{\Longleftrightarrow} \big(\lambda + |\xi|^2\big)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\ , \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Setze $u := \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda+|\xi|^2}\right]$. Analog zu (a) folgt, dass Δ eine C_0 - Kontraktionshalbgruppe $\big(\exp(t\Delta)\big)_{t\ge 0}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ generiert, die gegeben ist durch

$$\exp(t\Delta) = \mathscr{F}^{-1}\exp\big(-t|\xi|^2\big)\mathscr{F}.$$

2.24 Bemerkung. Wegen $\left|\frac{1}{\lambda+i|\xi|^2}\right| \le \frac{1}{|\lambda|}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, gilt für den Schrödingeroperator $A_s = i\Delta$ die Ungleichung

$$\|\lambda(\lambda - A_s)^{-1}\|_{L(L^2(\mathbb{R}^n))} \le 1 \quad (\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}),$$

d.h. auch $-A_s$ erzeugt eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Man spricht insgesamt von der *Schrödingergruppe*

$$(\exp(i\Delta t))_{t\in\mathbb{R}} \subset L\big(L^2(\mathbb{R}^n)\big).$$

Diese ist stark stetig auf $\mathbb{R}$, und es gilt $\exp\big(i\Delta(t+s)\big) = \exp(i\Delta t)\exp(i\Delta s)$ $(s,t \in \mathbb{R})$.

Bemerkung 2.24 motiviert die folgende allgemeine Definition.

2.25 Definition. Eine stark stetige Abbildung $T\colon \mathbb{R} \to L(X)$ mit

(i) $T(0) = I$,
(ii) $T(s+t) = T(s)T(t)\ , \qquad t, s \in \mathbb{R}$,

heißt C_0-*Gruppe* auf X.

2.26 Satz (Hille-Yosida für Kontraktionsgruppen)**.** *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein linearer Operator. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) A generiert eine C_0-Kontraktionsgruppe auf X,

*(ii) A und $-A$ generieren C_0-Kontraktions**halb**gruppen auf X,*

(iii) $\overline{D(A)} = X$, $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Beweis. Klar sind $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ nach Theorem 2.21 sowie $(i) \Rightarrow (ii)$ nach Definition 2.25. Es bleibt $(ii) \Rightarrow (i)$ zu zeigen. Definiere dazu

$$T(t) := \begin{cases} T_+(t) & : t \geq 0, \\ T_-(-t) & : t < 0, \end{cases}$$

wobei $T_\pm$ von $\pm A$ generiert werden. Sind $(T_+)_k$ und $(T_-)_k$ die Yosida - Approximationen aus Theorem 2.21, dann gilt $A_k(-A)_m = (-A)_m A_k$ und somit auch $(T_+)_k(T_-)_m = (T_-)_m(T_+)_k$. Setze nun

$$S(t) := T_+(t)T_-(t)\ , \qquad t \geq 0.$$

Dann gilt $S(0) = I$ und $\big(S(t)\big)_{t\geq 0} \subset L(X)$. Für die Ableitung ergibt sich

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AT_+(t)T_-(t)x - AT_+(t)T_-(t)x = 0 \quad (x \in D(A)).$$

Aus Bemerkung 2.13 b) folgt $S(t)x = S(0)x = x$ $(t \geq 0, x \in D(A))$ und nach Bemerkung A.2 b) weiter $S = I$. Damit existiert $T_+(t)^{-1}$ und ist gegeben durch $T_-(t)$.

Seien $t, s \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, $s < 0$ und o.B.d.A. $t + s \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(t+s)T(t)^{-1}T(s)^{-1} &= T_+(t+s)T_+(t)^{-1}T_-(-s)^{-1} \\ &= T_+(t+s)T_+(-s)T_+(t)^{-1} = I \end{aligned}$$

und damit

$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad (t, s \in \mathbb{R}).$$

Weiterhin ist in $t_0 > 0$ die Gruppe T stark stetig. Dies pflanzt sich wegen der Halbgruppeneigenschaft auf $\mathbb{R}$ fort. Klar ist, dass A die Gruppe T erzeugt. □

2.27 Bemerkung. Da $\frac{1}{\lambda+|\xi|^2}$ singulär ist für $\lambda < 0$, generiert Δ keine C_0-Gruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Aus Bemerkung 2.20 sieht man, dass nicht alle Halbgruppen kontraktiv sind. Umgekehrt erhält man durch Verschieben i.a. bestenfalls eine beschränkte C_0 - Halbgruppe. Deshalb ist die folgende Verallgemeinerung wichtig.

2.28 Satz (Satz von Hille-Yosida, allgemeine Form)**.** *Seien $A : X \supset D(A) \to X$ linear, $\omega \in \mathbb{R}$ und $M \geq 1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist Generator einer C_0-Halbgruppe T mit $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M \exp(\omega t)$ $(t \geq 0)$.*

(ii) *Es gilt $\overline{D(A)} = X$, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und*

$$\|(\lambda - \omega)^k (\lambda - A)^{-k}\|_{L(X)} \leq M \quad (\lambda > \omega, k \in \mathbb{N}).$$

Beweis. O.B.d.A. setzen wir $\omega = 0$ voraus. Das ist nach Bemerkung 2.20 möglich.

„*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*“: Nach Voraussetzung gilt $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M$ für alle $t \geq 0$. Wir definieren uns eine neue Norm durch

$$|||x||| := \sup_{s \geq 0} \|T(s)x\| \,, \qquad x \in X.$$

Für diese gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\| \,, \qquad & x \in X, \\ |||T(t)x||| = \sup_{s \geq 0} \|T(t+s)x\| \leq |||x||| \,, \qquad & x \in X, t \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist T kontraktiv auf $(X, ||| \cdot |||)$. Nach Theorem 2.21 folgt schließlich

$$\begin{aligned} & |||\lambda(\lambda - A)^{-1}x||| \leq |||x||| \,, \qquad x \in X, \lambda > 0, \\ \Longrightarrow\ & |||\lambda^k(\lambda - A)^{-k}x||| \leq |||x||| \,, \qquad x \in X, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}, \\ \Longrightarrow\ & \|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}x\| \leq M\|x\| \,, \qquad x \in X, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

„*(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*“: Voraussetzung ist $\|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}\|_{L(X)} \leq M, \lambda > 0, k \in \mathbb{N}$. Auch hier definiert man sich für $\mu > 0$,

$$\|x\|_\mu := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\mu^k(\mu - A)^{-k}x\| \,, \qquad x \in X.$$

Es gilt das *Umnormierungslemma*:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|, \quad x \in X, \\ &(2) \quad \|\mu(\mu - A)^{-1}x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad x \in X, \\ &(3) \quad \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \leq \|x\|_\mu, \quad x \in X, 0 < \lambda \leq \mu, \\ &(4) \quad \|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}x\| \leq \|x\|_\mu, \quad x \in X, 0 < \lambda \leq \mu,\ k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

(5) $\|x\|_\lambda \le \|x\|_\mu, \quad x \in X, 0 < \lambda \le \mu.$

Wir wollen an dieser Stelle lediglich (3) beweisen, der Rest ist eine einfache Übungsaufgabe.

Aus der Resolventengleichung

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

folgt für $x \in X$,

$$(\lambda - A)^{-1}x = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}x + (\mu - A)^{-1}x.$$

Damit erhält man

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \le \frac{\mu - \lambda}{\mu}\|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu + \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu$$

und somit

$$\underbrace{\left(1 - \frac{\mu - \lambda}{\mu}\right)}_{=\lambda/\mu}\|(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \le \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu \quad \Longrightarrow \quad (3).$$

Mit diesem Umnormierungslemma kann man eine weitere Norm auf X definieren:

$$|||x||| := \sup_{\mu > 0} \|x\|_\mu, \quad x \in X.$$

Es ist einfach einzusehen, dass

$$\|x\| \le |||x||| \le M\|x\|, \quad x \in X.$$

und man erhält

$$\begin{aligned} |||\lambda(\lambda - A)^{-1}x||| &= \sup_{\mu>0} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \\ &= \max\Big\{ \sup_{0<\lambda\le\mu} \underbrace{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu}_{\le\|x\|_\mu \le |||x|||}, \sup_{\mu<\lambda} \underbrace{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu}_{\le\|\lambda(\lambda-A)^{-1}x\|_\lambda \le \|x\|_\lambda \le |||x|||} \Big\} \\ &\le |||x|||, \quad x \in X, \lambda > 0. \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung des $0 < \lambda \le \mu$ - Supremums wurde (3), und für $\mu < \lambda$ erst (5) dann (2) ausgenutzt. Nach Theorem 2.21 generiert A eine C_0 - Kontraktionshalbgruppe auf $(X, |||\cdot|||)$, damit auch eine C_0 - Halbgruppe auf $(X, \|\cdot\|)$ und man hat

$$\|\exp(tA)x\| \le |||\exp(tA)x||| \le |||x||| \le M\|x\| \,, \qquad x \in X, t \ge 0.$$

□

2.29 Bemerkung. a) Entsprechend zu Satz 2.26 gilt ein allgemeines Resultat wie Satz 2.28 auch für C_0-Gruppen.

b) Aus Satz 2.26 folgt insbesondere, dass für zwei Generatoren A und B von C_0-Halbgruppen mit $A \subset B$ bereits $A = B$ folgt. Denn für hinreichend großes $\lambda > 0$ gilt $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$, und damit kann B keine echte Fortsetzung von A sein.

Speziell für Hilberträume gibt es ein in Anwendungen sehr nützliches Kriterium für die Erzeugung einer C_0-Halbgruppe, den Satz von Lumer-Phillips. Der entscheidende Begriff dafür ist der des dissipativen Operators.

2.30 Definition. Seien X ein Hilbertraum und $A : X \supset D(A) \to X$ ein linearer Operator. A heißt *dissipativ*, falls gilt:

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \le 0 \quad (x \in D(A)).$$

2.31 Bemerkung. Sei X ein Hilbertraum und $A\colon X \supset D(A) \to X$ ein dissipativer Operator. Dann gilt

$$\|(\lambda - A)x\| \ge \lambda \|x\| \quad (x \in D(A),\, \lambda > 0).$$

Denn für $x \in D(A)$ mit $\|x\| = 1$ und $\lambda > 0$ gilt mit dem Satz von Riesz

$$\begin{aligned}\|(\lambda - A)x\| &= \sup_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\|=1}} \big|x'((\lambda - A)x)\big| = \sup_{y \in X} |\langle y, (\lambda - A)x\rangle| \ge \big|\langle x, (\lambda - A)x\rangle\big| \\ &\ge \operatorname{Re}\langle x, (\lambda - A)x\rangle = \lambda - \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \ge \lambda.\end{aligned}$$

2.32 Satz (Satz von Lumer-Phillips)**.** *Sei X ein Hilbertraum und $A : X \supset D(A) \to X$ linear. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist dissipativ mit $\overline{D(A)} = X$, und es existiert ein $\lambda_0 > 0$ mit $R(A - \lambda_0) = X$.*

(ii) *A ist Erzeuger einer C_0-Kontraktionshalbgruppe.*

Beweis. **(i)⇒(ii). (a)** Wir zeigen zunächst, dass A abschließbar ist, d.h. dass der Abschluss des Graphen von A selbst wieder der Graph eines Operators ist (welcher dann Abschluss $\overline{A}$ von A genannt wird). Dazu ist zu zeigen: Falls $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ eine Folge mit $x_k \to 0$ und $Ax_k \to y$ ist, so gilt $y = 0$.

Seien (x_k), y wie oben, $\lambda > 0$ und $w \in D(A)$. Dann folgt aus der Dissipativität und Bemerkung 2.31

$$\|\lambda(\lambda - A)x_k + (\lambda - A)w\| \overset{(i)}{\ge} \lambda \|\lambda x_k + w\|.$$

Für $k \to \infty$ erhält man

$$\Big\| - y + \Big(1 - \frac{A}{\lambda}\Big) w\Big\| \ge \|w\|,$$

und für $\lambda \to \infty$ ergibt sich

$$\| - y + w\| \ge \|w\| \ , \qquad w \in D(A).$$

Wegen $\overline{D(A)} = X$ wähle $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $w_k \to y$. Damit ist

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|y - w_k\| \ge \lim_{k\to\infty} \|w_k\| = \|y\|,$$

also $y = 0$.

(b) Wir zeigen, dass $\lambda_0 \in \rho(A)$ gilt. Mit A ist offensichtlich auch $\overline{A}$ dissipativ und damit (Bemerkung 2.31) ist $\lambda_0 - \overline{A}$ injektiv. Da $A \subset \overline{A}$ gilt, $\lambda_0 - A\colon D(A) \to X$ surjektiv und $\lambda_0 - \overline{A}\colon D(\overline{A}) \to X$ injektiv ist, folgt bereits $D(A) = D(\overline{A})$, d.h. $A = \overline{A}$. Somit ist $\lambda_0 - A\colon D(A) \to X$ bijektiv und abgeschlossen, und nach dem Satz vom stetigen Inversen ist $(\lambda_0 - A)^{-1}$ stetig. Somit ist $\lambda_0 \in \rho(A)$.

(c) Wir zeigen $(0,\infty) \subset \rho(A)$. Die Menge $\rho(A) \cap (0,\infty)$ ist nichtleer und relativ offen in $(0,\infty)$. Sei $\lambda \in (0,\infty)$ ein Häufungspunkt von $\rho(A)\cap(0,\infty)$. Dann existiert eine Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)\cap\rho(A)$ mit $\lambda_k \to \lambda > 0$. Wegen

$$\sigma\big((\mu - A)^{-1}\big) \setminus \{0\} = \Big\{\frac{1}{\mu-\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\Big\} \ , \qquad \mu \in \rho(A),$$

folgt für den Spektralradius $r\big((\mu - A)^{-1}\big) := \max\big\{|\lambda| : \lambda \in \sigma\big((\mu - A)^{-1}\big)\big\}$, dass

$$r\big((\mu - A)^{-1}\big) = \frac{1}{\operatorname{dist}\big(\mu, \sigma(A)\big)}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\big(\lambda_k, \sigma(A)\big) &= \frac{1}{r\big((\lambda_k - A)^{-1}\big)} \ge \|(\lambda_k - A)^{-1}\|_{L(X)}^{-1} \\ &\ge \lambda_k \ge C > 0 \quad (k \ge k_0). \end{aligned}$$

Dies bedeutet $\lambda \in \rho(A)$. Damit ist die Menge $(0,\infty)\cap\rho(A)$ auch relativ abgeschlossen. Da $(0,\infty)$ zusammenhängend ist, erhalten wir $(0,\infty) \subset \rho(A)$.

(d) Da A dissipativ ist, folgt aus Bemerkung 2.31 die Ungleichung

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_{L(X)} \le \|x\| \quad (x \in X, \lambda > 0).$$

Aus dem Theorem 2.21 von Hille-Yosida folgt (ii).

(ii)⇒(i). Wir verwenden die Yosida-Approximation $kA(k-A)^{-1}x = k^2(k-A)^{-1}x - kx \to Ax$ ($k \to \infty$, $x \in D(A)$) und erhalten für $x \in D(A)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle &= \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re}(\langle k^2(k-A)^{-1}x - kx, x\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re}\big(\langle k^2(k-A)^{-1}x, x\rangle - k\|x\|^2\big) \\ &\le \limsup_{k\to\infty} k\big(\|k(k-A)^{-1}x\|\,\|x\| - \|x\|^2\big) \le 0, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Satz von Hille-Yosida angewendet wurde, nach welchem $\|k(k-A)^{-1}x\| \le \|x\|$ gilt. □

2.33 Bemerkung. Wir haben den Satz von Lumer-Phillips nur für Hilberträume formuliert, da er in diesem Fall am häufigsten anwendbar ist. Der Satz gilt aber in gleicher Weise in Banachräumen, falls man den Begriff der Dissipativität entsprechend verallgemeinert: Ein Operator $A\colon X \supset D(A) \to X$ in einem Banachraum X heißt dissipativ, falls für jedes $x \in D(A)$ ein Funktional $\varphi_x \in X'$ existiert mit $\|\varphi_x\|_{X'}^2 = \|x\|^2 = \varphi_x(x)$ und $\operatorname{Re}\varphi_x(Ax) \le 0$. (Im Hilbertraum-Fall ist $\varphi_x = \langle x, \cdot\rangle$ ein solches Funktional.)

c) Holomorphe Halbgruppen

Parabolische Gleichungen besitzen typischerweise eine Glättungseigenschaft, welche auch in der Sprache der Halbgruppentheorie ausgedrückt werden kann. Die zentralen Begriffe hierzu sind holomorphe C_0-Halbgruppen und sektorielle Operatoren.

2.34 Definition. Eine C_0-Halbgruppe T auf dem Banachraum X heißt *beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe auf X vom Winkel* $\vartheta \in (0, \pi/2]$, falls $T\colon [0,\infty) \to L(X)$ eine holomorphe Fortsetzung auf den Sektor

$$\Sigma_\vartheta := \Big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \vartheta \Big\}$$

besitzt mit $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ ($z_1, z_2 \in \Sigma_\varphi$), so dass für alle $\widetilde{\vartheta} \in (0, \vartheta)$ ein $M_{\widetilde{\vartheta}}$ existiert mit

$$\|T(z)\|_{L(X)} \le M_{\widetilde{\vartheta}} \quad (z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}).$$

2.35 Bemerkung. Sei T eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe vom Winkel ϑ. Für alle $\widetilde{\vartheta} \in (0, \vartheta)$ gilt dann

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_{\widetilde{\vartheta}}}} T(z)x = x \quad (x \in X),$$

und $D(A)$ ist die Menge aller $x \in X$, für welche

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_{\widetilde{\vartheta}}}} \frac{T(z)x - x}{z}$$

in X existiert (dieser Limes ist dann Ax).

2.36 Definition. Sei $A\colon D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\sup_{\lambda\in\Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty.$$

Falls A ein sektorieller Operator ist, so heißt

$$\varphi_A := \sup\{\varphi:\ \rho(A) \supset \Sigma_\varphi,\ \sup_{\lambda\in\Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty\}$$

der spektrale Winkel von A.

Das folgende Lemma wird hier nicht bewiesen. Der Beweis verwendet unter anderem die Cauchysche Integralformel und eine zweite Kurve für den Nachweis der Funktionalgleichung.

2.37 Lemma. *Sei A ein sektorieller Operator mit Winkel $\varphi_A \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, und sei $\vartheta \in (0, \varphi_A - \frac{\pi}{2})$. Betrachte für $\psi \in (\vartheta + \frac{\pi}{2}, \varphi_A)$ und $\delta > 0$ die Kurve*

$$\gamma_{\psi,\delta} := (\infty, \delta]e^{-i\psi} \cup \delta e^{i[-\psi,\psi]} \cup [\delta, \infty)e^{i\psi}$$

(„Schlüssellochweg"). Dann ist für $z \in \Sigma_\vartheta$ der Operator

$$\exp(zA) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{z\lambda}(\lambda - A)^{-1}d\lambda \in L(X)$$

wohldefiniert. Es gilt

$$\exp(z_1A)\exp(z_2A) = \exp((z_1 + z_2)A) \quad (z_1, z_2 \in \Sigma_\vartheta).$$

Die Abbildung $z \mapsto \exp(zA)$, $\Sigma_\vartheta \to L(X)$ ist holomorph.

Der nächste Satz charakterisiert die Erzeuger von beschränkten holomorphen C_0-Halbgruppen.

2.38 Satz. *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ linear. Äquivalent sind:*

(i) *A erzeugt eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe T auf X vom Winkel $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.*

(ii) *A ist sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.*

Beweis. **(i)$\Longrightarrow$(ii).** Sei $\widetilde{\vartheta} \in (0, \vartheta)$. Für $\alpha \in (-\widetilde{\vartheta}, \widetilde{\vartheta})$ definiere $S(t) := T\big(e^{i\alpha}t\big)$ $(t \geq 0)$. Nach Bemerkung 2.35 ist S eine C_0-Halbgruppe. Sei B ihr Erzeuger, dann gilt $x \in D(B)$ genau dann, wenn $\lim_{t\to 0} \frac{S(t)x-x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{T(e^{i\alpha}t)x-x}{t}$ existiert. Nach Bemerkung 2.35 gilt dies für alle $x \in D(A)$, und es folgt $B \subset e^{i\alpha}A$. Mit Bemerkung 2.29 b) folgt $B = e^{i\alpha}A$.

Aus Theorem 2.28 folgt $(0, \infty) \subset \rho\big(e^{i\alpha}A\big)$ und

$$(\lambda - e^{i\alpha}A)^{-1} = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) T(e^{i\alpha}t) dt \quad (\lambda > 0). \tag{2-9}$$

Nach Voraussetzung existiert eine Konstante $M = M(\widetilde{\vartheta})$ mit

$$\|T(z)\|_{L(X)} \leq M \quad (z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}).$$

Wegen

$$\int_0^\infty |\exp(-\lambda t)|\, \|T(e^{i\alpha}t)\| dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda} \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0) \tag{2-10}$$

ist das Integral auf der rechten Seite von (2-9) sogar für alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$ konvergent und dort eine holomorphe Funktion von λ. Wie in Bemerkung 2.22 b) folgt $\rho(e^{i\alpha}A) \supset \Sigma_{\pi/2}$.

Insgesamt haben wir $e^{-i\alpha}\lambda \in \rho(A)$ für alle $|\alpha| < \widetilde{\vartheta}$ und alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$, d.h. $\Sigma_{\widetilde{\vartheta}+\pi/2} \supset \rho(A)$.

Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\widetilde{\vartheta} + \varepsilon < \vartheta$. Für $z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}+\pi/2}$ existiert ein $\lambda \in \Sigma_{\pi/2-\varepsilon}$ und ein α mit $|\alpha| < \widetilde{\vartheta} + \varepsilon$ und $z = e^{-i\alpha}\lambda$. Aus (2-10) folgt

$$\begin{aligned} \|(z-A)^{-1}\| &= \|(e^{-i\alpha}\lambda - A)^{-1}\| = \|(\lambda - e^{i\alpha}A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda} \leq \frac{M}{C_\varepsilon|\lambda|} \\ &= \frac{M}{C_\varepsilon |z|} \quad (z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}+\pi/2}), \end{aligned}$$

wobei wir die Abschätzung $\operatorname{Re}\lambda \geq C_\varepsilon|\lambda|$ $(\lambda \in \Sigma_{\pi/2-\varepsilon})$ verwendet haben. Da $\widetilde{\vartheta} < \vartheta$ beliebig war, ist A sektoriell mit Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Sei $\widetilde{\vartheta} \in (0, \vartheta)$ und $z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}$. Wähle $\delta := \frac{1}{|z|}$ und φ, ψ mit $\frac{\pi}{2} + \widetilde{\vartheta} < \varphi < \psi < \varphi_A$ und definiere

$$T(z) := \exp(zA) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Nach Lemma 2.37 ist $T\colon \Sigma_\vartheta \to L(X)$ holomorph und erfüllt die Funktionalgleichung.

Um zu zeigen, dass T beschränkt ist, verwendet man $|\arg(\lambda z)| \geq \psi - |\arg z| \geq \varphi - \widetilde{\vartheta} > \frac{\pi}{2}$ für $|\arg\lambda| = \psi$ und damit

$$|e^{\lambda z}| \leq e^{-C_1|\lambda|\,|z|} \quad (|\arg\lambda| = \psi,\ z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}) \tag{2-11}$$

mit einer Konstanten $C_1 = C_1(\psi, \widetilde{\vartheta}) > 0$. Wir schreiben $\gamma_{\psi,\delta} = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ mit folgenden Parametrisierungen:

$$\begin{aligned} \gamma_1(r) &:= re^{-i\psi} \quad (r \in (-\infty, \delta]),\\ \gamma_2(\alpha) &:= \delta e^{i\alpha} \quad (\alpha \in [-\psi, \psi]),\\ \gamma_3(r) &:= re^{i\psi} \quad (r \in [\delta, \infty)). \end{aligned}$$

Auf γ_3 verwenden wir (2-11) und $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ und erhalten

$$\Big\| \int_{\gamma_3} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \Big\| \leq M \int_{|z|^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-C_1 r|z|}}{r}\, dr = M \int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-C_1 s}}{s}\, ds,$$

wobei wir $s = r|z|$ substituiert haben. Dieselbe Abschätzung gilt für γ_1, und auf γ_2 verwenden wir

$$\Big\| \int_{\gamma_2} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \Big\| \leq \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(\delta e^{i\alpha} z)|\, \|(\delta e^{i\alpha} - A)^{-1}\|\, |\delta e^{i\alpha}| d\alpha \leq 2M\psi e.$$

Somit sind alle Integrale durch eine von z unabhängige Konstante beschränkt, und es folgt

$$\sup\{\|T(z)\| : z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}\} < \infty.$$

Wir zeigen nun, dass T stark stetig ist. Seien $x \in D(A)$ und $z > 0$. Es gilt $\lambda(\lambda - A)^{-1}x = x + (\lambda - A)^{-1}Ax$, also

$$\begin{aligned} T(z)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda - 0} x d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \\ &= x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda. \end{aligned}$$

Wir schätzen das letzte Integral auf jeder Wegstrecke ab, wobei wir wieder $\delta := \frac{1}{z}$ und die obigen Parametrisierungen wählen.

$$\Big\| \int_{\gamma_3} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \Big\| \leq \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{|\exp(rze^{i\psi})|}{r} \|(re^{i\psi} - A)^{-1} Ax\| dr.$$

Mit (2-11) folgt $|\exp(rze^{i\psi})| \leq e^{-C_1 r}$, und wir erhalten unter Verwendung von $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq M|\lambda|^{-1}$ die Abschätzung

$$\int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{|\exp(rze^{i\psi})|}{r} \|(re^{i\psi} - A)^{-1} Ax\| dr \leq \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-C_1 zr}}{r} \|(re^{i\psi} - A)^{-1} Ax\| dr$$

$$\begin{aligned}
&\le M \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-C_1 zr}}{r^2}\,\|Ax\| dr \\
&= Mz \int_1^{\infty} \frac{e^{-C_1 s}}{s^2}\,ds\,\|Ax\| \to 0 \quad (z \to 0).
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}(\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \to 0 \quad (z \to 0).$$

Für γ_2 gilt

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_{\gamma_2} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}(\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \Big\| &\le \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(z^{-1}e^{i\alpha}z)|\; \|(z^{-1}e^{i\alpha} - A)^{-1} Ax\| d\alpha \\
&\le Mz \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(e^{i\alpha})| d\alpha\; \|Ax\| \to 0 \quad (z \to 0).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $T(z)x - x \to 0$ $(z \to 0)$ für alle $x \in D(A)$. Da $D(A)$ dicht in X ist, ist T stark stetig.

Nach dem bisher Bewiesenen ist T eine C_0-Halbgruppe. Es bleibt noch zu zeigen, dass T von A erzeugt wird. Mit majorisierter Konvergenz erhalten wir für $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}T(z)x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z}\lambda(\lambda - A)^{-1} x d\lambda \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z} x d\lambda}_{=0} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda = T(z)Ax
\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{d}{dz}T(z)x = T(z)Ax \xrightarrow{|z|\to 0} Ax.$$

Sei B der Generator von T. Dann folgt $D(A) \subset D(B)$ und $Ax = Bx$ für alle $x \in D(A)$. Wegen $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$ ist deshalb $A = B$. □

Holomorphe Halbgruppen sind insbesondere differenzierbar. Dies bewirkt bereits, dass die Halbgruppe glättet, d.h. dass $T(\cdot)x$ unendlich oft differenzierbar ist:

2.39 Lemma. *Sei T eine differenzierbare Halbgruppe, d.h. die Abbildung $(0, \infty) \to X$, $t \mapsto T(t)x$ sei differenzierbar für alle $x \in X$. Sei A der Generator von T. Dann gilt $T(t)x \in D(A^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $t \mapsto T(t)x \in C^\infty((0, \infty), X)$ mit*

$$T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x \quad (t > 0,\, x \in X).$$

Es gilt weiter $A^n T(t) \in L(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit Induktion über n.

(i) $n = 1$: Sei $x \in X$. Da $t \mapsto T(t)x$ differenzierbar ist, folgt $T(t)x \in D(A)$ für alle $t > 0$, denn für $y := T(t)x$ existiert

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)y - y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T'(t)x.$$

Hieran sieht man auch $T'(t)x = AT(t)x$. Da A abgeschlossen ist und $T(t) \in L(X)$, ist auch $AT(t)$ abgeschlossen mit Definitionsbereich X. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen gilt $AT(t) \in L(X)$.

(ii) $n \to n+1$: Sei $s > 0$. Dann ist

$$(s,\infty) \to X,\ t \mapsto T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x = T(t-s)A^n T(s)x$$

nach Schritt (i) (mit $n = 1$ und angewendet auf $A^n T(s)x$ anstelle von x) differenzierbar mit Ableitung

$$T^{(n+1)}(t)x = \frac{d}{dt} T(t-s)A^n T(s)x = AT(t-s)A^n T(s)x = A^{n+1}T(t)x.$$

Wegen $A^n T(t) \in L(X)$ nach (i) folgt wie oben $A^{n+1}T(t) = A(A^n T(t)) \in L(X)$. $\square$

2.40 Beispiele. a) Der Laplaceoperator in $L^2(\mathbb{R}^n)$ hat nach Beispiel 2.23 die Resolvente

$$(\lambda - \Delta)^{-1} = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda + |\xi|^2}\right]\mathscr{F}.$$

Für Winkel $\varphi \in (0,\pi)$ können wir abschätzen

$$\frac{1}{|\lambda + |\xi|^2|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\operatorname{Re}\lambda + |\xi|^2\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\lambda\right)^2}} \le \frac{C_\varphi}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Aus dem Satz von Plancherel (Unitarität von $\mathscr{F}$) folgt

$$\|\lambda(\lambda - \Delta)^{-1}\|_{L(X)} \le C_\varphi \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi),$$

also ist Δ der Generator einer beschränkten holomorphen C_0-Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ vom Winkel $\frac{\pi}{2}$.

b) Der Schrödingeroperator $i\Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ erzeugt nach Bemerkung 2.24 eine C_0-Gruppe, insbesondere sind alle $T(t)$ invertierbar mit Inversem $T(-t)$. Daher kann es nicht sein, dass

$$T(t)u \in D(A) \quad (u \in L^2(\mathbb{R}^n), t > 0).$$

Das bedeutet T ist weder differenzierbar noch holomorph. Das kann man sich auch daran klarmachen, dass das Spektrum $\sigma(i\Delta)$ gerade durch Rotation um $i = \exp(i\pi/2)$ aus $\sigma(\Delta) = \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$ hervorgeht. Man findet keine in die linke Halbebene (negativer Realteile) hineinreichende Sektoren, die in $\rho(i\Delta)$ liegen.

3. Lineare symmetrisch-hyperbolische Systeme

3.1 Worum geht's? Nach der allgemeinen Theorie selbstadjungierter elliptischer Operatoren und der Operatortheorie werden wir jetzt verschiedene Klassen von Operatoren betrachten. Wir beginnen mit linearen symmetrisch-hyperbolischen Systemen, welche eine Verallgemeinerung der Wellengleichung darstellen. Während die Wellengleichung selbst noch im Rahmen der Spektraltheorie behandelt werden kann, ist dies bei allgemeinen symmetrisch-hyperbolischen Systemen nicht mehr der Fall, da die Koeffizienten von t und x abhängen. Die Abhängigkeit von t schließt auch einen Halbgruppenzugang aus, so dass hier ein spezieller Ansatz gewählt werden muss. Dieser verwendet, wie meist bei hyperbolischen Gleichungen, eine Energieabschätzung, welche schließlich auch eine globale Lösbarkeit liefern wird.

Die Energieabschätzung verwendet Sobolevräume in einem Raum-Zeit-Kegel, was unter anderem auch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit zeigen wird, ein typisches Merkmal hyperbolischer Gleichungen. Die a priori-Abschätzung erlaubt es auch, mit Hilfe von Approximationen durch glattere Daten die Lösbarkeit zu zeigen, wobei wir letztlich auf den Satz von Cauchy-Kovalevsky zurückgreifen, der die lokale Lösbarkeit bei reell-analytischen Daten besagt.

a) Energieabschätzungen in Kegelgebieten

3.2 Definition. Ein lineares symmetrisch-hyperbolisches System hat die Form

$$\begin{aligned} (Lu)(t,x) &= f(t,x) \quad ((t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n),\\ u(0,x) &= u_0(x) \quad (x\in\mathbb{R}^n), \end{aligned} \tag{3-1}$$

wobei

$$Lu := A^0(t,x)\partial_t u + \sum_{j=1}^n A^j(t,x)\partial_j u + B(t,x)u.$$

Dabei gelte $A^j \in C_b^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{N\times N})$ $(j=0,1,\dots,n)$, $B\in C_b(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{N\times N})$. Die Matrizen $A^0,\dots,A^n$ seien symmetrisch, und A^0 sei gleichmäßig positiv definit, d.h. es gelte

$$a_0 := \inf\Big\{\langle A^0(t,x)v,v\rangle : v\in\mathbb{C}^N, |v|=1,\ (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\Big\} > 0.$$

Hier ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt in $\mathbb{C}^N$. Wir setzen ferner

$$a_1 := \sup\Big\{|\langle A^j(t,x)v,v\rangle| : v\in\mathbb{C}^N, |v|=1,\ (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, j=1,\dots,n\Big\}\,(<\infty).$$

3.3 Beispiel. Ein Beispiel für lineare hyperbolische Systeme sind skalare hyperbolische Gleichungen zweiter Ordnung. Gesucht ist eine Funktion $v = v(t,x)$, die für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ das folgende Anfangswertproblem löst.

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\partial_i\partial_j v + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\partial_i v + c(t,x)\partial_t v + d(t,x)v, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ v(0,x) &= v_0(x), v_t(0,x) = v_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{3-2}$$

Hierbei ist $(a_{ij})_{i,j}$ eine symmetrische, gleichmäßig positiv definite $n\times n$-Matrix. Der kanonische Vertreter einer solchen Gleichung ist die Wellengleichung $\partial_t^2 v - \Delta v = 0$.

Die Gleichung (3-2) kann in die Form (3-1) gebracht werden mittels der folgenden Transformation

$$\begin{aligned} u_1 &:= \partial_1 v, \\ &\vdots \\ u_n &:= \partial_n v, \\ u_{n+1} &:= \partial_t v, \\ u_{n+2} &:= v. \end{aligned}$$

Damit ist $N = n+2$ und

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}(t,x)\partial_t u_j - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t,x)\partial_j u_{n+1} = 0 \quad (i = 1,\dots,n), \\ \partial_t u_{n+1} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\partial_j u_i - \sum_{i=1}^n b_i(t,x)u_i - c(t,x)u_{n+1} - d(t,x)u_{n+2} = 0, \\ \partial_t u_{n+2} - u_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

also $Lu = 0$, wobei L von der Form (3-1) ist und

$$A^0 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_{1j} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{nj} & 0 \\ -a_{1j} & \cdots & -a_{nj} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei sieht man sofort, dass A^0 symmetrisch und positiv definit ist. Weiter erkennt man die Symmetrie der A^j $(j = 1 \dots n)$. Schließlich ist

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & \cdots & -b_n & -c & -d \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} \partial_1 v_0 \\ \vdots \\ \partial_n v_0 \\ v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

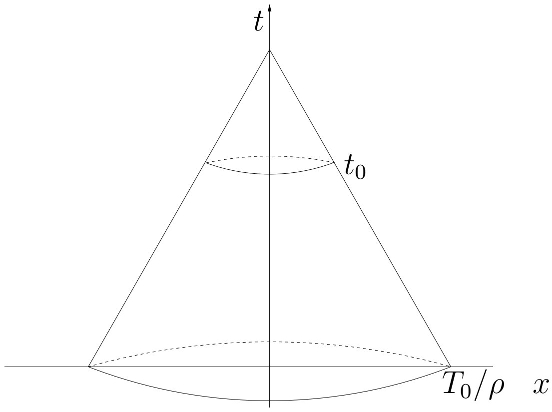

Abbildung 1: Der Kegel K^ρ im Fall $n = 2$

Für unsere weiteren Argumentationen benötigen wir folgende Abschätzung:

3.4 Lemma (Lemma von Gronwall). *Es seien $a > 0$ und $\varphi, h \in C([0,a],\mathbb{R}), h \geq 0$, $g : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend, und es gelte für alle $t \in [0,a]$:*

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_0^t h(r)\varphi(r)\mathrm{d}r$$

Dann folgt

$$\varphi(t) \leq g(t) \exp\Big(\int_0^t h(r)\mathrm{d}r\Big) \quad (t \in [0,a]).$$

Im Folgenden sei ein lineares symmetrisch-hyperbolisches System der Form (3-1) gegeben. Sei weiter $T_0 > 0$ gegeben. Man definiert die Kegelcharakteristik $\rho := \frac{a_0}{na_1}$ und betrachtet für $t_0 \in (0, T_0]$ den abgeschnittenen Kegel $K^\rho(t_0)$, gegeben durch

$$K^\rho(t_0) := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x \in K_t, 0 \leq t \leq t_0\} \tag{3-3}$$

mit

$$K_s := B\left(0, \frac{T_0 - s}{\rho}\right) \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq s \leq T_0$$

(siehe Abbildung 1).

Der Rand $\partial K^\rho(t_0)$ von $K^\rho(t_0)$ besteht nun aus drei Teilen. Dem Mantel M, dem Boden $\{0\} \times K_0$ sowie dem Deckel $\{t_0\} \times K_{t_0}$. Unser Ziel ist es nun, eine Lösung u von (3-1) durch u_0 und f abzuschätzen. In Analogie der Energieabschätzung für die Wellengleichung wollen wir eine Abschätzung für

$$\int_{K^\rho(t_0)} \langle Lu(t,x), u(t,x)\rangle d(t,x)$$

finden. Es wird sich im Folgenden zeigen, dass der Mantel M von $K^\rho(t_0)$ „raumartig“ für L ist. Wir definieren

$$|u(t,\cdot)|_{K_t} := \left(\int_{K_t} \langle A^0(t,x)u(t,x), u(t,x)\rangle_{\mathbb{C}^N} \mathrm{d}x\right)^{1/2} \quad (t \in [0,T_0]).$$

Offenbar gilt mit $\widetilde{a}_0 := \|A^0\|_{C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{N\times N})} > 0$

$$a_0\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(K_t;\mathbb{C}^N)} \le |u(t,\cdot)|^2_{K_t} \le \widetilde{a}_0\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(K_t;\mathbb{C}^N)} \quad (t\in[0,T_0]).$$

3.5 Satz (Energieabschätzung). *Seien $T_0>0$, und sei $t_0\in(0,T_0]$. Der Kegel $K^\rho(t_0)$ sei wie in (3-3) definiert, und es seien $f\in C(K^\rho(t_0),\mathbb{C}^N)$ und $u_0\in C(K_0,\mathbb{C}^N)$ gegeben. Falls $u\in C^1(K^\rho(t_0),\mathbb{C}^N)$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} Lu(t,x) &= f(t,x) \quad ((t,x)\in K^\rho(t_0)),\\ u(0,x) &= u_0(x) \quad (x\in K_0) \end{aligned}$$

ist, so existiert eine Konstante $c>0$, welche nur von a_0 und der Norm

$$\|(A^0,\partial_t A^0,\partial_1 A^1,\dots,\partial_n A^n,B)\|_{C(K^\rho(t_0))}$$

abhängt, so dass

$$|u(t,\cdot)|_{K_t} \le c\Big[|u_0|_{K_0} + \Big(\int_0^{t_0} |f(r,\cdot)|^2_{K_r}\,\mathrm{d}r\Big)^{\frac12}\Big]e^{ct} \quad (t\in[0,t_0]).$$

Beweis. Wir nehmen auf beiden Seiten der Gleichung $Lu=f$ punktweise das Skalarprodukt mit u und betrachten den Realteil. Es gilt

$$\operatorname{Re}\langle Lu,u\rangle_{\mathbb{C}^N} = \operatorname{Re}\Big\langle A^0u_t + \sum_{j=1}^n A^j\partial_j u + Bu, u\Big\rangle_{\mathbb{C}^N} = \operatorname{Re}\langle f,u\rangle_{\mathbb{C}^N}. \tag{3-4}$$

Wir verwenden nun

$$\partial_t\langle A^0u,u\rangle = 2\operatorname{Re}\langle A^0u_t,u\rangle + \langle(\partial_t A^0)u,u\rangle$$

und die analoge Aussage für $\partial_j\langle A^ju,u\rangle$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle Lu,u\rangle = \operatorname{Re}\Big[&\frac12\partial_t\langle A^0u,u\rangle - \frac12\langle(\partial_t A^0)u,u\rangle\\ &+\frac12\sum_{j=1}^n\partial_j\langle A^ju,u\rangle - \frac12\sum_{j=1}^n\langle\big(\partial_j A^j\big)\,u,u\rangle + \langle Bu,u\rangle\Big].\end{aligned}$$

Definiere nun

$$H := \partial_t A^0 + \sum_{j=1}^n \partial_j A^j - 2B.$$

Dann kann (3-4) geschrieben werden als

$$\operatorname{div}_t\begin{pmatrix}\langle A^0u,u\rangle\\ \langle A^1u,u\rangle\\ \vdots\\ \langle A^nu,u\rangle\end{pmatrix} = \operatorname{Re}\Big(\langle Hu,u\rangle + 2\langle f,u\rangle\Big).$$

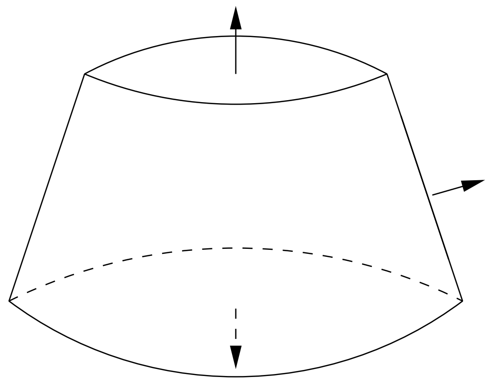

Abbildung 2: Normalenvektoren auf den verschiedenen Bereichen der Oberfläche des Kegelstumpfs

Hier ist $\operatorname{div}_t u := \partial_t u_0 + \partial_1 u_1 + ... + \partial_n u_n$.

Sei nun $t_1 \in (0, t_0]$. Integration über $K^\rho(t_1)$ unter Verwendung des Integralsatzes von Gauss liefert nun

$$\int\limits_{K^\rho(t_1)} \Big(\operatorname{Re}\langle Hu, u\rangle + 2\operatorname{Re}\langle f, u\rangle\Big) d(t,x) = \int\limits_{\partial K^\rho(t_1)} \Big(n_0\langle A^0 u, u\rangle + \sum_{j=1}^n n_j \langle A^j u, u\rangle\Big) dS(t,x).$$

hierbei ist $n = (n_0, n_1, \ldots, n_n)^\top$ die äußere Normale an $\partial K^\rho(t_1)$. Im Einzelnen hat der Normalenvektor auf $\{0\} \times K_0$ die Gestalt $n = (-1, 0, ..., 0)$, auf $\{t_1\} \times K_{t_1}$ hat er die Gestalt $n = (1, 0, ..., 0)$. Der Mantel M kann wie folgt parametrisiert werden

$$M = \{(t,x) : t = \gamma(x) := T_0 - \rho|x|, x \in K_0, 0 \le t \le t_1\}.$$

Es gilt $\nabla\gamma(x) = -\frac{\rho}{|x|}\, x$, und der Normalenvektor auf M hat die Gestalt

$$n(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\gamma(x)|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\nabla\gamma(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\rho}{|x|}\, x \end{pmatrix} \quad ((t,x) \in M).$$

Einsetzen liefert nun

$$\begin{aligned} \int_{K^\rho} \operatorname{Re}\big(\langle Hu, u\rangle + 2\langle f, u\rangle\big) d(t,x) &= \int_{K_{t_1}} \langle A^0(t_1, x) u(t_1, x), u(t_1, x)\rangle dx \\ &\quad - \int_{K_0} \langle A^0(0,x) u_0(x), u_0(x)\rangle dx \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \int_M \Big(\langle A^0 u, u\rangle + \sum_{j=1}^n \frac{\rho x_j}{|x|} \langle A^j u, u\rangle\Big) dS(t,x). \end{aligned} \tag{3-5}$$

Nach Definition von ρ folgt nun

$$\Big| \sum_{j=1}^n \frac{\rho x_j}{|x|} \langle A^j(t,x) u(t,x), u(t,x)\rangle \Big| \le \sum_{j=1}^n \rho a_1 |u(t,x)|^2 = n\rho a_1 |u(t,x)|^2$$

$$= a_0|u(t,x)|^2 \le \langle A^0(t,x)u(t,x), u(t,x)\rangle \quad ((t,x)\in M).$$

Also ist der Integrand im Integral (3-5) punktweise nichtnegativ, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
|u(t_1,\cdot)|^2_{K_{t_1}} &\le |u_0|^2_{K_0} + \int_0^{t_1}\int_{K_r} \operatorname{Re}\big(\langle Hu,u\rangle + 2\langle f,u\rangle\big)dxdr\\
&\le |u_0|^2_{K_0} + \int_0^{t_1}\int_{K_r} \big(|\langle Hu,u\rangle| + 2|\langle f,u\rangle|\big)dxdr\\
&\le |u_0|^2_{K_0} + c_1\int_0^{t_1}\int_{K_r} \big(|u|^2 + 2|f|\cdot|u|\big)dxdr\\
&\le |u_0|^2_{K_0} + c_1\int_0^{t_1}\int_{K_r} \big(|u| + |f|\big)^2 dxdr\\
&\le |u_0|^2_{K_0} + 2c_1\int_0^{t_1}\int_{K_r} \big(|u|^2 + |f|^2\big)dxdr\\
&\le |u_0|^2_{K_0} + c_2\int_0^{t_0} |f(r,\cdot)|^2_{K_r}dr + c_2\int_0^{t_1} |u(r,\cdot)|^2_{K_r}dr
\end{aligned}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 > 0$. Die Behauptung folgt nun aus dem Lemma von Gronwall. □

3.6 Bemerkung. Man sieht an obigem Beweis, dass der entscheidende Schritt darin liegt, dass der Integrand in (3-5) punktweise nichtnegativ ist. Als Funktion von u ist damit das Integral positiv semidefinit. Man nennt die Mantelfläche des Kegelstumpfes $K^\rho(t_0)$ raumartig (für den Differentialoperator L), falls der Integrand punktweise nichtnegativ ist.

Bei Verkleinerung von ρ wird der Integrand größer, wie man an der Darstellung des Normalenvektors sieht. Damit gilt: Für einen Kegelstumpf $K^\delta(t_0)$ mit $\delta < \rho$ ist die Mantelfläche ebenfalls raumartig (der Integrand ist sogar an jeder Stelle positiv). Ändert man die Koeffizienten von L geringfügig, so bleibt der Integrand positiv, d.h. die Mantelfläche raumartig.

Energieabschätzungen gelten auch für höhere Normen. Wir definieren für $s \in \mathbb{N}_0$

$$|u(t)|_{s,K_t} := \Big(\sum_{|\alpha|\le s} |\partial^\alpha u(t)|^2_{K_t}\Big)^{\frac12}$$

3.7 Satz. *Es seien $s\in\mathbb{N}$ und $A^0, A^1, ..., A^n, B \in C_b^s(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{N\times N})$. Weiter sei $f \in C^s(K^\rho(t_0), \mathbb{C}^N)$ und $u_0 \in C^s(K_0, \mathbb{C}^N)$. Falls $u \in C^{s+1}(K^\rho(t_0), \mathbb{C}^N)$ eine Lösung von*

$$Lu(t,x) = f(t,x) \quad ((t,x)\in K^\rho(t_0)),$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad (x \in K_0)$$

ist, dann existiert eine Konstante

$$c = c\left(a_0, \|(A^0, A^1, ..., A^n, B)\|_{C^s(K^\rho(t_0))}\right) > 0$$

so, dass für alle $t \in [0, t_0]$

$$|u(t,\cdot)|_{s,K_t} \leq c\Big[|u_0|_{s,K_0} + \Big(\int_0^{t_0} |f(r,\cdot)|^2_{s,K_r} \mathrm{d}r\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] e^{ct}$$

Beweis. Es erfüllt $V := (u, \partial_1 u, ..., \partial_n u)$ die Differentialgleichung

$$\mathcal{A}^0 V_t + \sum_{j=1}^n \mathcal{A}^j \partial_j V + \mathcal{B}V = \mathcal{F} \quad V(t=0) = V_0$$

mit

$$\mathcal{A}^0 = \begin{pmatrix} A^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A^0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^j = \begin{pmatrix} A_1^j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n^j \end{pmatrix}$$

weiter ist $\mathcal{F}$ eine von $f, \partial_1 f, ..., \partial_n f$ abhängige Funktion und $V_0 = (u_0, \partial_1 u_0, ..., \partial_n u_0)$. Anwendung des vorigen Satzes liefert eine Abschätzung für V und somit die für u für den Fall $s = 1$. Bei $s > 1$ geht man analog vor. □

Die a priori Abschätzungen in den vorigen Sätzen implizieren die für hyperbolische Gleichungen typische sog. endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (Abb. 3). Für $f \equiv 0$ hängt $u(t)$ in K_t im Wesentlichen nur von den Werten von u_0 in K_0 ab. Hat u_0 kompakten Träger, so auch $u(t)$ für jedes $t \geq 0$. Im Gegensatz dazu hatten wir bei parabolischen Gleichungen unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

b) Sobolevraumtheorie: Ein globaler Existenzsatz

Wir betrachten wieder lineare symmetrisch-hyperbolische Systeme von der Form (3-1) und wollen nun die Existenz der Lösung in geeigneten Sobolevräumen beweisen.

3.8 Lemma. *Sei $T > 0$. Die Koeffizienten des linearen symmetrisch-hyperbolischen Systems (3-1) seien reell-analytisch im Bereich $(t,x) \in [0,T] \times B(0,b)$ mit $b > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ (welches nicht von μ und P abhängt) so, dass*

$$\begin{aligned} Lu(t,x) &= 0 \qquad ((t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \\ u(\mu, x) &= P(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned} \tag{3-6}$$

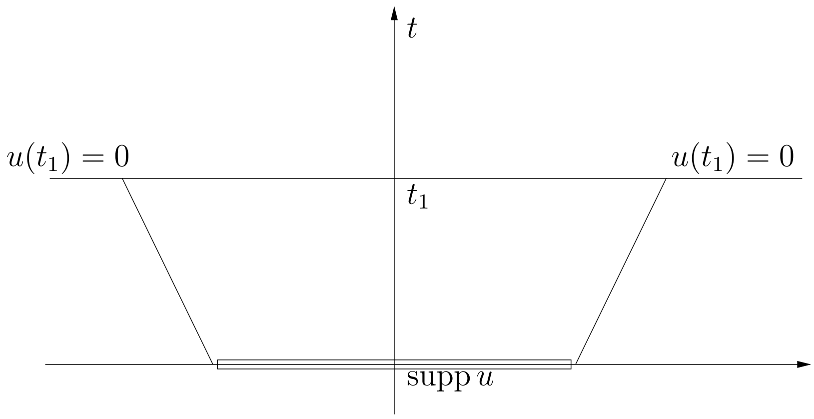

Abbildung 3: Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit

für jedes $\mu \in [0,T]$ *und jedes Polynom* P *eine reell-analytische Lösung* $u(t,x)$ *für*

$$(t,x) \in [\mu-\delta, \mu+\delta] \times B(0,b) \tag{3-7}$$

besitzt.

Beweis. Da A^0 als positiv-definite Matrix invertierbar ist, können wir (3-6) umschreiben in die Form

$$\begin{aligned} \partial_t v &= -\sum_{j=1}^n (A^0)^{-1}(t,x)A^j(t,x)\partial_j v \\ &\quad + (A^0)^{-1}(t,x)B(t,x)v - (A^0)^{-1}(t,x)(LP)(t,x) \quad ((t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \\ v(\mu,x) &= 0 \quad (x\in\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

wobei $v := u - P$ gesetzt wurde. Der Satz von Cauchy-Kovalevsky liefert nun die Existenz einer reell-analytischen Lösung in einem Bereich der Form (3-7). Dabei hängt δ nur von den Koeffizienten der Gleichung, nicht aber von μ ab. Ersetzt man P durch P/c mit einer positiven hinreichend großen Konstanten c, so erhält man die Konvergenz in einem Bereich, der nicht von P abhängt. Falls aber $\widetilde{u}$ die Lösung des Systems (3-6) mit P/c statt P ist, so ist $u := c\widetilde{u}$ die Lösung des ursprünglichen Systems. Also hängt δ auch nicht von der Wahl von P ab. □

3.9 Satz (Lösbarkeit hyperbolischer Gleichungen)**.** *Es sei* $s \in \mathbb{N}$ *mit* $s > \frac{n}{2} + 1$*. Weiter seien* $A^0, \dots A^n, B \in C_b^{s+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{N\times N})$ *und* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$*. Dann existiert eine eindeutige Lösung*

$$u \in C([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)) \cap C^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))$$

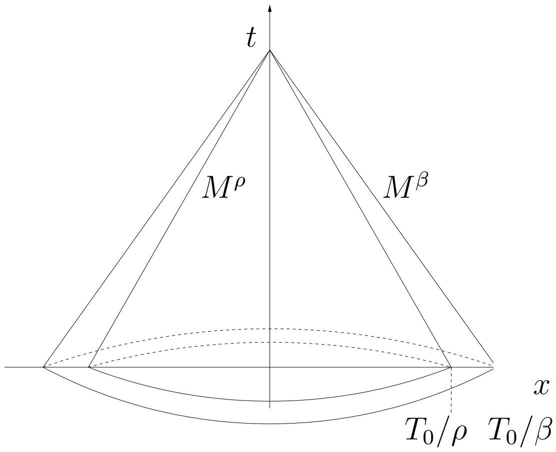

Abbildung 4: Der Kegel K^β im Fall $n = 2$.

des linearen symmetrisch-hyperbolischen Systems

$$\begin{aligned} Lu(t,x) &= 0 && ((t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \\ u(0,x) &= u_0(x) && (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Ferner gilt $u \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$.

Beweisskizze. Es sei $\rho = \frac{a_0}{na_1}$ die Kegelcharakteristik und sei $0 \leq \beta \leq \rho$ sowie M^β die Manteloberfläche von $K^\beta(T_0)$ (Abb. 4). Dann erfüllen alle Differentialoperatoren $\widetilde{L}$ mit Koeffizienten $\widetilde{A}^0, ..., \widetilde{A}^n$, $\widetilde{B}$, welche $A^0, A^1, ..., A^n$, B hinreichend gut approximieren, die Voraussetzungen der Energieabschätzung.

(i) Zunächst seien alle Koeffizienten von L reell-analytisch. Dann werde u_0 in K_0 durch eine Folge von Polynomen $(u_0^m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $H^s(K_0)$ approximiert. Nach Lemma 7.9 existiert eine lokale Lösung u^m zu $Lu^m = 0$, $u^m(t=0) = u_0^m$ in einem Kegelstumpf $K^\beta(\delta)$ für ein δ mit $0 < \delta \leq T_0$. Dabei kann δ unabhängig von m gewählt werden. Die zweite Energieabschätzung (Satz 7.7) liefert für ein nur von T_0 abhängiges $C > 0$:

$$\|u^k(t) - u^m(t)\|_{H^s(K_t;\mathbb{C}^N)} \leq C\|u_0^k - u_0^m\|_{H^s(K_0;\mathbb{C}^N)}.$$

Somit konvergiert $(u^k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ in $H^s(K_t;\mathbb{C}^N)$ für $0 \leq t \leq \delta$.

Für $t \in [0,\delta]$ definiert nun $u(t) := \lim_{m\to\infty} u^m(t)$ ein $u \in C^0([0,\delta], H^s(K_\delta;\mathbb{C}^N)) \cap C^0([0,\delta] \times K_\delta, \mathbb{C}^N)$. Letzteres liefert der Sobolevsche Einbettungssatz da $s > \frac{n}{2}$. Weiter gilt in $H^{s-1}(K_\delta;\mathbb{C}^N)$

$$u^m(t) = u_0^m + \int_0^t \partial_t u^m(r)\mathrm{d}r, \quad 0 \leq t \leq \delta.$$

Wegen

$$\partial_t u^m(t) = \widetilde{A}_0^{-1}\left(-\sum_{j=1}^n \widetilde{A}^j \partial_j u^m(t) - \widetilde{B}u^m(t)\right)$$

erkennen wir, dass $(\partial_t u^m(t))_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen ein $v(t) \in H^{s-1}(K_\delta;\mathbb{C}^N)$ konvergiert. Damit ist

$$v \in C^0([0,\delta], H^{s-1}(K_\delta;\mathbb{C}^N))$$

Es ist

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(r)dr$$

was

$$u \in C^0([0,\delta], H^s(K_\delta;\mathbb{C}^N)) \cap C^1([0,\delta], H^{s-1}(K_\delta;\mathbb{C}^N))$$

und damit

$$u \in C^1([0,\delta] \times K_\delta;\mathbb{C}^N)$$

impliziert. Sukzessive erhalten wir nun eine Lösung in $K^\beta(T_0)$.

(ii) Es seien $A^0, A^1, ..., A^n, B \in C_b^{s+1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{N\times N})$ und $u_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$. Wir approximieren $A^0, A^1, ..., A^n, B$ gleichmäßig durch analytische Funktionen

$$(A_k^0)_{k\in\mathbb{N}}, (A_k^1)_{k\in\mathbb{N}}, ..., (A_k^n)_{k\in\mathbb{N}}, (B_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

unter Berücksichtigung aller Ableitungen so, dass L_k noch die Voraussetzung der Energieabschätzung erfüllt, wobei

$$L_k := A_k^0\partial_t + \sum_{j=1}^n A_k^j \partial_j + B_k.$$

Unter Verwendung von (i) können wir das Problem

$$L_k u^k = 0, \quad u^k(t=0) = u_0$$

lösen. Wir erhalten

$$u^k \in C^0([0,T], H^{s+1}(K_T;\mathbb{C}^N)) \cap C^1([0,T], H^s(K_T;\mathbb{C}^N))$$

wobei $0 < T \le t_0 < T_0$ ist. Unsere Energieabschätzung liefert nun

$$\|u^k(t)\|_{H^{s+1}(K_t;\mathbb{C}^N)} \le c\|u_0\|_{H^{s+1}(K_0;\mathbb{C}^N)} \quad (0 \le t \le T_0),$$

wobei c nur von T_0 abhängt. Die Differenz $u^k - u^j$ erfüllt

$$\begin{aligned} &L_k(u^k - u^j) = -L_k u^j = L_j u^j - L_k u^j = (L_j - L_k)u^j =: f_{kj}, \\ &u^k - u^j|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Wieder liefert unsere Energieabschätzung

$$\|u^k(t) - u^j(t)\|^2_{H^s(K_t;\mathbb{C}^N)} \;\; \le \;\; c\int_0^t \|f_{kj}\|^2_{H^s(K_r;\mathbb{C}^N)} dr$$

$$\leq \quad c\varepsilon_{kj} \int_0^t \|u^j(r)\|^2_{H^{s+1}(K_r;\mathbb{C}^N)} dr$$

wobei c nur von T_0 abhängig ist und $0 \leq \varepsilon_{kj} \to 0$ für $k, j \to \infty$ gilt. Wir folgern, dass $(u^k(t))_k$ in $H^s(K_t;\mathbb{C}^N)$ gegen ein $u(t) \in H^s(K_t;\mathbb{C}^N)$ konvergiert. Mit den selben Argumenten wie in Schritt 1 erhalten wir

$$u \in C^0([0,t], H^s(K_t;\mathbb{C}^N)) \cap C^1([0,t], H^{s-1}(K_t;\mathbb{C}^N)) \quad (0 < t \leq T_0), \tag{3-8}$$

und es existiert ein nur von T_0 abhängiges $c > 0$ mit

$$\|u(t)\|_{H^s(K_t;\mathbb{C}^N)} \leq c\|u_0\|_{H^s(K_0;\mathbb{C}^N)} \leq c\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}.$$

Dies zeigt auch die Eindeutigkeit der Lösung.

(iii) Es seien $A^0, A^1, ..., A^n, B \in C_b^{s+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{N\times N})$ und $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$. Wir approximieren u_0 in $H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$ mit einer Folge $(u_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^{s+1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$. Entsprechend dem Vorgehen in (ii) ergibt sich die Existenz von Lösungen u^k von $Lu^k = 0$, $u^k(t=0) = u_0^k$, $k \in \mathbb{N}$, in $K^\beta(T_0)$. Diese Lösungen erfüllen

$$\sup_{0\leq t\leq t_0} \|u^k(t) - u^j(t)\|_{H^s(K_t;\mathbb{C}^N)} \leq c\|u_0^k - u_0^j\|_{H^s(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}$$

Dies zeigt die Existenz einer Lösung mit der Regularität von (3-8).

(iv) Für jeden verschobenen Kegel der $K^\beta(T_0)$ können wir eine lokale Lösung finden. Mithilfe der Eindeutigkeitseigenschaft erhalten wir eine globale Lösung

$$u \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N).$$

Es verbleibt zu zeigen, dass auch

$$u \in C^0([0,\infty), H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)) \cap C^1([0,\infty), H^{s-1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))$$

gilt. Es sei $\varepsilon > 0$, $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ mit $t_1, t_2 \leq T$ für ein $T \geq 0$. Dann folgt für $R > 0$:

$$\begin{aligned}\|u(t_1) - u(t_2)\|_{H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)} \leq & \|u(t_1) - u(t_2)\|_{H^s(B(0,R;\mathbb{C}^N))} \\ & + \|u(t_1) - u(t_2)\|_{H^s(\mathbb{R}^n\setminus B(0,R);\mathbb{C}^N)} =: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Es gilt für $j = 1, 2$

$$\|u(t_j)\|_{H^s(\mathbb{R}^n\setminus B(0,R);\mathbb{C}^N)} \leq c\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n\setminus B(0,R_1);\mathbb{C}^N)},$$

wobei c nur von T abhängt und $R_1 = R_1(\beta, R) < R$ mit $R_1 \to \infty$ für $R \to \infty$ gilt. Für große R ist nun $I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ unabhängig von t_1 und t_2. Für festes R ist $I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ sofern $|t_1 - t_2|$ hinreichend klein ist. □

4. Elastizitätsgleichungen und die Plattengleichung

4.1 Worum geht's? Nach den hyperbolischen Systemen, bei welchen (aufgrund der allgemeinen Struktur der Koeffizienten) weder die Theorie selbstadjungierter Operatoren noch die Halbgruppentheorie anwendbar war, betrachten wir nun zwei Klassen von Gleichungen, welche zu einem selbstadjungierten Operator führen: Die Elastizitätsgleichungen und die Plattengleichung. Wir gehen dabei nur kurz auf Aspekte der Modellierung ein und definieren dann einen Hilbertraum, in welchem die zugeordneten Operatoren selbstadjungiert werden. Wie üblich, hat man bei beschränkten Gebieten ein diskretes Spektrum.

a) Elastizitätsgleichungen: Modellierung und Vektorschreibweise

Elastizitätsgleichungen beschreiben das Verhalten elastischer Körper. Wir beschränken uns hier nur auf den physikalisch interessanten dreidimensionalen Fall. Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Dann betrachten wir zu $x \in G$ und $t \geq 0$ den Positionsvektor $X(t,x)$ des Teilchens, welches zur Zeit $t = 0$ an der Stelle x ist (d.h. es gilt nach Definition $X(0,x) = x$). Sei $u(t,x) := X(t,x) - x \in \mathbb{R}^3$ der Verschiebungsvektor (Auslenkung).

In der linearen Elastizitätstheorie sind unter anderem die folgenden Größen relevant:

(E1) Die Massendichtematrix $m = (m_{ij})_{i,j=1,2,3} \in L^\infty(G; \mathbb{R}^{3\times 3})$ beschreibt die Massenverteilung im Körper. Wir nehmen an, dass $m(x)$ für fast alle $x \in G$ eine symmetrische Matrix ist, und dass m gleichmäßig positiv definit ist, d.h. es existiert ein $m_1 > 0$ so, dass

$$\sum_{i,j=1}^{3} m_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_1|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^3)$$

für fast alle $x \in G$ gilt.

(E2) Der Spannungstensor $\overline{\boldsymbol{\tau}} = (\tau_{ij})_{i,j=1,2,3} \colon (0,\infty) \times G \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschreibt die mechanischen Spannungen im Körper, d.h. $\boldsymbol{\tau}(t,x)$ beschreibt die Spannungen an der Stelle x zur Zeit t und ist ebenfalls symmetrisch. Eine andere übliche Schreibweise ist $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$. Es handelt sich um einen Tensor zweiter Ordnung, der durch eine Matrix beschrieben werden kann. Die durch den Spannungstensor induzierte Kraft ist gegeben durch

$$\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{\tau}} := \Big(\sum_{j=1}^{3} \partial_j \tau_{ij} \Big)_{i=1,2,3}.$$

(E3) Der Dehnungstensor (Verzerrungstensor) $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1,2,3} : (0,\infty) \times G \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist im linearisierten Modell gegeben durch

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} := \tfrac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^\top) := \tfrac{1}{2}\big(\partial_i u_j + \partial_j u_i\big)_{i,j=1,2,3}.$$

(E4) Der Elastizitätstensor $\overline{\boldsymbol{C}} = (C_{ijk\ell})_{i,j,k,\ell=1,2,3} \in L^\infty(G;\mathbb{R}^{3\times3\times3\times3})$ ist ein Tensor vierter Stufe und tritt im Hookeschen Gesetz auf, welches

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\boldsymbol{C}}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

besagt. In Koordinaten geschrieben, lautet das Hookesche Gesetz

$$\tau_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{3} C_{ijk\ell}\varepsilon_{k\ell} \quad (i,j=1,2,3).$$

Aufgrund der Symmetrien von $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ und $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ kann man o.E. annehmen, dass

$$C_{ijk\ell} = C_{k\ell ij} = C_{jik\ell} \quad (i,j,k,\ell = 1,2,3).$$

Wir setzen weiter im Folgenden voraus, dass $\overline{\boldsymbol{C}}$ gleichmäßig positiv definit ist, d.h. dass ein $c_1 > 0$ existiert mit

$$\sum_{i,j,k,\ell=1}^{3} C_{ijk\ell}(x)\xi_{ij}\xi_{k\ell} \geq c_1 \sum_{i,j=1}^{3} |\xi_{ij}|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^{3\times 3})$$

für fast alle $x \in G$.

Die Elastizitätsgleichungen selbst ergeben sich nun aus dem zweiten Newtonschen Gesetz (die Kraft ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung) und lauten

$$m(x)\partial_t^2 u(t,x) - \operatorname{div}\overline{\boldsymbol{\tau}}(t,x) = F(t,x) \quad ((t,x) \in (0,\infty)\times G), \tag{4-1}$$

wobei $F : (0,\infty)\times G \to \mathbb{R}^3$ eine gegebene äußere Kraft sei. Durch die Symmetrien in (4-1) ergibt sich in dieser Gleichung eine gewisse Redundanz, welche in der folgenden Schreibweise vermieden wird (nach Sommerfeld, auch bekannt als Voigt-Notation).

4.2 Definition. a) Den obigen Matrizen $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ und $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ mit jeweils 6 Freiheitsgraden wird ein Vektor $\boldsymbol{\tau}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ in folgender Weise zugeordnet:

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \text{(symm.)} & & \tau_{33} \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\tau} := \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \text{(symm.)} & & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

Man beachte den Faktor 2 bei $\boldsymbol{\varepsilon}$. Die Komponenten werden wie üblich mit $\boldsymbol{\tau} =: (\tau_1, \dots, \tau_6)^\top$ und $\boldsymbol{\varepsilon} =: (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6)^\top$ bezeichnet. Man verwendet somit die Zuordnung der Indizes

$$\pi\colon (1,1) \mapsto 1, (2,2) \mapsto 2, (3,3) \mapsto 3, (2,3) \mapsto 4, (3,1) \mapsto 5, (1,2) \mapsto 6.$$

b) Dem Tensor $\overline{\boldsymbol{C}}$ wird die Matrix $S = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,6}$ zugeordnet durch $s_{\pi(i,j),\pi(k,\ell)} := C_{ijk\ell}$. Ausgeschrieben bedeutet dies

$$S := \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Symmetrien von $\overline{\boldsymbol{C}}$ ist auch die Matrix S symmetrisch.

c) Der verallgemeinerte Gradient $\mathcal{D}$ wird definiert durch

$$\mathcal{D} := \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3 Lemma. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

a) Es gilt das Hookesche Gesetz $\overline{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\boldsymbol{C}}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ *genau dann, wenn* $\boldsymbol{\tau} = S\boldsymbol{\varepsilon}$. *Die Matrix* S *ist gleichmäßig positiv definit, d.h. es existiert ein* $s_1 > 0$ *mit* $\sum_{i,j=1}^3 s_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_1|\xi|^2$ $(\xi \in \mathbb{R}^3)$ *für fast alle* $x \in G$.

b) Es gilt $\mathcal{D}u = \boldsymbol{\varepsilon}$ *und* $\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{\tau}} = \mathcal{D}^\top \boldsymbol{\tau}$.

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

Mit diesen Bezeichnungen erhält man

$$\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{\tau}} = \mathcal{D}^\top \boldsymbol{\tau} = \mathcal{D}^\top S \boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}^\top S \mathcal{D} u,$$

also lauten die Elastizitätsgleichungen

$$m(x)\partial_t^2 u(t,x) - \mathcal{D}^\top S(x)\mathcal{D}u(t,x) = F(t,x) \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times G) \tag{4-2}$$

mit geeigneten Rand- und Anfangsbedingungen.

4.4 Bemerkung. Die Matrix S besitzt als symmetrische 6×6-Matrix 21 unabhängige Koeffizienten, welche durch die Materialeigenschaften bestimmt sind. Häufig treten zusätzliche Symmetrien auf, z.B. anisotrope Medien mit

(i) kubischer Symmetrie (3 unabhängige Koeffizienten),

(ii) rhombischer Symmetrie (9 unabhängige Koeffizienten),

(iii) monoklinische Symmetrie (13 unabhängige Koeffizienten)

Im Fall eines isotropen Mediums hat S die Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} 2\mu+\kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ & 2\mu+\kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu+\kappa & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & \text{(symm.)} & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $\mu, \kappa \in \mathbb{R}$ die sogenannten Lamé-Konstanten und erfüllen $\mu > 0$, $2\mu+3\kappa > 0$.

Verwendet man die Rotation

$$\operatorname{rot} u := \nabla \times u := (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)^\top,$$

so erhält man für isotrope Medien

$$\mathcal{D}^\top S \mathcal{D} u = -\mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) + (2\mu+\kappa)\nabla \operatorname{div} u = \mu \Delta u + (\mu+\kappa)\nabla\nabla^\top u.$$

Dabei wurde die formale Regenregel

$$\Delta = \nabla \operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} = \nabla\nabla^\top - \nabla \times \nabla \times,$$

verwendet, genauer

$$\begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1^2 & \partial_1\partial_2 & \partial_1\partial_3 \\ \partial_1\partial_2 & \partial_2^2 & \partial_2\partial_3 \\ \partial_1\partial_3 & \partial_2\partial_3 & \partial_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right).$$

b) Hilbertraumformulierung für die Elastizitätsgleichungen

Wir werden nun die Elastizitätsgleichungen in einem geeigneten Hilbertraum formulieren. Dabei betrachten wir simultan zwei Fälle: $G = \mathbb{R}^3$ (Ganzraumfall) oder G ein beschränktes Gebiet mit Dirichlet-Randbedingungen. Wir betrachten also unter den oben formulierten Voraussetzungen an die Koeffizienten

$$\begin{aligned} m(x)u_{tt}(t,x) - \mathcal{D}^\top S(x)\mathcal{D}u(t,x) &= 0 \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times G), \\ u(t,x) &= 0 \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times \partial G), \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad (x \in G), \\ \partial_t u(x,0) &= u_1(x) \quad (x \in G). \end{aligned} \tag{4-3}$$

Man beachte, dass im Ganzraumfall die zweite Zeile eine leere Bedingung ist. Wir wählen als Hilbertraum $H := L^2(G;\mathbb{C}^3)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_H := \langle u, mv\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} \quad (u, v \in H).$$

Da $m \in L^\infty(G;\mathbb{R}^{3\times 3})$ gleichmäßig positiv definit ist, ist $\|\cdot\|_H$ äquivalent zum Standard-Skalarprodukt $\|\cdot\|_{L^2(G;\mathbb{C}^3)}$.

Wir wenden die Ergebnisse des ersten Kapitels an, wobei wir das Gelfand-Tripel $V \subset H \subset V'$ betrachten mit $V := H_0^1(G;\mathbb{C}^3)$. Man beachte, dass $H_0^1(\mathbb{R}^3) = H^1(\mathbb{R}^3)$ gilt.

Der Operator $\mathcal{A} \in L(V, V')$ ist definiert durch

$$(\mathcal{A}u)(\varphi) := -\langle m^{-1}\mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u, \varphi\rangle_H = -\langle m^{-1}\mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u, m\varphi\rangle_{L^2(G,\mathbb{C}^3)} = \langle S\mathcal{D}u, \mathcal{D}\varphi\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}.$$

Wie in Kapitel 1 ist damit die Bilinearform $B\colon H_0^1(G;\mathbb{C}^3) \times H_0^1(G;\mathbb{C}^3) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$B(u,v) := (\mathcal{A}u)(v) \quad (u, v \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3)).$$

Wir zeigen zunächst eine Abschätzung für den verallgemeinerten Gradienten.

4.5 Lemma (Erste Kornsche Ungleichung)**.** *Sei $G = \mathbb{R}^3$ oder G ein beschränktes Gebiet. Dann gilt für alle $\varphi \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3)$ die Abschätzung*

$$\|\mathcal{D}\varphi\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} \geq \tfrac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})},$$

wobei $\nabla\varphi := (\partial_i\varphi_j)_{i,j=1,2,3}$ und als Norm in $\mathbb{C}^{3\times 3}$ die Hilbert-Schmidt-Norm

$$\big\|(a_{ij})_{i,j=1,2,3}\big\| := \Big(\sum_{i,j=1}^3 |a_{ij}|^2\Big)^{1/2}$$

verwendet wird.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(G;\mathbb{C}^3)$. Wir verwenden die Definition von $\mathcal{D}$ und multiplizieren die Terme $\|\partial_i\varphi_j + \partial_j\varphi_i\|^2_{L^2(G)}$ aus und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
4\|\mathcal{D}\varphi\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} &= \sum_{i,j=1}^3 \|\partial_i\varphi_j + \partial_j\varphi_i\|^2_{L^2(G)} \\
&= \sum_{i,j=1}^3 \Big(\|\partial_i\varphi_j\|^2_{L^2(G)} + \|\partial_j\varphi_i\|^2_{L^2(G)} + 2\operatorname{Re}\langle \partial_i\varphi_j, \partial_j\varphi_i\rangle_{L^2(G)}\Big) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^3 \|\partial_i\varphi_j\|^2_{L^2(G)} + 2\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^3 \langle \partial_i\varphi_i, \partial_j\varphi_j\rangle_{L^2(G)} \\
&= 2\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})} + 2\Big\|\sum_{i=1}^3 \partial_i\varphi_i\Big\|^2_{L^2(G)} \geq 2\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})}.
\end{aligned}$$

Da $C_0^\infty(G)$ dicht in $H_0^1(G)$ ist, folgt die Behauptung. □

4.6 Lemma. *Die oben definierte Bilinearform B ist symmetrisch und koerzitiv mit $B(u,u) \geq 0$ $(u \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3))$. Falls G ein beschränktes Gebiet ist, so ist B streng koerzitiv.*

Beweis. Wegen $B(u,v) = \langle S\mathcal{D}u, \mathcal{D}v\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)}$ und der Symmetrie von S ist B symmetrisch. Da S positiv definit ist (Lemma 4.3), gilt mit der ersten Kornschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
B(u,u) &= \langle S\mathcal{D}u, \mathcal{D}u\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} \geq s_1\|\mathcal{D}u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} \\
&\geq \tfrac{s_1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})} \geq \tfrac{s_1}{2}\|u\|^2_{H^1(G;\mathbb{C}^3)} - \tfrac{s_1}{2}\|u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^3)}.
\end{aligned}$$

Also ist B koerzitiv. Falls G ein beschränktes Gebiet ist, so verwenden wir anstelle der letzten Abschätzung die erste Poincaré-Ungleichung und erhalten

$$B(u,u) \geq \tfrac{s_1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})} \geq c_p\|u\|^2_{H^1(G;\mathbb{C}^3)}$$

mit einer vom Gebiet abhängigen Konstante $c_p > 0$. Also ist B in diesem Fall streng koerzitiv. In beiden Fällen haben wir $B(u,u) \geq 0$ $(u \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3))$ erhalten. □

Wir betrachten nun die $L^2(G;\mathbb{C}^3)$-Realisierung A, welche gegeben ist durch $D(A) := \{u \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3) : \mathcal{A}u \in L^2(G;\mathbb{C}^3)\} = \{u \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3) : \mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u \in L^2(G;\mathbb{C}^3)\}$ und $Au := \mathcal{A}u = -m^{-1}\mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u$ $(u \in D(A))$. Die Elastizitätsgleichungen schreiben sich damit als

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 u(t) + Au(t) &= 0 \quad (t > 0), \\
u(0) &= u_0, \\
\partial_t u(0) &= u_1.
\end{aligned} \tag{4-4}$$

4.7 Satz. *Der oben definierte Operator A ist selbstadjungiert mit $\sigma(A) \subset [0,\infty)$. Falls G beschränkt ist, besitzt A diskretes Spektrum, und es existiert ein $c > 0$ mit $\sigma(A) \subset [c,\infty)$.*

Für jedes $u_0 \in L^2(G;\mathbb{C}^3)$ und $u_1 \in D(\sqrt{A})$ ist durch

$$u(t) := \cos(\sqrt{A}t)u_0 + \Big(\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\Big)u_1 \quad (t > 0)$$

eine Lösung

$$u \in C^2([0,\infty), L^2(G;\mathbb{C}^3)) \cap C^1([0,\infty), D(\sqrt{A})) \cap C([0,\infty), D(A))$$

gegeben.

Beweis. Das folgt direkt aus den Ergebnissen des ersten Kapitels, speziell Satz 1.27. Für beschränkte Gebiete folgt die Aussage wieder aus dem Satz von Rellich-Kondrachov und aus der Poincaré-Ungleichung. □

4.8 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und hinreichend glatt (z.B. ein C^1-Gebiet). Dann definiert man die (verallgemeinerten) Neumann-Randbedingungen für die Elastizitätsgleichungen durch $\mathcal{N}^\top S\mathcal{D}u|_{\partial G} = 0$ mit

$$\mathcal{N} := \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 \\ 0 & \nu_3 & \nu_2 \\ \nu_3 & 0 & \nu_1 \\ \nu_2 & \nu_1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^\top$ der äußere Normalenvektor ist. Der zugehörige Operator $A_N : H \supset D(A_N) \to H$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} D(A_N) := \big\{ u \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3) : \mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u \in H, \\ \langle \mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u, v\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} = -\langle S\mathcal{D}u, \mathcal{D}v\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} \; (v \in H^1(G;\mathbb{C}^3))\big\}, \\ A_N u := -m^{-1}\mathcal{D}^\top S\mathcal{D}u \quad (u \in D(A_N)). \end{aligned}$$

Dies verallgemeinert die Neumann-Randbedingungen auch für nichtglatte Gebiete.

4.9 Bemerkung. Wie bei Dirichlet-Randbedingungen kann man zeigen, dass auch A_N selbstadjungiert ist, und bei beschränktem Gebiet ist das Spektrum von A_N diskret und eine Teilmenge von $[0,\infty)$. Zum Beweis verwendet man die zweite Kornsche Ungleichung, welche komplizierter zu beweisen ist. Im Gegensatz zum Fall der Dirichlet-Randbedingungen ist hier allerdings 0 ein Eigenwert von A_N, da die konstante Funktion im Kern liegt.

Im Ganzraumfall lassen sich die Elastizitätsgleichungen auf die Wellengleichung zuückführen. Dafür verwendet man folgende Zerlegung von $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$:

4.10 Lemma (Helmholtz-Zerlegung). *Der Raum $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ lässt sich orthogonal zerlegen in*

$$L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) = L^2_\sigma(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) \oplus \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^3)}$$

mit $L^2_\sigma(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) : \operatorname{div} u = 0\}$ und $\nabla H^1(\mathbb{R}^3) := \{\nabla\varphi : \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)\}$. Dabei ist $\operatorname{div} u$ distributionell zu verstehen. Es gilt $\operatorname{rot} u = 0$ für alle $u \in \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^3)}$.

Beweis. Der Projektionssatz von Riesz liefert die orthogonale Zerlegung $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) = D_0 \oplus \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^3)}$ mit

$$\begin{aligned} D_0 &= \big(\nabla H^1(\mathbb{R}^3)\big)^\perp \\ &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) : \langle u, \nabla\varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)} = 0 \quad (\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3))\}. \end{aligned}$$

Da $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ dicht ist und $\varphi \mapsto \langle u, \nabla\varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)}$, $H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}$, stetig ist für jedes $u \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, ist diese Abbildung schon durch die Werte auf $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$ eindeutig festgelegt. Damit gilt

$$\begin{aligned} D_0 &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) : \langle u, \nabla\varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)} = 0 \quad (\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3))\} \\ &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) : (\operatorname{div} u)(\varphi) = 0 \quad (\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3))\} \\ &= L^2_\sigma(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3). \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass $\operatorname{div} u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ definiert ist durch

$$(\operatorname{div} u)(\varphi) = \sum_{i=1}^3 (\partial_i u_i)(\varphi) := -\sum_{i=1}^3 u_i(\partial_i\varphi) = \langle u, \nabla\varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)} \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3)).$$

Einsetzen liefert schließlich $\operatorname{rot} u = \operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0$ für $u = \nabla\varphi$ mit $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, aufgrund der Stetigkeit gilt dies auch für den Abschluss $\overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^3)}$. □

Die Helmholtz-Zerlegung existiert auch für Gebiete bei geeigneten Randbedingungen. Wir betrachten nun die Elastizitätsgleichungen im isotropen Fall

$$\partial_t^2 u + \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) - \nu\nabla \operatorname{div} u = 0 \tag{4-5}$$

mit $\mu > 0$ und $\nu := 2\mu + 3\kappa > 0$. Mit der Helmholtz-Zerlegung $u = u_\sigma + u_p$ mit $u_\sigma \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ und $u_p \in \overline{\nabla H^1(\mathbb{R}^3)}$ folgt $\operatorname{div} u_\sigma = 0$ sowie $\operatorname{rot} u_p = 0$, und damit liefert die Projektion von (4-5) auf die beiden Komponenten

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_\sigma + \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u_\sigma) &= 0, \\ \partial_t^2 u_p - \nu\nabla \operatorname{div} u_p &= 0. \end{aligned} \tag{4-6}$$

Wegen $\Delta u = \nabla \operatorname{div} u - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u)$ $(u \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3))$ ist (4-6) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_\sigma - \mu \Delta u_\sigma &= 0, \\ \partial_t^2 u_p - \nu \Delta u_p &= 0. \end{aligned} \tag{4-7}$$

Damit ist (4-5) äquivalent zu den beiden nicht gekoppelten Wellengleichungen. Insbesondere besitzen Elasizitätsgleichungen zwei verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten in den beiden Komponenten und damit insgesamt zwar endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, aber kein scharfes Einsetzen oder Aussetzen von Signalen.

c) Die Plattengleichung

Bei einer schwingenden Platte wird die potentielle Energie proportional zur Krümmung der Platte angesetzt. Wir betrachten die Gleichung wieder im $\mathbb{R}^3$, um die Analogie zur Elastistizitätsgleichung zu zeigen (obwohl diesmal $G \subset \mathbb{R}^2$ physikalisch am relevantesten ist). Man erhält ähnlich wie bei den Elastizitätsgleichungen folgendes Anfangswertproblem in $G \subset \mathbb{R}^3$, wobei die gesuchte Funktion $u\colon (0,\infty) \times G \to \mathbb{C}$ jetzt skalar ist.

$$\begin{aligned} m(x) u_{tt}(t,x) - \operatorname{div} \mathcal{D}^\top S(x) \mathcal{D} \nabla u(t,x) &= 0 \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times G), \\ u(t,x) &= 0 \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times \partial G), \\ \partial_\nu u(t,x) &= 0 \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times \partial G), \\ u(0,x) &= u_0 \quad (x \in G), \\ u_t(0,x) &= u_1 \quad (x \in G). \end{aligned} \tag{4-8}$$

Hierbei seien die Größen $m, \mathcal{D}, S, \mathcal{N}$ wie oben definiert mit denselben Voraussetzungen (m ist jetzt skalar.) Man beachte, dass die Gleichung jetzt von vierter Ordnung in x ist und daher zwei Randbedingungen gestellt werden müssen. In diesem Fall spricht man bei

$$u|_{\partial G} = 0, \quad \partial_\nu u|_{\partial G} = 0$$

wieder von (verallgemeinerten) Dirichlet-Randbedingungen. Wir betrachten wieder die beiden Fälle $G = \mathbb{R}^3$ (ohne Randbedingungen) und $G \subset \mathbb{R}^3$ beschränktes Gebiet (mit obigen Randbedingungen).

Die operatortheoretische Formulierung ist gegeben durch $H := L^2(G)$ mit dem Skalarprodukt $\langle u, v \rangle_H := \langle u, mv \rangle_{L^2(G)}$,

$$\begin{aligned} V &:= \{u \in H^2(G) : u = 0 \text{ auf } \partial G,\, \partial_\nu u = 0 \text{ auf } \partial G\}, \\ B&\colon V \times V \to \mathbb{C},\ B(u,v) := \langle \mathcal{D} \nabla u, S \mathcal{D} \nabla u \rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}. \end{aligned}$$

Der Operator $A\colon L^2(G) \supset D(A) \to L^2(G)$ ist wieder definiert durch

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{u \in V : -m^{-1} \nabla^\top \mathcal{D}^\top S \mathcal{D} \nabla u \in L^2(G)\}, \\ Au &:= -m^{-1} \nabla^\top \mathcal{D}^\top S \mathcal{D} \nabla u \quad (u \in D(A)). \end{aligned}$$

4.11 Satz. *a) Die Bilinearform B ist symmetrisch, koerzitiv und positiv semidefinit.*

b) Der Operator A ist selbstajdungiert mit $\sigma(A) \subset [0,\infty)$. Falls G beschränkt ist, so besitzt A diskretes Spektrum und es gilt $\sigma(A) \subset [c,\infty)$ mit $c > 0$. Die Lösungsdarstellung von Satz 4.7 gelten analog.

Beweis. Offensichtlich ist B symmetrisch. Für $u \in V$ gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} &= \sum_{i=1}^3 \|\partial_i u\|^2_{L^2(G)} \le \sum_{i,j=1}^3 \big|\langle \partial_i u, \partial_j u\rangle_{L^2(G)}\big| \\
&= \sum_{i,j=1}^3 \big|\langle \partial_i\partial_j u, u\rangle_{L^2(G)}\big| \\
&\le \sum_{i,j=1}^3 \tfrac12\big(\|\partial_i\partial_j u\|^2_{L^2(G)} + \|u\|^2_{L^2(G)}\big) \\
&= \tfrac12 \|\nabla^2 u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times3})} + \tfrac92 \|u\|^2_{L^2(G)},
\end{aligned}$$

wobei in $\mathbb{C}^{3\times3}$ wieder die Hilbert-Schmidt-Norm verwendet wird. Mit

$$\|u\|^2_{H^2(G)} = \|u\|^2_{L^2(G)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} + \|\nabla^2 u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times3})}$$

erhalten wir

$$\|u\|^2_{H^2(G)} \le \tfrac{11}{2}\big(\|u\|^2_{L^2(G)} + \|\nabla^2 u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times3})}\big).$$

Direktes Einsetzen liefert $\|\mathcal{D}\nabla u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} = \|\nabla^2 u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times3})}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
B(u,u) &\ge c_s \|\mathcal{D}\nabla u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} = c_s \|\nabla^2 u\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times3})} \\
&\ge p\|u\|^2_{H^2(G)} - c_p \|u\|^2_{L^2(G)}.
\end{aligned}$$

Somit ist B symmetrisch, koerzitiv, und es gilt $B(u,u) \ge 0$ $(u \in V)$.

b) folgt nun aus a) wie bei den Elastizitätsgleichungen (Satz 4.7). □

5. Thermoelastizitätsgleichungen

5.1 Worum geht's? Bei den Thermoelastizitätsgleichungen, welche die Elastizitätsgleichungen mit der Wärmeleitungsgleichung koppeln, handelt es sich nicht mehr um ein selbstadjungiertes System, und anstelle des Spektralsatzes muss nun die Halbgruppentheorie angewendet werden. Wir gehen wieder nicht näher auf die Modellierung ein und fassen nur die wichtigsten physikalischen Größen zusammen. Der zugehörige Operator wird wieder als System erster Ordnung in einem Hilbertraum betrachtet.

a) Modellierung und Hilbertraumformulierung

Die Thermoelastizitätsgleichungen beschreiben wie die Elastizitätsgleichungen einen elastischen Körper, dessen elastische Eigenschaften nun allerdings auch von der Temperatur abhängen. Man erhält daher ein gekoppeltes System von Elastizitätsgleichungen und der Wärmeleitungsgleichung. Wir beschränken uns wieder auf den dreidimensionalen Fall und übernehmen die Bezeichnungen und Voraussetzungen aus Abschnitt 4 a), wie sie unter den Punkten (E1)-(E4) beschrieben sind. Im Zusammenhang mit der Temperaturabhängigkeit treten jetzt aber folgende Terme zusätzlich auf:

(E5) Die Temperaturdifferenz $\theta\colon (0,\infty)\times G\to\mathbb{R}$ ist eine gesuchte Größe. Es gilt $\theta(t,x) = T(t,x) - T_0$, wobei $T(t,x)$ die absolute Temperatur und T_0 eine Referenztemperatur ist.

(E6) Weitere Größen im Zusammenhang mit der Temperatur sind die spezifische Wärme $c\in L^\infty(G;\mathbb{R})$ mit $c(x)\geq c_1>0$ für fast alle $x\in G$, der Spannungstensor $\overline{\boldsymbol{G}} = (g_{ij})_{i,j=1,2,3} \in L^\infty(G;\mathbb{R}^{3\times 3})$ und der Wärmeleitfähigkeitstensor $\overline{\boldsymbol{K}} = (k_{ij})_{i,j=1,2,3} \in L^\infty(G;\mathbb{R}^{3\times 3})$. Beide Tensoren seien wieder symmetrisch und gleichmäßig positiv definit.

Das Hookesche Gesetz $\overline{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\boldsymbol{C}}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ wird nun ersetzt durch das Gesetz von Duhamel und Neumann

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\boldsymbol{C}}\,\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \overline{\boldsymbol{G}}\,\theta.$$

Mit diesen Größen lauten die Thermoelastizitätsgleichungen

$$\begin{aligned} m(x)\partial_t^2 u(t,x) - \operatorname{div}\overline{\boldsymbol{\tau}}(t,x) &= F(t,x),\\ c(x)\partial_t\theta(t,x) - \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{K}}(x)\nabla\theta(t,x)) + T_0\operatorname{tr}\big(\overline{\boldsymbol{G}}(x)\nabla\partial_t u(t,x)\big) &= f^{(\theta)}(t,x)\\ &\quad ((t,x)\in(0,\infty)\times G) \end{aligned} \tag{5-1}$$

Hier sind $F(t,x)$ die äußere Kraft und $f^{(\theta)}(t,x)$ die Wärmezufuhr.

Wir verwenden wieder die Bezeichnungen nach Sommerfeld und setzen zusätzlich

$$\Gamma(x) := \begin{pmatrix} \gamma_1(x) \\ \vdots \\ \gamma_6(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g_{11}(x) \\ g_{22}(x) \\ g_{33}(x) \\ g_{23}(x) \\ g_{31}(x) \\ g_{12}(x) \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man die Thermoelastizitätsgleichungen (5-1) in folgender Form:

$$\begin{aligned} m(x)\partial_t^2 u(t,x) - \mathcal{D}^\top S(x)\mathcal{D}u(t,x) + \mathcal{D}^\top \Gamma(x)\theta(t,x) &= F(t,x) \\ c(x)\partial_t\theta(t,x) - \operatorname{div}\big(K(x)\nabla\theta(t,x)\big) + T_0\Gamma(x)^\top \mathcal{D}\partial_t u(t,x) &= f^{(\theta)}(t,x). \end{aligned} \tag{5-2}$$

Zugehörige Anfangsbedingungen sind

$$u|_{t=0} = u_0,\ \partial_t u|_{t=0} = u_1,\ \theta|_{t=0} = \theta_0.$$

Bei Gebieten mit Rand sind typische Randbedingungen

$$u|_{\partial G} = 0,\ \theta|_{\partial G} = 0$$

(Dirichlet-Dirichlet-Randbedingungen) oder

$$\mathcal{N}^\top (S\mathcal{D}u - \Gamma\theta)|_{\partial G} = 0,\ \nu \cdot K\nabla\theta|_{\partial G} = 0$$

(Neumann-Neumann-Randbedingungen), oder Mischungen davon. Wir werden uns im Folgenden auf die Dirichlet-Dirichlet-Randbedingungen beschränken.

Um (5-2) auf ein System erster Ordnung zu transformieren, setzen wir

$$v(t,x) := \begin{pmatrix} v_1(t,x) \\ v_2(t,x) \\ v_3(t,x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S(x)\mathcal{D}u(t,x) \\ \partial_t u(t,x) \\ \theta(t,x) \end{pmatrix} \quad ((t,x) \in (0,\infty) \times G). \tag{5-3}$$

Man erhält dann das System

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,x) + A(x,D)v(t,x) &= f(t,x) && ((t,x) \in (0,\infty) \times G), \\ v_2(t,x) &= 0 && ((t,x) \in (0,\infty) \times \partial G), \\ v_3(t,x) &= 0 && ((t,x) \in (0,\infty) \times \partial G), \\ v(0,x) &= v_0(x) && (x \in G) \end{aligned} \tag{5-4}$$

mit

$$A(x,D) := Q(x)^{-1}N(x,D),$$

$$Q(x) := \begin{pmatrix} S(x)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & m(x) & 0 \\ 0 & 0 & c(x) \end{pmatrix} \quad (x \in G),$$

$$N(x,D) := \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{D} & 0 \\ -\mathcal{D}^\top & 0 & \mathcal{D}^\top\Gamma(x) \\ 0 & \Gamma(x)^\top\mathcal{D} & -\nabla^\top K(x)\nabla \end{pmatrix} \quad (x \in G),$$

$$f(t,x) := Q(x)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ F(t,x) \\ f^{(\theta)}(t,x) \end{pmatrix} \quad ((t,x) \in (0,\infty)\times G),$$

$$v_0(x) := \begin{pmatrix} S(x)\mathcal{D}u_0(x) \\ u_1(x) \\ \theta_0(x) \end{pmatrix} \quad (x \in G).$$

Man beachte die Dimensionen der Vektoren: Es gilt $v\colon (0,\infty)\times G \to \mathbb{C}^6\times\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}$, da $u\colon (0,\infty)\times G \to \mathbb{C}^3$ und $\theta\colon (0,\infty)\times G\to\mathbb{C}$ und $\mathcal{D}$ eine 6×3-Matrix ist. Aus physikalischer Sicht kann man die Energie des Systems (5-2) definieren als

$$E(t) := \langle \partial_t u, m\partial_t u\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} + \langle \mathcal{D}u, S\mathcal{D}u\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} + \langle \theta, c\theta\rangle_{L^2(G)}.$$

Dabei ist der erste Term die kinetische Energie, der zweite die potentielle Energie und der dritte die Wärmeenergie.

Als Grundraum wählen wir $H := L^2(G;\mathbb{C}^{10})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle v,w\rangle_H := \langle v, Qw\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^{10})} \quad (v,w\in H).$$

Für v wie in (5-3) gilt dann

$$\|v(t,\cdot)\|_H^2 = E(t) \quad (t\geq 0).$$

Der unbeschränkte Operator $A\colon H\supset D(A)\to H$ wird definiert durch

$$\begin{aligned} D(A) &:= \{v\in H : v_2\in H_0^1(G;\mathbb{C}^3),\, v_3\in H_0^1(G),\, N(x,D)v\in H\},\\ Av &:= A(x,D)v \quad (v\in D(A)). \end{aligned}$$

b) Wohlgestelltheit

Um zu zeigen, dass der oben definierte Operator A eine C_0-Halbgruppe erzeugt, starten wir mit einigen Bemerkungen zum Definitionsbereich.

5.2 Bemerkung. Die Bedingung $v_2\in H_0^1(G;\mathbb{C}^3)$ und $v_3\in H_0^1(G)$ entsprechen den Dirichlet-Dirichlet-Randbedingungen. Für $v\in L^2(G;\mathbb{C}^6)\times H_0^1(G;\mathbb{C}^3)\times H_0^1(G)$ gilt genau dann $v\in D(A)$, falls $\mathcal{D}^\top v_1\in L^2(G;\mathbb{C}^3)$ und $\nabla^\top K\nabla v_3\in L^2(G)$ jeweils im schwachen Sinn gilt, d.h. falls $w_1\in L^2(G;\mathbb{C}^3)$ und $w_3\in L^2(G)$ existieren mit

$$\begin{aligned} \langle v_1, \mathcal{D}\varphi\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} &= -\langle w_1,\varphi\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} && (\varphi\in\mathscr{D}(G;\mathbb{C}^3)),\\ \langle K\nabla v_3, \nabla\varphi\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} &= -\langle w_3,\varphi\rangle_{L^2(G)} && (\varphi\in\mathscr{D}(G)). \end{aligned}$$

Der folgende Satz behandelt Sobolevräume, welche mit Hilfe des verallgemeinerten Gradienten $\mathcal{D}$ analog zu den Standard-Sobolevräumen definiert werden.

5.3 Satz. *Wir definieren*

$$\begin{aligned}
\mathbb{D} &:= \{f \in L^2(G;\mathbb{C}^3) : \mathcal{D}f \in L^2(G;\mathbb{C}^6)\},\\
\mathbb{D}' &:= \{\varphi \in L^2(G;\mathbb{C}^6) : \mathcal{D}^\top\varphi \in L^2(G;\mathbb{C}^3)\},\\
\mathbb{D}_0 &:= \{f \in \mathbb{D} : \langle f, \mathcal{D}^\top\varphi\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} = -\langle \mathcal{D}f, \varphi\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}\ (\varphi \in \mathbb{D}')\},\\
\mathbb{D}_0' &:= \{\varphi \in \mathbb{D}' : \mathcal{D}^\top\varphi = 0\}.
\end{aligned}$$

Die Räume $\mathbb{D}$ und $\mathbb{D}'$ werden mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen, z.B.

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{D}} := \langle f, g\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} + \langle \mathcal{D}f, \mathcal{D}g\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} \quad (f, g \in \mathbb{D}).$$

Die Räume $\mathbb{D}_0$ und $\mathbb{D}_0'$ werden mit der Spurtopologie versehen.

a) Es gilt $\mathbb{D} = H^1(G;\mathbb{C}^3)$ und $\mathbb{D}_0 = H_0^1(G;\mathbb{C}^3)$ mit äquivalenten Normen.

b) Die Menge $\mathbb{D}_0'$ ist als Teilmenge von $L^2(G;\mathbb{C}^6)$ abgeschlossen, und es gilt die orthogonale Zerlegung

$$L^2(G;\mathbb{C}^6) = \mathbb{D}_0' \oplus H_g \quad \textit{mit } H_g := \overline{\{\mathcal{D}f : f \in \mathbb{D}_0\}}.$$

c) Sei G beschränkt. Dann ist $H_g = \{\mathcal{D}f : f \in \mathbb{D}_0\}$, und die Einbettung

$$\mathbb{D}' \cap H_g \hookrightarrow H_g$$

ist kompakt.

Beweis. a) Die Gleichheit $\mathbb{D} = H^1(G;\mathbb{C}^3)$ folgt aus der Kornschen Ungleichung. Da die Abbildung

$$\mathbb{D} \to \mathbb{C},\ f \mapsto \langle f, \mathcal{D}^\top\varphi\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} + \langle \mathcal{D}f, \varphi\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}$$

stetig ist, ist $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$ abgeschlossen und damit ein Hilbertraum. Offensichtlich gilt $H_0^1(G;\mathbb{C}^3) \subset \mathbb{D}_0$. Wir zerlegen $\mathbb{D}_0 = H_0^1(G;\mathbb{C}^3) \oplus (H_0^1(G;\mathbb{C}^3))^\perp$ mit dem Projektionssatz und zeigen $(H_0^1(G;\mathbb{C}^3))^\perp = \{0\}$.

Sei dazu $v \in \mathbb{D}_0$ mit $\langle v, \varphi\rangle_{\mathbb{D}} = 0$ $(\varphi \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3))$. Dann gilt

$$-\langle \mathcal{D}v, \mathcal{D}\varphi\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} = \langle v, \varphi\rangle_{L^2(G,\mathbb{C}^3)},$$

d.h. $\mathcal{D}^\top\mathcal{D}v = v$. Also ist

$$\|v\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} = \langle v, \mathcal{D}^\top\mathcal{D}v\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} = -\langle \mathcal{D}v, \mathcal{D}v\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} = -\|\mathcal{D}v\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^6)},$$

d.h. $v = 0$. Somit folgt $\mathbb{D}_0 = H_0^1(G;\mathbb{C}^3)$.

b) Wir definieren den Operator $T \in L(\mathbb{D}_0, L^2(G;\mathbb{C}^6))$ durch $Tf := \mathcal{D}f$. Für den (Hilbertraum-)adjungierten Operator $T^* \in L(L^2(G;\mathbb{C}^6); \mathbb{D}_0)$ gilt $\varphi \in \ker T^*$ genau dann, wenn

$$0 = \langle T^*\varphi, f\rangle_{\mathbb{D}_0} = \langle \varphi, Tf\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} = \langle \varphi, \mathcal{D}f\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} = -\langle \mathcal{D}^\top\varphi, f\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} \quad (f \in \mathbb{D}_0).$$

Da $\mathscr{D}(G;\mathbb{C}^6)$ dicht in $\mathbb{D}_0$ ist, ist dies äquivalent zu $\mathcal{D}^\top\varphi = 0$ (distributionell), d.h. $\ker T^* = \mathbb{D}_0'$, und $\mathbb{D}_0'$ ist insbesondere abgeschlossen in $L^2(G;\mathbb{C}^6)$. Die in b) angegebene Zerlegung ergibt sich aus

$$L^2(G;\mathbb{C}^6) = \ker T^* \oplus \overline{R(T)}.$$

c) Sei nun G beschränkt. Dann folgt mit der ersten Poincaré-Ungleichung und mit der Kornschen Ungleichung

$$\|f\|_{H^1(G;\mathbb{C}^3)} \le C\|\nabla f\|_{L^2(G;\mathbb{C}^{3\times 3})} \le C\|\mathcal{D}f\|_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} = C\|Tf\|_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} \quad (f \in \mathbb{D}_0). \tag{5-5}$$

Damit ist der Operator T offen, d.h. $R(T) = \{\mathcal{D}f : f \in \mathbb{D}_0\}$ abgeschlossen.

Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}' \cap H_g$ eine (in der Norm $\|\cdot\|_{\mathbb{D}'}$) beschränkte Folge. Dann existieren $f_k \in \mathbb{D}_0$ mit $\varphi_k = \mathcal{D}f_k$. Wegen (5-5) ist auch $(f_k)_{H^1(G;\mathbb{C}^3)}$ beschränkt und nach dem Satz von Rellich-Kondrachov (nach Übergang zu einer Teilfolge) in $L^2(G;\mathbb{C}^3)$ konvergent. Ebenso ist die Folge $(\mathcal{D}^\top\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\mathcal{D}^\top\mathcal{D}f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(G;\mathbb{C}^3)$ nach Definition der Norm in $\mathbb{D}$ beschränkt, und es folgt

$$\begin{aligned}\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} &= \langle \mathcal{D}(f_n - f_m), \mathcal{D}(f_n - f_m)\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}\\ &= -\langle f_n - f_m, \mathcal{D}^\top\mathcal{D}(f_n - f_m)\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} \to 0\end{aligned}$$

für $n, m \to \infty$. Somit ist die Einbettung $\mathbb{D}' \cap H_g \hookrightarrow H_g$ kompakt. □

5.4 Lemma. *Der oben definierte Operator A ist dicht definiert und abgeschlossen.*

Beweis. Wegen $\mathscr{D}(G;\mathbb{C}^{10}) \subset D(A)$ ist A dicht definiert.

Sei $(v^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ eine Folge mit $v^{(n)} \to v$ in H und $Av^{(n)} \to w$ in H. Zu zeigen ist $v \in D(A)$ und $Av = w$. Wie oben sei $v^{(n)} = (v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, v_3^{(n)})^\top$.

(i) Aus $Av^{(n)} \to w$ folgt $N(x,D)v^{(n)} = Q(x)A(x,D)v^{(n)} \to Q(x)w$ in H. Der Vergleich der ersten Komponenten zeigt

$$-\mathcal{D}v_2^{(n)} \to S^{-1}w_1 \quad (n \to \infty) \quad \text{ in } L^2(G;\mathbb{C}^6)$$

und damit für alle $\varphi_1 \in \mathscr{D}(G;\mathbb{C}^6)$:

$$\langle v_2, \mathcal{D}^\top\varphi_1\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} = \lim_{n\to\infty} \langle v_2^{(n)}, \mathcal{D}^\top\varphi_1\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} = -\lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{D}v_2^{(n)}, \varphi_1\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}$$

$$= \langle S^{-1} w_1, \varphi_1 \rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}.$$

Also existiert $\mathcal{D}v_2 \in L^2(G;\mathbb{C}^6)$, und es gilt $\mathcal{D}v_2 = -S^{-1}w_1$.

Wegen $v_2^{(n)} \to v_2$ in $L^2(G;\mathbb{C}^3)$ und $\mathcal{D}v_2^{(n)} \to \mathcal{D}v_2$ in $L^2(G;\mathbb{C}^6)$ gilt $v_2^{(n)} \to v_2$ in $\mathbb{D}_0$. Nach Lemma 5.3 gilt $\mathbb{D}_0 = H_0^1(G;\mathbb{C}^3)$, d.h. $v_2 \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3)$.

(ii) Analog folgt aus $N(x,D)v^{(n)} \to Qw$ in H durch Vergleich der dritten Komponenten:

$$\Gamma^\top \mathcal{D}v_2^{(n)} - \nabla^\top K \nabla v_3^{(n)} \to c w_3 \quad (n \to \infty) \quad \text{in } L^2(G).$$

Mit (i) erhält man

$$\begin{aligned} -\nabla^\top K \nabla v_3^{(n)} &\to c w_3 - \Gamma^\top \mathcal{D} v_2 && \text{in } L^2(G), \\ v_3^{(n)} &\to v_3 && \text{in } L^2(G). \end{aligned} \tag{5-6}$$

Der Operator $A_K \colon L^2(G) \supset D(A_K) \to L^2(G)$ mit

$$\begin{aligned} D(A_K) &:= \{\varphi \in H_0^1(G) : -\nabla^\top K \nabla \varphi \in L^2(G)\}, \\ A_K \varphi &:= -\nabla^\top K \nabla \varphi \quad (\varphi \in D(A_K)) \end{aligned}$$

ist nach Lemma 1.7 selbstadjungiert und damit abgeschlossen. Nach (5-6) konvergiert $v_3^{(n)}$ in der Graphennorm $\|\cdot\|_{A_K}$. Damit folgt $v_3 \in D(A_K) \subset H_0^1(G)$ und

$$A_K v_3 = \lim_{n\to\infty} A_K v_3^{(n)} = c w_3 - \Gamma^\top \mathcal{D} v_2.$$

(iii) Der Vergleich der mittleren Komponenten von $N(x,D)v^{(n)} \to Qw$ liefert nun

$$-\mathcal{D}^\top v_1^{(n)} + \mathcal{D}^\top \Gamma v_3^{(n)} \to m w_2 \quad \text{in } L^2(G;\mathbb{C}^3)$$

und mit (ii) $\mathcal{D}^\top v_1^{(n)} \to -m w_2 + \mathcal{D}^\top \Gamma v_3$. Wie oben erhält man für $\varphi_2 \in \mathscr{D}(G;\mathbb{C}^3)$:

$$\begin{aligned} \langle v_1, \mathcal{D}\varphi_2 \rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} &= \lim_{n\to\infty} \langle v_1^{(n)}, \mathcal{D}\varphi_2 \rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} = \lim_{n\to\infty} \langle D^\top v_1^{(n)}, \varphi_2 \rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} \\ &= \langle -m w_2 + \mathcal{D}^\top \Gamma v_3, \varphi_2 \rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathcal{D}^\top v_1 = -m w_2 + \mathcal{D}^\top \Gamma v_3 \in L^2(G;\mathbb{C}^3).$$

Aus (i)-(iii) folgt nun $v \in D(A)$ und $Av = w$. □

5.5 Lemma. *Es gilt $D(A) = D(A^*)$ und*

$$A^* = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D} & 0 \\ \mathcal{D}^\top & 0 & -\mathcal{D}^\top \Gamma \\ 0 & -\Gamma^\top \mathcal{D} & -\nabla^\top K \nabla \end{pmatrix}. \tag{5-7}$$

Beweis. Sei $\widetilde{A}$ der durch die rechte Seite von (5-7) definierte Operator mit Definitionsbereich $D(\widetilde{A}) := D(A)$. Wie im Beweis von Lemma 5.4 sieht man, dass $\widetilde{A}$ abgeschlossen ist. Für $v \in D(A)$ und $w \in D(\widetilde{A}) = D(A)$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\langle Av, w\rangle_H &= \langle N(x,D)v, w\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^{10})}\\ &= \langle -\mathcal{D}v_2, w_1\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} + \langle -\mathcal{D}^\top v_1, w_2\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} + \langle \mathcal{D}^\top \Gamma v_3, w_2\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)}\\ &\quad + \langle \Gamma^\top \mathcal{D}v_2, w_3\rangle_{L^2(G)} + \langle -\nabla^\top K\nabla v_3, w_3\rangle_{L^2(G)}\\ &= \langle v_2, \mathcal{D}^\top w_1\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} + \langle v_1, \mathcal{D}w_2\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} - \langle v_3, \Gamma^\top \mathcal{D}w_2\rangle_{L^2(G)}\\ &\quad - \langle v_2, \mathcal{D}^\top \Gamma w_3\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} - \langle v_3, \nabla^\top K\nabla w_3\rangle_{L^2(G)}\\ &= \langle v, \widetilde{A}w\rangle_H.\end{aligned}$$

Somit gilt $\widetilde{A} \subset A^*$. Für die andere Richtung argumentiert man ähnlich wie im Beweis von Lemma 5.4 (Übungsaufgabe). □

5.6 Satz. *Der Operator $-A$ ist der Erzeuger einer C_0-Kontraktionshalbgruppe. Insbesondere ist das Anfangs-Randwertproblem* (5-4) *klassisch wohlgestellt.*

Beweis. Für $v \in D(A) = D(A^*)$ gilt

$$2\,\mathrm{Re}\langle Av, v\rangle_H = \langle Av, v\rangle_H + \langle v, Av\rangle_H = \langle (A + A^*)v, v\rangle_H = 2\,\mathrm{Re}\langle A^*v, v\rangle_H.$$

Wegen

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Re}\langle Av, v\rangle_H &= \langle (A+A^*)v, v\rangle_H = 2\langle -\nabla^\top K\nabla v_3, v_3\rangle_{L^2(G)}\\ &= 2\langle K\nabla v_3, \nabla v_3\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} \geq 2k_1\|\nabla v_3\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^3)} \geq 0 \quad (v \in D(A))\end{aligned} \tag{5-8}$$

sind $-A$ und $-A^*$ beide dissipativ. Somit erzeugt $-A$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe (Übungsaufgabe 5.1). □

c) Reduktion und zeitliche Asymptotik

Im Folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet.

5.7 Lemma. *a) Es gilt* $\ker A = \ker A^* = \mathbb{D}_0' \times \{0\} \times \{0\}$.

b) Das orthogonale Komplement (bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$) zu $\ker A$ *ist gegeben durch*

$$H_1 := (\ker A)^\perp = SH_g \times L^2(G;\mathbb{C}^3) \times L^2(G).$$

Der reduzierte Operator $A_1 \colon D(A_1) := D(A) \cap H_1 \to H_1$ ist wohldefiniert.

Beweis. a) Sei $v \in \ker A$. Dann folgt $\mathcal{D}v_2 = 0$ und damit $v_2 = 0$ wegen $v_2 \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3)$ und $\nabla v_2 = 0$. Damit gilt $\nabla^\top K \nabla v_3 = 0$, und mit der Randbedingung $v_3 \in H_0^1(G)$ folgt auch $v_3 = 0$. Somit erhalten wir $\mathcal{D}^\top v_1 = 0$, d.h. $v_1 \in \mathbb{D}_0'$. Umgekehrt sieht man sofort die Inklusion $\mathbb{D}_0' \times \{0\} \times \{0\} \subset \ker A$. Die Aussage für A^* folgt analog.

b) Sei $v \in H_1 = (\ker A)^\perp$. Dann gilt für alle $w \in \ker A$, $w = (w_1, 0, 0)^\top$ mit $w_1 \in \mathbb{D}_0'$ (nach a)):

$$0 = \langle v, w\rangle_H = \langle v_1, S^{-1}w_1\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)} = \langle S^{-1}v_1, w_1\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^6)}.$$

Mit der orthogonalen Zerlegung $L^2(G;\mathbb{C}^6) = \mathbb{D}_0' \oplus H_g$ folgt $S^{-1}v_1 \in H_g$, d.h. $v_1 \in SH_g$. Die Wohdefiniertheit von A_1 folgt aus

$$R(A_1) = R\big(A|_{D(A_1)}\big) \subset R(A) = (\ker A^*)^\perp = H_1.$$

□

5.8 Satz. *Der reduzierte Operator $-A_1 \colon H_1 \supset D(A_1) \to H_1$ ist Erzeuger einer C_0-Kontraktionshalbgruppe. Es gilt $0 \in \rho(A_1)$, und $A_1^{-1} \in L(H_1)$ ist kompakt. Weiter gilt $\sigma(A_1) = \sigma_p(A_1) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$, und $\sigma(A_1)$ ist diskret (d.h. die Eigenwerte besitzen keinen endlichen Häufungspunkt).*

Beweis. Bezüglich der orthogonalen Zerlegung $H = \ker A \oplus H_1$ hat nach Lemma 5.7 der Operator $A + \lambda$ die Form

$$A + \lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_1 + \lambda \end{pmatrix}.$$

Da $-A$ Generator einer Kontraktionshalbgruppe ist, gilt $1 \in \rho(-A)$ und mit obiger Zerlegung auch $1 \in \rho(-A_1)$. Da mit $-A$ auch $-A_1$ dissipativ ist, erzeugt $-A_1$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe.

Wegen $D(A_1) \subset (\mathbb{D}_0' \cap H_g) \times H_0^1(G;\mathbb{C}^3) \times H_0^1(G)$ und Satz 5.3 c) ist die Einbettung $D(A_1) \subset H_1$ kompakt. Damit ist auch $(A_1 + \lambda)^{-1} \in L(H_1)$ kompakt für jedes $\lambda \in \rho(A_1)$, und $\sigma(A_1)$ besteht nur aus Eigenwerten und ist diskret. Da nach Konstruktion A_1 injektiv ist, gilt also $0 \in \rho(A_1)$, und A_1^{-1} ist kompakt.

Weil $-A_1$ dissipativ ist, gilt

$$\sigma_p(A_1) \subset \{\langle A_1 v, v\rangle_H : v \in D(A_1),\ \|v\|_H = 1\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}.$$

□

Im Folgenden sei $T(t) := e^{-tA_1}$ $(t \geq 0)$ die von A_1 erzeugte Halbgruppe. Falls v_0 ein Eigenvektor von A_1 zum Eigenwert λ ist, so gilt $v(t) := T(t)v_0 = e^{-\lambda t}v_0$ und damit $\|v(t)\|_H = e^{-t\operatorname{Re}\lambda}\|v_0\|_H$. Daher sind die Eigenwerte λ von A_1 mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$ von besonderem Interesse (ungedämpfter Fall).

5.9 Lemma. *Es existiert genau dann ein* $\lambda \in \sigma_p(A_1) \cap i\mathbb{R}$*, falls ein* $v_2 \in H_0^1(G;\mathbb{C}^3) \setminus \{0\}$ *und ein* $\tau > 0$ *existieren mit*

$$\begin{aligned} -m^{-1}\mathcal{D}^\top S\mathcal{D}v_2 &= \tau v_2 \\ \Gamma^\top \mathcal{D}v_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5-9}$$

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma_p(A_1) \cap i\mathbb{R}$, und sei v ein zugehöriger Eigenvektor von A_1. Dann folgt aus $A_1 v = \lambda v$ mit (5-8)

$$0 = \operatorname{Re}\lambda \|v\|_H^2 = \operatorname{Re}\langle A_1 v, v\rangle_H \geq k_1 \|\nabla v_3\|^2_{L^2(G;\mathbb{C}^3)}.$$

Mit $v_3 \in H_0^1(G)$ erhält man $v_3 = 0$. Aus der Gleichung $A(x,D)v = Q(x)^{-1}N(x,D)v = \lambda v$ erhält man nun $c^{-1}\Gamma^\top \mathcal{D}v_2 = 0$, d.h. $\Gamma^\top\mathcal{D}v_2 = 0$, sowie

$$\begin{aligned} -S\mathcal{D}v_2 &= \lambda v_1, \\ -m^{-1}\mathcal{D}^\top v_1 &= \lambda v_2. \end{aligned}$$

Damit gilt $-m^{-1}\mathcal{D}^\top S\mathcal{D}v_2 = -\lambda^2 v_2$. Setze $\tau := -\lambda^2$.

Seien andererseits $\tau > 0$ und v_2 wie im Satz. Dann gilt $\lambda := \pm i\sqrt{\tau} \in \sigma_p(A_1)$, wobei ein zugehöriger Eigenvektor durch $v = (v_1, v_2, 0)^\top$ mit $v_1 = -\frac{1}{\lambda}S\mathcal{D}v_2$ gegeben ist. □

5.10 Bemerkung. Analoge Aussagen gelten für $G \subset \mathbb{R}$ und $G \subset \mathbb{R}^2$. Für $G \subset \mathbb{R}$ existieren keine rein imaginären Eigenwerte, denn aus $\Gamma^\top \mathcal{D}v_2 = 0$ (hier ist $\mathcal{D} = \frac{d}{dx}$) folgt $0 = \gamma(x)\frac{d}{dx}v_2(x)$, also $\frac{d}{dx}v_2(x) = 0$ und wegen $v_2 \in H_0^1(G)$ auch $v_2 = 0$.

In $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ ist die Frage, ob (5-9) eine nichttriviale Lösung besitzt, vom Gebiet abhängig und im Allgemeinen nicht einfach zu beantworten.

Die folgende Aussage beschreibt das zeitliche Verhalten der Energie $\|v(t)\|_H^2$.

5.11 Lemma. *Seien* $v_0 \in D(A_1)$ *und* $v(t) := T(t)v_0$, $\theta(t) := v_3(t)$ $(t \geq 0)$.

a) Es gilt $\langle \nabla\theta(\cdot), K\nabla\theta(\cdot)\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^n)} \in L^1((0,\infty))$ *und*

$$\lim_{t\to\infty} \|v(t)\|_H^2 = \|v_0\|_H^2 - 2\int_0^\infty \langle \nabla\theta(\tau), K\nabla\theta(\tau)\rangle_{L^2(G;\mathbb{C}^n)} d\tau.$$

b) Es gilt $\lim_{t\to\infty}\|\nabla\theta(t)\|_{L^2(G;\mathbb{C}^n)} = 0$ *sowie* $\lim_{t\to\infty}\|\theta(t)\|_{H^1(G)} = 0$.

Beweis. a) Für $E(t) := \|v(t)\|_H^2$ gilt

$$E'(t) = 2\operatorname{Re}\langle \partial_t v(t), v(t)\rangle_H = -2\operatorname{Re}\langle Av(t), v(t)\rangle_H = -2\langle\nabla\theta(t), K\nabla\theta(t)\rangle_H \leq 0.$$

Integration bezüglich t liefert

$$\|v(t)\|_H^2 = \|v_0\|_H^2 - 2\int_0^t \langle \nabla\theta(\tau), K\nabla\theta(\tau)\rangle_H d\tau,$$

dies zeigt a).

b) Für $f(t) := \langle \nabla\theta(t), K\nabla\theta(t)\rangle_H$ folgt analog

$$f'(t) = -2\operatorname{Re}\langle \nabla^\top K\nabla\theta(t), (\partial_t\theta)(t)\rangle_{L^2(G)}.$$

Da v eine klassische Lösung ist, gilt insbesondere $f \in C^1([0,\infty))$. Mit der Kontraktionseigenschaft von T erhalten wir

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_H &\le \|v_0\|_H && (t \ge 0),\\ \|\partial_t v(t)\|_H &= \|Av(t)\|_H = \|T(t)Av_0\|_H \le \|Av_0\|_H && (t \ge 0). \end{aligned}$$

Also sind $\nabla^\top K\nabla\theta(\cdot)$ und $\partial_t\theta(\cdot)$ beide in L^2 beschränkt, und es folgt $|f'(t)| \le C < \infty$ $(t \ge 0)$ für eine Konstante $C \ge 0$.

Wir zeigen, dass $f(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ gilt. Sei dazu o.E. $C = 1$ (sonst betrachte $g(t) := \frac{1}{C}f(t)$). Da $f \in L^1((0,\infty))$, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $t_0 > 0$ mit

$$\int_{t_0}^\infty f(\tau)d\tau < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Angenommen, es existiert ein $t_1 > t_0$ mit $f(t_1) > \varepsilon$. Dann gilt

$$\int_{t_0}^\infty f(\tau)d\tau \ge \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} f(\tau)d\tau \ge \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} (\varepsilon - (\tau - t_1))d\tau = \frac{\varepsilon^2}{2},$$

Widerspruch. Also gilt $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, und wir erhalten die erste Aussage von b). Die zweite Aussage folgt daraus direkt mit der ersten Poincaré-Ungleichung. □

Wie oben bereits erwähnt, sind die rein imaginären Eigenwerte von A_1 von besonderer Bedeutung, da die Halbgruppe, angewendet auf einen entsprechenden Eigenvektor, nicht abklingt. Im folgenden Satz wird ein Unterraum $\mathscr{L}$ von H_1 definiert, dessen Elemente gerade diese Eigenschaft besitzen. Wir werden später sehen, dass $\mathscr{L}$ der Abschluss der linearen Hülle der Eigenvektoren zu rein imaginären Eigenwerten ist. Im Beweis verwenden wir die Tatsache, dass der adjungierte Operator $-A^*$ die adjungierte Halbgruppe $(T(t)^*)_{t\ge 0}$ erzeugt (dies gilt immer in reflexiven Banachräumen, Übung).

5.12 Satz. *Wir definieren*

$$\mathscr{L} := \{v \in D(A_1) : \|T(t)v\|_H = \|T(t)^*v\|_H = \|v\|_H \ (t \ge 0)\} \subset H_1.$$

a) $\mathscr{L}$ ist ein Unterraum von H_1, und es gilt $A_1 v = -A_1^* v$ $(v \in \mathscr{L})$.

b) Für alle $t \geq 0$ ist $\mathscr{L}$ invariant unter $T(t)$ (d.h. es gilt $T(t)\mathscr{L} \subset \mathscr{L}$) und unter $T(t)^*$.

c) $\mathscr{L}$ ist abgeschlossen in $D(A_1)$ (bzgl. der Graphennorm auf $D(A_1)$).

d) $\mathscr{L}^\perp$ in $D(A_1)$ ist invariant unter $T(t)$ für alle $t \geq 0$.

Beweis. a) Seien $v \in \mathscr{L}$ und $v(t) := T(t)v$ $(t \geq 0)$. Dann gilt

$$-2\,\mathrm{Re}\langle Av(t), v(t)\rangle_H = \frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 = \frac{d}{dt}\|T(t)v\|_H^2 = 0,$$

und nach (5-8) folgt $v_3(t) = 0$ $(t \geq 0)$. Der Vergleich von A und A^* zeigt nun $A_1 v(t) = -A_1^* v(t)$ $(t \geq 0)$.

Sei umgekehrt $v \in D(A_1)$ mit $A_1 v(t) = -A_1^* v(t)$ $(t \geq 0)$, so ist

$$\frac{d}{dt}\|T(t)v\|_H^2 = -2\,\mathrm{Re}\langle Av(t), v(t)\rangle_H = 0.$$

Da $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ von $-A_1^*$ erzeugt wird, folgt analog $\frac{d}{dt}\|T(t)^*v\|_H^2 = 0$ und damit $v \in \mathscr{L}$. Somit gilt

$$\mathscr{L} = \{v \in D(A_1) : A_1 T(t)v = -A_1^* T(t)v \ (t \geq 0)\},$$

insbesondere ist $\mathscr{L}$ ein linearer Unterraum von H_1.

b) Seien $t_0 \geq 0$ und $v_0 \in \mathscr{L}$, und sei $v := T(t_0)v_0$. Dann gilt für $t \geq 0$:

$$\|T(t)v\|_H = \|T(t+t_0)v_0\|_H = \|v_0\|_H = \|T(t_0)v_0\|_H = \|v\|_H.$$

Somit gilt $0 = \|v\|_H^2 - \|T(t)v\|_H^2 = \langle (1 - T^*(t)T(t))v, v\rangle_H$. Da $1 - T^*(t)T(t)$ ein selbstadjungierter positiv semidefiniter Operator ist, folgt $v \in \ker(1 - T^*(t)T(t))$, d.h. $v = T^*(t)T(t)v$ $(t \geq 0)$. Für $s \leq t_0$ erhält man

$$\|T^*(s)v\|_H = \|T^*(s)T(s)T(t_0 - s)v_0\|_H = \|T(t_0 - s)v_0\|_H = \|v\|_H.$$

Für $s > t_0$ verwendet man

$$\|T^*(s)v\|_H = \|T^*(s-t_0)T^*(t_0)T(t_0)v_0\|_H = \|T^*(s-t_0)v_0\|_H = \|v_0\|_H = \|T(t_0)v_0\|_H.$$

Somit gilt $v \in \mathscr{L}$. Analog zeigt man $T(t_0)^* v_0 \in \mathscr{L}$.

c) Wegen $\|A_1 T(t)v\|_H + \|T(t)v\|_H = \|T(t)A_1 v\|_H + \|T(t)v\|_H \leq \|A_1 v\|_H + \|v\|_H$ ist $T(t)\colon (D(A_1), \|\cdot\|_{A_1}) \to (D(A_1), \|\cdot\|_{A_1})$ stetig. Die analoge Aussage gilt für $T^*(t)$. Die Definition von $\mathscr{L}$ zeigt nun, dass $\mathscr{L} \subset D(A_1)$ abgeschlossen ist.

d) Nach c) gilt $D(A_1) = \mathscr{L} \oplus \mathscr{L}^\perp$ (wobei die Orthogonalität in $\|\cdot\|_{D(A_1)}$ zu verstehen ist). Für $v \in \mathscr{L}^\perp$ und $w \in \mathscr{L}$ gilt unter Verwendung von a)

$$\langle T(t)v, w\rangle_{A_1} = \langle T(t)v, w\rangle_H + \langle AT(t)v, Aw\rangle_H$$

$$= \langle v, T(t)^* w\rangle_H - \langle T(t)A_1 v, A_1^* w\rangle_H$$
$$= \langle v, T(t)^* w\rangle_H - \langle A_1 v, A_1^* T(t)^* w\rangle_H = \langle v, T(t)^* w\rangle_{A_1} = 0,$$

wobei $T(t)^* w \in \mathscr{L}$ verwendet wurde. Somit folgt $T(t)v \in \mathscr{L}^\perp$, d.h. $T(t)\mathscr{L}^\perp \subset \mathscr{L}^\perp$. □

5.13 Lemma. *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum, und sei $A\colon H \supset D(A) \to H$ ein dicht definierter Operator. Dann ist A genau dann abgeschlossen, wenn A schwach abgeschlossen ist, d.h. wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_n \rightharpoonup x$ und $Ax_n \rightharpoonup y$ gilt: $x \in D(A)$ und $y = Ax$.*

Beweis. Falls A schwach abgeschlossen ist, ist A offensichtlich abgeschlossen. Seien umgekehrt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_n \rightharpoonup x$ und $Ax_n \rightharpoonup y$. Dann gilt für alle $z \in D(A^*)$:

$$\langle x, A^* z\rangle_H = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, A^* z\rangle_H = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, z\rangle_H = \langle y, z\rangle_H.$$

Somit ist $x \in D(A^{**})$ und $A^{**}x = y$. Da A abgeschlossen ist, gilt $A^{**} = A$ und damit $x \in D(A)$ und $Ax = y$. □

5.14 Satz. *Seien $v_0 \in D(A_1)$ und $v(t) := T(t)v_0$ $(t \geq 0)$. Sei $v_0 = v_0^{(1)} + v_0^{(2)} \in \mathscr{L} \oplus \mathscr{L}^\perp$. Dann gelten $\|T(t)v_0^{(1)}\|_H = \|v_0^{(1)}\|_H$ $(t \geq 0)$ und $\lim_{t\to\infty} \|T(t)v_0^{(2)}\|_H = 0$.*

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition von $\mathscr{L}$. Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ eine monoton wachsende Folge mit $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Wir setzen $v_2(t) := T(t)v_0^{(2)}$ $(t \geq 0)$. Dann gilt

$$\|A_1 v_2(t)\|_H = \|T(t)A_1 v_0^{(2)}\|_H \leq \|A_1 v_0^{(2)}\| \quad (t \geq 0),$$

d.h. die Folge $(A_1 v_2(t_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$ ist beschränkt. Da die Einheitssphäre in H_1 schwach folgenkompakt ist, existiert ein $z \in H_1$ mit $Av_2(t_n) \rightharpoonup z$ in H_1, und da A_1^{-1} kompakt ist, folgt $v_2(t_n) \to w$ in H_1 (jeweils nach Übergang zu einer Teilfolge). Wir zeigen, dass $w = 0$ gilt.

Nach Lemma 5.13 ist A_1 schwach abgeschlossen, und es gilt $w \in D(A_1)$ und $A_1 w = z$. Für $y \in \mathscr{L}$ erhält man unter Verwendung von $v_2(t_n) \in \mathscr{L}^\perp$ (Satz 5.12 d))

$$\langle y, w\rangle_{A_1} = \lim_{n\to\infty} \langle y, v_2(t_n)\rangle_{A_1} = 0$$

und somit $w \in \mathscr{L}^\perp$.

Nach Lemma 5.11 existiert $\lim_{t\to\infty} \|v_2(t)\|_H$, und wir erhalten für $s \geq 0$:

$$\|w\|_H = \lim_{n\to\infty} \|v_2(t_n)\|_H = \lim_{n\to\infty} \|T(t_n)v_0^{(2)}\|_H = \lim_{n\to\infty} \|T(s+t_n)v_0^{(2)}\|_H = \|T(s)w\|_H.$$

Wir setzen $\widetilde{t}_n := t_n - s$ ($n \in \mathbb{N}$), wobei o.E. $\widetilde{t}_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte. Die obigen Überlegungen zeigen, dass ein $w_1 \in \mathscr{L}^\perp$ existiert so, dass (nach Übergang zu einer Teilfolge) $T(\widetilde{t}_n)v_0^{(2)} \to w_1$ (Konvergenz in H_1). Wie oben erhält man $\|T(s)w_1\|_H = \|w_1\|_H$ und damit $T^*(s)T(s)w_1 = w_1$ (siehe Beweis von Satz 5.12 b)). Damit

$$\begin{aligned}\|T^*(s)w\|_H &= \lim_{n\to\infty} \|T^*(s)T(s+\widetilde{t}_n)v_0^{(2)}\|_H = \|T^*(s)T(s)w_1\|_H = \|w_1\|_H \\ &= \lim_{n\to\infty} \|T(\widetilde{t}_n)v_0^{(2)}\|_H = \|w\|_H.\end{aligned}$$

Also gilt $w \in \mathscr{L}$. Insgesamt folgt $w \in \mathscr{L}^\perp \cap \mathscr{L}$, d.h. $w = 0$, und wir haben gezeigt, dass $v_2(t) = v(t) - T(t)v_0^{(1)} \to 0$ ($t \to \infty$) in H_1 gilt. □

5.15 Satz. *Der Raum $\mathscr{L}$ ist der Abschluss in $D(A_1)$ der linearen Hülle der Eigenvektoren zu rein imaginären Eigenwerten.*

Beweis. **(i)** Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \sigma_p(A_1) \cap i\mathbb{R}$, und seien $v_1, \dots, v_n$ zugehörige Eigenvektoren. Sei ferner $w = \sum_{j=1}^n c_j v_j$ mit $c_j \in \mathbb{C}$. Dann gilt $T(t)w = \sum_{j=1}^n c_j e^{-\lambda_j t} v_j$. Aus $\operatorname{Re}\langle Av_j, v_j\rangle_H = 0$ folgt mit (5-8) $v_{j,3} = 0$ und damit $A^* v_j = -A_1 v_j = -\lambda_j v_j$. Somit erhalten wir für $j, k = 1, \dots, n$

$$\lambda_j \langle v_j, v_k\rangle_H = \langle Av_j, v_k\rangle_H = \langle v_j, A^* v_k\rangle_H = -\overline{\lambda}_k \langle v_j, v_k\rangle_H = \lambda_k \langle v_j, v_k\rangle,$$

und es folgt $\langle v_j, v_k\rangle_H = \delta_{jk}\|v_j\|_H^2$. Daher ist

$$\|T(t)w\|_H^2 = \sum_{j=1}^n |c_j|^2 |e^{-\lambda_j t}|\, \|v_j\|_H^2 = \sum_{j=1}^n |c_j|^2 \|v_j\|_H^2 = \|w\|_H^2,$$

genauso folgt $\|T(t)^* w\|_H = \|w\|_H$. Also ist $w \in \mathscr{L}$. Da $\mathscr{L}$ in $D(A_1)$ abgeschlossen ist, gilt $\mathscr{L} \supset \overline{\operatorname{lin} V}$, wobei V die Menge aller Eigenvektoren zu rein imaginären Eigenwerten bezeichne.

(ii) Sei $\overline{\mathscr{L}}$ der Abschluss von $\mathscr{L}$ in H_1. Für $v_0 \in \mathscr{L}$ gelten $A_1 v_0 \in \overline{\mathscr{L}}$ und $A_1^* v_0 \in \overline{\mathscr{L}}$ wegen

$$A_1 v_0 = -\lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)v_0 - v_0}{t} \in \overline{\mathscr{L}} \quad \text{und } A^* v_0 = -\lim_{t\searrow 0} \frac{T^*(t)v_0 - v_0}{t} \in \overline{\mathscr{L}}.$$

Damit ist die Einschränkung $A|_{\overline{\mathscr{L}}} \colon \overline{\mathscr{L}} \supset D(A|_{\overline{\mathscr{L}}}) := \mathscr{L} \to \overline{\mathscr{L}}$ wohldefiniert. Wie im Beweis von Satz 5.12 a) gesehen wurde, gilt $A_1 v_0 = -A_1^* v_0$ und damit $A|_{\overline{\mathscr{L}}} = (-A^*)|_{\overline{\mathscr{L}}}$.

Definiert man $B := iA|_{\overline{\mathscr{L}}}$ als unbeschränkten Operator in $\overline{\mathscr{L}}$, dann gelten $D(B) = D(A|_{\overline{\mathscr{L}}}) = \mathscr{L}$ und $B^* = B$, d.h. B ist selbstadjungiert. Da die Resolvente von B kompakt ist, existiert nach dem Spektralsatz ein vollständiges Orthonormalsystem

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenvektoren von B mit zugehörigen reellen Eigenwerten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für alle n gilt dann $A_1 v_n = -iBv_n = -i\tau_n v_n$, also ist v_n ein Eigenvektor von A_1 mit rein imaginärem Eigenwert $\lambda_n := -i\tau_n$, und die Vollständigkeit von $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeigt, dass für alle $v \in \mathscr{L}$ in H_1 konvergente Darstellungen der Form

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, v_n\rangle_H v_n, \quad A_1 v = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle v, v_n\rangle_H v_n$$

existieren. Also gilt $v \in \overline{\operatorname{lin} V}$. □

5.16 Korollar. *Es sind äquivalent:*

(i) A_1 *besitzt keine rein imaginären Eigenwerte.*

(ii) Für alle $v_0 \in D(A_1)$ *gilt* $T(t)v_0 \to 0$ *in* H_1*.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen 5.14 und 5.15. □

5.17 Bemerkung. Falls keine rein imaginären Eigenwerte existieren, ist man an der Abklingrate interessiert, d.h. gesucht ist eine Funktion $\rho\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = 0$ und

$$\|T(t)v\|_H \le \rho(t)\|v\|_H \quad (v \in D(A_1)).$$

Besonders gut ist hier exponentielle Stabilität, d.h. $\rho(t) = c_1 e^{-c_2 t}$ mit $c_1, c_2 > 0$. Man kann zeigen, dass dieser Fall für $G = (a,b) \subset \mathbb{R}$ vorliegt, oder auch für $G = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ mit $n = 2$ oder $n = 3$, falls die Anfangsdaten v_0 zusätzlich radial-symmetrisch sind.

Falls G ein Außengebiet ist, d.h. falls $\mathbb{R}^n \subset G$ beschränkt ist, so gelten die obigen Aussagen nicht mehr. In diesem Fall kann man statt Satz 5.14 nur eine lokale Abschätzung der Form

$$\lim_{t\to\infty} \|v(t) - T(t)v_0^1\|_{L^2(G\cap B(0,R))} = 0$$

zeigen.

6. Energiemethoden für nichtautonome Evolutionsgleichungen

6.1 Worum geht's? Nichtautonome Evolutionsgleichungen haben die Form $\partial_t u(t) - A(t)u(t) = 0$, d.h. jetzt hängt der Operator selbst von der Zeit ab. Hier greift die Halbgruppentheorie nicht mehr. Mögliche Ansätze zur Behandlung derartiger Gleichungen sind etwa die Lokalisierung (bzgl. t), die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren (in t und x simultan) sowie Energiemethoden, auch variationelle Methoden genannt. Die Hauptidee ist es, schwache Hilbertraumwertige Lösungen zu betrachten. Eine ähnliche alternative Methode, derartige Gleichungen zu behandeln, ist die Theorie der CD-Systeme von Kato, welche hier aber nicht betrachtet wird.

a) Parabolische Gleichungen

Im Folgenden seien $T > 0$ und $V \subset H \subset V'$ ein Gelfand-Tripel mit separablen reellen Hilberträumen V und H (siehe Definition 1.4). Mit C werde eine generische Konstante bezeichnet, d.h. der Wert von C kann sich bei jedem Auftreten ändern.

Wir betrachten eine abstrakte nichtautonome Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(t)u(t) &= f(t) \quad (t \in (0,T)), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{6-1}$$

Dabei ist $A\colon [0,T] \to L(V,V')$ eine zeitabhängige Familie von Operatoren, und $f\colon [0,T] \to V'$ und $u_0 \in H$ sind gegeben.

6.2 Satz (Ein Interpolationssatz). *Falls $u \in L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);V')$, so gilt (nach eventueller Änderung auf einer Nullmenge) $u \in C([0,T],H)$. Die Einbettung*

$$L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);V') \subset C([0,T],H)$$

ist stetig.

Beweis. Wir setzen $Z := L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);V')$ mit Norm

$$\|u\|_Z := \big(\|u\|^2_{L^2((0,T);V)} + \|u\|^2_{H^1((0,T);V')}\big)^{1/2}.$$

Sei zunächst $u \in Z \cap C^1([0,T],H)$. Wegen $\frac{\partial}{\partial t}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u(t), \partial_t u(t)\rangle_H$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für alle $t, t_0 \in [0,T]$

$$\|u(t)\|_H^2 = \|u(t_0)\|_H^2 + 2\int_{t_0}^t \langle u(s), \partial_s u(s)\rangle_H ds.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein t_0 mit

$$\|u(t_0)\|_H^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds.$$

Mit diesem t_0 und der Abschätzung

$$|\langle u(s), \partial_s u(s)\rangle_H| = |\langle u(s), \partial_s u(s)\rangle_{V\times V'}| \le \|\partial_s u(s)\|_{V'}\|u(s)\|_V \quad \text{für fast alle } s \in [0,T]$$

erhält man für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_H^2 &\le \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds + 2\int_0^t \|\partial_s u(s)\|_{V'}\|u(s)\|_V ds\\ &\le \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds + 2\int_0^T \|\partial_s u(s)\|_{V'}\|u(s)\|_V ds\\ &\le \frac{1}{T}\|u\|^2_{L^2((0,T);H)} + 2\|u\|_{H^1((0,T);V')}\|u\|_{L^2((0,T);V)}.\end{aligned}$$

Wegen $\|u\|_{L^2((0,T);H)} \le C\|u\|_{L^2((0,T);V)}$ gilt also für alle $u \in Z \cap C^1([0,T],H)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C([0,T],H)} \le C\big(\|u\|^2_{L^2((0,T);V)} + \|u\|_{H^1((0,T);V')}\|u\|_{L^2((0,T);V)}\big)^{1/2} \le C\|u\|_Z. \tag{6-2}$$

Sei nun $u \in Z$ allgemein. Da $Z \cap C^1([0,T];H)$ dicht in Z ist, existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Z\cap C^1([0,T];H)$ mit $\|u_n - u\|_Z \to 0$. Nach (6-2) gilt $\|u_n - u_m\|_{C([0,T],H)} \to 0$, d.h. $(u_n)_n$ ist eine Cauchyfolge in $C([0,T],H)$ und damit konvergent gegen ein Element $\widetilde{u} \in C([0,T],H)$. Da $u_n \to u$ in Z, folgt $u = \widetilde{u}$ fast überall. Die Stetigkeit der Einbettung $Z \subset C([0,T],H)$ folgt aus (6-2). □

In Verallgemeinerung des autonomen Falls (Definition 1.5) definiert man:

6.3 Definition. Die zur Operatorfamilie $(A(t))_{t\in[0,T]}$ gehörige parametrisierte Bilinearform (quadratische Form) $a\colon (0,T)\times V\times V \to \mathbb{K}$ ist definiert durch

$$a(t,u,v) := -\langle A(t)u, v\rangle_{V'\times V} = -\big(A(t)u\big)v \quad (t \in (0,T),\ u,v \in V).$$

Die Form (und die Operatorfamilie) heißt koerzitiv, falls positive Konstanten α, β existieren mit

$$a(t,u,u) \ge \alpha\|u\|_V^2 - \beta\|u\|_H^2 \quad (t \in [0,T],\ u \in V). \tag{6-3}$$

Die Form und die Operatorfamilie heißen streng koerzitiv oder V-elliptisch, falls die Gleichung (6-3) mit $\beta = 0$ gilt.

6.4 Satz (A priori-Abschätzung)**.** *Sei $A \in C([0,T], L(V,V'))$ koerzitiv. Dann existiert eine Konstante $C_A > 0$ so, dass für alle $u \in Z := L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);V')$ die Abschätzung*

$$\|u\|_{L^2((0,T),V)} \leq C_A\big(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2((0,T),V')}\big) \tag{6-4}$$

gilt, wobei $f(t) := \partial_t u(t) - A(t)u(t)$ und $u_0 := u(0)$ gesetzt wurde. Insbesondere ist die Lösung von (6-1) eindeutig und hängt stetig von den Daten ab.

Beweis. O.E. sei A streng koerzitiv, sonst betrachte $v(t) := e^{-\beta t}u(t)$, welches das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \partial_t v(t) - A(t)v(t) + \beta v(t) &= e^{-\beta t} f(t), \\ v(0) &= u_0 \end{aligned}$$

erfüllt, mit zugehöriger Bilinearform $a(t,u,u) + \beta\|u\|_H^2$.

Man beachte, dass $u_0 \in H$ nach Satz 6.2 wohldefiniert ist und $f \in L^2((0,T),V')$ wegen $u \in Z$ gilt. Für $u \in Z \cap C^1([0,T],H)$ folgt für alle $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\|u(t)\|_H^2 &= 2\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_H = 2\langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{V'\times V} \\ &= 2\big\langle A(t)u(t) + f(t), u(t)\big\rangle_{V'\times V} = -2a(t,u(t),u(t)) + 2\langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V}. \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\|u(T)\|_H^2 + 2\int_0^T a(t,u(t),u(t))dt = \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V} dt.$$

Wir nützen die Koerzitivität aus, schätzen den rechten Integranden ab und erhalten

$$\|u(T)\|_H^2 + 2\alpha\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \leq \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^T \|f(t)\|_{V'}\|u(t)\|_V dt.$$

Auf der linken Seite lassen wir den ersten Term weg, auf der rechten Seite verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Youngsche Ungleichung $ab \leq \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2$ (mit frei wählbarem $\varepsilon > 0$). Es ergibt sich

$$2\alpha\|u\|_{L^2((0,T);V)}^2 \leq \|u_0\|_H^2 + 2\varepsilon\|u\|_{L^2((0,T);V)}^2 + 2C_\varepsilon\|f\|_{L^2((0,T),V')}^2.$$

Wählt man ε klein genug (etwa $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$), so erhält man (6-4) für alle $u \in Z \cap C^1([0,T],H)$. Für allgemeine $u \in Z$ folgt (6-4) wieder mit einem Dichtheitsargument.

Da die Gleichung linear ist, folgt aus (6-4) die Eindeutigkeit der Lösung, da die Differenz zweier Lösungen die Gleichung mit $f = 0$ und $u_0 = 0$ erfüllt. □

6.5 Satz. *Sei $A \in C([0,T], L(V,V'))$ koerzitiv. Dann existiert zu jedem $u_0 \in H$ und $f \in L^2((0,T);V')$ genau eine Lösung $u \in L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);V')$ von (6-1).*

Der Beweis verwendet das sogenannte Faedo-Galerkin-Verfahren, welches auf einer Projektion auf endlich-dimensionale Unterräume basiert.

Beweis. **(i)** Eindeutige Lösbarkeit der endlich-dimensionalen Systeme:

Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Orthonormalbasis von V (bzgl. der Topologie von V). Man definiert $V_n := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ und betrachtet die orthogonalen Projektionen $P_n\colon H \to V_n$ (orthogonal in H).

Die Funktion $u_n = \sum_{i=1}^n c_{in}(t)v_i$ sei definiert als die Lösung von

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u_n(t), v_j\rangle_{V'\times V} - \langle A(t)u_n(t), v_j\rangle_{V'\times V} = \langle f(t), v_j\rangle_{V'\times V} \quad (j = 1, \dots, n),\\ u_n(0) = P_n u_0. \end{aligned} \tag{6-5}$$

Für die Koeffizienten $(c_{in}(t))_{i=1,\dots,n}$ erhält man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Setzt man die obige Entwicklung von u_n ein, erhält man das System

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\partial_t c_n(t) &= \mathcal{A}(t)c_n(t) + F(t) \quad (t \in (0,T)),\\ c_n(0) &= C_0. \end{aligned} \tag{6-6}$$

Dabei wurden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned} c_n(t) &:= \big(c_{in}(t)\big)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n,\\ C_0 &:= \big(\langle P_n u_0, v_i\rangle_V\big)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n,\\ \mathcal{A}(t) &:= \big(\langle A(t)v_i, , v_j\rangle_{V'\times V}\big)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n},\\ \mathcal{M} &:= \big(\langle v_i, v_j\rangle_H\big)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n},\\ F(t) &:= \big(\langle f(t), v_i\rangle_{V'\times V}\big)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Es gilt $\mathcal{A} \in C([0,T], \mathbb{R}^{n\times n})$ und $F \in L^2((0,T);\mathbb{R}^n) \subset L^1((0,T);\mathbb{R}^n)$, und die Matrix $\mathcal{M}$ ist invertierbar. Für das homogene System ist daher der Satz von Picard-Lindelöf in der globalen Version anwendbar, für das inhomogene System die Variation der Konstanten. Daher existiert eine eindeutige Lösung $c_n \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ mit $\partial_t c_n \in L^2((0,T);\mathbb{R}^n)$ von (6-6), und somit eine eindeutige Lösung

$$u_n \in C([0,T],V) \quad \text{mit } \partial_t u_n \in L^2((0,T);V)$$

von (6-5).

(ii) Gleichmäßige Abschätzung für die Lösungen und Konvergenz einer Teilfolge:

Da u_n die Lösung von (6-5) ist und $\partial_t u_n \in L^2((0,T);V)$ sowie $u_n(t) \in V_n$ gilt, erhalten wir

$$\langle \partial_t u_n(t), u_n(t)\rangle_H - \langle A(t)u_n(t), u_n(t)\rangle_{V'\times V} = \langle f(t), u_n(t)\rangle_{V'\times V}.$$

Nur diese schwache Formulierung der Differentialgleichung wurde im Beweis von Satz 6.4 benötigt. Es gilt also (mit derselben Konstante wie in Satz 6.4, welche somit nicht von n abhängt)

$$\|u_n\|_{L^2((0,T);V)} \le C_A\big(\|f\|_{L^2((0,T),V')} + \|u_0\|_H\big),$$

wobei $\|P_n u_0\|_H \le \|u_0\|_H$ verwendet wurde.

Somit ist die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2((0,T);V)$ beschränkt und besitzt daher eine schwach konvergente Teilfolge, welche wieder mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet sei. Es sei $u_n \rightharpoonup u \in L^2((0,T);V)$.

(iii) Der schwache Grenzwert löst die ursprüngliche Gleichung:

Zu zeigen ist, dass u eine Lösung von (6-1) ist. Dazu sei $\varphi \in \mathscr{D}((0,T))$ und $v \in V_N$. Da u_n eine Lösung von (6-5) ist, folgt für $n \ge N$ und für fast alle $t \in [0,T]$

$$\varphi(t)\langle \partial_t u_n(t), v\rangle_H = \varphi(t)\langle A(t)u_n(t), v\rangle_{V'\times V} + \varphi(t)\langle f(t), v\rangle_{V'\times V}.$$

Integration bzgl. t und partielle Integration liefert

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u_n(t), v\rangle_H dt = \int_0^T \varphi(t)\langle A(t)u_n(t), v\rangle_{V'\times V} dt + \int_0^T \varphi(t)\langle f(t), v\rangle_{V'\times V} dt.$$

Da $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2((0,T);V)$ und damit auch $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2((0,T),H)$ sowie $Au_n \rightharpoonup Au$ in $L^2((0,T),V')$ gilt, können wir den Grenzwert $n\to\infty$ betrachten und erhalten

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u(t), v\rangle_H dt = \int_0^T \varphi(t)\langle A(t)u(t), v\rangle_{V'\times V} dt + \int_0^T \varphi(t)\langle f(t), v\rangle_{V'\times V} dt.$$

Dies gilt für alle $v \in V_N$ mit beliebigem $N\in\mathbb{N}$. Da $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von V ist, ist $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} V_N$ dicht in V, und somit gilt

$$-\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt = \int_0^T \varphi(t)A(t)u(t)dt + \int_0^T \varphi(t)f(t)dt$$

für alle $\varphi \in D((0,T))$ als Gleichheit in V'. Also gilt für die distributionelle Ableitung $\partial_t u$ die Gleichheit $\partial_t u = Au + f \in L^2((0,T);V')$. Insbesondere ist

$$u \in H^1((0,T);V') \cap L^2((0,T);V) \subset C([0,T],H).$$

Zu zeigen ist noch $u(0) = u_0$. Sei dazu $\varphi \in C^1([0,T])$ mit $\varphi(T) = 0$ und $v \in V_N$. Dann gilt wieder für $n \ge N$ mit partieller Integration

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u_n(t), v\rangle_H dt + \varphi(0)\langle u_n(0), v\rangle_H = \int_0^T \varphi(t)\langle A(t)u_n(t) + f(t), v\rangle_{V'\times V} dt. \tag{6-7}$$

Für $n \geq N$ gilt wegen $v \in V_N$ und da P_n eine orthogonale Projektion und damit selbstadjungiert ist,

$$\langle u_n(0), v\rangle_H = \langle P_n u_0, v\rangle_H = \langle u_0, P_n v\rangle_H = \langle u_0, v\rangle_H.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir daher aus (6-7)

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u(t), v\rangle_H dt + \varphi(0)\langle u_0, v\rangle_H = \int_0^T \varphi(t)\langle A(t)u(t) + f(t), v\rangle_{V'\times V} dt. \tag{6-8}$$

Andererseits gilt $\partial_t u = Au + f \in L^2((0,T), V')$. Multiplikation mit φ und Anwendung auf v, Integration über $(0,T)$ und partielle Integration liefert

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u(t), v\rangle_H dt + \varphi(0)\langle u(0), v\rangle_H = \int_0^T \varphi(t)\langle A(t)u(t) + f(t), v\rangle_{V'\times V} dt.$$

Der Vergleich mit (6-8) liefert $\varphi(0)\langle u_0 - u(0), v\rangle_H = 0$. Für $\varphi(0) \neq 0$ folgt $\langle u_0 - u(0), v\rangle_H = 0$ für alle $v \in V_N$. Da $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} V_N$ dicht in V und damit auch in H ist, folgt $u(0) = u_0 \in H$. $\square$

6.6 Bemerkung. Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes ist somit die Abbildung

$$L^2((0,T); V) \cap H^1((0,T); V') \to L^2((0,T); V') \times H,\ u \mapsto (\partial_t u - Au, u(0))$$

ein Isomorphismus von Hilberträumen ist, insbesondere ist die Umkehrabbildung, d.h. die Lösung der Gleichung, ebenfalls stetig. Diese Stetigkeit könnte auch mit dem Satz vom stetigen Inversen bewiesen werden, allerdings wird in obigem Beweis die a priori-Abschätzung sowohl für die Eindeutigkeit der Lösung als auch für die Existenz des schwachen Grenzwerts beim Galerkin-Ansatz benötigt.

Der Isomorphismus zeigt auch, dass die Lösung so glatt ist, wie es aufgrund der Gleichung erwartet werden kann; man verliert also keine Regularität. Dies ist typisch für parabolische Gleichung und wird auch als maximale Regularität oder optimale Regularität bezeichnet.

6.7 Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Gebiet, und sei $A = A(x,t)$ ein Differentialoperator der Form

$$A(x,t)u = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}\big(a_{ij}(x,t)\partial_{x_i} u\big) + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\partial_{x_i} u + c(x,t)u.$$

Dabei seien die Koeffizienten reellwertig und stetig in x und t, und die Matrix $(a_{ij})_{i,j}$ sei strikt positiv definit, d.h. es gelte

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq q|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega,\ t \in [0,T]).$$

Dann sind die Bedingungen von Satz 6.5 erfüllt, wobei $V := H_0^1(\Omega)$, $H := L^2(\Omega)$ und damit $V' = H^{-1}(\Omega)$ gewählt wird. Somit besitzt das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - A(x,t)u(x,t) &= f(x,t) \quad && (x \in \Omega,\, t \in [0,T]), \\ u(x,t) &= 0 && (x \in \partial\Omega,\, t \in [0,T]), \\ u(x,0) &= u_0(x) && (x \in \Omega) \end{aligned}$$

für jedes $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $f \in L^2((0,T), H^{-1}(\Omega))$ eine eindeutige Lösung

$$u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega)) \cap H^1((0,T); H^{-1}(\Omega)).$$

Man spricht hier auch von einer schwachen Lösung.

Wir werden im Folgenden eine Aussage für höhere Regularität der Lösung zeigen. Dafür betrachtet man den Operator $A(t)$ als unbeschränkten Operator in H (vgl. Definition 1.5).

6.8 Definition. Sei $A\colon [0,T] \to L(V,V')$ eine Operatorfamilie. Dann definiert man die Familie $(A_H(t))_{t\in[0,T]}$ unbeschränkter Operatoren in H, wobei $A_H(t)$ die H-Realisierung von $A(t)$ sei, gegeben durch $D(A_H(t)) := \{u \in V : A(t)u \in H\} \subset H$ und $A_H(t)u := A(t)u$ $(u \in D(A_H(t)))$.

6.9 Satz (Höhere Regularität). *Sei $A \in C^1([0,T], L(V,V'))$ koerzitiv, und seien $u_0 \in D(A_H(0))$ und*

$$f \in Z := L^2((0,T); V) \cap H^1((0,T); V').$$

Dann gilt für die (nach Satz 6.5 existierende und eindeutige) Lösung u von (6-1) die höhere Regularität

$$\begin{aligned} u &\in H^1((0,T); V) \cap H^2((0,T); V') \subset C^1([0,T], H), \\ Au &\in L^2((0,T); V) \cap H^1((0,T); V') \subset C([0,T], H). \end{aligned}$$

Beweis. Wieder sei o.E. A koerzitiv mit Konstante $\beta = 0$ in (6-3). Formales Differenzieren der Gleichung (6-1) liefert

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t) - A(t)\partial_t u(t) - (\partial_t A)(t)u(t) &= \partial_t f(t) \quad (t \in (0,T)), \\ \partial_t u(0) &= A(0)u_0 + f(0). \end{aligned}$$

Nach Satz 6.2 ist $f \in C([0,T], H)$ und damit $f(0) \in H$, nach Voraussetzung gilt $u_0 \in D(A_H(0))$ und damit $A(0)u_0 \in H$ sowie $t \mapsto (\partial_t A(t))u(t) + \partial_t f(t) \in L^2((0,T); V')$. (Man beachte, dass $u \in L^2((0,T); V)$ und $\partial_t A \in C([0,T], L(V,V'))$ gilt.) Somit existiert nach Satz 6.5 eine eindeutige Lösung $v \in Z$ von

$$\begin{aligned} \partial_t v(t) - A(t)v(t) &= (\partial_t A(t))u(t) + (\partial_t f)(t) \quad (t \in (0,T)), \\ v(0) &= A(0)u_0 + f(0). \end{aligned} \tag{6-9}$$

Wir zeigen nun $\partial_t u = v$. Dazu sei

$$z(t) := u_0 + \int_0^t v(s)ds \quad (t \in [0,T]).$$

Dann gilt $z \in H^1((0,T);V)$ mit $\partial_t z = v$ und für alle $t \in [0,T]$ als Gleichheit in V'

$$\begin{aligned} A(t)z(t) &= A(t)u_0 + \int_0^t A(t)v(s)ds \\ &= A(t)u_0 + \int_0^t A(s)v(s)ds + \int_0^t \big(A(t) - A(s)\big)v(s)ds. \end{aligned}$$

Da v (6-9) löst, gilt für fast alle $s \in [0,T]$ die Gleichheit $A(s)v(s) = \partial_s v(s) - (\partial_s A(s))u(s) - \partial_s f(s)$ und damit

$$\begin{aligned} A(t)z(t) = A(t)u_0 + v(t) - v(0) - f(t) + f(0) - \int_0^t (\partial_s A(s))u(s)ds \\ + \int_0^t \big(A(t) - A(s)\big)v(s)ds. \end{aligned}$$

Mit $v(s) = \partial_s z(s)$ und partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} A(t)z(t) &= A(t)u_0 + \partial_t z(t) - v(0) - f(t) + f(0) - \int_0^t (\partial_s A)(s)u(s)ds \\ &\quad + \int_0^t (\partial_s A(s))z(s)ds - \big(A(t) - A(0)\big)z(0) \\ &= \partial_t z(t) - f(t) + \int_0^t (\partial_s A(s))\big(z(s) - u(s)\big)ds, \end{aligned}$$

wobei $v(0) = A(0)u_0 + f(0)$ verwendet wurde. Für die Differenz $w := z - u \in Z$ erhält man also die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t w - A(t)w &= -\int_0^t (\partial_s A)(s)w(s)ds \quad (t \in (0,T)), \\ w(0) &= 0 \end{aligned}$$

als Gleichheit in V' für fast alle t. Wendet man dies auf $w(t) \in V$ an, so erhält man für fast alle t

$$\frac{1}{2}\partial_t\big(\|w(t)\|_H^2\big) - \langle A(t)w(t), w(t)\rangle_{V'\times V} = \int_0^t \langle \partial_s A(s)w(s), w(t)\rangle_{V'\times V} ds.$$

Integriert man über $t \in [0,\tau]$ mit $\tau \in [0,T]$, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}\|w(\tau)\|_H^2 = -\int_0^\tau a(t, w(t), w(t)) + \int_0^\tau \int_0^t \langle (\partial_s A)(s)w(s), w(t)\rangle_{V'\times V} ds\, dt. \quad \text{(6-10)}$$

Für $C_1 := \max_{t\in[0,T]} \|\partial_t A(t)\|_{L(V,V')}$ gilt

$$\Big|\int_0^\tau \int_0^t \langle (\partial_s A)(s)w(s), w(t)\rangle_{V'\times V} ds\, dt\Big| \le C_1 \int_0^\tau \int_0^t \|w(s)\|_V \|w(t)\|_V ds\, dt.$$

Unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\int_0^t \|w(s)\|_V ds = \int_0^\tau \chi_{[0,t]}(s)\|w(s)\|_V ds \le \sqrt{t}\|w\|_{L^2((0,t);V)} \le \sqrt{t}\|w\|_{L^2((0,\tau);V)}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \int_0^t \|w(s)\|_V \|w(t)\|_V ds\, dt &\le \|w\|_{L^2((0,\tau);V)} \int_0^\tau \|w(t)\|_V \sqrt{t} dt\\ &\le \|w\|^2_{L^2((0,\tau);V)} \Big(\int_0^\tau t dt\Big)^{1/2} = \frac{\tau}{\sqrt{2}}\|w\|^2_{L^2((0,\tau);V)}.\end{aligned}$$

Da A koerzitiv mit $\beta = 0$ ist, gilt andererseits

$$\int_0^\tau a(t, w(t), w(t))dt \ge \alpha\|w\|^2_{L^2((0,T);V)}.$$

In (6-10) eingesetzt erhält man für alle $\tau \in [0, T]$

$$\frac{1}{2}\|w(\tau)\|_H^2 \le \Big(\frac{C_1\tau}{\sqrt{2}} - \alpha\Big)\|w\|^2_{L^2((0,\tau);V)}.$$

Für $\tau \in [0, \tau_0]$ mit $\tau_0 := \frac{\sqrt{2}\alpha}{C_1}$ ist die rechte Seite nichtpositiv, und es folgt $w(\tau) = 0$. Eine Wiederholung dieses Arguments in den Intervallen $[\tau_0, 2\tau_0]$, $[2\tau_0, 3\tau_0], \dots$ liefert schließlich $w = 0$ und damit $0 = \partial_t w = \partial_t z - \partial_t u = v - \partial_t u$, d.h. es gilt $\partial_t u = v$.

Wegen $v \in Z$ folgt damit $\partial_t u \in Z$ und wegen $Au = \partial_t u - f$ auch $Au \in Z$. Nach dem Einbettungssatz gilt $Z \subset C([0, T], H)$ und damit $u \in C^1([0, T], H)$ sowie $Au \in C([0, T], H)$. □

b) Hyperbolische Gleichungen

Nun wollen wir hyperbolische Gleichungen betrachten. Hier ist die Lösbarkeit mit der Selbstadjungiertheit der Operatoren $A_H(t)$ verknüpft. Wieder sei $V \subset H \subset V'$ ein Gelfand-Tripel mit reellen separablen Hilberträumen V, H, V' und $T \in (0,\infty)$.

Sei $A\colon [0, T] \to L(V, V')$ eine koerzitive Operatorfamilie, und

$$a\colon [0, T] \times V \times V \to \mathbb{R},\ a(t, u, v) = \langle A(t)u, v\rangle_{V'\times V}$$

die zugehörige Bilinearform. Die Familie A und die zugehörige Bilinearform heißen symmetrisch, falls für jedes $t \in [0, T]$ die Bilinearform $a(t,\cdot,\cdot)$ symmetrisch ist. Nach

Lemma 1.7 ist dies äquivalent dazu, dass für jedes $t \in [0,T]$ der Operator $A_H(t)$ selbstadjungiert ist.

Die zu $(A(t))_{t\in[0,T]}$ gehörige hyperbolische Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t) - A(t)u(t) &= f(t) \quad (t \in (0,T)),\\ u(0) &= u_0, \\ \partial_t u(0) &= u_1. \end{aligned} \tag{6-11}$$

Dabei ist die erste Zeile als Gleichheit in V' für fast alle $t \in (0,T)$ zu verstehen. Als Lösungsraum werden wir

$$\mathbb{E} := \{u \in L^2((0,T);V) \,|\, \partial_t u \in L^2((0,T);H),\ \partial_t^2 u \in L^2((0,T);V')\}$$

betrachten.

6.10 Bemerkung. Es gilt

$$\mathbb{E} = L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);H) \cap H^2((0,T);V'),$$

wie sich sofort aus der stetigen Einbettung $V \subset H$ und damit $L^2((0,T);V) \subset L^2((0,T);H)$ ergibt. Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz gilt damit auch

$$\mathbb{E} \subset C([0,T],H) \cap C^1([0,T],V').$$

Wir betrachten zunächst die Eindeutigkeit der Lösung.

6.11 Satz. *Sei $A \in C^1([0,T],L(V,V'))$ koerzitiv und symmetrisch. Falls $u \in \mathbb{E}$ eine Lösung von (6-11) mit $f = 0$, $u_0 = u_1 = 0$ ist, so gilt $u(t) = 0$ für alle $t \in [0,T]$.*

Beweis. Sei $s \in (0,T)$ fest. Definiere

$$v(t) := \int_s^t u(\tau)d\tau \quad (t \in [0,s]).$$

Dann gilt $v \in H^1((0,s);V) \subset C([0,s],V)$ mit $\partial_t v = u$ und $v(s) = 0$. Nach Voraussetzung gilt $\partial_t^2 u(t) - A(t)u(t) = 0 \in V'$ für fast alle $t \in [0,s]$, und mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^s \langle \partial_t^2 u(t) - A(t)u(t), v(t)\rangle_{V'\times V} dt \\ &= -\int_0^s \langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{V'\times V} + \int_0^s a(t,u(t),v(t))dt \end{aligned}$$

(man beachte, dass $\partial_t u \in C([0,T],V')$ mit $\partial_t u(0) = 0 \in V'$ und $v \in C([0,T],V)$ mit $v(s) = 0$ gilt). Setze

$$a_t(t,u,v) := -\langle (\partial_t A)(t)u, v\rangle_{V'\times V} \quad (u,v \in V).$$

Dann gilt unter Verwendung der Symmetrie von a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(a(t,v(t),v(t))\big) &= a_t(t,v(t),v(t)) + 2a(t,\partial_t v(t),v(t))\\ &= a_t(t,v(t),v(t)) + 2a(t,u(t),v(t)).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^s \frac{d}{dt}\big[a(t,v(t),v(t)) - \|u(t)\|_H^2\big]dt - \int_0^s a_t(t,v(t),v(t))dt\\ = 2\int_0^s \big[a(t,u(t),v(t)) - \langle \partial_t u(t), u(t)\rangle_{V'\times V}\big]dt = 0.\end{aligned}$$

Wegen $v(s) = 0$ und damit $a(s,v(s),v(s)) = 0$ und $u(0) = 0$ erhalten wir

$$\|u(s)\|_H^2 + a(0,v(0),v(0)) = -\int_0^s a_t(t,v(t),v(t))dt. \tag{6-12}$$

Da a_t stetig ist, gilt

$$\Big|\int_0^s a_t(t,v(t),v(t))dt\Big| \le C\int_0^s \|v(t)\|_V^2 dt.$$

Aus der Koerzivität von a erhält man aus (6-12)

$$\|u(s)\|_H^2 + \alpha\|v(0)\|_V^2 \le \beta\|v(0)\|_H^2 + C\int_0^s \|v(t)\|_V^2 dt.$$

Setze $w(t) := v(t) - v(0)$. Dann gilt $w(s) = -v(0)$ und $v(t) = w(t) - w(s)$. Eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned}\|u(s)\|_H^2 + \|w(s)\|_V^2 &\le C_1\Big(\|w(s)\|_H^2 + \int_0^s \|w(t)-w(s)\|_V^2 dt\Big)\\ &\le C_1\|w(s)\|_H^2 + 2C_1 s\|w(s)\|_V^2 + 2C_1\int_0^s \|w(t)\|_V^2 dt.\end{aligned}$$

Mit Cauchy-Schwarz gilt

$$\|w(s)\|_H^2 = \|v(0)\|_H^2 = \Big\|\int_0^s u(t)dt\Big\|_H^2 \le s\int_0^s \|u(t)\|_H^2 dt$$

und damit

$$\|u(s)\|_H^2 + (1-2C_1 s)\|w(s)\|_V^2 \le C_2\int_0^s \big(\|u(t)\|_H^2 + \|w(t)\|_V^2\big)dt.$$

Betrachtet man nun s mit $2C_1 s \le \frac12$, so folgt aus dem Lemma von Gronwall $u(s) = 0$, $w(s) = 0$ $(s \in [0, \frac{1}{4C_1}])$. Dieselbe Argumentation liefert nun $u = 0$ in $[\frac{1}{4C_1}, \frac{2}{4C_1}]$ etc. Also gilt $u = 0$. □

6.12 Satz (Lösbarkeitssatz für hyperbolische Gleichungen)**.** *Sei $A \in C^1([0,T], L(V,V'))$ koerzitiv und symmetrisch. Dann existiert zu jedem $f \in L^2((0,T);H)$, $u_0 \in V$ und $u_1 \in H$ genau eine Lösung $u \in \mathbb{E}$ von (6-11). Die Abbildung*

$$\begin{gathered}(f, u_0, u_1) \mapsto (u, \partial_t u),\\ L^2((0,T);H) \times V \times H \to L^2((0,T);V) \times L^2((0,T);H)\end{gathered}$$

ist stetig.

6.13 Bemerkung. Für eine Lösung $u \in \mathbb{E}$ folgt $f = \partial_t^2 u - Au \in L^2((0,T);V')$. Im Satz wird aber die höhere Regularität $f \in L^2((0,T);H)$ verlangt. Insbesondere besagt der Satz nicht, dass die Abbildung $u \mapsto (f, u_0, u_1)$, $\mathbb{E} \to L^2((0,T);H) \times V \times H$ ein Isomorphismus von Hilberträumen ist. Hier liegt also keine maximale Regularität vor.

Beweis von Satz 6.12. Die Eindeutigkeit der Lösung wurde schon in Satz 6.11 gezeigt. Für die Existenz verwendet man dasselbe Schema wir im parabolischen Fall:

(i) Galerkin-Approximation:

Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Orthonormalbasis von V, sei $V_n := \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, und seien $P_n \colon H \to V_n$ die orthogonale Projektion in H auf V_n und $\widetilde{P}_n \colon V \to V_n$ die orthogonale Projektion in V auf V_n. Wir definieren $u_n = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) v_i$ als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\langle \partial_t^2 u_n(t), v_j\rangle_{V'\times V} - \langle A(t)u_n(t), v_j\rangle_{V'\times V} = \langle f(t), v_j\rangle_{V'\times V} \quad (j = 1, \dots, n),\\ u_n(0) = \widetilde{P}_n(u_0),\\ \partial_t u_n(0) = P_n(u_1).\end{aligned} \tag{6-13}$$

Man erhält eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Koeffizienten c_{in} mit eindeutiger Lösung $c_n(t) = (c_{in}(t))_{i=1,\dots,n}$. Für die zugehörigen eindeutigen Lösungen u_n von (6-13) gilt $u_n \in C^1([0,T],V) \cap H^2((0,T);V)$.

(ii) Energieabschätzung für die Lösungen der endlich-dimensionalen Systeme:

Wegen $u_n \in C^1([0,T],V)$ mit $\partial_t u_n(t) \in V_n$ können wir in (6-13) v_j durch $\partial_t u_n(t)$ ersetzen und erhalten

$$\langle \partial_t^2 u_n(t), \partial_t u_n(t)\rangle_H - \langle A(t)u_n(t), \partial_t u_n(t)\rangle_{V'\times V} = \langle f(t), \partial_t u_n(t)\rangle_{V'\times V}. \tag{6-14}$$

Mit $\partial_t \|\partial_t u_n(t)\|_H^2 = 2\langle \partial_t^2 u_n(t), \partial_t u_n(t)\rangle_H$ und

$$\partial_t a(t, u_n(t), u_n(t)) = a_t(t, u_n(t), u_n(t)) + 2a(t, u_n(t), \partial_t u_n(t))$$

erhält man aus (6-14)

$$\|\partial_t u_n(t)\|_H^2 - \|\partial_t u_n(0)\|_H^2 + a(t, u_n(t), u_n(t)) - a(0, u_n(0), u_n(0))$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \Big(2\langle \partial_s^2 u_n(s), \partial_s u_n(s)\rangle_H + a_s(s, u_n(s), u_n(s)) + 2a(s, u_n(s), \partial_s u_n(s))\Big) ds \\
&= \int_0^t \Big(a_s(s, u_n(s), u_n(s)) + 2\langle f(s), \partial_s u_n(s)\rangle_H\Big) ds.
\end{aligned}
$$

Aus der Koerzivität von a und der Stetigkeit von a und a_t folgt

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t u_n(t)\|_H^2 + \alpha\|u_n(t)\|_V^2 &\le \|\partial_t u_n(0)\|_H^2 + \beta\|u_n(t)\|_H^2 + C_1\|u_n(0)\|_V^2 \\
&\quad + C_1 \int_0^t \|u_n(s)\|_V^2 ds + 2\int_0^t \|f(s)\|_H \|\partial_s u_n(s)\|_H ds.
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\|u_n(t)\|_H^2 \le \Big(\|u_n(0)\|_H + \int_0^t \|\partial_s u_n(s)\|_H ds\Big)^2 \le C\Big(\|u_n(0)\|_V^2 + \int_0^t \|\partial_s u_n(s)\|_H^2 ds\Big)
$$

folgt

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t u_n(t)\|_H^2 + \|u_n(t)\|_V^2 &\le C_2\Big[\|\partial_t u_n(0)\|_H^2 + \|u_n(0)\|_V^2 + \int_0^t \|f(s)\|_H^2 ds \\
&\quad + \int_0^t \Big(\|\partial_s u_n(s)\|_H^2 + \|u_n(s)\|_V^2\Big) ds\Big].
\end{aligned}
$$

Wir wenden das Gronwall-Lemma an und erhalten

$$
\|\partial_t u_n(t)\|_H^2 + \|u_n(t)\|_V^2 \le C\Big(\|\partial_t u_n(0)\|_H^2 + \|u_n(0)\|_V^2 + \int_0^t \|f(s)\|_H^2 ds\Big).
$$

Mit $\|\partial_t u_n(0)\|_H \le \|u_1\|_H$, $\|u_n(0)\|_V \le \|u_0\|_V$ und $f \in L^2((0,T);H)$ erhält man

$$
\|u_n\|_{L^2((0,T);V)} + \|\partial_t u_n\|_{L^2((0,T);H)} \le C\Big(\|u_0\|_V + \|u_1\|_H + \|f\|_{L^2((0,T);H)}\Big). \tag{6-15}
$$

(iii) Schwache Konvergenz der approximativen Lösungen:

Nach (ii) sind die Folgen $(u_n)_n \subset L^2((0,T);V)$ und $(\partial_t u_n)_n \subset L^2((0,T);H)$ beschränkt. Somit existiert eine Teilfolge (o.E. wieder mit $(u_n)_n$ bezeichnet) mit

$$
\begin{aligned}
u_n &\rightharpoonup u \text{ in } L^2((0,T);V) \text{ (und damit in } L^2((0,T);H)), \\
\partial_t u_n &\rightharpoonup z \text{ in } L^2((0,T);H).
\end{aligned}
$$

Für $\varphi \in \mathscr{D}((0,T))$ und $v \in V_N$ gilt

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \varphi'(t)\langle u(t), v\rangle_H dt &= \langle u, \varphi'(\cdot)v\rangle_{L^2((0,T);H)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi'(\cdot)v\rangle_{L^2((0,T);H)} = -\lim_{n\to\infty} \langle \partial_t u_n, \varphi(\cdot)v\rangle_{L^2((0,T);H)}
\end{aligned}
$$

$$= -\langle z, \varphi(\cdot)v\rangle_{L^2((0,T);H)} = -\int_0^T \varphi(t)\langle z(t), v\rangle_H dt.$$

Also ist $\partial_t u = z$ und damit $u \in L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);H)$ sowie $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1((0,T);H)$.

(iv) Der schwache Grenzwert ist eine Lösung der Gleichung:

Die Abbildung $\gamma_0\colon H^1((0,T);H) \to H$, $u \mapsto u(0)$ ist stetig und damit nach Lemma D.7 schwach stetig. Also gilt $u_n(0) \rightharpoonup u(0)$ in H. Andererseits gilt $u_n(0) = \widetilde{P}_n u_0 \to u_0$ in V und damit $u_n(0) \to u_0$ in H und insbesondere $u_n(0) \rightharpoonup u_0$ in H. Mit der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwerts (Lemma D.4 b)) folgt $u(0) = u_0$. Die Gleichheit $\partial_t u(0) = u_1$ zeigt man wie im parabolischen Fall.

Wiederum für $\varphi \in \mathscr{D}((0,T))$ und $v \in V_N$ folgt aus (6-13) mit partieller Integration

$$-\int_0^T \big(\varphi'(t)\langle \partial_t u_n(t), v\rangle_H + \varphi(t)\langle A(t)u_n(t), v\rangle_{V'\times V}\big)dt = \int_0^T \varphi(t)\langle f(t), v\rangle_H dt.$$

Aus $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2((0,T);V)$ und $A \in C([0,T], L(V,V'))$ folgt nach Lemma D.7 $Au_n \rightharpoonup Au$ in $L^2((0,T);V')$. Damit erhalten wir für $n \to \infty$

$$-\int_0^T \big(\varphi'(t)\langle \partial_t u(t), v\rangle_H + \varphi(t)\langle A(t)u(t), v\rangle_{V'\times V}\big)dt = \int_0^T \varphi(t)\langle f(t), v\rangle_H dt.$$

Damit gilt $\partial_t^2 u = Au + f \in L^2((0,T);V')$, d.h. u ist eine Lösung von (6-11).

Die Stetigkeit der Abbildung $(f, u_0, u_1) \mapsto (u, \partial_t u)$ folgt aus (6-15) und Lemma D.4 c). □

6.14 Satz (Höhere Regularität). *Für $j \in \mathbb{N}_0$ sei g_j iterativ definiert durch*

$$\begin{aligned} g_0 &:= u_0,\\ g_1 &:= u_1,\\ g_{j+2} &:= \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} (\partial_t^\ell A)(0) g_{j-\ell} + (\partial_t^j f)(0) \ (j \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Sei $A \in C^1([0,T], L(V,V'))$ koerzitiv und symmetrisch. Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gelte $f \in H^k((0,T);H)$, $\partial_t^j A \in C([0,T], L(V,H))$ für $j = 1,\dots,k+1$ sowie die Kompatibilitätsbedingungen

$$g_0, g_1, \dots, g_k \in V,\ g_{k+1} \in H.$$

Dann gilt für die (nach Satz 6.12 existierende und eindeutige) Lösung u von (6-11) die höhere Regularität

$$u \in H^k((0,T);V) \cap H^{k+1}((0,T);H) \cap H^{k+2}((0,T);V').$$

Beweis. Für $k = 0$ ist dies genau die Aussage von Satz 6.12. Für $k > 0$ kann man den Satz mit Induktion über k beweisen, wobei wir hier nur den Schritt von $k = 0$ auf $k = 1$ ausführen, der allgemeine Schritt geht analog.

Seien also $f \in H^1((0,T);H)$, $u_0, u_1 \in V$, $g_2 = A(0)u_0 + f(0) \in H$ sowie $\partial_t A \in C([0,T], L(V,H))$. Formales Differenzieren der Gleichung (6-11) liefert

$$\begin{aligned} \partial_t^3 u(t) - A(t)\partial_t u(t) &= (\partial_t A)(t)u(t) + \partial_t f(t) \quad (t \in (0,T)),\\ \partial_t u(0) &= u_1,\\ \partial_t^2 u(0) &= A(0)u_0 + f(0). \end{aligned}$$

Wegen $u \in L^2((0,T);V)$, $\partial_t A \in C([0,T], L(V,H))$, $u_1 \in V$ sowie $A(0)u_0 + f(0) \in H$ sind die rechten Seiten dieses Anfangswertproblems so glatt wie in Satz 6.12 vorausgesetzt. Damit besitzt das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v(t) - A(t)v(t) &= (\partial_t A)(t)u(t) + \partial_t f(t) \quad (t \in (0,T)),\\ v(0) &= u_1,\\ \partial_t v(0) &= A(0)u_0 + f(0) \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $v \in \mathbb{E}$. Um zu zeigen, dass $\partial_t u = v$ gilt, definieren wir

$$z(t) := u_0 + \int_0^t v(s)ds \quad (t \in [0,T]).$$

Dann gilt $\partial_t z = v$ sowie $z \in H^3((0,T);V') \subset C^2([0,T],V')$, und wegen $\partial_t v \in H^1((0,T);V')$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_t^2 z(t) = \partial_t v(t) &= \partial_t v(0) + \int_0^t (\partial_s^2 v)(s)ds\\ &= A(0)u_0 + f(0) + \int_0^t \big(A(s)v(s) + (\partial_s A)(s)u(s) + (\partial_s f)(s)\big)ds\\ &= A(0)u_0 + f(t) + \int_0^t \big(A(s)v(s) + (\partial_s A)(s)u(s)\big)ds \end{aligned}$$

als Gleichheit in V' für fast alle $t \in [0,T]$. Partielle Integration liefert wegen $\partial_s(A(s)z(s)) = (\partial_s A)(s)z(s) + A(s)v(s)$ die Gleichheit

$$\partial_t^2 z(t) = A(t)z(t) + f(t) + \int_0^t (\partial_s A)(u(s) - z(s))ds \quad (t \in (0,T)).$$

Somit erfüllt die Funktion $w := z - u \in \mathbb{E}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 w(t) - A(t)w(t) &= -\int_0^t (\partial_s A)(s)w(s)ds \quad (t \in (0,T)),\\ w(0) &= 0, \end{aligned}$$

$$\partial_t w(0) = 0.$$

Wir betrachten diese Gleichung im Intervall $t \in (0,\tau)$ mit festem $\tau \in (0,T]$. Die rechte Seite ist in $L^2((0,\tau);H)$, und die Stetigkeitsaussage von Satz 6.12 liefert

$$\|w\|^2_{L^2((0,\tau);V)} \le C \int_0^\tau \Big\| \int_0^t (\partial_s A)(s) w(s) ds \Big\|_H^2 dt \le C \int_0^\tau \|w\|^2_{L^2((0,t);H)} dt.$$

Hier wurden Cauchy-Schwarz in $L^2((0,t);H)$ sowie $\partial_s a \in L^2((0,\tau);L(V,H))$ benutzt. Für die Funktion $F(\tau) := \|w\|^2_{L^2((0,\tau);H)}$ gilt also die Abschätzung

$$F(\tau) \le C \int_0^\tau F(t) dt \quad (\tau \in (0,T)),$$

und mit dem Lemma von Gronwall folgt $F = 0$, d.h. $w(t) = 0$ $(t \in [0,T])$. Also gilt $z = u$ und damit $\partial_t u = v \in \mathbb{E}$, was die höhere Regularität von u beweist. □

6.15 Bemerkung. a) Aus der angegebenen Regularität von u folgen unter Verwendung der Gleichung weitere Regularitäten. Z.B. erhält man für $k = 1$ wegen $u \in H^2((0,T);H)$ die Aussage $Au = \partial_t^2 u - f \in L^2((0,T);H)$. Falls etwa $A(t) = A_0$ unabhängig von t ist, heißt dies $u \in L^2((0,T);D_H(A_0))$.

b) Die Bedingung $\partial_t^j A \in C([0,T],L(V,H))$ ist sehr stark und durch die fehlende maximale Regularität bedingt. Falls A unabhängig von t ist, ist diese Bedingung trivialerweise erfüllt. Im Beweis sieht man, dass die folgende Bedingung ausreicht: Für alle $\ell \in 0,\dots,k-1$ ist $(\partial_t^{k-\ell} A)(\partial_t^\ell u) \in L^2((0,T);H)$. Da u auch eine höhere Regularität im Sinne von a) besitzt, ist auch eine Abschwächung der Bedingungen $\partial_t^j A \in C([0,T],L(V,H))$ möglich (z.B. falls $D_H(A(t))$ unabhängig von t ist).

c) Es ist kaum möglich, eine explizite Formel für g_j anzugeben. Für die Lösung u gilt nach dem Satz

$$u \in H^k((0,T);V) \cap H^{k+1}((0,T);H) \subset C^{k-1}([0,T],V) \cap C^k([0,T],H).$$

Unter Verwendung der Gleichung sieht man, dass $g_j = (\partial_t^j u)(0)$ gilt, und die Kompatibilitätsbedingungen besagen, dass die (aufgrund der Glattheit existierenden) Grenzwerte von u und von den rechten Seiten gleich sind, d.h.

$$g_j = (\partial_t^j u)(0) \in V \ (j = 0,\dots,k-1), \ g_k = (\partial_t^k u)(0) \in H.$$

c) Nichtlineare Gleichungen

Im Folgenden sei X ein reflexiver Banachraum und X' sein topologischer Dualraum. Unter einem Operator $A\colon X \to X'$ ist ab sofort nicht notwendigerweise eine lineare Abbildung gemeint. Man schreibt üblicherweise auch für nichtlineare Operatoren $Au := A(u)$.

6.16 Definition. Sei $A\colon X \to X', u \mapsto Au$ ein Operator.

a) A heißt monoton, falls

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_{X'\times X} \geq 0 \quad (u, v \in X).$$

Falls sogar „>“ gilt, so heißt A strikt monoton. Der Operator A heißt stark monoton, falls ein $c > 0$ existiert mit

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_{X'\times X} \geq c\|u - v\|_X^2 \quad (u, v \in X).$$

b) A heißt koerzitiv, falls

$$\lim_{\|u\|_X\to\infty} \frac{\langle Au, u\rangle_{X'\times X}}{\|u\|_X} = \infty.$$

c) A heißt beschränkt, falls beschränkte Mengen in X auf beschränkte Mengen in X' abgebildet werden.

d) A heißt hemistetig, falls für alle $u, v, w \in X$ die Abbildung

$$s \mapsto \langle A(u + sv), w\rangle_{X'\times X},\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

stetig ist.

6.17 Satz. *Sei $A\colon X \to X'$ ein Operator.*

a) Falls A stark monoton ist, so ist A koerzitiv.

b) Sei A monoton und hemistetig. Dann gilt:

(i) A ist maximal monoton, d.h. falls für $u \in X$ und $b \in X'$ die Ungleichung $\langle b - Av, u - v\rangle_{X'\times X} \geq 0$ $(v \in X)$ gilt, so folgt $Au = b$.

(ii) Sei $(u_n)_n \subset X$ eine Folge mit $u_n \rightharpoonup u$ in X und $Au_n \rightharpoonup b$ in X' sowie $\limsup_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n\rangle_{X'\times X} \leq \langle b, u\rangle_{X'\times X}$. Dann gilt $Au = b$.

Beweis. a) Es gilt $\langle Au, u\rangle_{X'\times X} = \langle Au - A(0), u\rangle_{X'\times X} + \langle A(0), u\rangle_{X'\times X} \geq c\|u\|_X^2 - \|A(0)\|_{X'}\|u\|_X$ und damit

$$\frac{\langle Au, u\rangle_{X'\times X}}{\|u\|_X} \geq c\|u\|_X - \|A(0)\|_{X'} \to \infty \quad (\|u\|_X \to \infty).$$

b) Sei A monoton und hemistetig, und seien u, b wie in (i) gegeben. Für festes $w \in X$ setzt man $v := u - sw$ $(s > 0)$ und erhält

$$0 \leq \langle b - Av, u - v\rangle_{X'\times X} = s\langle b - A(u - sw), w\rangle_{X'\times X}.$$

Für $s \searrow 0$ folgt unter Verwendung der Hemistetigkeit $\langle b - Au, w\rangle_{X'\times X} \geq 0$. Ersetzt man w durch $-w$, erhält man analog $\langle b - Au, w\rangle_{X'\times X} \leq 0$. Somit gilt $Au = b$ in X', d.h. A ist maximal monoton.

Sei nun $(u_n)_n \subset X$ eine Folge wie in (ii). Dann gilt für alle $v \in X$

$$\langle Au_n, u_n\rangle_{X'\times X} - \langle Av, u_n\rangle_{X'\times X} - \langle Au_n - Av, v\rangle_{X'\times X} = \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle_{X'\times X} \geq 0.$$

Man nimmt von dieser Gleichung den $\limsup_{n\to\infty}$ und erhält

$$\langle b, u\rangle_{X'\times X} - \langle Av, u\rangle_{X'\times X} - \langle b - Av, v\rangle_{X'\times X} \geq 0$$

und damit $\langle b - Av, u - v\rangle_{X'\times X} \geq 0$ $(v \in X)$. Nach (i) gilt $Au = b$.

□

Im Folgenden sei wieder $V \subset H \subset V'$ ein Gelfand-Tripel mit reellen separablen Hilberträumen V, H. Gegeben sei jetzt eine Familie $(A(t,\cdot))_{t\in[0,T]}$ von nicht notwendigerweise linearen Abbildungen $A(t,\cdot)\colon V \to V'$. Wir betrachten die parabolische nichtlineare Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(t, u(t)) &= f(t) \quad (t \in (0,T)),\\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{6-16}$$

Wieder werden wir die erste Gleichung dabei als Gleichheit in V' für fast alle $t \in (0,T)$ auffassen.

Zur Operatorfamilie $(A(t,\cdot))_{t\in[0,T]}$ betrachtet man den Operator

$$\mathcal{A}\colon L^2((0,T);V) \to L^2((0,T);V'),\ u \mapsto A(\cdot, u(\cdot)).$$

6.18 Satz. *Gegeben sei eine Familie nichtlinearer Operatoren $(A(t,\cdot))_{t\in[0,T]}$. Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:*

(i) Beschränktheit: Es existiert ein $\gamma \in L^2((0,T))$ mit

$$\|A(t,v)\|_{V'} \leq C(\gamma(t) + \|v\|_V) \quad (t \in (0,T),\ v \in V).$$

(ii) Hemistetigkeit: Die Abbildung $[0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,s) \mapsto \langle A(t, u+sv), w\rangle_{V'\times V}$ ist stetig für alle $u, v, w \in V$.

(iii) Koerzitivität: Es gibt $\alpha, \beta > 0$ so, dass für alle $t \in [0,T]$ und alle $u \in V$ $-\langle A(t,u), u\rangle_{V'\times V} \geq \alpha\|u\|_V^2 - \beta\|u\|_H^2$ gilt.

(iv) Monotonie: Für alle $t \in [0,T]$ ist der Operator $-A(t,\cdot)\colon V \to V'$ monoton.

Dann existiert zu jedem $f \in L^2((0,T);V')$ und zu jedem $u_0 \in H$ genau eine Lösung $u \in L^2((0,T);V) \cap H^1((0,T);V')$ von (6-16).

Beweis. **(i)** Wir zeigen zunächst, dass der Operator $-\mathcal{A}\colon L^2((0,T);V) \to L^2((0,T);V')$ beschränkt, hemistetig und monoton ist. Für $u,v \in L^2((0,T);V)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle A(t,u(t)), v(t)\rangle_{V'\times V} dt &\le C\int_0^T (\gamma(t) + \|u(t)\|_V)\|v(t)\|_V dt\\ &\le C\big(\|\gamma\|_{L^2((0,T))} + \|u\|_{L^2((0,T);V)}\big)\|v\|_{L^2((0,T);V)},\end{aligned}$$

also ist $\mathcal{A}$ beschränkt. Die Hemistetigkeit ergibt sich analog mit majorisierter Konvergenz aus der Hemistetigkeit von $A(t,\cdot)$. Die Positivität von $-\mathcal{A}$ folgt sofort aus

$$-\int_0^T \langle A(t,u(t)) - A(t,v(t)), u(t)-v(t)\rangle_{V'\times V} dt \ge 0 \quad (u,v \in L^2((0,T);V)).$$

(ii) Galerkin-Approximation:

Sei $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Orthonormalbasis von V, $V_n := \operatorname{span}\{v_1,\dots,v_n\}$ und $P_n\colon H \to V_n$ die orthogonale Projektion in H auf V_n. Sei ferner $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,T],V')$ eine Folge mit $f_n \to f$ in $L^2((0,T);V')$. Wir betrachten die Differentialgleichung in V_n

$$\begin{aligned}\langle \partial_t u_n, v_j\rangle_{V'\times V} - \langle A(t,u_n(t)), v_j\rangle_{V'\times V} &= \langle f_n(t), v_j\rangle_{V'\times V} \quad (t\in(0,T)),\\ u_n(0) &= P_n u_0.\end{aligned} \tag{6-17}$$

Für $u_n(t) = \sum_{i=1}^n c_{in}(t)v_i$, $c_n(t) := \big(c_{in}(t)\big)_{i=1,\dots,n}$ erhält man folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\partial_t c_n(t) - \mathcal{G}(t,c_n(t)) &= F_n(t) \quad (t\in(0,T)),\\ c_n(0) &= C_0\end{aligned} \tag{6-18}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &:= \big(\langle v_i, v_j\rangle_H\big)_{i,j=1,\dots,n},\\ \mathcal{G}(t,c_n(t)) &:= \big(\langle A(t, \textstyle\sum_{i=1}^n c_{in}(t)v_i), v_j\rangle_{V'\times V}\big)_{i,j=1,\dots,n},\\ F_n(t) &:= \big(\langle f_n(t), v_i\rangle_{V'\times V}\big)_{i=1,\dots,n}.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{G}\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, ebenso $F_n\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$. Die Matrix $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist symmetrisch und positiv definit. Nach dem Satz von Peano (Satz E.2) existiert eine maximale Lösung $c_n \in C^1([0,t_n),\mathbb{R}^n)$ mit $t_n > 0$. Für die zugehörige Funktion u_n gilt $u_n \in C^1([0,t_n),V_n) \subset C^1([0,t_n),V)$.

(iii) Energieabschätzung und schwache Konvergenz:

Setzt man in (6-17) punktweise $u_n(t) \in V_n$ statt v_j ein, erhält man

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u_n(t)\|_H^2 - \langle A(t, u_n(t)), u_n(t)\rangle_{V'\times V} = \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V'\times V} \quad (t \in (0, t_n)). \tag{6-19}$$

Unter Verwendung der Koerzivität erhält man

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u_n(t)\|_H^2 + \alpha \|u_n(t)\|_V^2 \le \beta \|u_n(t)\|_H^2 + \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V'\times V} \quad (t \in (0, t_n)).$$

Wie im Beweis von Satz 6.4 folgt daraus für alle $\tau \in (0, t_n)$

$$\|u_n(\tau)\|_H^2 + \int_0^\tau \|u_n(t)\|_V^2 dt \le C\Big(\|u_0\|_H^2 + \|f_n\|_{L^2((0,T);V')}^2\Big). \tag{6-20}$$

Die rechte Seite hängt nicht von τ ab. Da $\mathcal{M}$ positiv definit ist, gilt

$$|c_n(\tau)|^2 \le C c_n(\tau)^\top \mathcal{M} c_n(\tau) = C \sum_{i,j=1}^n c_{in}(\tau) c_{jn}(\tau) \langle v_i, v_j\rangle_H = C \|u_n(\tau)\|_H^2.$$

Also ist $|c_n(\tau)|$ durch eine von τ unabhängige Größe beschränkt. Nach Satz E.3 folgt $t_n > T$ und damit $u_n \in C^1([0,T], V)$.

Wegen (6-20) sind $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2((0,T);V)$ und $(u_n(T))_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ beschränkt. Da nach Voraussetzung $\mathcal{A}$ ein beschränkter Operator ist, ist auch $(\mathcal{A}u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2((0,T);V')$ beschränkt. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt also

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ in } L^2((0,T);V), \\ u_n(T) &\rightharpoonup u_1 \text{ in } H, \\ \mathcal{A}u_n &\rightharpoonup w \text{ in } L^2((0,T);V'). \end{aligned}$$

(iv) Der schwache Grenzwert ist eine Lösung der Gleichung:

Analog zum Beweis von Satz 6.5, Teil (iii), betrachtet man $\varphi \in \mathcal{D}((0,T))$ und $v \in V_N$ und erhält für $n \ge N$

$$\begin{aligned} -\int_0^T \varphi'(t)\langle u_n(t), v\rangle_{V'\times V} dt - \int_0^T \varphi(t)\langle A(t, u_n(t)), v\rangle_{V'\times V} dt \\ = \int_0^T \varphi(t)\langle f_n(t), v\rangle_{V'\times V} dt. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ erhält man aufgrund der obigen schwachen Konvergenzen und der Konvergenz $f_n \to f$ in $L^2((0,T);V')$

$$-\int_0^T \varphi'(t)\langle u(t), v\rangle_{V'\times V} dt - \int_0^T \varphi(t)\langle w(t), v\rangle_{V'\times V} dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle_{V'\times V} dt.$$

Dies zeigt $\partial_t u = w + f \in L^2((0,T);V')$ sowie $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1((0,T);V')$ und damit $u_n(T) \rightharpoonup u(T)$ in H. Genauso wie im Beweis von Satz 6.5 sieht man $u(0) = u_0$.

Zu zeigen ist noch $w = \mathcal{A}u$. Integriert man (6-19) über $(0,T)$, so erhält man

$$-\int_0^T \langle A(t,u_n(t)), u_n(t)\rangle_{V'\times V} dt = \frac{1}{2}\|u_n(0)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_n(T)\|_H^2 + \int_0^T \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V'\times V} dt.$$

Es gilt $u_n(0) \to u(0)$ in H, $u_n(T) \rightharpoonup u(T)$ in H und damit $\liminf_{n\to\infty} \|u_n(T)\| \geq \|u(T)\|$ (siehe Lemma D.4 c)). Mit Lemma D.4 d) folgt

$$\int_0^T \langle f_n(t), u_n(t)\rangle_{V'\times V} dt \to \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V} dt \quad (n\to\infty).$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \Big(-\int_0^T \langle A(t,u_n(t)), u_n(t)\rangle_{V'\times V} dt\Big) \\ &\leq \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V} dt \\ &= -\int_0^T \langle w(t), u(t)\rangle_{V'\times V} dt.\end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Gleichheit wegen $w = \partial_t u - f$. Der Operator $-\mathcal{A}$ ist nach (i) monoton und hemistetig, und die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 6.17 b) (ii). Nach diesem Satz gilt $\mathcal{A}u = w$, d.h. u ist eine Lösung der Gleichung.

(v) Eindeutigkeit: Seien u_1, u_2 Lösungen von (6-16). Dann folgt

$$\partial_t \|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 = \langle A(t,u_1(t)) - A(t,u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle_{V'\times V} \leq 0 \quad (t\in(0,T))$$

sowie $u_1(0) = u_2(0)$ und damit $u_1 = u_2$. □

7. L^p-Theorie: Parabolische Operatoren im Ganzraum

7.1 Worum geht's? Wir kennen bereits äquivalente Kriterien dafür, dass ein Operator etwa eine holomorphe Halbgruppe erzeugt. Dieses Kriterium verlangt es, die Resolvente des zugehörigen Operators genauer zu studieren, insbesondere die Resolventenabschätzung (a priori-Abschätzung) zu beweisen. Hier soll nun gezeigt werden, wie man dies für eine große Klasse von Differentialoperatoren im $\mathbb{R}^n$ nachweisen kann. Dabei handelt es sich um parameterelliptische oder parabolische Operatoren.

Der „Königsweg“, um nichtselbstadjungierte Differentialoperatoren zu untersuchen, liegt in der Fouriertransformation. Während in L^2 der Satz von Plancherel verwendet werden kann, gibt es in L^p den Satz von Michlin, der Bedingungen an das Symbol des Operators stellt.

a) Fouriermultiplikatoren und der Satz von Michlin

Im folgenden sei stets $D := -i(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$. Mit C, C_1, C_2 bezeichnen wir generische Konstanten, d.h. Konstanten, welche bei jedem Auftreten einen anderen Wert besitzen können, aber nicht von den in der Gleichung auftretenden Größen abhängt.

7.2 Bemerkung. Wir betrachten den Laplace-Operator im $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit maximalem Definitionsbereich $D(\Delta) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. Offensichtlich ist $D(\Delta) \supset W_p^2(\mathbb{R}^n)$. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich Gleichheit gilt. Sei dazu $u \in D(\Delta)$ und $f := u - \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sei $|\alpha| \le 2$. Dann gilt

$$D^\alpha u = \mathscr{F}^{-1}\xi^\alpha \mathscr{F} u = \mathscr{F}^{-1}\frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}\mathscr{F} f$$

als Gleichheit in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Um $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen, muss also $\mathscr{F}^{-1} m_\alpha(\xi)\mathscr{F} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gelten, wobei $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$. Die Frage lautet also: Wird durch

$$f \mapsto \mathscr{F}^{-1} m_\alpha(\xi)\mathscr{F} f$$

ein stetiger linearer Operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ definiert? Die (positive) Antwort liefert der Satz von Michlin.

7.3 Definition. Sei $1 \le p \le \infty$. Eine Funktion $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt Fouriermultiplikator in L^p, falls $f \mapsto \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} f$ einen stetigen linearen Operator $M \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$ definiert. Genauer ist m Fouriermultiplikator, wenn für die Abbildung $\widetilde{M} \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F}\varphi$ gilt $R(\widetilde{M}) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\widetilde{M}\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)),$$

d.h. wenn $\widetilde{M}$ eine eindeutige Fortsetzung $M \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$ besitzt. Die Funktion m heißt in diesem Fall das Symbol des Operators M. Wir schreiben $\operatorname{op}(m) := \mathscr{F}^{-1}m\mathscr{F} := M$ und $\operatorname{symb}(M) := m$.

7.4 Bemerkung. Für $p = 2$ gilt nach dem Satz von Plancherel genau dann $\operatorname{op}(m) \in L(L^2(\mathbb{R}^n))$, falls der Multiplikationsoperator $g \mapsto mg$ stetig in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt. Denn falls $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so folgt $\|mg\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Falls andererseits $m \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so existiert eine Folge messbarer Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $0 \le c_k \to \infty$, mit $0 < \lambda(A_k) < \infty$ und $|m| \ge c_k$ auf A_n. Für $g_k := \chi_{A_k}$ gilt dann $g_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|mg_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int |m(\xi)g_k(\xi)|^2 d\xi \ge c_k^2\lambda(A_k) = c_k^2\|g_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $\operatorname{op}(m)$ ist kein beschränkter Operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Der folgende Satz ist fundamental für die L^p-Theorie von Differentialoperatoren. Der Beweis ist für diese Vorlesung zu aufwändig. Hier bezeichnet $[\frac{n}{2}]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich $\frac{n}{2}$. Wir geben den Satz in zwei Varianten an.

7.5 Satz (Michlin)**.** *Sei $1 < p < \infty$ und $m\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Falls eine der beiden Bedingungen*

(i) $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *und*

$$|\xi|^{|\beta|}|D^\beta m(\xi)| \le C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ |\beta| \le [\tfrac{n}{2}] + 1),$$

(ii) $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *und*

$$\left|\xi^\beta D^\beta m(\xi)\right| \le C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \beta \in \{0,1\}^n)$$

mit einer Konstanten $C_M > 0$ gilt, so ist m ein L^p-Fouriermultiplikator mit

$$\|\operatorname{op}(m)\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le c(n,p)C_M,$$

wobei die Konstante $c(n,p)$ nur von n und p abhängt.

7.6 Bemerkung. a) Die Bedingung (i) in obigem Satz wird häufig als die Michlin-Bedingung (aus dem Jahr 1957) bezeichnet, während Bedingung (ii) auf Lizorkin (1963) zurückgeht. Eine übliche Schreibweise ist auch Mikhlin.

b) Sei die Funktion $m\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ homogen in ξ vom Grad $d \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$m(\rho\xi) = \rho^d m(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \rho > 0).$$

Falls $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, so ist $D^\beta m(\xi)$ homogen in ξ vom Grad $d - |\beta|$ für alle $|\beta| \le k$.

Denn z.B. für $\beta = (1, 0, \dots, 0)$ gilt

$$\begin{aligned}(\partial_{\xi_1} m)(\rho\xi) &= \lim_{h\to 0} \frac{m(\rho\xi + he_1) - m(\rho\xi)}{h} = \lim_{h\to 0} \rho^d \,\frac{m(\xi + \frac{h}{\rho}e_1) - m(\xi)}{\rho\frac{h}{\rho}}\\ &= \rho^{d-1}\partial_{\xi_1} m(\xi).\end{aligned}$$

Für beliebige β folgt die Aussage dann iterativ.

c) Sei $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogen vom Grad 0. Dann erfüllt m die Michlin-Bedingung. Denn für $|\beta| \le [\frac{n}{2}] + 1$ ist $m_\beta(\xi) := |\xi|^{|\beta|} D^\beta m(\xi)$ homogen vom Grad 0 nach Teil b). Damit folgt

$$|m_\beta(\xi)| = \Big| m_\beta\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)\Big| \le \max_{|\eta|=1} |m_\beta(\eta)| < \infty \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Als erste Anwendung des Satzes von Michlin wird die Frage aus Bemerkung 7.2 beantwortet.

7.7 Korollar. *Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt $\{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} = W_p^2(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Betrachte wie in Bemerkung 7.2 die Funktion $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$ für $|\alpha| \le 2$. Sei $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Für $|\xi| \le 1$ ist $D^\beta m_\alpha$ als stetige Funktion beschränkt, für $|\xi| \ge 1$ können wir bei Berechnung von $D^\beta m_\alpha$ den Nenner $1 + |\xi|^2$ durch $|\xi|^2$ abschätzen und erhalten eine homogene Funktion vom Grad $-|\beta|$, welche auf $|\xi| \ge 1$ ebenfalls beschränkt ist. Somit erfüllt m_α die Michlin-Bedingung. □

b) Parameterelliptische Differentialoperatoren

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

7.8 Definition (elliptische und parabolische Differentialoperatoren)**.** Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A = A(x, D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten $a_\alpha \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$.

a) Der Operator $A_0(x, D) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha$ heißt der Hauptteil des Operators $A(x, D)$.

b) Die Abbildung $a \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $a(x, \xi) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ heißt das Symbol von $A(x, D)$. Wir schreiben $a = \operatorname{symb}(A)$ bzw. $A = \operatorname{op}(a)$. Das Symbol $a_0 := \operatorname{symb}(A_0)$ heißt das Hauptsymbol von $A(x, D)$.

c) Der Operator A heißt elliptisch in $\overline{\Omega}$, falls

$$a_0(x, \xi) \ne 0 \quad (x \in \overline{\Omega},\, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Analog definiert man elliptisch in einer Menge $M \subset \overline{\Omega}$, z.B. elliptisch an der Stelle $x \in \overline{\Omega}$.

d) Sei $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ ein geschlossener Sektor in $\mathbb{C}$ mit Spitze in 0. Dann heißt der Operator $A(x,D)$ parameterelliptisch im Sektor $\mathscr{L}$, falls

$$a_0(x,\xi) - \lambda \neq 0 \quad (x \in \overline{\Omega},\ (\xi,\lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathscr{L}) \setminus \{(0,0)\}).$$

e) Der Operator $\partial_t - A(x,D)$ heißt parabolisch, falls $A(x,D) - \lambda$ parameterelliptisch im Sektor $\overline{\Sigma_{\pi/2}}$ ist.

7.9 Beispiele. a) Der Cauchy-Riemann-Operator $A := \partial_{x_1} + i\partial_{x_2}$ ist elliptisch in $\mathbb{R}^2$.

b) Der Laplace-Operator $A := \Delta$ ist elliptisch, parameterelliptisch in jedem Sektor, der den negativen Halbstrahl $(-\infty, 0)$ nicht enthält, und insbesondere parabolisch.

c) Der Operator $A(x,D) := \partial_{x_1} + i\partial_{x_2} + (ix_1 - x_2)\partial_{x_3}$ ist nicht elliptisch in $\mathbb{R}^3$, denn

$$a_0(x,\xi) = i\xi_1 - \xi_2 + i(ix_1 - x_2)\xi_3 = 0 \;\text{ für }\; \xi = (x_2, -x_1, 1).$$

Für diesen Operator existieren C^∞-Funktionen f, für welche $Au = f$ nicht einmal in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ lösbar ist.

7.10 Definition. Sei $n \geq 2$ und $A(x,D)$ ein elliptischer Differentialoperator in Ω. Dann heißt $A(x,D)$ eigentlich elliptisch in Ω, falls das Polynom $P := A_0(x,\xi',\cdot)$ für jedes $x \in \Omega$ und jedes $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ genauso viele Nullstellen in der oberen komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ wie in der unteren komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ besitzt.

7.11 Bemerkung. a) Man beachte in obiger Definition, dass P keine reelle Nullstelle besitzt, da $A(x,D)$ elliptisch ist.

b) Das Hauptsymbol eines Operators A der Ordnung m ist homogen vom Grad m in ξ. Falls A elliptisch ist, enthält $a_0(x,\xi)$ einen Term der Form $a(x)\xi_n^m$, denn sonst wäre $a_0(x,\xi) = 0$ für $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = 0$ und $\xi_n = 1$. Somit ist P ein Polynom vom Grad m, und falls A eigentlich elliptisch ist, ist m eine gerade Zahl.

c) Falls a_α für $|\alpha| = m$ reellwertige Koeffizienten sind und $A(x,D)$ elliptisch ist, so ist A auch eigentlich elliptisch. Denn dann ist P ein Polynom mit reellen Koeffizienten ohne reelle Nullstelle.

7.12 Satz. *Sei $A(x,D)$ elliptisch in Ω und $n \geq 3$. Dann ist A eigentlich elliptisch. Insbesondere ist die Ordnung von A eine gerade Zahl.*

Beweis. Sei $x \in \Omega$ und $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Wegen $n \geq 3$ existiert ein stetiger Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(0) = \xi'$ und $\gamma(1) = -\xi'$. Sei $n_+(t)$ die Anzahl der Nullstellen z mit $\operatorname{Im} z > 0$ des Polynoms $p_t := a_0(x, (\gamma(t), \cdot))$. Dann ist $n_+(t)$ unabhängig von t. Denn da die Nullstellen eines Polynoms stetig von den Koeffizienten abhängen, gäbe es sonst ein $t \in (0,1)$, für welches p_t eine reelle Nullstelle besitzt, was wegen $\gamma(t) \neq 0$ einen Widerspruch zur Elliptizität darstellt.

Daher gilt $n_+(0) = n_+(1)$, d.h. die Polynome $a_0(x, \xi', \cdot)$ und $a_0(x, -\xi', \cdot)$ besitzen dieselbe Anzahl von Nullstellen in $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Wegen

$$a_0(x, -\xi', z) = (-1)^m a_0(x, \xi', -z)$$

ist aber $n_+(1)$ auch die Anzahl der Nullstellen von $a_0(x, \xi', \cdot)$ in $\mathbb{C}_- := -\mathbb{C}_+$, d.h. A ist eigentlich elliptisch. $\square$

7.13 Definition. Sei $A = A(x, D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m in Ω. Dann heißt A gleichmäßig elliptisch in $\overline{\Omega}$, falls

$$|a_0(x, \xi)| \geq C|\xi|^m \quad ((x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n),$$

und gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L}$, falls

$$|a_0(x, \xi) - \lambda| \geq C(|\xi|^{2m} + |\lambda|) \quad (x \in \overline{\Omega}, (\xi, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathscr{L}) \setminus \{0\}).$$

Der Operator A heißt gleichmäßig stark elliptisch in $\overline{\Omega}$, falls

$$\operatorname{Re} a_0(x, \xi) \geq C|\xi|^m \quad ((x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n).$$

7.14 Lemma. *Sei Ω beschränkt und $A = A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ mit $a_\alpha \in C(\overline{\Omega})$. Falls A elliptisch in $\overline{\Omega}$ ist, so ist A dort auch gleichmäßig elliptisch.*

Beweis. Für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $x \in \overline{\Omega}$ gilt

$$|a_0(x, \xi)| = |\xi|^m \Big| a_0\Big(x, \frac{\xi}{|\xi|}\Big)\Big| \geq M|\xi|^m,$$

wobei $M := \min\{|a_0(x, \xi)| : (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times S^{n-1}\} > 0$. Hier wurde verwendet, dass $a_0(x, \xi)$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{\Omega} \times S^{n-1}$ ihr Minimum annimmt. $\square$

7.15 Definition. Sei $A(x, D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung $2m$ und sei $1 < p < \infty$.

a) Sei $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ ein geschlossener Sektor und $s \in [0, 2m]$. Dann definiert man die parameterabhängigen Normen $\|\!| \cdot |\!\|_{s,p,\Omega}$ durch

$$|\!\|u|\!\|_{s,p,\Omega} := \|u\|_{W_p^s(\Omega)} + |\lambda|^{s/(2m)} \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad (\lambda \in \mathscr{L},\ u \in W_p^{2m}(\Omega)).$$

b) Die L^p-Realisierung A_p des Differentialoperators $A(x, D)$ ist gegeben durch $D(A_p) := W_p^m(\Omega)$ und $A_p u := A(x, D)u \quad (u \in D(A_p))$.

7.16 Satz (Modellproblem für parameterelliptische Operatoren)**.** *Seien $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $|\alpha| = 2m$ und $A(D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$ parameterelliptisch im $\overline{\Sigma_\varphi}$ mit $\varphi \in [0, \pi]$. Dann gilt für die L^p-Realisierung $\rho(A_p) \supset \overline{\Sigma_\varphi}$, und A_p ist sektoriell mit Winkel $\varphi_{A_p} \geq \varphi$. Falls $\varphi > \frac{\pi}{2}$, so erzeugt A_p eine beschränkte holomorphe Halbgruppe mit Winkel $\geq \varphi - \frac{\pi}{2}$. Zu jedem $\lambda_0 > 0$ existiert ein $C_{\lambda_0} > 0$ mit*

$$|\!\|u|\!\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C_{\lambda_0} \|\lambda - A_p\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\lambda \in \mathscr{L},\ |\lambda| \geq \lambda_0). \tag{7-1}$$

Beweis. Setze $\lambda = q^{2m}$ mit $q \in \overline{\Sigma}_{\varphi/2m}$ und definiere für festes α mit $|\alpha| \leq 2m$ die Funktion

$$m_\alpha(\xi, q) := \frac{q^{2m-|\alpha|}\xi^\alpha}{a(\xi) - q^{2m}} \quad ((\xi, q) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma}_{\varphi/2m} \setminus \{0\}).$$

Dann ist $m_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma}_{\varphi/2m} \setminus \{0\})$ homogen in (ξ, q) vom Grad 0 und erfüllt nach Bemerkung 7.6 die Michlin-Bedingung bzgl. ξ. Nach dem Satz von Michlin ist $\|\operatorname{op}(m_\alpha(\cdot, q))\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C_\alpha$.

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $q \in \overline{\Sigma}_{\varphi/2m} \setminus \{0\}$ und $u := \mathscr{F}^{-1} \frac{1}{A(\xi) - q^{2m}} \mathscr{F} f$. Dann gilt

$$q^{2m-|\alpha|} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\operatorname{op}(m_\alpha(\cdot, q)) f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_\alpha \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{7-2}$$

Insbesondere ist $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n) = D(A_p)$ und $(A_p - \lambda)u = f$, d.h. $A_p - \lambda$ ist surjektiv. Falls andererseits $(A_p - \lambda)u_1 = (A_p - \lambda)u_2 = f$ mit $u_{1,2} \in D(A_p)$ gilt, so folgt $u_1 = \mathscr{F}^{-1} \frac{1}{A(\xi) - \lambda} \mathscr{F} f = u_2$ als Gleichheit in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und damit $u_1 = u_2$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Somit ist $A_p - \lambda$ auch injektiv, d.h. $\rho(A_p) \supset \overline{\Sigma}_\varphi \setminus \{0\}$. Aus (7-2) folgt mit $\alpha = 0$ die Resolventenabschätzung

$$\|\lambda(\lambda - A_p)^{-1}\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \leq C_0 \quad (\lambda \in \overline{\Sigma_\varphi} \setminus \{0\}).$$

Damit ist A_p sektoriell mit Winkel $\varphi_{A_p} \geq \varphi$, und für $\varphi > \frac{\pi}{2}$ erzeugt A_p eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe mit Winkel $\geq \varphi - \frac{\pi}{2}$.

Zu zeigen ist noch die Abschätzung (7-1). Sei $q_0 > 0$. Dann folgt aus (7-2) für $q \in \overline{\Sigma}_{\varphi/2m}$, $|q| \geq q_0$, die Abschätzung

$$|\!\|u|\!\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} = \|u\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + |\lambda| \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\begin{aligned}
&\le C\Big(\sum_{|\alpha|\le 2m}\|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+|q|^{2m}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)\\
&\le C_1\min\{1,q_0\}^{-2m}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2m}C_\alpha\Big)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\le C_{\lambda_0}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

wobei $\lambda_0 = q_0^{2m}$. □

7.17 Bemerkung. Im vorigen Beweis wurde die Homogenität von $m_\alpha(\xi, q)$ verwendet, wobei $q = \lambda^{1/2m}$. In diesem Fall sagt man, m_α ist quasi-homogen von (ξ,λ) ab. Im allgemeinen heißt eine Funktion $m = m(\xi,\lambda)$ quasi-homogen mit Gewicht $r \in \mathbb{R}$ in (ξ,λ) vom Grad d, falls

$$m(\rho\xi,\rho^r\lambda) = \rho^d m(\xi,\lambda) \quad ((\xi,\lambda)\neq 0,\ \rho>0).$$

Die Zahl r heißt das relative Gewicht von λ bzgl. ξ. In obigem Beweis hat λ das relative Gewicht $2m$. Neben spektraltheoretischen Betrachtungen wie im obigen Beweis sind parabolische Gleichungen der Grund für das Auftreten quasihomogener Symbole. So hat bei der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t - \Delta$ die Zeitableitung im obigen Sinn relatives Gewicht 2 bzgl. den Ortsableitungen (man spricht von parabolischer Skalierung).

7.18 Korollar. *Falls in der Situation von Satz 7.16 der Operator $A(D)$ parabolisch ist, so erzeugt die L^p-Realisierung A_p eine beschränkte holomorphe Halbgruppe in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $A(D)$ parameterelliptisch in $\overline{\Sigma}_{\pi/2}$, d.h. es gilt $a(\xi)-\lambda \neq 0$ für alle $(\xi,\lambda)\in\mathbb{R}^n\times\overline{\Sigma}_{\pi/2}\setminus\{0\}$. Wegen $a(\rho\xi) = \rho^{2m}a(\xi)$ ist der Wertebereich $R(a) := \{a(\xi) : \xi\in\mathbb{R}^n\}$ ein Kegel, und da $\{a(\xi) : |\xi| = 1\}$ kompakt ist, ist dieser Kegel abgeschlossen. Damit ist aber die Menge der Winkel $W := \{\alpha \in (-\pi,\pi]) : e^{i\alpha}\notin R(a)\}$ offen. Da $A(D)$ parabolisch ist, gilt $[-\pi/2,\pi/2]\subset W$, und somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[-\pi/2-\varepsilon,\pi/2+\varepsilon]\subset W$. Für alle $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $\arg\lambda\in[-\pi/2-\varepsilon,\pi/2+\varepsilon]$ folgt damit $\lambda\notin R(a)$, d.h. $a(\xi)-\lambda\neq 0 \quad (\xi\in\mathbb{R}^n)$.

Wir haben gezeigt, dass $A(D)$ parameterelliptisch in einem Sektor $\overline{\Sigma}_{\pi/2+\varepsilon}$ ist. Nach Satz 7.16 ist A_p sektoriell mit einem Winkel $\varphi > \pi/2$, und nach Satz 2.38 erzeugt A_p eine holomorphe Halbgruppe. □

7.19 Bemerkung. Wir haben in obigem Beweis gezeigt, dass die Menge aller Winkel $\alpha\in(-\pi,\pi]$ offen ist, für welche $A(D)$ die Bedingung der Parameterelliptizität auf dem Halbstrahl $\{\rho e^{i\alpha} : \rho\ge 0\}$ erfüllt.

7.20 Lemma. *Sei $1 < p < \infty$ und $A(x, D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten $a_\alpha \in L^\infty(\Omega)$ $(|\alpha| \le m)$. Dann ist $A_p \in L(W_p^m(\Omega), L^p(\Omega))$ mit*

$$\big\|A_p\big\|_{L(W_p^m(\Omega),L^p(\Omega))} \le C \max_{|\alpha|\le m} \|a_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Beweis. Das folgt sofort aus $\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{W_p^m(\Omega)}$ für $|\alpha| \le m$ und aus der Tatsache, dass der Multiplikationsoperator $u \mapsto a_\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ die Norm $\|a_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}$ besitzt. □

7.21 Satz (Hauptsatz über parameterelliptische Operatoren)**.** *Sei $A = A(x, D) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator in $\mathbb{R}^n$ mit Koeffizienten*

$$a_\alpha \in \begin{cases} C(\mathbb{R}^n), & |\alpha| = 2m, \\ L^\infty(\mathbb{R}^n), & |\alpha| < 2m. \end{cases}$$

Ferner existiere $a_\alpha(\infty) := \lim_{|x|\to\infty} a_\alpha(x)$ für alle $|\alpha| = 2m$. Falls A parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ für $x \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ist, so existiert ein $\lambda_0 > 0$ so, dass für die L^p-Realisierung von A die Inklusion $\rho(A_p) \supset \{\lambda \in \mathscr{L} : |\lambda| \ge \lambda_0\}$ gilt. Ferner gilt die a priori-Abschätzung

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le C\|(A_p - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (\lambda \in \mathscr{L},\ |\lambda| \ge \lambda_0).$$

Falls $\mathscr{L} = \overline{\Sigma}_\varphi$, so ist $A - \lambda_0$ sektoriell mit Winkel φ; falls $\varphi \ge \frac{\pi}{2}$, so erzeugt $A - \lambda_0$ eine beschränkte holomorphe Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

(i) *Lokalisierung („Freezing the coefficients“):* Wir fixieren die Koeffizienten von A an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ und betrachten nur den Hauptteil, also den Operator $A_0(x_0, D)$. Nach Satz 7.16 ist $A_0(x_0, D) - \lambda$ invertierbar für alle $\lambda \in \mathscr{L} \setminus \{0\}$, und es existiert eine Konstante $C_1 > 0$ mit

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le C_1\|(A_0(x_0, D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathscr{L}, |\lambda| \ge 1).$$

Wie man im Beweis von Satz 7.16 sieht, kann die Konstante C_1 unabhängig von x_0 gewählt werden.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $R > 0$ mit

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(\infty)| < \varepsilon \quad (|x| \ge R,\ |\alpha| = 2m).$$

Da $\overline{B(0, R)} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist und die Koeffizienten a_α für $|\alpha| = 2m$ stetig sind, existieren endlich viele $x_1, \dots, x_N \in \overline{B(0, R)}$ und offene Umgebungen U_i von x_i mit $\overline{B(0, R)} \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$ und

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(x_i)| < \varepsilon \quad (x \in U_i,\ |\alpha| = 2m,\ i = 0, \dots, N) \tag{7-3}$$

Setze hierbei $U_0 := \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,R)}$ und $x_0 := \infty$. Ohne Einschränkung seien dabei die U_i so gewählt, dass eine Konstante $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit folgender Eigenschaft: Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist in höchstens N_0 Umgebungen U_i enthalten. (Dies erreicht man etwa, indem man die Punkte x_i auf einem Gitter wählt und die U_i als Kugeln mit geeignetem Radius.)

(ii) *Beweis der a priori-Abschätzung:* Wir wählen $\varepsilon := \frac{1}{2C_1}$ in (7-3) und zugehörige Umgebungen U_i. Dann gilt für alle $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset U_i$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} &\le C_1\|(A_0(x_i,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\le C_1\|(A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_1\|(A_0(x,D)-A_0(x_i,D))u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\le C_1\|(A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C_1\cdot\frac{1}{2C_1}\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

Bei der letzten Ungleichung wurde Lemma 7.20 verwendet. Damit erhalten wir

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le 2C_1\|(A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Wähle nun eine zu U_i gehörige C^∞-Partition der Eins, d.h. $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \varphi_i \le 1$, $\sum_{i=0}^N \varphi_i = 1$ und $\operatorname{supp}\varphi_i \subset U_i$ $(i = 0,\dots,N)$. Dann gilt für $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le \sum_{i=0}^N \|\varphi_i u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le 2C_1\sum_{i=0}^N \|(A_0(x,D)-\lambda)\varphi_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Es ist

$$(A_0(x,D)-\lambda)\varphi_i u = \varphi_i(A_0(x,D)-\lambda)u + R_{1,i}u,$$

wobei $R_{1,i}$ ein Differentialoperator mit Ordnung nicht größer als $2m-1$ ist.

Nach Wahl der Umgebungen U_i und wegen $0 \le \varphi \le 1$ gilt für $w \in L^p(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\|\varphi_i w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \sum_{i=0}^N \|\varphi_i w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le N_0\|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} &\le 2C_1\sum_{i=0}^N \big(\|\varphi_i(A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_{1,i}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\big)\\ &\le C_2\big(\|(A_0(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_1 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\big)\end{aligned}$$

mit $C_2 := 2N_0C_1$ und $R_1 := \sum_{i=0}^N R_{1,i}$. Wir schreiben weiter $R_2 := A(x,D) - A_0(x,D)$ und erhalten

$$\|u\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le C_2\big(\|(A(x,D)-\lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_1 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|R_2 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\big).$$

Da R_1, R_2 Differentialoperatoren von Ordnung nicht größer als $2m-1$ sind, gilt $\|R_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_3 \|u\|_{W_p^{2m-1}(\mathbb{R}^n)}$ mit einer Konstanten $C_3 > 0$. Wir verwenden nun die Interpolationsungleichung (Satz C.8) und erhalten

$$\|u\|_{W_p^{2m-1}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{4C_2C_3} \|u\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + C_4 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{4C_2C_3} |\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n},$$

falls $|\lambda| \geq \lambda_1 := 4C_2C_3C_4$. Eingesetzt ergibt sich

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C_2 \|(A(x,D) - \lambda)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2} |\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n},$$

d.h. die a priori-Abschätzung des Satzes gilt mit der Konstante $2C_2$ für alle $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ und alle $\lambda \in \mathscr{L}$ mit $|\lambda| \geq \lambda_1$.

(iii) *Existenz der Resolvente:* Wir wählen $\varepsilon := \frac{1}{16C_1N_0}$ in (i) und zugehörige Umgebungen U_i. Definiere dazu die Partition der Eins $(\varphi_j)_{j=0,\dots,N}$ wie oben und $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\operatorname{supp} \psi_j \subset U_j$ und $\psi_j = 1$ auf $\operatorname{supp} \varphi_j$. Sei $A_{p,j}$ die L^p-Realisierung von $A_0(x_j, D)$. Wir definieren

$$R(\lambda) f := \sum_{j=0}^N \varphi_j (A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f \quad (f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathscr{L},\ |\lambda| \geq \lambda_1).$$

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(A_p - \lambda) R(\lambda) f &= \sum_{j=0}^N (A_p - \lambda) \varphi_j (A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f \\ &= \sum_{j=0}^N \big(\varphi_j (A_p - \lambda)(A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f + T_{1,j} (A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f \big),\end{aligned}$$

wobei $T_{1,j}$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq 2m-1$ ist. Wir schreiben weiter

$$\begin{aligned}\varphi_j (A_p - \lambda)(A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f &= \varphi_j (A_0(x_j, D) - \lambda)(A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f \\ &\quad + \varphi_j \big(A(x,D) - A_0(x_j, D) \big)(A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f \\ &= \varphi_j f + T_{2,j} f\end{aligned}$$

mit $T_{2,j} f := \varphi_j \big(A(x,D) - A_0(x_j, D) \big)(A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f$.

Für $v_j := (A_{p,j} - \lambda)^{-1} \psi_j f$ gilt nach Teil (i) des Beweises

$$\|v_j\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + |\lambda| \, \|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Andererseits gilt nach Wahl der Umgebungen U_i und unter Verwendung der Interpolationsungleichung die Abschätzung

$$\|(A(x,D) - A_0(x_j, D)) v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{8C_1N_0} \|v_j\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + C_5 \|v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

mit einer Konstanten $C_5 > 0$. Für den Operator $T_2 := \sum_{j=0}^N T_{2,j}$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\|T_2 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\le \sum_{j=0}^N \|T_{2,j} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sum_{j=0}^N \|\varphi_j \big(A(x,D) - A_0(x_j,D)\big) v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \sum_{j=0}^N \|\big(A(x,D) - A_0(x_j,D)\big) v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \sum_{j=0}^N \Big(\frac{1}{8C_1N_0}\, C_1 \|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{C_5\cdot C_1}{|\lambda|}\|\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big) \\
&\le \Big(\frac{1}{8} + \frac{C_5C_1N_0}{|\lambda|}\Big)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{4}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

falls $|\lambda| \ge \lambda_2 := \max\{\lambda_1, 8C_5C_1N_0\}$. Genauso folgt aus der Interpolationsungleichung

$$\sum_{j=0}^N \|T_{1,j}(A_{p,j} - \lambda)^{-1}\psi_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{4}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

falls $\lambda \in \mathscr{L}$, $|\lambda| \ge \lambda_3$ mit geeignetem $\lambda_3 > 0$ ist. Wir setzen $\lambda_0 := \max\{\lambda_2, \lambda_3\}$ und erhalten insgesamt

$$(A_p - \lambda)R(\lambda)f = f + T(\lambda)f \quad (\lambda \in \mathscr{L},\ |\lambda| \ge \lambda_0),$$

wobei $T(\lambda)f := T_2 f + \sum_{j=0}^N T_{1,j}(A_{p,j} - \lambda)^{-1}\psi_j f$ ein beschränkter Operator in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist mit Norm $\|T(\lambda)\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le \frac{1}{2}$. Somit gilt

$$(A_p - \lambda)R(\lambda)(1 + T(\lambda))^{-1} = \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $A_p - \lambda$ ist surjektiv. Nach der a priori-Abschätzung aus Teil (ii) des Beweises ist $A_p - \lambda$ auch injektiv, d.h. es gilt

$$\rho(A_p) \supset \{\lambda \in \mathscr{L} : |\lambda| \ge \lambda_0\}.$$

Die a priori-Abschätzung des Satzes wurde bereits in Teil (ii) bewiesen, die restlichen Aussagen folgen wie im Modellproblem. □

A. Grundlagen der Operatortheorie

In diesem Abschnitt fassen wir einige Begriffe und wichtige Aussagen aus der Operatortheorie zusammen.

Seien X, Y Banachräume. Im Folgenden verwenden wir die Standardbezeichnung $L(X,Y)$ für die Menge der stetigen linearen Operatoren von X nach Y. Versehen mit der Operatornorm, wird $L(X,Y)$ selbst wieder zu einem Banachraum. Wir setzen $L(X) := L(X,X)$ und $X' := L(X,\mathbb{C})$ (topologischer Dualraum von X, Raum der stetigen linearen Funktionale auf X).

A.1 Definition (Konvergenz und Stetigkeit von Operatoren)**.** Seien X, Y Banachräume, $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$.

a) Die Folge T_k konvergiert gegen T gleichmäßig oder in der Operatornorm, falls $\|T_k - T\|_{L(X,Y)} \to 0$ $(k \to \infty)$.

Die Folge T_k konvergiert gegen T in der starken Operatortopologie oder stark, falls für alle $x \in X$ gilt: $\|T_k x - Tx\|_Y \to 0$. Man schreibt $T_k \xrightarrow{s} T_k$.

Die Folge T_k konvergiert gegen T in der schwachen Operatortopologie oder schwach, falls für alle $x \in X$ und für alle $f \in Y'$ gilt: $f(T_k x - Tx) \to 0$. Man schreibt $T_k \xrightarrow{w} T_k$.

b) Eine operatorwertige Abbildung $T\colon [0,\infty) \to L(X,Y)$ heißt gleichmäßig stetig, falls $T \in C([0,\infty), L(X,Y))$, wobei $L(X,Y)$ mit der Operatornorm versehen wird. Die Abbildung heißt stark stetig, falls für alle $x \in X$ gilt: $t \mapsto T(t)x \in C([0,\infty),Y)$. Sie heißt schwach stetig, falls für alle $x \in X$ und alle $f \in Y'$ gilt: $t \mapsto f(T(t)x) \in C([0,\infty))$.

A.2 Bemerkung. a) Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt starke Konvergenz und aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz. Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht. Analoge Aussagen gelten für die Stetigkeit.

b) Seien X, Y Banachräume, $D \subset X$ dicht, und seien $A, B \in L(X,Y)$ mit $Ax = Bx$ für alle $x \in D$. Dann gilt $A = B$ als Gleichheit in $L(X,Y)$.

c) Seien X, Y Banachräume, $D \subset X$ dichter Untervektorraum und $B\colon D \to Y$ eine lineare und beschränkte Abbildung (d.h. es existiert ein $C > 0$ mit $\|Bx\|_Y \le C\|x\|_X$ $(x \in D)$. Dann existiert genau eine Fortsetzung $\widetilde{B} \in L(X,Y)$ von B. Es gilt $\|\widetilde{B}\|_{L(X,Y)} \le C$.

A.3 Lemma. *Seien X, Y Banachräume und $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ beschränkt (bzgl. Operatornorm). Es gebe eine dichte Teilmenge $D \subset X$ so, dass für alle $x \in D$ die Folge $(T_k x)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchyfolge ist. Dann existiert genau ein $T \in L(X,Y)$*

mit $T_k \xrightarrow{s} T$. *Es gilt* $\|T\|_{L(X,Y)} \le \liminf_{k\to\infty} \|T_k\|_{L(X,Y)}$.

Beweis. Übung. □

Für die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen ist die Klasse der stetigen Operatoren auf einem Banachraum X zu klein. Eine für viele Zwecke hinreichend große Klasse ist die der abgeschlossenen Operatoren.

A.4 Definition. Seien X, Y Banachräume. Ein linearer Operator A von X nach Y ist eine lineare Abbildung $A\colon D(A) \to Y$, dessen Definitionsbereich $D(A) \subset X$ ein Untervektorraum von X ist. Man schreibt $A\colon X \supset D(A) \to Y$ oder auch nur $A\colon X \to Y$. Ein linearer Operator heißt dicht definiert, falls sein Definitionsbereich eine dichte Teilmenge von X ist. Wir setzen $\ker A := \{x \in D(A) : Ax = 0\}$.

Ein linearer Operator $A\colon X \supset D(A) \to Y$ heißt abgeschlossen, falls der Graph $G(T) = \big\{(x, Tx) : x \in D(T)\big\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times Y$ ist. Dies ist gleichbedeutend zu: Gilt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_k \to x$ in X und $Ax_k \to y$ in Y, dann folgt $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

A.5 Satz (Wichtige Sätze aus der Operatortheorie)**.**

a) **(Satz vom abgeschlossenen Graphen)** *Seien* X, Y *Banachräume,* $T : X = D(A) \to Y$ *ein abgeschlossener linearer Operator. Dann ist* T *stetig.*

b) **(Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit)** *Sei* $\mathcal{T} \subset L(X, Y)$. *Es existiere für jedes* $x \in X$ *ein* $C_x > 0$, *so dass* $\|Tx\|_Y \le C_x$ *für all* $T \in \mathcal{T}$. *Dann gilt bereits* $\|T\|_{L(X,Y)} \le C$ *für alle* $T \in \mathcal{T}$ *mit einer universellen Konstante* $C > 0$.

c) **(Satz von der stetigen Inversen)** *Seien* X, Y *Banachräume,* $T : X \supset D(A) \to Y$ *linear, abgeschlossen und bijektiv. Dann ist* $T^{-1} : Y \to X$ *stetig.*

d) **(Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach)** *Sei* X *ein Banachraum und* $x \in X \setminus \{0\}$. *Dann existiert ein* $f \in X'$ *mit* $\|f\|_{X'} = 1$ *und* $f(x) = \|x\|_X$.

A.6 Definition. Sei X Banachraum und $A : X \to X$ linearer Operator, dann heißt

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ bijektiv und } (A-\lambda)^{-1} \in L(X)\}$$

die Resolventenmenge von A und

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

das Spektrum von A. Für $\lambda \in \rho(A)$ heißt $R_\lambda(A) := (A-\lambda)^{-1}$ die Resolvente von A. Die Menge $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A-\lambda) \neq \{0\}\}$ heißt das Punktspektrum von A oder die Menge aller Eigenwerte von A, die Menge $\sigma_c(A) := \{\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A) :$

$\overline{R(A-\lambda)} = X\}$ heißt das kontinuierliche Spektrum von A und $\sigma_r(A) := \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A))$ heißt das Restspektrum von A.

A.7 Bemerkung. Falls A abgeschlossen ist, folgt die Bedingung $R_\lambda(A) \in L(X)$ bereits aus der Bijektivität von $\lambda - A$. Es gilt die Resolventengleichung

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}$$

für $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

A.8 Definition. Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $A\colon H \supset D(A) \to H$ ein dicht definierter linearer Operator. Dann wird der adjungierte Operator A^* definiert durch $D(A^*) := \{y \in H : \exists\, y^* \in H\, \forall\, x \in D(A) : \langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle\}$ und $A^*y := y^*$ ($y \in D(A^*)$). Man beachte, dass A^* in diesem Fall wohldefiniert ist, da $D(A)$ dicht in H ist und daher y^* eindeutig bestimmt ist.

Ein dicht definierter Operator A heißt symmetrisch, falls $A \subset A^*$ gilt (d.h. falls $D(A) \subset D(A^*)$ und $A^*|_{D(A)} = A$ gilt), und selbstadjungiert, falls $A = A^*$ gilt (inklusive Gleichheit der Definitionsbereiche).

A.9 Lemma. *Sei H ein Hilbertraum und $A\colon H \supset D(A) \to H$ ein symmetrischer Operator. Falls ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ existiert mit $R(A-\lambda) = R(A-\overline{\lambda}) = H$, so ist A selbstadjungiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $A \subset A^*$, d.h. es ist nur noch $D(A^*) \subset D(A)$ zu zeigen. Sei $x \in D(A^*)$. Da $A - \lambda$ surjektiv ist, existiert ein $y \in D(A)$ mit $(A-\lambda)y = (A^* - \lambda)x$. Wegen $A \subset A^*$ folgt $x - y \in \ker(A^* - \lambda)$. Nach Definition von A^* bedeutet dies, dass $\langle (A-\overline{\lambda})z, x - y\rangle = 0$ für alle $x \in D(A)$ gilt. Also ist $x - y \in (R(A-\overline{\lambda}))^\perp = H^\perp = \{0\}$ und damit $x = y \in D(A)$. $\square$

B. Das Bochner-Integral

Im Folgenden sei X ein komplexer Banachraum, versehen mit der Borel-σ-Algebra, und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein (o.E. vollständiger) Maßraum.

B.1 Definition. Eine Stufenfunktion (Treppenfunktion) ist eine Funktion $s\colon \Omega \to X$ der Form $s = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} a_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}$, und $a_i \in X \quad (i = 1, \ldots, n)$. Falls $\mu(A_i) < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt, heißt s integrierbare Stufenfunktion. In diesem Fall ist das Bochner-Integral von s definiert durch

$$\int_\Omega s d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) a_i \in X.$$

Ein metrischer Raum heißt separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Man kann folgende Äquivalenzen zeigen:

B.2 Satz. *Für eine Abbildung $f\colon \Omega \to X$ sind äquivalent:*

(i) *Es existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $f_n\colon \Omega \to X$ mit $f_n(z) \to f(z)$ (in X) für alle $z \in \Omega$.*

(ii) *f ist messbar und $f(\Omega)$ ist separabel.*

B.3 Satz. *Sei $f\colon \Omega \to X$ messbar und $f(\Omega)$ separabel. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren Stufenfunktionen $f_n\colon \Omega \to X$ mit $f_n(z) \to f(z) \quad (z \in \Omega)$ und*

$$\int \|f_n - f\| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(ii) $\int \|f\| d\mu < \infty$.

Bei stetigen Funktionen ist die Bedingung der Separabilität automatisch erfüllt, wie das folgende Lemma zeigt.

B.4 Lemma. *Sei Ω ein separabler topologischer Raum und sei $f\colon \Omega \to X$ stetig. Dann ist $f(\Omega)$ separabel.*

Beweis. Sei $\Omega_0 \subset \Omega$ abzählbar und dicht. Dann ist $X_0 := f(\Omega_0)$ abzählbar, und es gilt

$$A := f^{-1}(\overline{X_0}) \supset f^{-1}(X_0) \supset \Omega_0.$$

Da f stetig ist, ist A abgeschlossen, und es folgt $\Omega = \overline{\Omega_0} \subset \overline{A} = A$, also

$$f(\Omega) = f(A) = f(f^{-1}(\overline{X_0})) \subset \overline{X_0}$$

und damit $f(\Omega) = \overline{X_0}$. Also ist $f(\Omega)$ separabel. □

B.5 Definition. a) Eine Funktion $f\colon \Omega \to X$ heißt stark messbar (oder μ-messbar), falls eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert so, dass $f|_{\Omega\setminus N}$ messbar ist und $f(\Omega \setminus N)$ separabel ist.

b) Eine stark messbare Funktion $f\colon \Omega \to X$ heißt (μ-)integrierbar, falls $\int \|f\| d\mu < \infty$. In diesem Fall wähle eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren Treppenfunktionen mit $f_n \to f$ μ-fast überall und $\int \|f_n - f\| d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$ und definiert das Bochner-Integral von f über Ω bzgl. μ durch

$$\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Wie üblich sei

$$\int_A f d\mu := \int (\chi_A \cdot f) d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Man setzt $\mathscr{L}^1(\mu, X) := \{f\colon \Omega \to X \,|\, f \text{ ist integrierbar}\}$ und $\mathscr{L}^1(\mu) := \mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{K})$.

Die vektorwertigen L^p-Räume $L^p(\mu; X)$ werden wie üblich definiert als Quotientenraum $L^p(\mu; X) := \mathscr{L}^p(\mu; X)/N$. Hierbei ist $\mathscr{L}^p(\mu; X)$ die Menge aller stark messbaren f, für welche $\|f\|_{L^p(\mu;X)} := (\int \|f\|^p d\mu)^{1/p}$ endlich ist, und N die Menge aller $f \in \mathscr{L}^1(\mu; X)$ mit $\|f\|_{L^1(\mu;X)} = 0$. Für $p = \infty$ hat man die üblichen Modifikationen.

Falls $\Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und μ das Lebesgue-Maß ist, so schreibt man üblicherweise $L^1(\Omega; X) := L^1(\mu; X)$.

Für Bochner-Integrale gelten die aus der skalaren Lebesgue-Theorie bekannten Konvergenzsätze.

B.6 Satz. a) **(Satz von der majorisierten Konvergenz).** *Seien $f_n\colon \Omega \to X$ stark messbar mit $f_n \to f$ μ-fast überall. Sei $g\colon \Omega \to [0, \infty]$ messbar mit $\int g d\mu < \infty$ und $\|f_n(z)\| \le g(z)$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\|f(z)\| \le g(z)$ μ-fast überall.*

Dann ist $f_n \in L^1(\mu; X)$, $f \in L^1(\mu; X)$ und

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \text{ in } X \quad (n \to \infty).$$

b) Sei $f_n\colon \Omega \to X$ stark messbar mit $\sum_{n=1}^\infty \int \|f_n\| d\mu < \infty$. Dann ist $f_n \in L^1(\mu; X)$ und $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ konvergiert in X für μ-fast alle $z \in \Omega$.

Die Funktion

$$z \mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty f_n(z), & \text{falls } \sum_n f_n(z) \text{ konvergiert,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \int f_n d\mu = \int \sum_{n=1}^\infty f_n d\mu.$$

c) Sei $f \in L^1(\mu; X)$ *und* $A = \dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}} A_n$ *(d.h. disjunkte Vereinigung) mit* $A_n \in \mathcal{A}$*. Dann ist*

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

d) Für $f \in L^1(\mu; X)$ *gilt* $\| \int f d\mu \|_X \le \int \|f\|_X d\mu$*.*

C. Elemente der Sobolevraumtheorie

C.1 Worum geht's? In diesem Anhang sollen einige Ergebnisse aus der Theorie der Sobolevräume zitiert werden. Dabei wird nicht in jedem Fall Wert darauf gelegt, die Glattheitsbedingungen an das Gebiet minimal zu wählen.

Im Folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zu $m \in \mathbb{N}$ ist $C^m(\overline{G})$ definiert als die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon G \to \mathbb{C}$, welche eine Fortsetzung $\widetilde{f} \in C^m(U)$ mit einer offenen Teilmenge $U \supset \overline{G}$ besitzen. Die Konstanten C, C_1, C_2 in den folgenden Aussagen sind wieder generische Konstanten.

Zunächst zitieren wir noch eine Variante der Hölderschen Ungleichung.

C.2 Satz (Hölder-Ungleichung)**.** *Seien* $1 \le p, q, r \le \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. *Dann ist für* $f \in L^p(G)$ *und* $g \in L^q(G)$ *das Produkt* $fg \in L^r(G)$ *und*

$$\|fg\|_{L^r(G)} \le \|f\|_{L^p(G)} \|g\|_{L^q(G)}.$$

C.3 Definition. Sei $1 \le p \le \infty$ und $m \in N$. Dann ist der Sobolevraum $W_p^m(G)$ definiert als die Menge aller Distributionen $u \in \mathscr{D}'(G)$ mit $D^\alpha u \in L^p(G)$ $(|\alpha| \le m)$. Die Norm auf $W_p^m(G)$ ist gegeben durch

$$\|u\|_{m,p,G} := \|u\|_{W_p^m(G)} := \Big(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(G)}^p \Big)^{1/p}.$$

Man definiert auch noch die Seminorm

$$|u|_{m,p,G} := |u|_{W_p^m(G)} := \Big(\sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(G)}^p \Big)^{1/p}.$$

Im Fall $p = \infty$ modifiziert man wie üblich. Man beachte, dass $\|\cdot\|_{0,p,G} = \|\cdot\|_{L^p(G)}$.

Wir definieren $W_{p,0}^m(G)$ als den Abschluss von $C_0^\infty(G)$ in $W_p^m(G)$.

C.4 Satz. *a) Der Sobolevraum* $W_p^m(G)$ *ist ein Banachraum.*

b) Die Menge $\{u \in C^m(\overline{G}) : \|u\|_{m,p,G} < \infty\}$ *liegt dicht in* $W_p^m(G)$.

c) Falls ∂G *die Segmentbedingung erfüllt, so ist die Menge* $\{u|_G : u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\}$ *dicht in* $W_p^m(G)$.

Im folgenden Satz bezeichne $BUC^j(G)$ die Menge aller j-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf G, deren Ableitungen bis zur Ordnung j beschränkt und gleichmäßig stetig sind. Mit $C^{j,\gamma}(G)$ für $j \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma \in (0,1)$ wird der Raum der j-fach stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet, deren j-fache Ableitungen Hölderstetig mit Koeffizient γ sind.

C.5 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz). *a) Falls G der Kegelbedingung genügt, so gilt für $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$ mit $mp > n$ und $j \in \mathbb{N}_0$ die Einbettung*

$$W_p^{m+j}(G) \hookrightarrow BUC^j(G),$$

d.h. jedes $u \in W_p^{m+j}(G)$ ist nach Änderung auf einer Nullmenge eine Funktion in $BUC^j(G)$, und die Abbildung $u \mapsto u$, $W_p^{m+j}(G) \hookrightarrow BUC^j(G)$ ist stetig.

b) Falls G die starke lokale Lipschitzbedingung erfüllt (z.B. falls G ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist), so gilt sogar $W_p^{j+m}(G) \hookrightarrow C^{j,\gamma}(G)$ für alle $\lambda \in (0,1)$ mit $\lambda \leq m - \frac{n}{p}$.

Beim folgenden Satz beachte man, dass ein Operator $T \in L(X, Y)$ kompakt heißt, falls für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ existiert, für welche $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset Y$ konvergiert.

C.6 Satz (Satz von Rellich-Kondrachov). *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und seien $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$ mit $mp > n$ und $j \in \mathbb{N}_0$.*

a) Falls G die Kegelbedingung erfüllt, dann sind die Einbettungen

$$\begin{aligned} W_p^{m+j}(G) &\hookrightarrow BUC^j(G), \\ W_p^{m+j}(G) &\hookrightarrow W_q^j(G) \end{aligned}$$

kompakt.

b) Falls G ein Lipschitz-Gebiet ist, so ist die Einbettung

$$W_p^{j+m}(G) \hookrightarrow C^{j,\gamma}(G)$$

für alle $\lambda \in (0,1)$ mit $\lambda \leq m - \frac{n}{p}$ kompakt.

c) Ohne Zusatzbedingung an G (außer der Beschränktheit) sind die Einbettungen in a) und b) kompakt, wenn man $W_p^{m+j}(G)$ durch $W_{p,0}^{m+j}(G)$ ersetzt.

C.7 Satz (Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung). *Sei G ein Lipschitz-Gebiet, und seien $m \in \mathbb{N}$ und $p, p_1 \in (1, \infty)$ gegeben mit*

$$0 < \tau := \frac{n}{m}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\Big) < 1.$$

Dann gilt $W_p^m(G) \hookrightarrow L_{p_1}(G)$ und

$$\|u\|_{0,p_1,G} \leq C \|u\|_{m,p,G}^{\tau} \|u\|_{0,p,G}^{1-\tau} \quad (u \in W_p^m(G)).$$

C.8 Satz (Interpolations-Ungleichung)**.** *Sei* $1 \leq p < \infty$*, sei* G *ein Gebiet, welches die Kegelbedingung erfüllt, und seien* $m, k \in \mathbb{N}$ *mit* $0 < k < m$*. Dann gilt mit* $\tau := \frac{k}{m}$ *die Abschätzung*

$$|u|_{k,p,G} \leq C\|u\|_{m,p,G}^{\tau}\|u\|_{0,p,G}^{1-\tau} \quad (u \in W_p^m(G)).$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ *existiert eine Konstante* $C(\varepsilon) > 0$ *mit*

$$\begin{aligned} |u|_{k,p,G} &\leq \varepsilon|u|_{m,p,G} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,p,G}, \\ \|u\|_{k,p,G} &\leq \varepsilon\|u\|_{m,p,G} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,p,G} \end{aligned}$$

Beweis. Siehe z.B. [1], Theorem 5.2. □

C.9 Satz (Dritte Poincaré-Ungleichung)**.** *Für* $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *gilt* $(x \mapsto \frac{u(x)}{|x|}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *und*

$$\left\|(x \mapsto \frac{u(x)}{|x|})\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Beweis. Siehe z.B. [6], Lemma 3.16. □

D. Anmerkungen zur schwachen Konvergenz

D.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden einige Aussagen über schwache Konvergenz in Banachräumen wiederholt und zusammengefasst.

Im Folgenden sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Für $x \in X$ und $\varphi \in X'$ schreibt man $\langle \varphi, x\rangle_{X'\times X} := \varphi(x)$.

D.2 Definition. a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt schwach konvergent gegen $x \in X$, falls $\langle \varphi, x_n\rangle_{X'\times X} \to \langle \varphi, x\rangle_{X'\times X}$ $(\varphi \in X')$ gilt. Man schreibt $x_n \rightharpoonup x$.

b) Eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ heißt schwach-*-konvergent gegen $\varphi \in X'$, falls für alle $x \in X$ gilt: $\langle \varphi_n, x\rangle_{X'\times X} \to \langle \varphi, x\rangle_{X'\times X}$. Man schreibt $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$.

D.3 Bemerkung. Aus Normkonvergenz folgt schwache Konvergenz in X, aus schwacher Konvergenz folgt schwach-*-Konvergenz in X'. In endlich-dimensionalen Räumen stimmen die Normtopologie und die schwache Topologie überein, und eine Folge konvergiert genau dann in der Norm, wenn sie schwach konvergiert.

D.4 Lemma. *a) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt.*

b) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X und $x_n \rightharpoonup y$ in X, so gilt $x = y$.

c) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X, so gilt $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

d) Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X und $\varphi_n \to \varphi$ in X', so gilt $\langle \varphi_n, x_n\rangle_{X'\times X} \to \langle \varphi, x\rangle_{X'\times X}$.

e) Falls $x_n \to x$ in X und $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ in X', so gilt $\langle \varphi_n, x_n\rangle_{X'\times X} \to \langle \varphi, x\rangle_{X'\times X}$.

Beweis. Siehe z.B. [8], Abschnitt 15.2. □

D.5 Satz. *Sei X reflexiv. Dann ist die Menge $\overline{B(0,1)} := \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ schwach folgenkompakt. Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine beschränkte Folge ist , dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in X$ mit $x_{n_k} \rightharpoonup x$ $(k \to \infty)$.*

Beweis. Siehe [8], Satz 15.26. □

D.6 Lemma. *Sei X reflexiv und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt. Falls alle schwach konvergenten Teilfolgen von $(x_n)_n$ schwach gegen denselben Grenzwert x konvergieren, so konvergiert die gesamte Folge $(x_n)_n$ schwach gegen x.*

Beweis. Falls x_n nicht schwach gegen x konvergiert, dann existiert ein $\varphi \in X'$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|\langle \varphi, x_{n_k} - x\rangle_{X'\times X}| \geq \varepsilon$ $(k \in \mathbb{N})$. Nach Satz D.5 besitzt aber $(x_{n_k})_k$ wieder eine schwach konvergente Teilfolge, welche nach Voraussetzung schwach gegen x konvergiert, im Widerspruch zur obigen Ungleichung. □

D.7 Lemma. *Seien X und Y Banachräume und $F \in L(X,Y)$. Dann ist F auch schwach stetig, d.h. aus $x_n \rightharpoonup x$ in X folgt auch $Fx_n \rightharpoonup Fx$ in Y.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der Stetigkeit des adjungierten Operators $F' \in L(X', Y')$, da damit für alle $\varphi \in Y'$ wegen $F'\varphi \in X'$ gilt:

$$\langle \varphi, Fx_n - Fx\rangle_{Y'\times Y} = \langle \varphi \circ F, x_n - x\rangle_{X'\times X} = \langle F'f, x_n - x\rangle_{X'\times X} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

E. Sätze aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

E.1 Worum geht's? Hier wird der in der Vorlesung verwendete Satz von Peano formuliert sowie eine Aussage über das maximale Existenzintervall formuliert.

Der Beweis der folgenden beiden Sätze findet sich z.B. in [14].

E.2 Satz (Existenzsatz von Peano)**.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, x_0) \in G$. Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine Funktion $x \in C^1(J_\delta)$ mit $J_\delta := [t_0 - \delta, t_0+\delta])$ so, dass $(t, x(t)) \in G$ für alle $t \in J_\delta$ gilt und x in J_δ die Differentialgleichung*

$$\partial_t x(t) = f(t, x(t)),\ x(0) = x_0 \tag{5-1}$$

löst.

Dies ist eine Aussage über die lokale Lösbarkeit. Jede Lösung lässt sich zu einer maximalen Lösung fortsetzen. Dabei heißt eine Lösung $x\colon J_x \to \mathbb{R}^n$ von (5-1) maximal, falls für jede Lösung $\widetilde{x}\colon J_{\widetilde{x}} \to \mathbb{R}^n$ von (5-1) mit $J_x \subset J_{\widetilde{x}}$ und $\widetilde{x}|_{J_x} = x$ bereits folgt $J_{\widetilde{x}} = J_x$.

E.3 Satz. *In der Situation von Satz E.2 sei $x\colon J_x \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung von (5-1). Dann ist $J_x = (t_-, t_+)$ ein Intervall, wobei für t_+ eine der folgenden Alternativen gilt:*

(i) $t_+ = \infty$, *d.h. x ist eine globale Lösung nach rechts,*

(ii) $t_+ < \infty$ *und* $\liminf_{t\to t_+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial G) = 0$,

(iii) $t_+ < \infty$, $\liminf_{t\to t_+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial G) > 0$, $\lim_{t\to t_+} |x(t)| = \infty$.

Der letzte Satz besagt insbesondere für den Fall $G = (t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, dass jede lokale Lösung entweder global existiert oder in endlicher Zeit einen blow-up besitzt, d.h. es gilt $|x(t)| \to \infty$ für $t \to t_+$.

Literatur

[1] Adams, R. A., Fournier, J.: *Sobolev spaces.* 2nd edition, Academic Press, Amsterdam etc., 2003.

[2] Amann, H.: *Linear and quasilinear parabolic problems I.* Birkhäuser, Basel etc., 1995.

[3] Amann, H., Escher, J.: *Analysis III.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[4] Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M., Neubrander, F.: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[5] Davies, E. B.: *One-parameter semigroups.* Academic Press London etc., 1980.

[6] Denk, R.: Skript zur Vorlesung Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Wintersemester 2011/12, Universität Konstanz.

[7] Denk, R., Hieber, M., Prüss, J.: R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. *Mem. Amer. Math. Soc.* **788** (2003), 114 pp.

[8] Denk, R., Racke, R.: Kompendium der Analysis, Band 2. Springer Spektrum, Wiesbaden 2012.

[9] Engel, K.-J., Nagel, R.: *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Springer, New York etc., 2000.

[10] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: *Classes of linear operators. I.* Birkhäuser, Basel etc., 1990.

[11] Hörmander, L.: *The analysis of linear partial differential operators*, I-IV. Springer-Verlag Berlin 1976.

[12] Lunardi, A.: *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, Basel, 1995.

[13] Pazy, A.: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, New York etc., 1992.

[14] Prüss, J., Wilke, M.: Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme. Birkhäuser, Basel etc., 2010.

[15] Renardy, M., Rogers, R.C.: *An introduction to partial differential equations.* Text Appl. Math. **13**. Springer-Verlag, New York, 1993.

[16] Růžička, M.: Nichtlineare Funktionalanalysis. Springer-Verlag, Berlin etc., 2004.

[17] Tanabe, H.: *Equations of evolution.* Pitman, London etc., 1979.

[18] Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner-Verlag Stuttgart 1982.