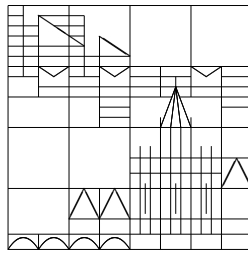


Skript zur Vorlesung Fouriertransformation

Wintersemester 2014/15

Robert Denk



Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 16. 4. 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Fourierreihen	2
	a) Eigenschaften der Fourierreihe in $L^1(\mathbb{T}^n)$	2
	b) Summationskerne	7
	c) Punktweise Konvergenz	14
	d) Fourierreihen in $L^2(\mathbb{T}^n)$	18
2	Die Fouriertransformation in \mathbb{R}^n	22
	a) Fouriertransformation in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und Summationskerne	22
	b) Fouriertransformation im Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und in $L^2(\mathbb{R}^n)$	26
	c) Fouriertransformation für temperierte Distributionen	31
3	Paley-Wiener-Sätze und der Shannonsche Abtastsatz	38
	a) Die Sätze von Paley und Wiener	38
	b) Der Shannonsche Abtastsatz	44
4	Positiv definite Funktionen und der Satz von Bochner	49
	a) Die Fourier-Stieltjes-Transformation	49
	b) Positiv definite Funktionen	55
	Literatur	61

1. *Fourierreihen*

1.1 Worum geht's? Für periodische Funktionen sind die Fourierreihen ein zentraler und nützlicher Begriff. Wir betrachten Funktionen auf dem n -dimensionalen Torus und diskutieren zunächst elementare Eigenschaften der Fourierreihe. Dabei wird die Faltung eine wichtige Rolle spielen.

Die Fourierreihe basiert auf der Idee, eine Funktion als Überlagerung von Schwingungen darzustellen, entweder in Form von Kosinus- und Sinus-Termen (reelle Fourierreihe) oder in Form von komplexen Exponentialfunktionen. Die zentrale Frage ist dabei, ob und in welcher Weise die Reihe gegen die Funktion konvergiert. Die wichtigsten Konvergenzarten sind dabei Konvergenz in L^1 , Konvergenz in L^2 und punktweise Konvergenz. Ein gutes Konzept, um die Konvergenz zu untersuchen, sind Summationskerne.

a) *Eigenschaften der Fourierreihe in $L^1(\mathbb{T}^n)$*

Wir beginnen mit einigen Bezeichnungen und Definitionen.

1.2 Bezeichnung. a) Der eindimensionale Torus ist definiert als Quotientenraum $\mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, d.h. ein Element in \mathbb{T} hat die Form $x = x_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dabei wird \mathbb{T} mit der Quotiententopologie versehen, d.h. die offenen Mengen $U \subset \mathbb{T}$ sind alle Mengen der Form $\{p(x_0) : x_0 \in V\}$ mit einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}$. Hier ist $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ die kanonische Projektion $p(x_0) := x_0 + 2\pi\mathbb{Z}$. Konkret bedeutet dies, dass auf \mathbb{T} die Metrik $d(x, y) := \inf\{|x - y + 2\pi k| : k \in \mathbb{Z}\}$ verwendet wird.

Man beachte, dass das Intervall $[0, 2\pi)$ häufig als Beschreibung von \mathbb{T} verwendet wird, indem von jeder Äquivalenzklasse $x_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ der (eindeutig bestimmte) Repräsentant in $[0, 2\pi)$ ausgewählt wird. Dabei ist aber zu beachten, dass die Topologie auf $[0, 2\pi)$ (d.h. die Spurtopologie von \mathbb{R}) nicht mit der Topologie in \mathbb{T} übereinstimmt. Ein topologisch korrektes Modell für \mathbb{T} ist $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, wobei die Addition in \mathbb{T} zur Multiplikation auf dem Einheitskreis wird.

Funktionen auf \mathbb{T} können mit 2π -periodischen Funktionen auf \mathbb{R} identifiziert werden und umgekehrt. Genauer gilt: Falls $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische Funktion ist, so existiert genau eine Funktion $f_{\mathbb{T}}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = f_{\mathbb{T}} \circ p$. Wir werden im Folgenden diese Identifizierung ohne weitere Erwähnung verwenden, z.B. bei Gleichheiten der Form $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx$.

Der n -dimensionale Torus \mathbb{T}^n ist definiert als Produkt $\mathbb{T}^n := \mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T}$.

b) Auf \mathbb{T}^n werden die Räume $L^p(\mathbb{T}^n)$ mit dem Lebesgue-Maß wie üblich definiert. Genauer ist für $p \in [1, \infty]$ der Raum $L^p(\mathbb{T}^n)$ definiert als die Menge aller Äquivalenz-

klassen messbarer Funktionen $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$, für welche $\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}$ endlich ist. Dabei ist

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} := \|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^p \bar{d}x \right)^{1/p}, & \text{falls } p \in [1, \infty), \\ \text{ess sup}_{x \in \mathbb{T}^n} |f(x)|, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Hier ist $\bar{d}x := (2\pi)^{-n} dx$ das normierte Lebesgue-Maß.

c) Für $p \in [1, \infty]$ ist der Banachraum $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$ definiert als die Menge aller komplexwertigen Folgen $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$, für welche $\|a\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^n)}$ endlich ist, wobei

$$\|a\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^n)} := \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k|^p \right)^{1/p}, & \text{falls } p \in [1, \infty), \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k|, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Analog wird $\ell^p(Z)$ für eine beliebige abzählbare Menge Z definiert. Oft schreibt man $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$.

1.3 Bemerkung. Für alle $a \in \mathbb{T}^n$ und $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ gilt $\int_{\mathbb{T}^n} f(x-a) \bar{d}x = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \bar{d}x$, d.h. $\bar{d}x$ ist invariant unter Translationen (Haar-Maß).

Ein trigonometrisches Polynom ist eine Funktion $P: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ der Form $P(x) = \sum_{|k| \leq N} a_k e^{ik \cdot x}$ ($x \in \mathbb{T}^n$) mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $N \in \mathbb{N}$. Dabei wird $k \cdot x := k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$ und $|k| := (k \cdot k)^{1/2}$ gesetzt. Der Grad eines trigonometrischen Polynoms wird definiert als $\deg P := \max\{|k_1| + \dots + |k_n| : a_k \neq 0\}$.

1.4 Definition. Sei $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$. Für $k \in \mathbb{Z}^n$ heißt

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f)(k) := \hat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} \bar{d}x$$

der k -te Fourierkoeffizient von f . Die formale Reihe

$$S[f](x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} \quad (x \in \mathbb{T}^n)$$

heißt Fourierreihe von f . Die Abbildung $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$ heißt auch diskrete Fouriertransformation.

1.5 Bemerkung. Speziell im Fall $n = 1$ ist auch eine alternative Darstellung der Fourierkoeffizienten und der Fourierreihe üblich: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Dann definiert man $a_k := \hat{f}(k) + \hat{f}(-k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $b_k := i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k))$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

als Gleichheit zweier formaler Reihen. Der Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass bei reellwertigem $f \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ die Koeffizienten a_k, b_k ebenfalls reell sind. Denn in diesem Fall ist $\hat{f}(-k) = \hat{f}(k)$.

Falls $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ eine gerade Funktion ist, d.h. falls $f(x) = f(-x)$ ($x \in \mathbb{T}$), so folgt $\hat{f}(-k) = \hat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und damit $b_k = 0$, d.h. die Fourierreihe von f wird hier zu einer Reihe mit reinen cos-Termen. Analog besteht die Fourierreihe einer ungeraden Funktion f (d.h. $f(x) = -f(-x)$ ($x \in \mathbb{T}$)) nur aus sin-Termen. Man beachte auch, dass $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{T}} f(x) dx$.

1.6 Bemerkung. Sei $P(x) = \sum_{|\ell| \leq N} a_\ell e^{i\ell \cdot x}$ ein trigonometrisches Polynom. Dann gilt für $k \in \mathbb{Z}^n$

$$\hat{P}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{|\ell| \leq N} a_\ell e^{i\ell \cdot x} e^{-ik \cdot x} dx = \sum_{|\ell| \leq N} a_\ell \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(\ell-k) \cdot x} dx = a_k$$

wegen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(\ell-k) \cdot x} dx &= \int_{[0, 2\pi]^n} e^{i(\ell-k) \cdot x} dx = \prod_{j=1}^n (2\pi)^{-1} \int_{[0, 2\pi]} e^{i(\ell_j - k_j) x_j} dx_j \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \ell = k, \\ 0, & \text{falls } \ell \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

1.7 Satz. a) Die diskrete Fouriertransformation ist linear, d.h. es gilt $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(f) + \beta \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(g)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$.

b) Sei $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ und $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$ ($x \in \mathbb{T}^n$). Dann gilt

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \bar{f})(k) = \overline{(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f)(-k)} \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

c) Seien $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, $a \in \mathbb{T}^n$ und $(L_a f)(x) := f(x - a)$ ($x \in \mathbb{T}^n$). Dann gilt

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} L_a f)(k) = e^{-ia \cdot k} (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f)(k) \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

d) Für alle $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ gilt $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1$ ($k \in \mathbb{Z}^n$).

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

1.8 Definition. Für $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ definiert man die Faltung $f * g: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{T}^n} f(x - y) g(y) dy \quad (x \in \mathbb{T}^n).$$

1.9 Satz. Für $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ ist $f * g \in L^1(\mathbb{T}^n)$. Es gilt $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ und

$$(f * g)^\wedge(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

Beweis. Die Funktion $F: \mathbb{T}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ ist messbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} |F(x, y)| \, dx \, dy &= \int_{\mathbb{T}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{T}^n} |f(x - y)| \, dx \, dy \\ &= \|L_y f\|_1 \int_{\mathbb{T}^n} |g(y)| \, dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Fubini ist $y \mapsto F(x, y)$ für fast alle x integrierbar, d.h. die Faltung $(f * g)(x)$ ist für fast alle $x \in \mathbb{T}^n$ wohldefiniert. Weiter gilt

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{T}^n} \left| \int_{\mathbb{T}^n} f(x - y)g(y) \, dy \right| \, dx \leq \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(x - y)g(y)| \, dy \, dx = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Für $k \in \mathbb{Z}^n$ folgt wieder mit Fubini

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge &= \int_{\mathbb{T}^n} (f * g)(x) e^{-ik \cdot x} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x - y)g(y) e^{-ik \cdot (x - y)} e^{-ik \cdot y} \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} g(y) e^{-ik \cdot y} \left(\int_{\mathbb{T}^n} f(x - y) e^{ik \cdot (x - y)} \, dx \right) \, dy \\ &= \hat{g}(k) \int_{\mathbb{T}^n} f(z) e^{-ik \cdot z} \, dz = \hat{g}(k)\hat{f}(k). \end{aligned}$$

□

Die Faltung ist damit eine Multiplikation auf dem Raum $L^1(\mathbb{T}^n)$. Der entsprechende abstrakte Begriff ist der einer Banachalgebra.

1.10 Definition. Eine Banachalgebra A ist ein \mathbb{C} -Banachraum, auf dem eine bilineare, assoziative Abbildung $A \times A \rightarrow A$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ definiert ist (die Multiplikation), wobei

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in A).$$

Die Banachalgebra A heißt kommutativ, falls $x \cdot y = y \cdot x$ ($x, y \in A$). Ein Element $e \in A$ heißt Einheit (oder Eins) von A , falls $x \cdot e = e \cdot x = x$ ($x \in A$) und $\|e\| = 1$.

1.11 Beispiele. a) Der Raum $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ ist mit der Norm $\|(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}\|_{\ell^\infty} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k|$ ein Banachraum. Definiert man die Multiplikation auf $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ durch $(a \cdot b)(k) := a_k b_k$ ($k \in \mathbb{Z}^n$) für $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ und $b = (b_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$, so wird $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ zu einer kommutativen Banachalgebra mit Einselement $\mathbf{1} = (1)_{k \in \mathbb{Z}^n}$.

b) Weitere Beispiele für Banachalgebren sind die beschränkten linearen Operatoren auf einem Banachraum, die stetigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum und (als Verallgemeinerung von a)) der Raum $L^\infty(\mu)$ mit einem Maß μ .

Mit dieser Bezeichnung können wir die obigen Ergebnisse kurz zusammenfassen:

1.12 Satz. a) Der Raum $L^1(\mathbb{T}^n)$, versehen mit der Faltung als Multiplikation, wird zu einer kommutativen Banachalgebra.

b) Die diskrete Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : L^1(\mathbb{T}^n) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ ist ein Homomorphismus von Banachalgebren.

Beweis. Dies ist nur eine Umformulierung der Sätze 1.7 und 1.9. □

1.13 Lemma. Seien $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ und $P(x) = \sum_{|k| \leq N} a_k e^{ik \cdot x}$ ein trigonometrisches Polynom. Dann gilt $(f * P)(x) = \sum_{|k| \leq N} a_k \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}$.

Beweis. Übung. □

Im nächsten Satz verwenden wir die übliche Multi-Index-Schreibweisen

$$\begin{aligned} \partial^\alpha &:= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \\ k^\alpha &:= k_1^{\alpha_1} \dots k_n^{\alpha_n}, \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_n \end{aligned}$$

für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Bei der Definition von k^α wird hier formal $0^0 := 1$ gesetzt.

1.14 Satz. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f \in W_1^m(\mathbb{T}^n)$, d.h. $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ für alle $|\alpha| \leq m$. Dann gilt

$$(-i)^{|\alpha|} (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \partial^\alpha f)(k) = k^\alpha (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f)(k) \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

Beweis. Wir integrieren α_j -mal partiell in Richtung x_j und erhalten

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \partial^\alpha f)(k) &= \int_{\mathbb{T}^n} (\partial^\alpha f)(x) e^{-ik \cdot x} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \partial^\alpha e^{-ik \cdot x} dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) (-ik)^\alpha e^{-ik \cdot x} dx = (ik)^\alpha (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f)(k). \end{aligned}$$

□

1.15 Korollar. Sei $f \in W_1^{n+1}(\mathbb{T}^n)$. Dann ist $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$, d.h. $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)| < \infty$.

Beweis. Sei $f \in W_1^{n+1}(\mathbb{T}^n)$ und $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Wähle $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $|k_j| = \max\{|k_1|, \dots, |k_n|\}$. Dann ist $k_j \neq 0$ und $|k| \leq \sqrt{n}|k_j|$. Mit Satz 1.14 gilt

$$|\hat{f}(k)| = \frac{|(\partial_{x_j}^{n+1} f)^\wedge(k)|}{|k_j|^{n+1}} \leq \frac{C}{|k_j|^{n+1}} \leq \frac{Cn^{(n+1)/2}}{|k|^{n+1}},$$

wobei $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(\partial_{x_j}^{n+1} f) \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ verwendet wurde. Nun folgt die Behauptung aus der Tatsache, dass $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |k|^{-n-1} < \infty$. \square

b) Summationskerne

Wir werden nun Konvergenzeigenschaften der Fourierreihe betrachten.

1.16 Definition. Ein Summationskern ist eine Folge $(K_N)_{N \in \mathbb{N}} \subset C(\mathbb{T}^n)$ mit

(S1) $\int_{\mathbb{T}^n} K_N(x) \overrightarrow{dx} = 1$ für alle $N \in \mathbb{N}$,

(S2) es existiert eine Konstante $M \geq 0$ mit $\int_{\mathbb{T}^n} |K_N(x)| \overrightarrow{dx} \leq M$ ($N \in \mathbb{N}$),

(S3) Für alle $\delta \in (0, \pi)$ gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\{x \in \mathbb{T}^n; |x| \geq \delta\}} |K_N(x)| \overrightarrow{dx} = 0$.

Häufig wird auch eine Familie $(K_\tau)_{\tau \in [0,1]}$ betrachtet, wobei dann in (S3) der Limes für $\tau \rightarrow 1$ genommen wird.

Im Folgenden werden wir Integrale über Banachraum-wertige Funktionen betrachten. Dabei kann der Integralbegriff analog zum entsprechenden skalaren Integral definiert werden (Riemann- oder Lebesgue-Integral). Insbesondere für stetige Funktionen $f: [0, 2\pi] \rightarrow X$ mit X Banachraum, kann das Riemann-Integral verwendet werden, d.h. $\int_0^{2\pi} \varphi(x) \overrightarrow{dx} = \lim \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) \varphi(x_j) \in X$, wobei der Limes über alle Partitionen mit $\max |x_{j+1} - x_j| \rightarrow 0$ gebildet wird. Die üblichen Integralregeln gelten weiterhin, so gilt etwa $\|\int_0^{2\pi} \varphi(x) \overrightarrow{dx}\|_X \leq \int_0^{2\pi} \|\varphi(x)\|_X \overrightarrow{dx}$. (Im Falle der Verallgemeinerung des Lebesgue-Integrals spricht man hier auch vom Bochner-Integral.) Später werden wir sogar eine Verallgemeinerung auf vollständige metrische Räume verwenden, wobei aber die Integranden wieder stetig sind, so dass das Integral der Grenzwert der Riemann-Summen ist.

1.17 Lemma. Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $\varphi: \mathbb{T}^n \rightarrow X$ stetig, und sei $(K_N)_{N \in \mathbb{N}} \subset C(\mathbb{T}^n)$ ein Summationskern. Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(x) \varphi(x) \overrightarrow{dx} = \varphi(0) \quad (\text{Konvergenz in } X).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Mit (S1) und (S2) gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(x)\varphi(x)\bar{d}x - \varphi(0) &= \int_{\mathbb{T}^n} K_N(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\bar{d}x \\ &= \int_{|x|\leq\delta} K_N(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\bar{d}x + \int_{|x|\geq\delta} K_N(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\bar{d}x. \end{aligned}$$

Das erste Integral lässt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned} \left\| \int_{|x|\leq\delta} K_N(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\bar{d}x \right\| &\leq \int_{|x|\leq\delta} |K_N(x)| \|\varphi(x) - \varphi(0)\| \bar{d}x \\ &\leq \max_{|x|\leq\delta} \|\varphi(x) - \varphi(0)\| \int_{\mathbb{T}^n} |K_N(x)| \bar{d}x \leq M \max_{|x|\leq\delta} \|\varphi(x) - \varphi(0)\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

falls δ hinreichend klein gewählt wird. Für das zweite Integral verwenden wir (S3) und erhalten

$$\left\| \int_{|x|\geq\delta} K_N(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\bar{d}x \right\| \leq 2 \max_{x\in\mathbb{T}^n} \|\varphi(x)\| \int_{|x|\geq\delta} |K_N(x)| \bar{d}x < \varepsilon,$$

falls N hinreichend groß gewählt wird. □

1.18 Lemma. Zu $y \in \mathbb{T}^n$ und $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ sei $(L_y f)(x) := f(x - y)$ ($x \in \mathbb{T}^n$). Dann ist für jedes $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ die Abbildung $\varphi: \mathbb{T}^n \rightarrow L^1(\mathbb{T}^n)$, $y \mapsto L_y f$ stetig.

Beweis. Seien $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, $y_0 \in \mathbb{T}^n$ und $\varepsilon > 0$. Da die stetigen Funktionen dicht in $L^1(\mathbb{T}^n)$ sind, existiert ein $g \in C(\mathbb{T}^n)$ mit $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$. Da g als stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|g(y - y_0) - g(y - z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{T}^n \text{ und } z \in \mathbb{T}^n \text{ mit } |z - y_0| < \delta.$$

Somit folgt $\|L_{y_0} g - L_z g\|_1 \leq \|L_{y_0} g - L_z g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Für f erhalten wir

$$\|L_{y_0} f - L_z f\|_1 \leq \|L_{y_0} f - L_{y_0} g\|_1 + \|L_{y_0} g - L_z g\|_1 + \|L_z g - L_z f\|_1 < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

für alle $z \in \mathbb{T}^n$ mit $|z - y_0| < \delta$, wobei $\|L_z(g - f)\|_1 = \|g - f\|_1$ verwendet wurde. □

1.19 Satz. Sei $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ ein Summationskern. Dann gilt für alle $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} (K_N * f) \quad (\text{Konvergenz in } L^1(\mathbb{T}^n)).$$

Beweis. Direkt aus Lemma 1.17 und Lemma 1.18 mit $X := L^1(\mathbb{T}^n)$ und φ wie in Lemma 1.18 folgt

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y) L_y f \, d\bar{y}$$

in $L^1(\mathbb{T}^n)$. Die Behauptung folgt nun daraus, dass für fast alle $x \in \mathbb{T}^n$ gilt

$$\left(\int_{\mathbb{T}^n} K_N(y) L_y f \, d\bar{y} \right)(x) = \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y) f(x - y) \, d\bar{y} = (K_N * f)(x).$$

Um dies zu sehen, beachte man, dass der Integrand auf der linken Seite eine stetige Funktion von \mathbb{T}^n nach $L^1(\mathbb{T}^n)$ ist. Daher kann man den Integranden gleichmäßig durch Stufenfunktionen der Form

$$s(y) = \sum_{j=1}^J \chi_{[y_j, y_{j+1})}(y) K_N(y_j) L_{y_j} f$$

approximieren. Für derartige Stufenfunktionen gilt diese Gleichheit aber, wie man durch direktes Einsetzen der Definition des Integrals sieht. \square

1.20 Definition. a) Im Fall $n = 1$ ist der Fejér-Kern $(F_N)_{N \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$F_N(x) := \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{T}).$$

Man schreibt $\sigma_N f := F_N * f$ für $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $N \in \mathbb{N}$. Statt $(\sigma_N f)(x)$ wird häufig auch $\sigma_N(f, x)$ geschrieben.

Für $N \in \mathbb{N}$ ist der Dirichlet-Kern D_N definiert durch $D_N(x) := \sum_{k=-N}^N e^{ikx}$ ($x \in \mathbb{T}$). Wir schreiben $s_N f := D_N * f$ sowie $s_N(f, x) := (s_N f)(x)$.

b) Für $n \geq 2$ definiert man den Fejér-Kern $(F_N)_{N \in \mathbb{N}}$ als (Tensor-)Produkt, d.h. als

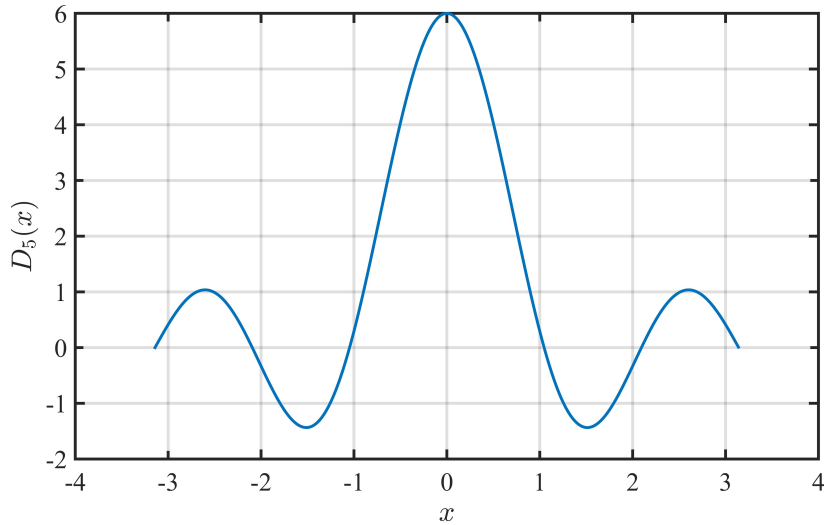
$$F_N(x) := F_N^{(1)}(x_1) \cdot \dots \cdot F_N^{(1)}(x_n) \quad (x \in \mathbb{T}^n),$$

wobei $F_N^{(1)}$ der eindimensionale Fejér-Kern aus a) sei. Analog für den Dirichlet-Kern.

1.21 Lemma. a) Für den eindimensionalen Fejér-Kern gilt

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \quad (x \in \mathbb{T}). \quad (1-1)$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(F_N)_{N \in \mathbb{N}} \subset C(\mathbb{T}^n)$ ein Summationskern.

Abbildung 1: Der eindimensionale Dirichlet-Kern D_5

Beweis. a) Für den Dirichlet-Kern und $x \neq 0$ gilt

$$D_N(x) = e^{-iNx} \sum_{k=0}^{2N} e^{ikx} = e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i\frac{2N+1}{2}x} - e^{-i\frac{2N+1}{2}x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Wir schreiben den Fejér-Kern in der Form

$$F_N(x) = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx} = \frac{1}{N+1} (D_0(x) + D_1(x) + \dots + D_N(x)). \quad (1-2)$$

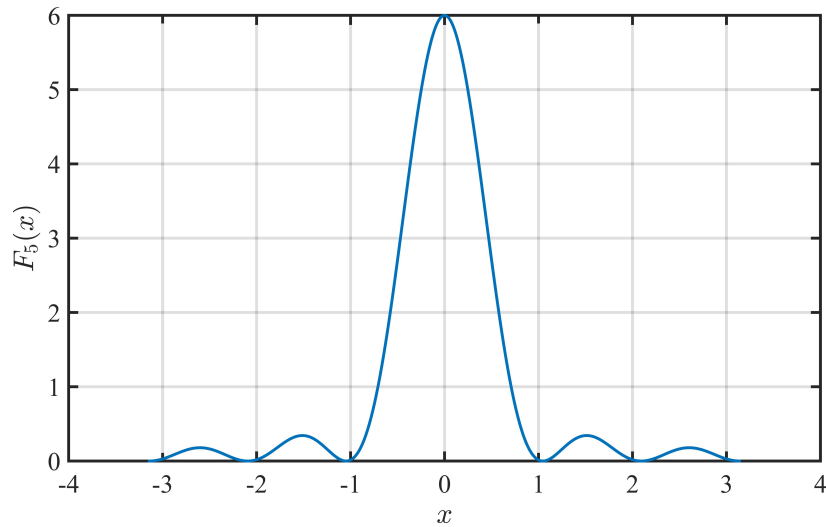
Es gilt

$$\begin{aligned} 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^N D_k(x) &= \sum_{k=0}^N 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) = \sum_{k=0}^N (\cos(kx) - \cos((k+1)x)) \\ &= 1 - \cos((N+1)x) = 2 \sin^2\left(\frac{N+1}{2}x\right). \end{aligned}$$

Damit und mit (1-2) erhalten wir für den Fejér-Kern die gesuchte Darstellung (1-1).

b) O.E. sei $n = 1$, da sich die Eigenschaften eines Summationskerns direkt auf das entsprechende Tensorprodukt übertragen. Offensichtlich gilt $\int_{\mathbb{T}} D_N(x) dx = 1$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Mit (1-2) folgt auch $\int_{\mathbb{T}} F_N(x) dx = 1$, d.h. Eigenschaft (S1). Nach a) ist $F_N \geq 0$, damit gilt (S2) trivialerweise mit $M = 1$. Für (S3) verwendet man ebenfalls die Darstellung aus a). Sei $\delta \in (0, \pi)$. Für $x \in (\delta, 2\pi - \delta)$ ist dann $|\sin(\frac{x}{2})| \geq M$ mit einer Konstante $M > 0$. Somit gilt

$$\left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{M}\right)^2 \quad (x \in (\delta, 2\pi - \delta)).$$

Abbildung 2: Der eindimensionale Fejér-Kern F_5

Mit (1-1) folgt $\sup_{x \in (\delta, 2\pi - \delta)} |F_N(x)| \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) und damit $\int_{\delta}^{2\pi - \delta} |F_N(x)| dx \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$). \square

Trotz des Namens ist der Dirichlet-Kern kein Summationskern. Für den Fejér-Kern ist dies allerdings der Fall, wie das obige Lemma zeigt. Nach (1-2) ist F_N (für $n = 1$) das arithmetische Mittel der ersten $N + 1$ Elemente der Folge $(D_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, entsprechendes gilt für die Faltung mit f . Man spricht auch vom Cesàro-Mittel.

1.22 Korollar. a) Für alle $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ gilt $\sigma_N f = F_N * f \rightarrow f$ ($N \rightarrow \infty$) (Konvergenz in $L^1(\mathbb{T}^n)$).

b) Für $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ gilt

$$(F_N * f)(x) = \sum_{|k|_{\infty} \leq N} \left[\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{|k_j|}{N+1} \right) \right] \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} \quad (x \in \mathbb{T}^n).$$

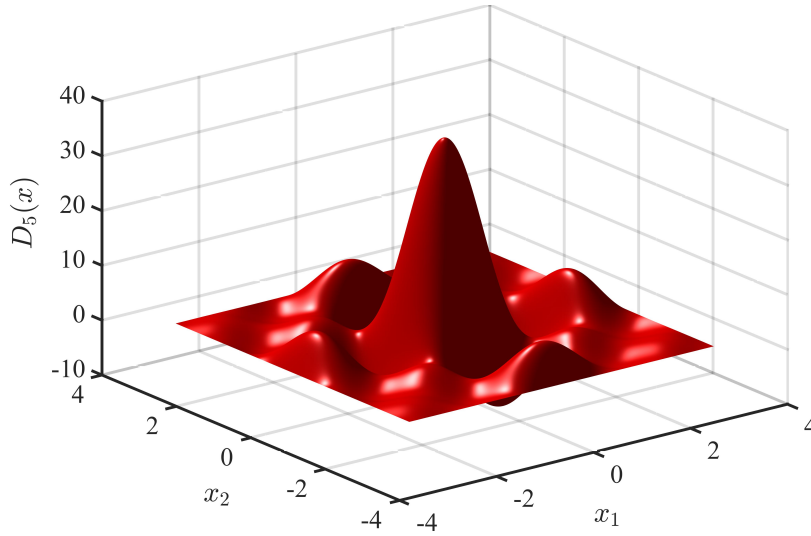
Hier ist $|k|_{\infty} := \max\{|k_1|, \dots, |k_n|\}$.

c) Trigonometrische Polynome liegen dicht in $L^1(\mathbb{T}^n)$.

Beweis. a) Dies ist Satz 1.19 für den Fejér-Kern. Man beachte dabei, dass $\hat{K}_N(k) = \hat{K}_N^{(1)}(k_1) \cdot \dots \cdot \hat{K}_N^{(1)}(k_n)$ gilt, wobei $K^{(1)}$ der eindimensionale Fejér-Kern sei.

b) Da F_N ein trigonometrisches Polynom ist, gilt dies nach Lemma 1.13.

c) folgt sofort aus a) und b). \square

Abbildung 3: Der zweidimensionale Dirichlet-Kern D_5

1.23 Satz (Eindeutigkeitsatz). Sei $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ mit $\hat{f}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt $f = 0$ in $L^1(\mathbb{T}^n)$, d.h. $f = 0$ fast überall.

Beweis. Sei $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ mit $\hat{f}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Nach Korollar 1.22 b) ist $F_N * f = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und damit (Korollar 1.22 a)) $f = 0$ in $L^1(\mathbb{T}^n)$. \square

1.24 Satz (Riemann-Lebesgue-Lemma). Für alle $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ gilt $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0$.

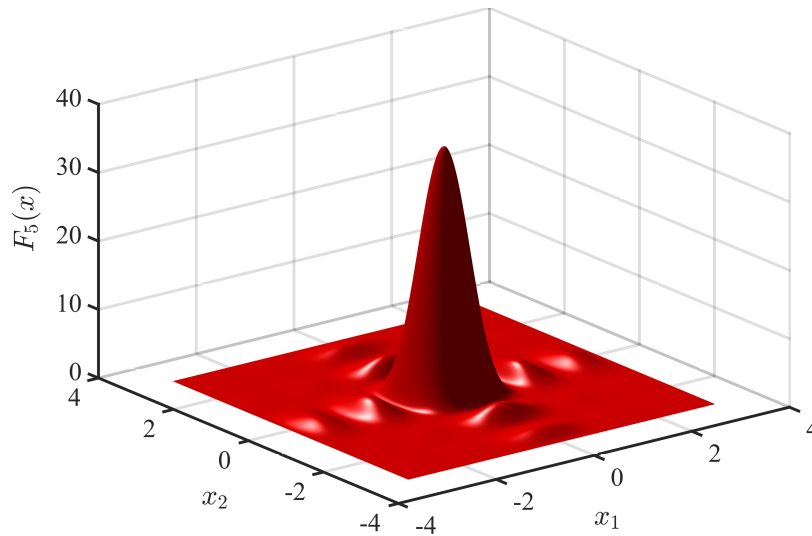
Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein trigonometrisches Polynom P mit $\|f - P\|_1 < \varepsilon$. Für $k \in \mathbb{Z}^n$ mit $|k| > \deg P$ folgt mit Satz 1.7 d)

$$|\hat{f}(k)| = |\hat{f}(k) - \hat{P}(k)| \leq \|f - P\|_1 < \varepsilon. \quad \square$$

Das Riemann-Lebesgue-Lemma besagt insbesondere, dass der Homomorphismus von Banachalgebren $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}: L^1(\mathbb{T}^n) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$, $f \mapsto \hat{f}$ aus Satz 1.12 nicht surjektiv ist.

1.25 Bemerkung. Die folgenden Aussagen werden wieder für allgemeine Summationskerne formuliert. Neben dem Fejér-Kern werden auch folgende Summationskerne in Anwendungen verwendet, welche wir hier nur im eindimensionalen formulieren (in \mathbb{T}^n betrachtet man wieder das Tensorprodukt).

a) De la Vallée-Poussin-Kern: Dieser ist gegeben durch $K_N(x) := 2F_{2N+1}(x) - F_N(x)$. Es gilt $\hat{K}(k) = 1$ für $|k| \leq N + 1$.

Abbildung 4: Der zweidimensionale Fejér-Kern F_5

b) Poisson-Summationskern $(P_r)_{r \in [0,1]}$: Dieser ist definiert durch

$$P_r(x) := 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kx) \quad (x \in \mathbb{T}).$$

Es gilt $P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2}$ ($x \in \mathbb{T}$) sowie $(P_r * f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikx}$ ($x \in \mathbb{T}$) für $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Wir haben oben die Konvergenz in $L^1(\mathbb{T}^n)$ für Summationskerne gesehen. Um die punktweise Konvergenz zu untersuchen, ist der folgende Begriff nützlich:

1.26 Definition. Ein homogener Banachraum B auf \mathbb{T}^n ist ein linearer Teilraum von $L^1(\mathbb{T}^n)$ mit einer Norm $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}$, für welchen gilt:

- (i) Für alle $f \in B$ und $y \in \mathbb{T}^n$ ist $L_y f \in B$ und $\|L_y f\|_B = \|f\|_B$.
- (ii) Die Abbildung $\mathbb{T}^n \rightarrow B, y \mapsto L_y f$ ist stetig für alle $f \in B$.

1.27 Beispiele. a) Beispiele für homogene Banachräume auf \mathbb{T}^n sind $C(\mathbb{T}^n)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\infty}$, $C^m(\mathbb{T}^n)$ mit Norm $\|f\|_{C^m(\mathbb{T}^n)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^{\alpha} f\|_{\infty}$ sowie $L^p(\mathbb{T}^n)$ für $p \in (1, \infty)$ mit Norm $\|\cdot\|_p$.

b) Der Raum $L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$ mit $\|\cdot\|_{\infty}$ ist kein homogener Banachraum.

1.28 Satz. Sei B ein homogener Banachraum auf \mathbb{T}^n , und sei $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ ein Summationskern. Für jedes $f \in B$ gilt dann $K_N * f \in B$ sowie $\|K_N * f - f\|_B \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$).

Beweis. Betrachte das B -wertige Integral $F_N := \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y) L_y f \, dy \in B$. Wegen $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}$ ist dieses Integral gleich dem $L^1(\mathbb{T}^n)$ -wertigen Integral, d.h. es gilt $F_N = K_N * f$ (siehe Beweis von Satz 1.19). Nach Lemma 1.17 gilt $F_N \rightarrow f$ in B . Insgesamt folgt also $F_N = K_N * f \rightarrow f$ in B . \square

1.29 Korollar. a) Ist B ein homogener Banachraum auf \mathbb{T}^n , so liegen die trigonometrischen Polynome dicht in B (für $B = C(\mathbb{T}^n)$ ist dies der Satz von Weierstraß). Insbesondere gilt für den Fejér-Kern $\|F_N * f - f\|_p \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) für alle $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ mit $p \in [1, \infty)$. Für alle $f \in C(\mathbb{T}^n)$ gilt $\|F_N * f - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$).

b) Speziell für $n = 1$ folgt für alle $f \in C(\mathbb{T})$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikx} = f(x)$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{T}^n$. Dies ist das Cesàro-Mittel der Fourierreihe, d.h. die Fourierreihe von f ist Cesàro-summierbar.

Mit dem Poisson-Summationskern erhält man für alle $f \in C(\mathbb{T})$

$$\lim_{r \nearrow 1} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikx} \right) = f(x)$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{T}$. Dies entspricht der Abel-Summierbarkeit der Fourierreihe.

c) Punktweise Konvergenz

Wir haben oben gesehen, dass $\sigma_N f = F_N * f \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{T}^n)$ für alle $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ gilt. Falls f sogar stetig ist, gilt diese Konvergenz sogar gleichmäßig und damit insbesondere punktweise. Hier soll die Frage behandelt werden, ob man auch für allgemeine L^1 -Funktionen punktweise Konvergenz hat, sowie die Konvergenz der Fourierreihe selbst. Diese Fragen sind zum Teil wesentlich schwerer zu beantworten, und wir können einige Ergebnisse auch nur ohne Beweis zitieren. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf den Fall $n = 1$.

Wir sagen, eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ erfüllt die Bedingung (L) an der Stelle $x_0 \in \mathbb{T}$, falls ein $a \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(x_0 + y) + f(x_0 - y)}{2} - a \right| dy = 0.$$

1.30 Satz (Lebesgue). Falls $f \in L^1(\mathbb{T})$ die Eigenschaft (L) an der Stelle $x_0 \in \mathbb{T}$ besitzt, so gilt $\sigma_N(f, x_0) \rightarrow a$ ($N \rightarrow \infty$).

Beweis. Unter Verwendung von $F_N(x) = F_N(-x)$ schreiben wir für $\delta \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned}\sigma_N(f, x_0) - a &= \int_{\mathbb{T}} F_N(y)(f(x_0 - y) - a)dy = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)(f(x_0 - y) - a)dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_N(y)\varphi(y)dy,\end{aligned}$$

wobei $\varphi(y) := \frac{1}{2}(f(x_0 + y) - f(x_0 - y)) - a$. Wir verwenden folgende Abschätzungen

$$F_N(y) \leq \frac{\pi^2}{(N+1)y^2} \quad (y \in (0, \pi)) \quad (1-3)$$

$$F_N(y) \leq N+1 \quad (y \in (0, \pi)), \quad (1-4)$$

welche man direkt nachrechnet. Wir teilen das Integral $\int_0^{\pi} F_N(y)\varphi(y)dy$ in drei Teilintegrale auf und zeigen jeweils, dass diese gegen Null konvergieren:

(i) Intervall $[0, \frac{1}{N}]$: Wir wenden (L) mit $h = \frac{1}{N}$ sowie (1-4) an und erhalten

$$\left| \int_0^{1/N} F_N(y)\varphi(y)dy \right| \leq (N+1) \int_0^{1/N} |\varphi(y)|dy = (N+1)\Phi\left(\frac{1}{N}\right) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

Hier wurde $\Phi(h) := \int_0^h |\varphi(y)|dy$ definiert.

(ii) Intervall $[\frac{1}{N}, N^{-1/4}]$: Mit (1-3) und partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\left| \int_{N^{-1}}^{N^{-1/4}} F_N(y)\varphi(y)dy \right| &\leq \frac{\pi^2}{N+1} \int_{N^{-1}}^{N^{-1/4}} \left| \frac{\varphi(y)}{y^2} \right| dy \\ &= \frac{\pi^2}{N+1} \left(\frac{\Phi(y)}{y^2} \Big|_{N^{-1}}^{N^{-1/4}} + 2 \int_{N^{-1}}^{N^{-1/4}} \frac{\Phi(y)}{y^3} dy \right).\end{aligned}$$

Wegen (L) existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\Phi(y) < \varepsilon y$ für $y \in (0, N^{-1/4})$ und $N \geq N_0$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left| \int_{N^{-1}}^{N^{-1/4}} F_N(y)\varphi(y)dy \right| &\leq \frac{\pi^2}{N+1} \left(\varepsilon N^{1/4} + 2\varepsilon \int_{N^{-1}}^{N^{-1/4}} y^{-2} dy \right) \\ &\leq \frac{\pi^2 \varepsilon}{N+1} (N^{1/4} + 2N) \leq 2\pi^2 \varepsilon.\end{aligned}$$

(iii) Intervall $[N^{-1/4}, \pi]$: Für das dritte Integral verwenden wir wieder (1-3) und erhalten

$$\begin{aligned}\left| \int_{N^{-1/4}}^{\pi} F_N(y)\varphi(y)dy \right| &\leq \sup_{y \in [N^{-1/4}, \pi]} F_N(y) \int_0^y |\varphi(y)|dy \\ &\leq \frac{\pi^2}{(N+1)N^{-1/2}} (2\|f\|_1 + \pi|a|) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

□

1.31 Korollar. a) Seien $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $x_0 \in \mathbb{T}$. Falls

$$f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) := \lim_{h \searrow 0} (f(x_0 + h) + f(x_0 - h))$$

existiert, so folgt $\sigma_N(f, x_0) \rightarrow \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$ ($N \rightarrow \infty$). Dies gilt insbesondere an allen Stetigkeitspunkten von f .

b) Seien $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $U \subset \mathbb{T}$ offen mit $f|_U = 0$. Dann gilt $\sigma_N(f, x_0) \rightarrow 0 (= f(x_0))$ für alle $x_0 \in U$.

1.32 Bemerkung. Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{T}$ heißt Lebesgue-Punkt von f , falls

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(x_0 + y) + f(x_0 - y)}{2} - f(x_0) \right| dy = 0.$$

Man kann zeigen: Fast alle $x_0 \in \mathbb{T}$ sind Lebesgue-Punkte von f .

Somit gilt insbesondere: Für jedes $f \in L^1(\mathbb{T})$ gilt $\sigma_N(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$ ($N \rightarrow \infty$) für fast alle $x_0 \in \mathbb{T}$.

Wir betrachten nun die Konvergenz der Fourierreihe selbst, d.h. die Konvergenz von $s_N f$, gegeben durch

$$s_N(f, x) := (D_N * f)(x) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{T}, N \in \mathbb{N}).$$

1.33 Bemerkung. Falls $s_N f$ in $L^1(\mathbb{T})$ konvergiert, dann gegen f . Denn es gilt

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1} (s_0 f + s_1 f + \dots + s_N f),$$

und das Cesàro-Mittel einer konvergenten Folge konvergiert gegen denselben Wert (Übung).

Damit folgt insbesondere $s_N f \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{T})$, falls $(s_N f)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert. Dies ist der Fall, falls $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, z.B. falls $f \in W_1^1(\mathbb{T})$. Aber nicht für jede stetige Funktion gilt $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

Unter einer Zusatzannahme lässt sich aus der Konvergenz des Cesàro-Mittels die Konvergenz der Folge selbst schließen:

1.34 Lemma (Hardy). Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ eine Folge, und sei $s_N := \sum_{k=0}^N a_k$ und $\sigma_N := \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N s_k$. Falls $(\sigma_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert und eine Konstante $c \geq 0$ existiert mit $|a_k| \leq \frac{c}{|k|}$ ($k \in \mathbb{N}$), dann konvergiert auch $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ mit demselben Grenzwert.

Beweis. Für $N, k \in \mathbb{N}$ sei $\sigma_{N,k} := \frac{1}{k}(s_N + s_{N+1} + \dots + s_{N+k-1})$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \sigma_{N,k} &= \frac{1}{k}((N+k)\sigma_{N+k-1} - N\sigma_{N-1}) = \frac{N+k}{k}\sigma_{N+k-1} - \frac{N}{k}\sigma_{N-1} \quad (1-5) \\ &= \frac{N+k}{k} \sum_{j=0}^{N+k-1} \frac{N+k-j}{N+k} a_j - \frac{N}{k} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{N-j}{N} a_j \\ &= \sum_{j=0}^{N+k-1} a_j + \sum_{j=N}^{N+k-1} \frac{N-j}{k} a_j = s_{N-1} + \sum_{j=N}^{N+k-1} \left(1 - \frac{j-N}{k}\right) a_j. \end{aligned}$$

Es gelte $\sigma_N \rightarrow s$ ($N \rightarrow \infty$), und es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $k := k(N) := [\varepsilon N] + 1$, wobei $[\cdot]$ der ganzzahlige Anteil (Gauß-Klammer) sei. Dann gilt $\varepsilon N \leq k(N) \leq \varepsilon N + 2$. Somit ist $(\frac{N}{k(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, und aus (1-5) folgt $\sigma_{N,k(N)} \rightarrow s$ ($N \rightarrow \infty$). Für hinreichend große N gilt somit $|\sigma_{N,k(N)} - s| < \varepsilon$.

Andererseits gilt

$$|\sigma_{N,k(N)} - s_{N-1}| \leq \sum_{j=N}^{N+k-1} \frac{c}{|j|} \leq \frac{kc}{N} \leq \frac{(\varepsilon N + 2)c}{N} \leq 2C\varepsilon$$

für hinreichend großes N . Insgesamt erhalten wir $|s_{N-1} - s| < (2C + 1)\varepsilon$ für großes N , d.h. $s_N \rightarrow s$ ($N \rightarrow \infty$). \square

1.35 Korollar. Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit $|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|}$ ($k \in \mathbb{Z}$) (z.B. falls $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ oder $f \in W_1^1(\mathbb{T})$ gilt). Dann gilt:

- (i) Die Folgen $(s_N(f, x))_{N \in \mathbb{N}}$ und $\sigma_N(f, x)$ konvergieren für dieselben $x \in \mathbb{T}$ und dann gegen den gleichen Wert.
- (ii) Falls $f(x+0) - f(x-0)$ existiert (z.B. falls f stetig an der Stelle x ist, so folgt $s_N(f, x) \rightarrow \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$).
- (iii) Für fast alle $x \in \mathbb{T}$ gilt $s_N(f, x) \rightarrow f(x)$ ($N \rightarrow \infty$).

1.36 Lemma (Dini-Test). Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Zu $x_0 \in \mathbb{T}$ definiere

$$\varphi_{x_0}(y) := \frac{1}{2}(f(x_0 + y) + f(x_0 - y)) - f(x_0) \quad (y \in \mathbb{T}).$$

Falls

$$\int_0^\pi \left| \frac{\varphi_{x_0}(y)}{y} \right| dy < \infty,$$

so gilt $s_N(f, x_0) \rightarrow f(x_0)$ ($N \rightarrow \infty$).

Beweis. Wir verwenden die Darstellung $D_N(y) = \frac{\sin((2N+1)y/2)}{\sin y/2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} s_N(f, x_0) - f(x_0) &= (D_N * f)(x_0) - f(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 - y) - f(x_0)) D_N(y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_{x_0}(y) D_N(y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_{x_0}(y) \cos(Ny) dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_{x_0}(y) \frac{\sin(Ny)}{\tan y/2} dy. \end{aligned}$$

Da φ_{x_0} eine gerade Funktion ist und $g(y) := \frac{\varphi_{x_0}}{\tan(\cdot/2)}$ eine ungerade Funktion ist, sind beide Integrale die Fourierkoeffizienten der jeweiligen Funktion. Wegen $f \in L^1(\mathbb{T})$ gilt auch $\varphi_{x_0} \in L^1(\mathbb{T})$. Für das zweite Integral verwenden wir $\tan \frac{y}{2} = \frac{y}{2} + \frac{1}{3}(\frac{y}{2})^3 + \dots$. Daher gilt für $y \in (0, \delta)$ mit hinreichend kleinem $\delta > 0$ die Abschätzung $|\tan \frac{y}{2}| \geq \frac{y}{4}$. Also ist $y \mapsto 4|\frac{\varphi_{x_0}(y)}{y}|$ eine integrierbare Majorante von g im Intervall $(0, \delta)$. Da $\frac{1}{|\tan(y/2)|}$ auf (δ, π) beschränkt ist, folgt $g \in L^1(\mathbb{T})$. Nun folgt die Behauptung aus dem Riemann-Lebesgue-Lemma, Satz 1.24. \square

1.37 Korollar (Lokalisationsprinzip). Seien $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $U \subset \mathbb{T}$ offen mit $f|_U = 0$. Dann gilt $s_N(f, x) \rightarrow f(x) (= 0)$ für alle $x \in U$.

1.38 Bemerkung. Es gibt viele weitere Resultate über punktweise Konvergenz, mit zum Teil sehr anspruchsvollen Beweisen. So gelten etwa die folgenden Aussagen:

- Es existiert ein $f \in C(\mathbb{T})$, deren Fourierreihe an einer gegebenen Stelle divergiert (Fejér); es existiert sogar ein $f \in C(\mathbb{T})$, für welches $s_N f$ an überabzählbar vielen Stellen divergiert.
- Es existiert ein $f \in L^1(\mathbb{T})$, für welches $s_N f$ an jeder Stelle divergiert (Kolmogorov).
- Falls $f \in L^p(\mathbb{T})$ mit $p \in (1, \infty)$, so gilt $s_N(f, x) \rightarrow f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{T}$ (Carleson).

d) Fourierreihen in $L^2(\mathbb{T}^n)$

Im Folgenden sei für $k \in \mathbb{Z}^n$ die Funktion $e_k: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $e_k(x) := e^{ik \cdot x}$ ($x \in \mathbb{T}^n$). Wir betrachten nun Fourierreihen im Raum $L^2(\mathbb{T}^n)$, welcher mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (f, g \in L^2(\mathbb{T}^n))$$

ein Hilbertraum ist.

1.39 Bemerkung. a) Es gilt $\langle e_k, e_\ell \rangle = \delta_{k,\ell}$, d.h. $\{e_k : k \in \mathbb{Z}^n\}$ ist ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{T}^n)$.

b) Für $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ ist

$$\langle f, e_k \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx = \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

Die Fourierreihen von L^2 -Funktionen sind nur ein Spezialfall einer allgemeinen Hilbertraumtheorie für vollständige Orthonormalsysteme. Wir formulieren daher einige wichtige Aussagen allgemeiner. Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. und $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein \mathbb{K} -Hilbertraum. Zu $S \subset X$ sei $S^\perp := \{x \in X : \langle x, s \rangle = 0 \ (s \in S)\}$ das orthogonale Komplement. Wie üblich setzen wir $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ ($x \in X$).

1.40 Satz. Sei $S = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:

- (i) Es gilt $S^\perp = \{0\}$.
- (ii) Für alle $x \in X$ gilt $x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, e_k \rangle e_k$ (Konvergenz der Reihe in X).
- (iii) Für alle $x, y \in X$ gilt $\langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}$ (Parsevalsche Gleichung), wobei die Reihe absolut konvergiert.
- (iv) Für alle $x \in X$ gilt $\|x\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, e_k \rangle|^2$.

Beweis. Wir beginnen mit einigen Vorbemerkungen. Da

$$\left\{ e_1, \dots, e_N, x - \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k \right\}$$

eine Menge zueinander orthogonale Vektoren sind, folgt mit dem Satz von Pythagoras (durch Ausmultiplizieren)

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^N |\langle x, e_k \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \geq \sum_{k=1}^N |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Für $N \rightarrow \infty$ erhält man $\sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselsche Ungleichung). Damit konvergiert $\sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, e_k \rangle|^2$ absolut und wegen

$$|\langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}| \leq \frac{1}{2} (|\langle x, e_k \rangle|^2 + |\langle y, e_k \rangle|^2)$$

auch $\sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}$. Weiter gilt

$$\left\| \sum_{k=N}^M \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=N}^M |\langle x, e_k \rangle|^2 \rightarrow 0 \quad (N, M \rightarrow \infty),$$

und da X vollständig ist, existiert der Limes $\tilde{x} := \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, e_k \rangle e_k \in X$.

(i) \Rightarrow (ii). Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\langle \tilde{x} - x, e_\ell \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_\ell \rangle - \langle x, e_\ell \rangle = \langle x, e_\ell \rangle - \langle x, e_\ell \rangle = 0,$$

d.h. $x - \tilde{x} \in S^\perp = \{0\}$.

(ii) \Rightarrow (iii). Mit (ii) gilt

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \langle y, e_\ell \rangle e_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k, \ell \in \mathbb{N}} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_\ell \rangle} \langle e_k, e_\ell \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}, \end{aligned}$$

wobei die absolute Konvergenz aus der Vorbemerkung folgt.

(iii) \Rightarrow (iv). Trivial.

(iv) \Rightarrow (i). Sei $x \in S^\perp$, d.h. $\langle x, e_k \rangle = 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Dann folgt mit (iv) $\|x\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle x, e_k \rangle|^2 = 0$. \square

1.41 Definition. Ein Orthonormalsystem, welches die äquivalenten Bedingungen von Satz 1.40 erfüllt, heißt ein vollständiges Orthonormalsystem (oder eine Orthonormalbasis von X oder eine Hilbertraumbasis von X).

1.42 Bemerkung. Im Beweis von Satz 1.40, Teil (i) \Rightarrow (ii), haben wir gesehen: Sei $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge mit $\sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k|^2 < \infty$. Dann konvergiert $x := \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k e_k \in X$, und es gilt $\langle x, e_k \rangle = \alpha_k$ ($k \in \mathbb{N}$).

Wir wenden nun die obigen Ergebnisse auf die Fourierreihe an, d.h. nun sei wieder $e_k := e^{ik}$, $k \in \mathbb{Z}^n$.

1.43 Lemma. Die komplexen Exponentialfunktionen $\{e_k : k \in \mathbb{Z}^n\}$ bilden eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{T}^n) \subset L^1(\mathbb{T}^n)$ mit $\langle f, e_k \rangle = \hat{f}(k) = 0$ ($k \in \mathbb{Z}^n$). Dann folgt nach dem Eindeutigkeitssatz 1.23 schon $f = 0$ fast überall, d.h. $f = 0$ in $L^2(\mathbb{T}^n)$. Somit ist Bedingung (i) in Satz 1.40 erfüllt. \square

Wir fassen die Aussagen von Satz 1.40 noch einmal für unseren Fall zusammen.

1.44 Satz. a) Für alle $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ gilt $\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)|^2$ sowie

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}$$

mit Konvergenz der Reihe und Gleichheit in $L^2(\mathbb{T}^n)$.

b) Für alle $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ mit $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_k|^2 < \infty$ existiert ein $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ mit $\hat{f}(k) = \alpha_k$ ($k \in \mathbb{Z}^n$).

c) Für $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n)$ gilt $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)}$.

Somit ist $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : L^2(\mathbb{T}^n) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ ein isometrischer Isomorphismus von Hilberträumen.

2. Die Fouriertransformation in \mathbb{R}^n

2.1 Worum geht's? Neben den Fourierreihen ist die Fouriertransformation ein zentraler Begriff der harmonischen Analysis. Jetzt werden Funktionen auf \mathbb{R}^n betrachtet, auch die Fouriertransformierte ist wieder auf \mathbb{R}^n definiert. Methodisch lassen sich die meisten Begriffe auf diesen kontinuierlichen Fall direkt übertragen, so etwa Summationskerne. Wir erhalten analoge Aussagen und können bei den Beweisen oft auf Kapitel 1 verweisen.

Interessanter als bei den Fourierreihen ist jetzt die Frage, wie und ob die Fouriertransformation auf Distributionen definiert werden kann. Für die Klasse der temperierten Distributionen erhält man wieder einen Isomorphismus. Diese große Klasse von Distributionen enthält viele Funktionenräume, welche bei partiellen Differentialgleichungen von Nutzen sind. Wir werden vor allem auf Stetigkeitseigenschaften der Fouriertransformation auf den verschiedenen Räumen eingehen, bei den temperierten Distributionen wie auch bei den Schwartz-Funktionen handelt es sich dabei um lokalkonvexe topologische Vektorräume.

a) Fouriertransformation in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und Summationskerne

Für $p \in [1, \infty]$ sei nun $L^p(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen, für welche $\|f\|_p < \infty$ gilt, wobei $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx)^{1/p}$ (übliche Modifikation für $p = \infty$). Dabei wird nun $dx := (2\pi)^{-n/2} dx$ gesetzt. Man beachte, dass sowohl die Bezeichnung $\|\cdot\|_p$ als auch die Bezeichnung dx in diesem Kapitel eine andere Bedeutung hat als in Kapitel 1. Dies liegt auch darin begründet, dass die Theorie der Fouriertransformation allgemein in lokalkompakten abelschen Gruppen gilt, wobei das Integral dann bezüglich des sogenannten Haar-Maßes dx gebildet wird.

2.2 Definition. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird die Fouriertransformierte von f definiert durch

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Die folgenden Eigenschaften lassen sich wieder sofort nachrechnen.

2.3 Satz. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

a) Es gilt $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f + \beta \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} g$.

b) Ist $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$ ($x \in \mathbb{R}^n$), so folgt $(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \bar{f})(\xi) = \overline{(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(-\xi)}$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$).

c) Sei $L_y f(x) := f(x-y)$ ($y \in \mathbb{R}^n$). Dann gilt $(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(L_y f))(\xi) = e^{-iy \cdot \xi} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi)$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$).

\mathbb{R}^n).

d) Für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist $|(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi)| \leq \|f\|_1$.

e) Sei zu $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Funktion $\tau_\lambda f$ definiert durch $\tau_\lambda f(x) := \lambda^n f(\lambda x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Dann gilt $(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \tau_\lambda f)(\xi) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\frac{\xi}{\lambda})$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$).

2.4 Lemma. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine gleichmäßig stetige Funktion.

Beweis. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $\xi, h \in \mathbb{R}^n$

$$|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |e^{-i(x \cdot (\xi+h))} - e^{-i x \cdot \xi}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |e^{-i x \cdot h} - 1| dx.$$

Mit der integrierbaren Majorante $2|f(\cdot)|$ und der punktweisen Konvergenz $|e^{ix \cdot h} - 1| \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) folgt die Stetigkeit. Da die rechte Seite nicht von ξ abhängt, erhalten wir sogar die gleichmäßige Stetigkeit von \hat{f} . \square

Mit partieller Integration kann man wie im Fall \mathbb{T}^n (Satz 1.14) folgenden Zusammenhang zwischen Fouriertransformation und Ableitung zeigen.

2.5 Satz. Sei $f \in W_1^m(\mathbb{R}^n)$, d.h. es gelte $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| \leq m$. Dann gilt

$$(-i)^{|\alpha|} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f)(\xi) = \xi^\alpha (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

2.6 Definition. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Faltung $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Die folgenden beiden Aussagen können leicht bewiesen werden (Übung).

2.7 Satz. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ sowie $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(f * g) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} g)$.

2.8 Lemma. Seien $f, K \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und sei $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit $K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(f * K)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

2.9 Definition. Ein Summationskern auf \mathbb{R}^n ist eine Familie $(K_\lambda)_{\lambda \in (0, \infty)} \subset C(\mathbb{R}^n)$ mit

$$(S1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x) dx = 1 \quad (\lambda \in (0, \infty)),$$

$$(S2) \quad \text{es existiert eine Konstante } M \geq 0 \text{ mit } \int_{\mathbb{R}^n} |K_\lambda(x)| dx \leq M \quad (\lambda \in (0, \infty)),$$

$$(S3) \quad \text{für alle } \delta > 0 \text{ gilt } \int_{|x| \geq \delta} |K_\lambda(x)| dx \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

2.10 Bemerkung. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$. Setzt man $K_\lambda(x) := \lambda^n f(\lambda x)$, so ist $(K_\lambda)_{\lambda \in (0, \infty)}$ ein Summationskern. Denn es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x) dx &= \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = 1, \\ \|K_\lambda\|_1 &= \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda x)| dx = \|f\|_1, \\ \int_{|x| \geq \delta} |K_\lambda(x)| dx &= \int_{|y| \geq \lambda \delta} |f(y)| dy \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

2.11 Beispiele. a) Der wichtigste Summationskern auf \mathbb{R}^n ist wie im Fall \mathbb{T}^n der Fejér-Kern $(F_\lambda)_{\lambda \in (0, \infty)}$, welcher jetzt gegeben ist durch $F_\lambda(x) := \lambda^n F(\lambda x_1) \cdot \dots \cdot F(\lambda x_n)$ mit dem skalaren Kern

$$F(x) := (2\pi)^{-1/2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Man rechnet einfach nach, dass $F(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-1}^1 (1 - |\xi|) e^{ix\xi} d\xi$ ($x \in \mathbb{R}$). Für den Fejér-Kern bedeutet dies

$$F_\lambda(x) = \lambda^n \int_{[-1, 1]^n} \prod_{j=1}^n (1 - |\xi_j|) e^{i\lambda x \cdot \xi} d\xi = \int_{[-\lambda, \lambda]^n} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{|\xi_j|}{\lambda} \right) e^{ix \cdot \xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

b) Der de la Vallée-Poussin-Kern ist wieder gegeben durch $V_\lambda(x) := 2F_{2\lambda}(x) - F_\lambda(x)$.

c) Der Cauchy-Poisson-Kern $(P_\lambda)_{\lambda \in (0, \infty)}$ wird analog zu a) aus dem skalaren Kern P konstruiert mit $P(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

d) Der Gaußkern $(G_\lambda)_{\lambda \in (0, \infty)}$ wird aus dem skalaren Kern $G(x) := e^{-x^2/2}$ ($x \in \mathbb{R}$) gebildet.

e) Der Dirichlet-Kern hat ein Analogon auf \mathbb{R} , welches gegeben ist durch $D_\lambda(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda x}{x}$ ($x \in \mathbb{R}$). Dies ist kein Summationskern (z.B. $D_\lambda \notin L^1(\mathbb{R})$).

Völlig analog zum Fall \mathbb{T}^n (Satz 1.19) zeigt man folgenden Satz:

2.12 Satz. Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $(K_\lambda)_{\lambda \in (0, \infty)}$ ein Summationskern auf \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$f = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (K_\lambda * f) \quad (\text{Konvergenz in } L^1(\mathbb{R}^n)).$$

2.13 Korollar. a) Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$, so gilt

$$f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (F_\lambda * f)(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{[-\lambda, \lambda]^n} \left[\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{|\xi_j|}{\lambda}\right) \right] \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$$

(Konvergenz und Gleichheit in $L^1(\mathbb{R}^n)$).

b) (Eindeutigkeitsatz) Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f}(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, so gilt $f = 0$ fast überall.

Beweis. a) Die Konvergenzaussage ist Satz 2.12, angewendet auf den Fejér-Kern. Dabei folgt die Darstellung von $F_\lambda * f$ aus Beispiel 2.11 a) und Lemma 2.8.

b) folgt sofort aus a), da das Integral für jedes $\lambda \in (0, \infty)$ den Wert 0 annimmt. \square

2.14 Satz (Inversionstheorem). Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Falls f stetig ist, gilt dies für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Die Funktion $g_\lambda(\xi) := \chi_{[-\lambda, \lambda]^n} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{|\xi_j|}{\lambda}\right) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi}$ konvergiert für $\lambda \rightarrow \infty$ für jedes feste $x \in \mathbb{R}^n$ punktweise gegen $\hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi}$. Da $|\hat{f}|$ eine integrierbare Majorante von g_λ ist, folgt mit majorisierter Konvergenz

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (F_\lambda * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi =: f_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Wieder mit majorisierter Konvergenz gilt

$$\begin{aligned} \|f_0 - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (F_\lambda * f)(x) - f(x) \right| dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |(F_\lambda * f)(x) - f(x)| dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|F_\lambda * f - f\|_1 = 0. \end{aligned}$$

Also ist $f = f_0$ fast überall. Der Zusatz folgt, da f_0 stetig ist. \square

2.15 Korollar. a) Für den Fejér-Kern gilt $\hat{F}_\lambda(\xi) = \chi_{[-\lambda, \lambda]^n} \prod_{j=1}^n (1 - \frac{|\xi_j|}{\lambda})$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$).

b) Die Menge $\{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \hat{f} \text{ kompakt}\}$ liegt dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

c) (Riemann-Lebesgue-Lemma) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Beweis. a) O.E. sei $n = 1$. Sei $g(y) := \chi_{[-\lambda, \lambda]}(1 - \frac{|y|}{\lambda})$ ($y \in \mathbb{R}$). Nach Beispiel 2.11 a) (und da g gerade ist) ist $\hat{g}(x) = \hat{g}(-x) = F_\lambda(x)$ ($x \in \mathbb{R}$). Anwendung von Satz 2.14 liefert

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x) e^{ixy} \overline{dx} = \int_{\mathbb{R}} F_\lambda(x) e^{ixy} \overline{dx} = \hat{F}_\lambda(-y) = \hat{F}_\lambda(y) \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Im letzten Schritt wurde hier ausgenutzt, dass auch F_λ eine gerade Funktion ist.

b) Wegen $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(F_\lambda * f) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} F_\lambda)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)$ hat $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(F_\lambda * f)$ kompakten Träger, und nach Korollar 2.13 gilt $F_\lambda * f \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

c) folgt aus b) genauso wie in Satz 1.24. □

2.16 Bemerkung. Wie im Fall \mathbb{T}^n kann man auch für die Fouriertransformation im \mathbb{R}^n eine ganze Reihe von Aussagen über punktweise Konvergenz beweisen. Hier sei nur ein Beispiel ohne Beweis zitiert: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ zusätzlich uneigentlich Riemann-integrierbar, und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Falls f in einer Umgebung von x_0 von beschränkter Variation ist, so gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (D_\lambda * f)(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)).$$

b) Fouriertransformation im Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und in $L^2(\mathbb{R}^n)$

Wie im diskreten Fall \mathbb{T}^n besitzt auch in \mathbb{R}^n die Fouriertransformation in L^2 besonders gute Eigenschaften. So gilt etwa auch der Satz von Plancherel, d.h. die Fouriertransformation ist eine Isometrie in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Um dies zu beweisen, machen wir einen Umweg über den Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, da wir diese Ergebnisse im Abschnitt über Distributionen auch benötigen.

2.17 Definition (Schwartz-Raum). a) Der Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ besteht aus allen Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für welche gilt:

$$p_N(f) := \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^N) |\partial^\alpha f(x)| < \infty \quad (N \in \mathbb{N}_0).$$

Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt Schwartz-Raum oder der Raum der schnell fallenden Funktionen.

b) Zu $N \in \mathbb{N}_0$ und $\varepsilon > 0$ definiere $U_{N,\varepsilon} := \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : p_N(f) < \varepsilon\}$. Dann heißt eine Menge $U \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ offen, falls zu jedem $f \in U$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ und ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $f + U_{N,\varepsilon} := \{f + u : u \in U_{N,\varepsilon}\} \subset U$.

2.18 Bemerkung. Teil b) der obigen Definition ist ein Spezialfall einer sogenannten lokalkonvexen Topologie, welche im Allgemeinen durch eine Familie von Seminormen definiert ist (hier $\{p_N : N \in \mathbb{N}_0\}$). Wir verzichten hier auf eine allgemeine Theorie und erwähnen nur, dass $\{U_{N,\varepsilon} : N \in \mathbb{N}_0, \varepsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis der Null in dieser Topologie darstellt. Einige wichtige Aussagen, welche wir im Folgenden noch benötigt werden, werden hier ohne Beweis aufgeführt:

(i) Der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Fréchetraum, d.h. es existiert eine translationsinvariante Metrik $d: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$, bezüglich derer $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist (d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent). Ein Beispiel einer solchen Metrik ist

$$d(f, g) := \sum_{N \in \mathbb{N}_0} \frac{2^{-N} p_N(f - g)}{1 + p_N(f - g)} \quad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Dabei heißt eine Metrik translationsinvariant, falls $d(f - h, g - h) = d(f, g)$ für alle $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

(ii) Eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert genau dann gegen ein $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, falls für alle $N \in \mathbb{N}_0$ gilt: $p_N(f_k - f) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

(iii) Eine lineare Funktion $u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, falls ein $k \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \geq 0$ existieren mit $|u(f)| \leq C p_k(f)$ ($f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

(iv) Eine lineare Funktion $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann stetig, falls für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ ein $k_m \in \mathbb{N}_0$ und ein $C_m \geq 0$ existieren mit

$$p_m(Tf) \leq C_m p_{k_m}(f) \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

(v) Man kann in den obigen Aussagen das System $\{p_N : N \in \mathbb{N}_0\}$ von Seminormen ersetzen durch folgende abzählbare Familien von Seminormen:

$$\begin{aligned} \{q_{\alpha,N} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, N \in \mathbb{N}\} &\text{ mit } q_{\alpha,N}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^N) |\partial^\alpha f(x)|, \\ \{q_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\} &\text{ mit } q_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha f(x)|. \end{aligned}$$

2.19 Lemma. a) Es gilt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty]$.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und P ein Polynom, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist jede der drei Abbildungen $f \mapsto P \cdot f$, $f \mapsto g \cdot f$ und $f \mapsto \partial^\alpha f$ stetige lineare Abbildungen von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) Für $p = \infty$ ist die Behauptung klar. Für $p \in [1, \infty)$ verwenden wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \leq p_N(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + |x|^{Np}} dx < \infty \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)),$$

falls $Np > n$.

b) Offensichtlich ist $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dass dies auch für $P \cdot f$ und $g \cdot f$ gilt, folgt sofort aus der Leibniz-Formel

$$\partial^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} f)(\partial^\beta g).$$

Die Stetigkeit dieser Abbildungen erhält man aus

$$\begin{aligned} p_m(\partial^\alpha f) &\leq p_{m+|\alpha|}(f), \\ p_m(P \cdot f) &\leq c_m \left[\max_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\partial^\beta P(x)|}{1 + |x|^{\deg P}} \right] p_{m+\deg P}(f), \\ p_m(g \cdot f) &\leq c_m \max_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta g\|_\infty p_m(f), \end{aligned}$$

wobei c_m von f und P bzw. g unabhängige Konstanten sind. □

2.20 Lemma. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

- a) $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(x \mapsto x^\alpha f(x))$.
- b) $(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(\partial^\alpha f))(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$).
- c) $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- d) Es gibt eine Konstante $c > 0$ mit $|\hat{f}(\xi)| \leq cp_{n+1}(f)$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$).
- e) Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

Beweis. a) Unter Verwendung von $x \mapsto x^\alpha f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ und der majorisierten Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_\xi^\alpha e^{-ix\xi} dx = (-i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x^\alpha e^{-ix\xi} dx \\ &= (-i)^{|\alpha|} (\mathcal{F}(x \mapsto x^\alpha f(x)))(\xi). \end{aligned}$$

b) Satz 2.5.

c) Nach a) gilt $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt mit dem Riemann-Lebesgue-Lemma

$$\xi^\alpha (\partial^\beta \hat{f})(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} [\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(x \mapsto \partial^\alpha x^\beta f(x))](\xi) \rightarrow 0 \quad (|\xi| \rightarrow \infty),$$

da $x \mapsto \partial^\alpha x^\beta f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

d) Dies folgt aus

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|x|^{n+1}} dx \right) p_{n+1}(f).$$

e) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, und sei $g_{\alpha,\beta}(x) := \partial^\beta(x^\alpha f(x))$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Dann gilt unter Verwendung von a), b) und d)

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta \partial^\alpha \hat{f}(\xi)| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{g}_{\alpha,\beta}(\xi)| \leq C_1 p_{n+1}(g_{\alpha,\beta}) \leq C_2 p_N(f)$$

für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$, wobei $C_1, C_2 \geq 0$ Konstanten sind. Dabei wurde im letzten Schritt die Stetigkeit der Abbildung $f \mapsto f_{\alpha,\beta}$ (Lemma 2.19 b)) verwendet. Nach Bemerkung 2.18 ist dies die Stetigkeit von $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

Der folgende Satz zeigt, dass sich die Fouriertransformation auf dem Schwartz-Raum besonders gut verhält.

2.21 Satz. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist linear, stetig und bijektiv mit stetigem Inversen (d.h. ein Isomorphismus lokalkonvexer Räume). Die inverse Abbildung $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}$ ist gegeben durch

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Es gilt $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2 f = \check{f}$ mit $\check{f}(x) := f(-x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) sowie $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^4 = \text{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$.

Beweis. Nach Lemma 2.20 e) ist $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig. Mit dem Inversionstheorem (Satz 2.14) folgt für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2 f)(-x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Damit erhalten wir insbesondere $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2 f = \check{f}$ und $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^4 = \text{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$. Somit ist $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ bijektiv mit $(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} f)(x) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^3 f)(x) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(-x)$. Die Linearität sowie die Stetigkeit von $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}$ sind damit ebenfalls klar. \square

2.22 Definition und Satz (Satz von Plancherel). Für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathcal{F} f, \mathcal{F} g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Somit ist $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ eine Isometrie bezüglich der $\|\cdot\|_2$ -Norm und damit eindeutig zu einem isometrischen Isomorphismus $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzbar, der ebenfalls Fourier-Transformation genannt wird und unitär ist.

Beweis. Seien $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \bar{h} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) h(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} h(\xi) dx d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[\int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) e^{-ix \cdot \xi} d\xi \right] dx = \langle f, \bar{\hat{h}} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Setze nun $g := \bar{\hat{h}}$, d.h.

$$\overline{h(\xi)} = \overline{(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} g)(\xi)} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{ix \cdot \xi} dx} = \hat{g}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Damit folgt $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$. Da $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bijektiv ist, gilt dies für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht ist, ist $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert, linear, isometrisch. Damit ist der Wertebereich $R(\mathcal{F}_2)$ abgeschlossen. Wegen $R(\mathcal{F}_2) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist \mathcal{F}_2 surjektiv, also ein isometrischer Isomorphismus und damit unitär. \square

2.23 Korollar. a) Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, und für $R > 0$ sei

$$g_R(\xi) := \int_{|\xi| \leq R} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Dann gilt $g_R \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ und $\|\hat{f} - g_R\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$).

b) Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi. \quad (2-1)$$

Falls f stetig ist, gilt dies für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. a) Man beachte, dass $g_R(\xi)$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiert ist, da $f \chi_{B(0,R)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt. Weiter folgt $g_R \in C(\mathbb{R}^n)$ nach Lemma 2.4. Wegen $g_R = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(f \chi_{B(0,R)})$ und $\|f - f \chi_{B(0,R)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) folgt die Aussage nun aus dem Satz von Plancherel.

b) Wir wenden a) auf \hat{f} an (mit $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}$ statt $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$) und erhalten

$$f = \lim_{R \rightarrow \infty} f_R \quad (R \rightarrow \infty) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n)$$

mit $f_R(x) := \int_{|\xi| \leq R} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$. Damit konvergiert (für eine Teilfolge) f_R auch punktweise fast überall gegen f . Wegen $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert f_R punktweise gegen die rechte Seite von (2-1), was (2-1) zeigt. Falls f stetig ist, sind beide Seiten von (2-1) stetige Funktionen, und wir erhalten Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}^n$. \square

c) Fouriertransformation für temperierte Distributionen

Die Schwartz-Funktionen sind unter anderem deswegen von großer Bedeutung in der Theorie der Fouriertransformation, weil $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Bijektion ist. Dies ermöglicht es, auf den Dualraum überzugehen, den Raum der temperierten Distributionen.

2.24 Definition. Der Raum der temperierten Distributionen wird definiert als $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ linear und stetig}\}$, d.h. als topologischer Dualraum von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Topologie auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird definiert als schwach-* -Topologie, d.h. eine Umgebungsbasis der 0 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \{K_{\varphi_1, \dots, \varphi_N, \varepsilon} : \varphi_1, \dots, \varphi_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \varepsilon > 0\}, \\ K_{\varphi_1, \dots, \varphi_N, \varepsilon} & := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \max_{j=1, \dots, N} |u(\varphi_j)| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ schreibt man auch $\langle \varphi, u \rangle := u(\varphi)$.

2.25 Bemerkung. Wieder ist die obige Definition in der Sprache der Topologie formuliert. Wir ergänzen hier einige Bemerkungen, welche für Rechnungen mit der Topologie günstig sind:

(i) Wie oben bereits bemerkt, ist eine lineare Abbildung $u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto u(\varphi)$, genau dann stetig (und damit eine temperierte Distribution), falls ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $C \geq 0$ existieren mit

$$|u(\varphi)| \leq Cp_m(\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

(ii) Eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ konvergiert genau dann gegen Null, falls für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt: $u_k(\varphi) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

(iii) Eine lineare Abbildung $T: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$, $u \mapsto Tu$ ist genau dann stetig, falls ein $N \in \mathbb{N}$ und $\psi_1, \dots, \psi_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sowie ein $C > 0$ existieren mit

$$|Tu| \leq C \max\{|u(\psi_1)|, \dots, |u(\psi_N)|\} \quad (u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)).$$

(iv) Eine lineare Abbildung $T: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $u \mapsto Tu$ ist genau dann stetig, falls für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein $N \in \mathbb{N}$ und $\psi_1, \dots, \psi_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sowie ein $C > 0$ existieren mit

$$|(Tu)(\varphi)| \leq C \max\{|u(\psi_1)|, \dots, |u(\psi_N)|\} \quad (u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)).$$

Dabei dürfen C, N und ψ_1, \dots, ψ_N von φ abhängen.

2.26 Beispiele. a) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Die Dirac-Distribution $\delta_a: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\delta_a(\varphi) := \varphi(a) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Dann gilt $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, da $|\delta_a(\varphi)| \leq p_0(\varphi)$ ($\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Häufig wird $\delta := \delta_0$ gesetzt.

b) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, welche polynomial beschränkt sei, d.h. es existiere $C \geq 0$ und $M \in \mathbb{N}$ mit $|f(x)| \leq C(1 + |x|^M)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann definiert man $u_f: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto u_f(\varphi)$ mit

$$u_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Es gilt $|u_f(\varphi)| \leq Cp_{M+n+1}(\varphi)$ ($\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) und damit $u_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Man spricht hier von einer regulären Distribution. (In der Literatur wird hier oft dx statt $\tilde{d}x$ genommen.)

c) Seien $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Borelmengen des \mathbb{R}^n , und sei $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$ ein endliches Maß. Dann wird durch

$$u_\mu(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)d\mu(x) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

eine temperierte Distribution definiert. Man beachte $|u_\mu(\varphi)| \leq \mu(\mathbb{R}^n)p_0(\varphi)$ ($\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

Der große Vorteil von Distributionen besteht darin, dass sie einerseits eine große Klasse von Abbildungen umfassen (siehe obige Beispiele), dass man andererseits viele Operationen wie Ableitung, Fouriertransformation durch Dualisierung definieren kann (dies entspricht dem adjungierten Operator). Wir formulieren die entsprechenden Definitionen.

2.27 Definition. a) Seien $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann definiert man $\partial^\alpha u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(\partial^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

b) Seien $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert man $f \cdot u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(f \cdot u)(\varphi) := u(f\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Analog wird $P \cdot u$ für ein Polynom $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definiert.

c) Für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird die Fouriertransformierte $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}u)(\varphi) := \hat{u}(\varphi) := u(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

2.28 Satz. a) In der Situation von Definition 2.27 sind die folgenden Abbildungen von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert, linear und stetig: $u \mapsto \partial^\alpha u$, $u \mapsto f \cdot u$, $u \mapsto P \cdot u$, $u \mapsto \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} u$.

b) Die Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv mit stetigem Inversen, und es gilt $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^4 = \text{id}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$.

Beweis. a) Wir zeigen allgemein: Sei $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ linear und stetig, und sei $Tu: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $(Tu)(\varphi) := u(T\varphi)$. Dann gilt $Tu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $T: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist stetig (bzgl. der schwach-* Topologie).

Sei dazu $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $Tu = u \circ T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ offensichtlich linear und als Komposition zweier stetiger Funktionen auch stetig, d.h. $Tu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Die Abbildung $T: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist also wohldefiniert und ebenfalls offensichtlich linear. Um die Stetigkeit von T zu zeigen, verwendet man die Beschreibung in Bemerkung 2.25 (iv): Zu $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ setzen wir $N := 1$, $C := 1$ und $\psi_1 := T\varphi$. Dann gilt trivialerweise $|(Tu)(\varphi)| = |u(T\varphi)| \leq C|u(\psi_1)|$. Dies ist bereits die Stetigkeit von T .

b) Nach Satz 2.21 ist $(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^4 u)(\varphi) = u(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^4 \varphi) = u(\varphi)$, d.h. $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^4 = \text{id}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$. Damit ist $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ insbesondere bijektiv. Wegen $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^3$ ist das Inverse auch wieder stetig. \square

2.29 Beispiel. Sei $f(x) := 1$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Dann ist $u_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert als reguläre Distribution, d.h. $u_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \hat{\varphi}(0)$. Somit gilt

$$\hat{u}_f(\varphi) = u_f(\hat{\varphi}) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2 \varphi)(0) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d.h. es gilt $\hat{u}_f = \delta$. Man beachte hier, dass in der Literatur oft bei der Definition von u_f das Maß dx statt dx genommen wird. In diesem Fall erhält man $\hat{u}_f = (2\pi)^{n/2} \delta$.

Umgekehrt gilt $\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = u_f(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\hat{\delta} = u_f$.

2.30 Beispiel. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. P ein Maß auf \mathcal{F} mit $P(\Omega) = 1$. Sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, d.h. eine messbare Funktion. Der Erwartungswert von X ist definiert als

$$EX := \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{R}} dP \circ X^{-1}$$

mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P \circ X^{-1} =: \nu$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Für die zugehörige Distribution $u_\nu(\varphi) := \int \varphi d\nu$ ($\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) gilt (unter Verwendung des Satzes von

Fubini)

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}}u)(\varphi) &= u(\hat{\varphi}) = \int \hat{\varphi}(x) d\nu(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-ixt} dt d\nu(x) \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} d\nu(x) \right] \varphi(t) dt = u_f(\varphi) \end{aligned}$$

mit der Funktion $f(x) := (2\pi)^{-1/2} \mathbb{E}(e^{-itX})$. In der Stochastik definiert man die charakteristische Funktion von X durch

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}(e^{itX}) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Damit gilt in etwas lässiger Schreibweise

$$[\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(P \circ X)^{-1}](t) = (2\pi)^{-1/2} \psi_X(-t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Wir kommen noch einmal auf die Faltung zurück. Wir wissen bereits, dass für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Gleichheit $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(f * g) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}f)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}g)$ gilt. Nun wollen wir den Begriff der Faltung sowie diese Identität auf temperierte Distributionen erweitern.

2.31 Definition. Zu $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\varphi(x - \cdot)$ die Funktion $y \mapsto \varphi(x - y)$. Dann wird für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Faltung $u * \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $(u * \varphi)(x) := u(\varphi(x - \cdot))$.

2.32 Bemerkung. a) Man beachte, dass $u * \varphi$ eine Funktion ist und keine Distribution. Allerdings werden wir später sehen, dass $u * \varphi$ höchstens polynomial wächst und daher wieder als reguläre Distribution $u * \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden kann.

b) Falls $u = u_f$ eine reguläre Distribution mit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, so gilt

$$(u_f * \varphi)(x) = u_f(\varphi(x - \cdot)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(x - y) dy = (f * \varphi)(x),$$

d.h. die obige Definition verallgemeinert den Faltungsbegriff von Funktionen auf Distributionen.

c) Für die Dirac-Distribution erhalten wir

$$(\delta * \varphi)(x) = \delta(\varphi(x - \cdot)) = \varphi(x - 0) = \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n).$$

Somit ist die Dirac-Distribution eine Einheit bezüglich der Faltung, d.h. $\delta * \varphi = \varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Wir wollen nun einige wichtige Eigenschaften der Faltung zeigen. Dazu benötigen wir folgende Konvergenzaussage.

2.33 Lemma. Seien $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $e_1 := (1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ der erste Einheitsvektor, und zu $h > 0$ sei $\varphi_h(x) := \frac{1}{h}(\varphi(x + he_1) - \varphi(x))$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Dann gilt $\varphi_h \rightarrow \partial_{x_1}\varphi$ ($h \rightarrow 0$) in der Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Wir betrachten die Fouriertransformierten. Nach den Rechenregeln für $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ (Satz 2.3) gilt $\hat{\varphi}_h(\xi) = \frac{1}{h}(e^{ih\xi_1} - 1)\hat{\varphi}(\xi)$ und $(\partial_{x_1}\varphi)^\wedge(\xi) = i\xi_1\hat{\varphi}(\xi)$. Somit gilt $(\varphi_h - \partial_{x_1}\varphi)^\wedge(\xi) = \psi_h(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ mit $\psi_h(\xi) := \frac{1}{h}(e^{ih\xi_1} - 1) - i\xi_1$. Man rechnet direkt nach, dass für $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$|\partial^\beta \psi_h(\xi)| \leq \begin{cases} h\xi_1^2, & \text{falls } |\beta| = 0, \\ h|\xi_1|, & \text{falls } |\beta| = 1, \\ h^{|\beta|-1}, & \text{falls } |\beta| > 1. \end{cases}$$

Für $m \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} p_m(\psi_h\hat{\varphi}) &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left[(1 + |\xi|^m) \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha, \beta} |\partial^\beta \psi_h(\xi)| |\partial^{\alpha-\beta} \hat{\varphi}(\xi)| \right] \\ &\leq c_m h \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^m)(1 + |\xi|^2) \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \hat{\varphi}(\xi)| \\ &\leq 4c_m h p_{m+2}(\hat{\varphi}) \end{aligned}$$

mit einer Konstante $c_m \geq 0$, welche nicht von $\hat{\varphi}$ oder h abhängt. Damit gilt $p_m(\psi_h\hat{\varphi}) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), d.h. $\psi_h\hat{\varphi} \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (siehe Bemerkung 2.18 (i)). Also gilt $\hat{\varphi}_h \rightarrow (\partial_{x_1}\varphi)^\wedge$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und da $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist, folgt $\varphi_h \rightarrow \partial_{x_1}\varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

2.34 Satz. Seien $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

a) Dann gilt $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\partial^\alpha(u * \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha u) * \varphi = (-1)^{|\alpha|}u * (\partial^\alpha \varphi).$$

b) Die Funktion $u * \varphi$ hat polynomiales Wachstum und kann daher als reguläre Distribution aufgefasst werden, $u * \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) Es gilt $\partial^\alpha[y \mapsto \varphi(x - y)] = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha \varphi)(x - y)$ und damit

$$(u * (\partial^\alpha \varphi))(x) = u[(\partial^\alpha \varphi)(x - \cdot)] = (-1)^{|\alpha|}u[\partial^\alpha(y \mapsto \varphi(x - y))] = (\partial^\alpha u)(\varphi(x - \cdot)).$$

Dies zeigt das zweite Gleichheitszeichen in der Aussage des Satzes.

Genauso sieht man für den Verschiebungsoperator $L_a: \varphi \mapsto \varphi(\cdot - a)$ für $a \in \mathbb{R}^n$, dass

$$L_a(u * \varphi) = u * (L_a \varphi) \quad (a \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \quad (2-2)$$

gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[(u * \varphi)(x + he_1) - (u * \varphi)(x)] &= \frac{1}{h}[(L_{-he_1} - L_0)(u * \varphi)](x) \\ &= (u * [\frac{1}{h}(L_{-he_1} - L_0)\varphi])(x). \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.33 gilt $\frac{1}{h}(L_{-he_1} - L_0)\varphi \rightarrow \partial_{x_1}\varphi$ ($h \rightarrow 0$) in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und da u stetig ist, folgt

$$\frac{1}{h}[(u * \varphi)(x + he_1) - (u * \varphi)(x)] \rightarrow u(\partial_{x_1}\varphi) = -(\partial_{x_1}u)(\varphi).$$

Dies zeigt $\partial^\alpha(u * \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha u) * \varphi$, der allgemeine Fall folgt durch Iteration.

b) Wir verwenden die elementare Abschätzung

$$1 + |x - z|^m \leq 2^m(1 + |x|^m)(1 + |z|^m) \quad (x, z \in \mathbb{R}^n)$$

und erhalten für $m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} p_m(f(x - \cdot)) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \max_{|\alpha| \leq m} (1 + |y|^m)|(\partial^\alpha f)(x - y)| \\ &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \max_{|\alpha| \leq m} (1 + |x - z|^m)|(\partial^\alpha f)(z)| \\ &\leq 2^m(1 + |x|^m)p_m(f). \end{aligned}$$

Da u stetig ist, existiert ein $C \geq 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|u(\varphi)| \leq Cp_N(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Damit folgt

$$|(u * \varphi)(x)| = |u(\varphi(x - \cdot))| \leq Cp_N(\varphi(x - \cdot)) \leq C2^N(1 + |x|^N)p_N(\varphi),$$

d.h. $u * \varphi$ hat polynomiales Wachstum und kann daher als Distribution $u * \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden. \square

2.35 Satz. Seien $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

- Es gilt $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(u * \varphi) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi) \cdot (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}u)$.
- Für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$.
- Es gilt $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(\varphi \cdot u) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}u) * (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi)$.

Beweis. a) Wir setzen die Definitionen ein und erhalten für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(u * \varphi))(\hat{\psi}) &= (u * \varphi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2\psi) = (u * \varphi)(\psi(-\cdot)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u * \varphi)(x)\psi(-x)\vec{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(-x)u[\varphi(x - \cdot)]\vec{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u[\psi(-x)\varphi(x - \cdot)]\vec{d}x = u\left[\int_{\mathbb{R}^n} \psi(-x)\varphi(x - \cdot)\vec{d}x\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u \left[\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \psi(-x - \cdot) dx \right] = u[(\psi * \varphi)(-\cdot)] \\
&= u[\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2(\psi * \varphi)] = \hat{u}(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(\psi * \varphi)) = \hat{u}(\hat{\psi}\hat{\varphi}) = (\hat{\varphi} \cdot \hat{u})(\hat{\psi}).
\end{aligned}$$

Da dies für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt und die Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ surjektiv ist, folgt die Gleichheit $(u * \varphi)^\wedge = \hat{\varphi} \cdot \hat{u}$ als Gleichheit in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

b) Aus a) folgt

$$\begin{aligned}
(u * \varphi)(\psi(-\cdot)) &= (u * \varphi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2 \psi) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2(u * \varphi))(\psi) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(\hat{\varphi} \cdot \hat{u}))(\psi) \\
&= u(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(\hat{\varphi}\hat{\psi})) = u(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2(\varphi * \psi)) = u((\varphi * \psi)(-\cdot)).
\end{aligned}$$

Wegen $(f * g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x)dx = u_f(g(-\cdot))$ für eine polynomial wachsende Funktion f und $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bedeutet die obige Gleichheit

$$((u * \varphi) * \psi)(0) = (u * (\varphi * \psi))(0).$$

Wir ersetzen ψ durch $L_{-x}\psi = \psi(\cdot + x)$ und erhalten mit (2-2)

$$\begin{aligned}
((u * \varphi) * \psi)(x) &= [L_{-x}((u * \varphi) * \psi)](0) = [(u * \varphi) * (L_{-x}\psi)](0) \\
&= [(u * (\varphi * L_{-x}\psi))](0) = [L_{-x}(u * (\varphi * \psi))](0) = (u * (\varphi * \psi))(x).
\end{aligned}$$

c) Nach a) gilt $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(\hat{u} * \hat{\varphi}) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2 \varphi) \cdot (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2 u) = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^2(\varphi \cdot u)$. Wendet man nun $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}$ an, so erhält man c). \square

3. Paley-Wiener-Sätze und der Shannonsche Abtastatz

3.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt geht es um Funktionen und Distributionen, deren Fouriertransformierte kompakten Träger haben. In diesem Fall liefern die Sätze vom Paley-Wiener-Typ starke Aussagen, so sind selbst Distributionen mit dieser Eigenschaft nicht nur reguläre Distributionen, sondern sogar Einschränkungen von holomorphen Funktionen.

Ein Beispiel von derartigen Funktionen sind Mobilfunksignale, deren Fouriertransformierte nur in einem gewissen Frequenzband nicht verschwindet. Der berühmte Abtastatz von Shannon besagt, dass derartige Signale durch ihre Abtastwerte rekonstruiert werden können, was die Grundlage der digitalen Mobilfunktechnik liefert.

a) Die Sätze von Paley und Wiener

3.2 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt f holomorph, falls die Abbildung $z_j \mapsto f(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n)$ holomorph ist für jedes $j = 1, \dots, n$. Wir schreiben in diesem Fall $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Eine Funktion $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ heißt auch eine ganze Funktion.

3.3 Lemma. Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ mit $f|_{\mathbb{R}^n} = 0$. Dann gilt $f = 0$.

Beweis. Der Fall $n = 1$ ist aus der Funktionentheorie bekannt. Wir zeigen induktiv folgende Aussage:

$$\text{Falls } z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R} \text{ gilt, so ist } f(z) = 0. \quad (A_k)$$

Die Aussage (A_n) , also $k = n$ gilt nach Voraussetzung.

Wir betrachten den Schritt von k nach $k - 1$. Definiere

$$g_k(\lambda) := f(z_1, \dots, z_{k-1}, \lambda, z_{k+1}, \dots, z_n).$$

Für $(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ ist $g_k(z_k) = 0$ wegen (A_k) . Also gilt $g_k = 0$ auf \mathbb{R} . Da g_k eine holomorphe Funktion einer Variablen ist, folgt $g_k(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Somit folgt $f(z) = 0$, falls $z_1, \dots, z_{k-1} \in \mathbb{R}$ gilt. Dies ist aber die Aussage (A_{k-1}) .

Die Aussage (A_0) ist die Behauptung des Lemmas. □

Nun können wir bereits den ersten Satz von Paley und Wiener beweisen, der sich mit Funktionen beschäftigt. Wir bezeichnen mit $\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$ den

Träger einer Funktion, und mit $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ die Kugel um den Mittelpunkt a mit Radius r .

3.4 Satz (Satz von Paley-Wiener für Funktionen). Zu $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert man die komplexe Fourier-Transformation

$$f(z) := (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \varphi)(z) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-iz \cdot x} dx \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

a) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \varphi \subset \overline{B(0, R)}$. Dann ist $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, und zu jedem $N \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $\gamma_N > 0$ mit

$$|f(z)| \leq \gamma_N (1 + |z|)^{-N} e^{R|\text{Im } z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n). \quad (3-2)$$

b) Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ eine ganze Funktion, und zu jedem $N \in \mathbb{N}$ existiere ein γ_N mit (3-2). Dann gilt $f|_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \varphi$ für ein $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \varphi \subset \overline{B(0, R)}$.

Beweis. a) Für $x \in \overline{B(0, R)}$ ist $|e^{-iz \cdot x}| \leq e^{R|\text{Im } z|}$. Damit existiert das obige Integral, und Differentiation unter dem Integral zeigt, dass f holomorph ist. Es ist

$$z^\alpha f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) z^\alpha e^{-iz \cdot x} dx = (-i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \varphi(x) e^{-iz \cdot x} dx,$$

wobei partiell integriert wurde. Wir erhalten

$$|z^\alpha| |f(z)| \leq c \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} e^{R|\text{Im } z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Somit folgt

$$(1 + |z|)^N |f(z)| \leq \gamma_N e^{R|\text{Im } z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n),$$

d.h. (3-2) gilt.

b) Sei f eine ganze Funktion, welche die Abschätzung (3-2) erfüllt. Definiere

$$\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}(f|_{\mathbb{R}^n})(x).$$

Wegen $\xi \mapsto (1 + |\xi|^N) f(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle N folgt $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wie im Beweis von Lemma 2.20 c).

(i) Für festes $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n$, $\xi_1 \in \mathbb{R}$ und $z' := (z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ betrachten wir das eindimensionale Integral

$$I(\eta_1) := \int_{\mathbb{R}} f(\xi_1 + i\eta_1, z_2, \dots, z_n) e^{i((\xi_1 + i\eta_1)x_1 + z' \cdot x')} d\xi_1 \quad (\eta_1 \in \mathbb{R}).$$

Wir werden zeigen, dass $I(\eta_1) = I(0)$ für alle $\eta_1 \in \mathbb{R}$ gilt. Dazu betrachten wir den Integrationsweg $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, der ein Rechteck in \mathbb{C} mit den Ecken

$-K, K, K + i\eta_1, -K + i\eta_1$ einschließt (d.h. γ_1 ist der Weg von $-K$ bis K etc.). Wir setzen

$$g(z_1) := f(z_1, z_2, \dots, z_n) e^{i(z_1 x_1 + z' \cdot x')} \quad (z_1 = \xi_1 + i\eta_1 \in \mathbb{C}).$$

Da g eine ganze Funktion ist, folgt $\int_{\Gamma} g(z) dz = 0$. Wegen (3-2) gilt insbesondere

$$|g(\xi_1 + i\eta_1)| \leq C(1 + |\xi_1|)^{-2} \cdot e^{R|\eta_1|},$$

und damit folgt

$$\int_{\gamma_2} g(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_4} g(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{für } K \rightarrow \infty.$$

Damit erhalten wir

$$\int_{\gamma_1} g(z) dz + \int_{\gamma_3} g(z) dz \rightarrow 0 \quad (K \rightarrow \infty).$$

Da das erste Integral gegen $I(0)$ und das zweite gegen $-I(\eta_1)$ konvergiert für $K \rightarrow \infty$, folgt $I(\eta_1) = I(0)$.

(ii) Eine Iteration unter Verwendung der Argumente in (i) liefert für alle $\eta \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi + i\eta) e^{ix(\xi + i\eta)} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(iii) Sei nun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für $\eta := \frac{\lambda x}{|x|}$ mit $\lambda > 0$ ist $x \cdot \eta = \lambda|x|$, $|\eta| = \lambda$ und

$$|f(\xi + i\eta)| \cdot |e^{i(\xi + i\eta) \cdot x}| \leq \gamma_N (1 + |\xi|)^{-N} e^{(R - |x|)\lambda},$$

wobei (3-2) verwendet wurde. Nach (ii) erhalten wir für $N > n$

$$|\varphi(x)| \leq \gamma_N e^{(R - |x|)\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{-N} d\xi \leq C e^{(R - |x|)\lambda}.$$

Nehmen wir nun den Limes $\lambda \rightarrow \infty$, so erhalten wir $\varphi(x) = 0$ für alle $|x| > R$.

(iv) Nach Definition gilt $\varphi = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}(f|_{\mathbb{R}^n})$, d.h. $f|_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \varphi$ als Gleichheit in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Somit gilt für alle $z \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-iz \cdot x} dx.$$

Da beide Seiten ganze Funktionen sind, gilt die Gleichheit nach Lemma 3.3 für alle $z \in \mathbb{C}^n$. \square

Wir wollen den Satz von Paley-Wiener auch für Distributionen formulieren. Dazu benötigen wir zunächst folgende Definition.

3.5 Definition. a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann verschwindet u auf der Menge U , falls $u(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \varphi \subset U$ gilt. Die Menge $\text{supp } u := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{U \subset \mathbb{R}^n : u \text{ verschwindet auf } U\}$ heißt der Träger von u .

b) Sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } u$ kompakt, und sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi = 1$ auf einer offenen Obermenge von $\text{supp } u$ und $\text{supp } \psi \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann definiert man

$$u(\varphi) := u(\psi\varphi) \quad (\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

Dies definiert eine Fortsetzung $u: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ von $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3.6 Bemerkung. a) Man beachte, dass $u(\varphi)$ in b) wohldefiniert ist, da einerseits $\psi\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt und andererseits für zwei derartige ψ_1, ψ_2 gilt $\text{supp}(\psi_1 - \psi_2) \subset \mathbb{R}^n \setminus \text{supp } u$ und damit $u((\psi_1 - \psi_2)\varphi) = 0$.

b) Der Raum $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wird ebenfalls mit einer lokalkonvexen Topologie versehen. So konvergiert eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ genau dann gegen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, falls für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt: $\sup_{x \in K} |\partial^\alpha f_k(x) - \partial^\alpha f(x)| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Damit kann man leicht zeigen, dass die in b) definierte Abbildung $u: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ sogar stetig ist. Typische Bezeichnungen sind $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (mit dieser Topologie) und damit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

c) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und sei $U := \mathbb{R}^n \setminus \text{supp } f$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \varphi \subset U$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\text{supp } f} f(x)\varphi(x)dx = 0,$$

d.h. für die zugehörige reguläre Distribution u_f gilt $\text{supp } u_f \subset \text{supp } f$. Man sieht leicht unter Verwendung der Stetigkeit von f , dass hier sogar Gleichheit gilt.

d) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Dirac-Distribution $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ offensichtlich $\text{supp } \delta_a = \{a\}$.

3.7 Lemma. Sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger $\text{supp } u \subset \overline{B(0, R)}$. Definiere $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(z) := u(x \mapsto e^{-iz \cdot x}) \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Dann ist f eine ganze Funktion, und es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ mit

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^N e^{R|\text{Im } z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n). \quad (3-3)$$

Beweis. Wir schreiben in diesem Beweis $e_z(x) := e^{iz \cdot x}$ ($x \in \mathbb{R}^n$), d.h. es ist $f(z) = u(e_{-z})$.

(i) Um $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ zu zeigen, genügt es o.E., die Holomorphie der Abbildung $z_1 \mapsto g(z_1) := f(-z_1, -z') = u(e_z)$ für alle $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ zu zeigen. Dazu verwenden wir den Satz von Morera, d.h. wir betrachten ein abgeschlossenes Dreieck $\Delta \subset \mathbb{C}$.

Nach Definition der Topologie auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist die Abbildung $z_1 \mapsto e_{z_1, z'}, \mathbb{C} \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für jedes feste $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ stetig, und das Integral

$$F := \int_{\partial\Delta} e_{z_1, z'} dz_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

ist wohldefiniert. Weiter ist die Auswertung $v \mapsto v(x), C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$, ebenfalls linear und stetig. Daher kann man Integral und Auswertung vertauschen und erhält

$$F(x) = \int_{\partial\Delta} e_{z_1, z'}(x) dz_1 = \int_{\partial\Delta} e^{iz_1 x} e^{iz' \cdot x'} dz_1 = 0,$$

da der Integrand eine holomorphe Funktion von z_1 ist. Die Stetigkeit von $u: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ (Bemerkung 3.6 b)) erlaubt es nun auch, Integration und Anwendung von u zu vertauschen. Daher gilt wegen $F = 0$

$$0 = u(F) = u\left(\int_{\partial\Delta} e_{z_1, z'} dz_1\right) = \int_{\partial\Delta} u(e_{z_1, z'}) dz_1 = \int_{\partial\Delta} g(z_1) dz_1.$$

Nach dem Satz von Morera ist $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

(ii) Wir zeigen die Abschätzung (3-3). Sei dazu $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq h \leq 1$, $h(s) = 1$ für $s \leq 1$ und $h(s) = 0$ für $s \geq 2$. Für $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ definiert man

$$\psi_z(x) := h(|x| - R)|z| \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Damit gilt $0 \leq \psi_z \leq 1$ sowie $\psi_z(x) = 1$ falls $|x| \leq R + \frac{1}{|z|}$ und $\psi_z(x) = 0$ falls $|x| \geq R + \frac{2}{|z|}$. Nach Definition gilt also $u(e_z) = u(\psi_z e_{-z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Es gilt $|x| \leq R + \frac{2}{|z|}$ ($x \in \text{supp } \psi_z$) und damit

$$|e^{-iz \cdot x}| = e^{\text{Im } z \cdot x} \leq e^2 e^{R|\text{Im } z|} \quad (x \in \text{supp } \psi_z).$$

Somit folgt für die Halbnorm p_0 (siehe Definition 2.17)

$$p_0(\psi_z e_{-z}) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\psi_z(x) e^{-iz \cdot x}| \leq e^2 e^{R|\text{Im } z|}.$$

Mit Hilfe der Leibniz-Formel schätzt man die höheren Halbnormen p_m ab (man beachte, dass bei jeder Ableitung sowohl bei ψ_z als auch bei e_{-z} im Wesentlichen ein Faktor $|z|$ hinzukommt). Man erhält

$$p_m(\psi_z e_{-z}) \leq C_m (1 + |z|)^m e^{R|\text{Im } z|} \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Da $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, existiert nach Bemerkung 2.25 (i) ein $N \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \geq 0$ mit $|u(\varphi)| \leq Cp_N(\varphi)$ ($\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Speziell für $\varphi = \psi_z e_{-z}$ erhalten wir

$$|f(z)| = |u(\psi_z e_{-z})| \leq Cp_N(\psi_z e_{-z}) \leq CC_N (1 + |z|)^N e^{R|\text{Im } z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

□

Das letzte Lemma ist im Wesentlichen eine Richtung des folgenden Satzes.

3.8 Satz (Satz von Paley-Wiener für Distributionen).

a) Sei $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger $\text{supp } u \subset \overline{B(0, R)}$, und sei

$$f(z) := u(x \mapsto e^{-iz \cdot x}) \quad (z \in \mathbb{C}^n). \quad (3-4)$$

Dann ist $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, es gilt $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} u = f|_{\mathbb{R}^n}$ (wobei $f|_{\mathbb{R}^n}$ als reguläre Distribution aufgefasst wird). Ferner existiert ein $C \geq 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^N e^{R|\text{Im } z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n). \quad (3-5)$$

b) Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, für welche $C \geq 0$, $N \in \mathbb{N}$ und $R \geq 0$ existieren mit (3-5). Dann existiert ein $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } u \subset \overline{B(0, R)}$ so, dass die Darstellung (3-4) gilt. Insbesondere ist dann $f|_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} u$.

Beweis. a) Die Aussage $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ sowie die Abschätzung (3-5) wurden schon in Lemma 3.7 gezeigt. Wir zeigen noch $\hat{u} = f|_{\mathbb{R}^n}$. Dazu wählen wir $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \psi$ kompakt und $\psi = 1$ in $B(0, R + 1)$. Dann gilt $u = \psi \cdot u$, und mit Satz 2.35 folgt $\hat{u} = \hat{u} * \hat{\psi}$. Damit ist $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Satz 2.34). Weiter folgt

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= (\hat{u} * \hat{\psi})(x) = \hat{u}[\hat{\psi}(x - \cdot)] = \hat{u}[\xi \mapsto \hat{\psi}(x - \xi)] \\ &= \hat{u}[\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}(y \mapsto e^{-ix \cdot y} \psi(y))] = u[y \mapsto e^{-ix \cdot y} \psi(y)] = (\psi \cdot u)[y \mapsto e^{-ix \cdot y}] \\ &= u[y \mapsto e^{-ix \cdot y}] = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

b) Sei nun $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, und es gelte (3-5). Da $|f(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^N$ gilt, definiert $f|_{\mathbb{R}^n}$ eine reguläre Distribution, d.h. es gilt $f|_{\mathbb{R}^n} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $u := \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}(f|_{\mathbb{R}^n})$.

Sei $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } h \subset \overline{B(0, 1)}$ und $\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx = 1$. Wir setzen $h_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} h(\frac{x}{\varepsilon})$ und

$$f_\varepsilon(z) := f(z) \hat{h}_\varepsilon(z) \quad (z \in \mathbb{C}^n),$$

wobei $\hat{h}_\varepsilon \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ nach dem Satz von Paley-Wiener für Funktionen (Satz 3.4) gilt. Für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $\gamma_N \geq 0$ so, dass

$$|f_\varepsilon(z)| \leq \gamma_N (1 + |z|)^{-N} e^{(R+\varepsilon)|\text{Im } z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Nach Satz 3.4 folgt $f_\varepsilon = \hat{g}_\varepsilon$ mit einer Funktion $g_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } g_\varepsilon \subset \overline{B(0, R + \varepsilon)}$.

Sei nun $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \hat{\varphi} \cap \overline{B(0, R)} = \emptyset$. Dann gilt $\hat{\varphi} g_\varepsilon = 0$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Somit folgt

$$\begin{aligned} u(\hat{\varphi}) &= \hat{u}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(\xi) \varphi(\xi) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(x) \hat{\varphi}(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Hier wurden $f_\varepsilon(\xi) \rightarrow f(\xi)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ sowie majorisierte Konvergenz verwendet (beachte $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$). Wir erhalten damit $u(\hat{\varphi}) = 0$ für alle $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \hat{\varphi} \cap \overline{B(0, R)} = \emptyset$, d.h. $\text{supp } u \subset \overline{B(0, R)}$. \square

b) Der Shannonsche Abtastatz

Der Shannonsche Abtastatz ist eine der Grundlagen der mobilen Kommunikation und besagt, dass bandbegrenzte Signale ohne Informationsverlust durch ihre Werte auf einem zeitlichen Gitter rekonstruiert werden können. Unter einem Signal wird hier eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ verstanden. Dabei wird (für $n = 1$) $f(t)$ als der Wert des Signals zur Zeit t aufgefasst. Die Signaltheorie und ihre stochastische Erweiterung (in der ein Signal ein zeitkontinuierlicher stochastischer Prozess ist) haben fundamentale Bedeutung in den Anwendungen, z.B. für Fernseh- und Mobilfunksignale, drahtgebundene Kommunikation, Akustik, Bildverarbeitung.

3.9 Definition. Eine Distribution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt bandbegrenzt mit Bandbreite $b > 0$ oder b -bandbegrenzt, falls

$$\text{supp } \hat{u} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi|_\infty \leq b\}.$$

3.10 Bemerkung. Nach dem Satz von Paley-Wiener ist eine bandbegrenzte temperierte Distribution eine C^∞ -Funktion. Insbesondere nehmen wir für bandbegrenzte L^2 -Funktionen im folgenden stets den C^∞ -Repräsentanten. In diesem Sinn ist für eine bandbegrenzte Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ auch der Wert $f(x)$ an einer Stelle wohldefiniert.

3.11 Beispiel. Für die charakteristische Funktion $\chi := \chi_{[-1,1]^n}$ gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \chi)(x) &= \int_{[-1,1]^n} e^{ix \cdot \xi} d\xi = (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^n \frac{e^{ix_j \xi_j} \Big|_{\xi_j=-1}^1}{ix_j} \\ &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^n \frac{2(e^{ix_j} - e^{-ix_j})}{2ix_j} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \text{sinc}(x) \end{aligned}$$

mit

$$\text{sinc}(x) := \prod_{j=1}^n \frac{\sin x_j}{x_j}.$$

Damit ist sinc eine 1-bandbegrenzte Funktion. Definiert man $\text{sinc}_a(x) := \text{sinc}(ax)$ für $a > 0$, so gilt

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \text{sinc}_a)(\xi) = a^{-n} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} \chi_{[-a,a]^n}(\xi).$$

Für $n = 1$ heißt die sinc-Funktion auch der ideale Tiefpassfilter.

3.12 Lemma. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ b -bandbegrenzt, und sei $h \leq \frac{\pi}{b}$. Dann gilt

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(kh) e^{-ikh \cdot \xi} \quad (\text{Gleichheit in } L^2([-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n)).$$

Beweis. Die Funktionen $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ mit

$$\varphi_k(\xi) := (2\pi)^{-n/2} h^{n/2} e^{-ikh \cdot \xi}$$

bilden eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $H := L^2([-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n)$. Da $\text{supp } \hat{f} \subset [-b, b]^n \subset [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n$ gilt (beachte $b \leq \frac{\pi}{h}$), gilt nach Satz 1.40 in H die Entwicklung

$$\hat{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle \hat{f}, \varphi_k \rangle_H \varphi_k.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \varphi_k \rangle &= h^{n/2} \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n} \hat{f}(\xi) e^{ikh \cdot \xi} d\xi = h^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ikh \cdot \xi} d\xi \\ &= h^{n/2} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \hat{f})(hk) = h^{n/2} f(hk). \end{aligned}$$

Hier wurde $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und Korollar 2.23 verwendet. Also gilt

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(kh) e^{-ikh \cdot \xi} \quad (\text{Konvergenz in } H). \quad \square$$

Der folgende Satz ist einer der berühmtesten Sätze der Signaltheorie.

3.13 Satz (Shannonscher Abtastatz). Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ b -bandbegrenzt mit $h \leq \frac{\pi}{b}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \text{sinc} \left(\frac{\pi}{h} (x - kh) \right).$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in \mathbb{R}^n .

Beweis. (i) Nach Lemma 3.12 gilt in $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ikh \cdot \xi} \chi(\xi)$$

mit $\chi := \chi_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n}$. Da die Reihe in $L^2(\mathbb{R}^n)$ konvergiert und $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \in L(L^2(\mathbb{R}^n))$ gilt, erhalten wir in $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$f(x) = (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \hat{f})(x) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}[e^{ikh \cdot \xi} \chi](x)$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) (\mathcal{F}^{-1}\chi)(x - hk) \\
&= (2\pi)^{-n/2} h^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \left(\frac{\pi}{h}\right)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc}_{\frac{\pi}{h}}(x - hk) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - kh)\right).
\end{aligned}$$

Dabei wurde Beispiel 3.11 verwendet.

(ii) Sei wieder $H := L^2\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]^n$ und $\varphi_k(\xi) := (2\pi)^{-n/2} h^{n/2} e^{-ikh \cdot \xi}$ ($k \in \mathbb{Z}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$). Dann ist $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ eine Orthonormalbasis von H . Wir betrachten die $\frac{\pi}{h}$ -bandbegrenzte Funktion $g = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - \cdot)\right)$ für festes x . Wie im Beweis von Lemma 3.12 gezeigt wurde, gilt $h^{n/2}g(hk) = \langle \hat{g}, \varphi_k \rangle$ ($k \in \mathbb{Z}^n$).

Um die punktweise Konvergenz der Reihe zu zeigen, verwenden wir die Gleichheit

$$h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |g(hk)|^2 = \sum_k |\langle \hat{g}, \varphi_k \rangle_H|^2 = \|\hat{g}\|_H^2 = \|\hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \infty.$$

Dabei wurde die Besselsche Gleichung in H und der Satz von Plancherel in $L^2(\mathbb{R}^n)$ verwendet. Wegen $g = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h} \cdot -\frac{\pi}{h}x\right)$ ist die Fourier-Transformierte gegeben durch

$$\hat{g}(\xi) = \left(\frac{\pi}{h}\right)^{-n} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} \chi_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n}(\xi) e^{-i\frac{\pi}{h}x \cdot \xi}.$$

Damit gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - hk)\right) \right|^2 = c_1 \cdot \|\chi_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^n}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 =: c_2$$

mit einer von x unabhängigen Konstanten c_2 , d.h. wir erhalten $(\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - hk)\right))_{k \in \mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Wegen $f(hk) = h^{-n/2} \langle f, \varphi_k \rangle$ ($k \in \mathbb{Z}^n$) gilt auch $(f(hk))_{k \in \mathbb{Z}^n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$.

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{|k| \geq N} \left| f(hk) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - hk)\right) \right| \\
&\leq \left(\sum_{|k| \geq N} |f(hk)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{|k| \geq N} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - hk)\right) \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{c_2} \left(\sum_{|k| \geq N} |f(hk)|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig in x . Insbesondere ist der Limes stetig in x .

Nach (i) ist f der L^2 -Limes der Reihe im Abtastatz. Nach (ii) konvergiert diese Reihe punktweise gegen eine stetige Funktion, und damit gilt punktweise Gleichheit zunächst fast überall und schließlich, da auch f stetig ist, für alle $x \in \mathbb{R}^n$. \square

3.14 Korollar. Die Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sei bandbegrenzt und besitze kompakten Träger. Dann ist $f = 0$.

Beweis. Da der Träger von f kompakt ist, reduziert sich die Reihe im Shannonschen Abtastatz auf eine endliche Summe. Die Funktion f ist also eine endliche Linearkombination von sinc-Funktionen, d.h. \hat{f} ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen. Andererseits ist $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, da f kompakten Träger besitzt. Dies ist nur möglich, falls $\hat{f} = 0$ und damit $f = 0$ gilt. \square

3.15 Bemerkung. a) Es gibt eine graphische Veranschaulichung des Beweises des Abtastatzes:

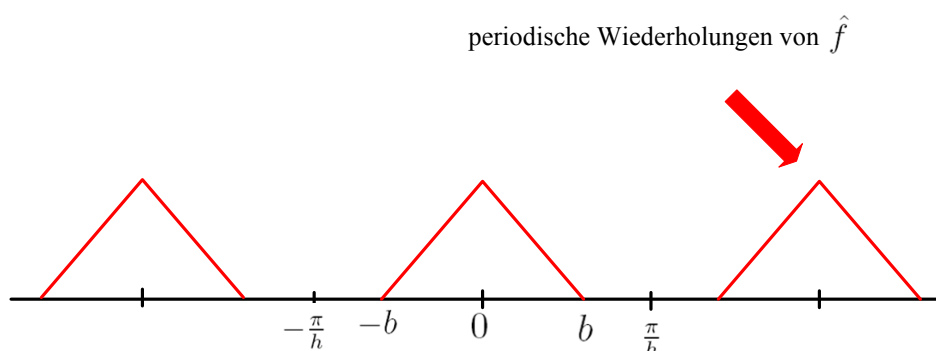


Abbildung 5: Der Shannonsche Abtastatz

Nur für $\frac{\pi}{h} \geq b$, d.h. für $h \leq \frac{\pi}{b}$, gibt es keine Überlappungen, und die Funktion kann eindeutig rekonstruiert werden. Im Falle $h < \frac{\pi}{b}$ spricht man von Überabtastung (oversampling), im Falle $h > \frac{\pi}{b}$ von Unterabtastung (undersampling).

b) In Anwendungen heißt $h =: T_s$ das Abtast- oder Sampling-Intervall, und $f_s := \frac{1}{T_s}$ die Abtastrate oder Symbolrate. Der Spektralbereich (oder Spektrum) eines Signals $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird definiert als $\frac{1}{2\pi} \text{supp } \hat{f}$. Bei einer b -bandbegrenzten Funktion ist das maximal auftretende Spektrum also $\frac{b}{2\pi} =: f_{\max}$. Die Abtastbedingung lautet damit $T_s \leq \frac{1}{2f_{\max}}$ oder $f_s \geq 2f_{\max}$.

c) Sei $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{h} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann wird durch $M_h f := \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} h \cdot \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)$ ein stetiger linearer Operator $M_h : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert. Nach Satz 2.35 gilt $M_h f = h * f$. In den Anwendungen spricht man von einem Filter. Dabei heißt h die Impulsantwort, d.h. die Antwort auf den Dirac-Impuls δ_0 (wegen $\delta_0 * h = h$ für $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$), und $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} h$ das Frequenzbild des Filters. Korollar 3.14 zeigt, dass es keinen Filter gibt, der im Zeit- und im Frequenzbereich kompakten Träger hat.

3.16 Beispiel (Datenraten bei GSM). Bei reiner Gesprächsverbindung am Handy wird meistens das 2G-Verfahren GSM verwendet (bei Datenübertragung je nach

Verfügbarkeit des 3G-Verfahrens HSDPA oder des 4G-Verfahrens LTE). Das Mobilfunksystem GSM (in der fullrate-Version) besitzt folgende Datenraten:

- Datenbitrate nach Digitalisierung der Sprache: 8.0 kbit/s,
- Datenbitrate nach Sprachkodierung: 13.0 kbit/s,
- Datenbitrate nach Kanalkodierung: 22.8 kbit/s,
- Bitrate nach Hinzufügen von Pilotsymbolen: 31.3 kbit/s,
- Bitrate pro Kanal (8 Benutzer, jeder 13. Frame ist Kontrollframe): $8 \cdot \frac{13}{12} \cdot 31.3$ kbit/s = 271 kbit/s,
- Symbolrate (1 Symbol = 1 bit): $f_s = 271$ kbit/s

In der heute verbreiteten halfrate-Version stehen pro Benutzer nach Kanalkodierung nur 11.4 kbit/s zur Verfügung, bei gleicher Symbolrate. Die mit dieser Symbolrate übertragenen Signale sind bandbegrenzt mit einer spektralen Bandbreite von $f_{\max} = \frac{f_s}{2}$. Zur Übertragung braucht man also (im Basisband) einen Kanal mit Frequenzen $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$. Dieses Signal wird durch Modulation zu einem hochfrequenten Signal (HF-Signal). Die Modulation besteht dabei aus der Multiplikation mit e^{if_0x} mit der Trägerfrequenz f_0 . Typische Werte sind

- $f_0 \approx 1800$ MHz (für O₂, T-D1),
- $f_0 \approx 900$ MHz (für e-plus).

Ein Kanal in diesem Frequenzband müsste somit 271 kHz breit sein. In GSM sind die Kanäle nur 200 kHz breit, man hat also Überlappungen. Es gibt 375 Kanäle im oberen Frequenzband und 125 Kanäle im unteren Frequenzband.

4. Positiv definite Funktionen und der Satz von Bochner

4.1 Worum geht's? Eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt positiv definit, falls

$$\sum_{k,\ell=1}^N c_k c_\ell f(x_k - x_\ell) \geq 0$$

für alle $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und alle $x_1, \dots, x_N \in G$ gilt. Diese Eigenschaft tritt z.B. auf bei Zeitreihen, bei welchen die Kovarianz nur von der Zeitdifferenz abhängt. Damit kann man die Autokorrelationsfunktion der Zeitreihe definieren, welche positiv definit ist. Ein anderes Beispiel ist die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen, welche sehr nützlich ist, um Konvergenzaussagen zu beweisen, etwa den zentralen Grenzwertsatz. Der Satz von Bochner in seinen verschiedenen Varianten besagt, dass die positiv definiten Funktionen genau die Fouriertransformierten von (positiven) Maßen sind. Wir definieren daher zunächst die Fourier-(Stieltjes-)Transformierte von Maßen und untersuchen einige Eigenschaften, bevor der Satz von Bochner formuliert und bewiesen wird. Um die verschiedenen Fälle (diskrete Zeitreihen, kontinuierliche Signale) simultan behandeln zu können, betrachten wir abstrakt G und den Dualraum Γ und vereinheitlichen damit auch die ersten beiden Kapitel dieser Vorlesung.

a) Die Fourier-Stieltjes-Transformation

Wir haben bisher die beiden Fälle \mathbb{T}^n und \mathbb{Z}^n separat betrachtet. Die wesentlichen Eigenschaften und Beweise für die Fouriertransformation auf diesen beiden Räumen sind aber vollständig analog. Es existiert eine allgemeine Theorie der Fouriertransformation auf allgemeinen Räumen, genauer gesagt auf lokal-kompakten abelschen Gruppen, welche wir hier nicht im Detail behandeln wollen, da die Begriffe und Methoden zum großen Teil eine Wiederholung der Kapitel 1 und 2 darstellen. Dennoch werden wir im Folgenden den Torus, den Ganzraumfall sowie den Fall \mathbb{Z}^n (in gewisser Weise der Dualraum von \mathbb{T}^n) simultan behandeln und daher folgende Bezeichnungen verwenden:

- (i) Im Torusfall sei $G := \mathbb{T}^n$ und $\Gamma := \mathbb{Z}^n$. Als Maß betrachten wir das sogenannte Haarmaß λ_G , gegeben durch $d\lambda_G(x) = \bar{d}x = (2\pi)^{-n} dx$. Auf Γ betrachten wir als Haarmaß das Zählmaß $\lambda_\Gamma \zeta: \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow [0, \infty]$, $\zeta(A) := |A| \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Wir schreiben wieder $\bar{d}\xi := d\zeta$. Man beachte, dass auf Γ die L^p -Räume Summenräume sind, d.h. etwa $L^1(\Gamma) = L^1(\lambda_\Gamma) = L^1(\zeta) = \ell^1(\mathbb{Z}^n)$. Die Fouriertransformation ist gegeben durch $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$.

- (ii) Im Ganzraumfall setzen wir $G := \mathbb{R}^n$ und $\Gamma := \mathbb{R}^n$ mit den Maßen $d\lambda_G(x) := \bar{d}x := (2\pi)^{-n/2}dx$ sowie $d\lambda_\Gamma(\xi) := \bar{d}\xi := (2\pi)^{-n/2}d\xi$. Hier ist die Fouriertransformation gegeben durch $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$.
- (iii) In Ergänzung der obigen beiden Fälle betrachten wir auch $G := \mathbb{Z}^n$ mit dem Haarmaß $d\lambda_G(x) := \bar{d}x := d\zeta(x)$ und $\Gamma := \mathbb{T}^n$ mit dem Haarmaß $d\lambda_\Gamma(\xi) := \bar{d}\xi := (2\pi)^{-n}d\xi$. In diesem Fall ist die Fouriertransformation gegeben durch

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^n} f)(\xi) := \int_{\mathbb{Z}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) \bar{d}x = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-ik \cdot \xi} f(k) \quad (\xi \in \mathbb{T}^n).$$

Im Folgenden sei also stets $(G, \Gamma, \lambda_G, \lambda_\Gamma, \mathcal{F}_G)$ wie in einer der Fälle (i)-(iii) gegeben. Die Faltung ist wieder definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_G f(y)g(x - y) \bar{d}y \quad (x \in G).$$

Wie oben für die Fälle (i) und (ii) gezeigt, ist $\mathcal{F}_G: L^1(G) \rightarrow C(\Gamma)$ stetig und $\mathcal{F}_G: L^2(G) \rightarrow L^2(\Gamma)$ ein isometrischer Isomorphismus.

4.2 Definition. a) Sei X eine Menge und \mathcal{A} eine σ -Algebra über X . Dann heißt eine Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ein komplexes Maß, falls $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ für alle paarweise disjunkten Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt. Falls \mathbb{C} durch \mathbb{R} ersetzt wird, spricht man auch von einem signierten Maß. Man beachte, dass der Wert ∞ hier ausgeschlossen ist.

Falls X ein topologischer Raum ist, betrachten wir stets $\mathcal{A} := \mathcal{B}(X)$, die Borel- σ -Algebra von X .

b) Sei X ein topologischer Raum und $\mu: \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ ein komplexes Maß. Dann definiert man das Variationsmaß $|\mu|: \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$|\mu|(A) := \sup \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu(A_n)| : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A, A_n \in \mathcal{A} \text{ paarweise disjunkt} \right\}.$$

Die Totalvariation $\|\mu\|_{M(X)}$ wird definiert durch

$$\|\mu\|_{M(X)} := |\mu|(X).$$

Das Maß μ heißt regulär, falls

$$|\mu|(A) = \sup \{ |\mu|(K) : K \subset\subset A \} = \inf \{ |\mu|(U) : U \supset A, U \text{ offen} \}$$

für alle $A \in \mathcal{B}(X)$ gilt. Dabei schreiben wir $K \subset\subset A$, falls $K \subset A$ gilt und K kompakt ist. Die Menge aller regulären komplexen Maße wird mit $M(X)$ bezeichnet.

c) Falls $\mu \in M(X)$ mit $\mu(A) \geq 0$ ($A \in \mathcal{B}(X)$), so schreiben wir $\mu \in M_+(X)$. Man spricht auch von der Menge aller positiven Maße. (Man beachte, dass jedes $\mu \in M_+(X)$ wegen $\mu(X) = |\mu|(X) < \infty$ ein endliches Maß ist.)

4.3 Bemerkung. a) Man kann zeigen: Für $\mu \in M(X)$ ist $|\mu|$ ein positives Maß, und $\|\cdot\|_{M(X)}$ ist eine Norm auf $M(X)$, mit welcher $M(X)$ zu einem Banachraum wird.

b) Für jedes $\mu \in M(X)$ existiert die Jordan-Zerlegung

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4 \quad \text{mit } \mu_j \in M_+(X).$$

Unter geeigneten Zusatzbedingungen an μ_j ist diese Zerlegung eindeutig. Die Existenz der Jordanzerlegung wird hier nicht bewiesen.

4.4 Definition (Faltung von Maßen). Für $\mu, \nu \in M(G)$ ist die Faltung $\mu * \nu: \mathcal{B}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$(\mu * \nu)(A) := (\mu \otimes \nu)(\{(x, y) \in G \times G : x + y \in A\}) \quad (A \in \mathcal{B}(G)).$$

Dabei ist $\mu \otimes \nu: \mathcal{B}(G \times G) \rightarrow \mathbb{C}$ das Produktmaß von μ und ν .

4.5 Satz. a) Für $\mu, \nu \in M(G)$ ist $\mu * \nu \in M(G)$.

b) Seien $\mu, \nu \in M(G)$. Dann gilt für jede beschränkte messbare Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_G f(x) d(\mu * \nu)(x) = \int_G \int_G f(x + y) d\mu(x) d\nu(y).$$

c) Die Faltung $*$: $M(G) \times M(G) \rightarrow M(G)$ ist kommutativ und assoziativ.

Beweis. Aufgrund der Jordan-Zerlegung genügt es, $\mu, \nu \in M_+(G)$ zu betrachten.

a) Da die Addition $a: G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x + y$, stetig und damit messbar ist, ist $\mu * \nu = (\mu \otimes \nu) \circ a^{-1}$ ein Maß. Zu zeigen ist, dass $\mu * \nu$ regulär ist, wobei wir ohne Beweis verwenden, dass das Produktmaß regulär ist.

Sei $A \in \mathcal{B}(G)$. Wir definieren $\tilde{A} := a^{-1}(A) \in \mathcal{B}(G \times G)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\mu \otimes \nu$ regulär ist, existiert ein $\tilde{K} \subset \subset G \times G$ mit

$$(\mu \otimes \nu)(\tilde{K}) > (\mu \otimes \nu)(\tilde{A}) - \varepsilon.$$

Die Menge $K := a(\tilde{K})$ ist kompakt mit $\tilde{K} \subset a^{-1}(K)$, und damit folgt

$$(\mu * \nu)(K) = (\mu \otimes \nu)(a^{-1}(K)) \geq (\mu \otimes \nu)(\tilde{K}) > (\mu \otimes \nu)(\tilde{A}) - \varepsilon = (\mu * \nu)(A) - \varepsilon.$$

Dies zeigt die eine Hälfte der Regularität, die andere folgt durch Komplementbildung. Also gilt $\mu * \nu \in M(G)$.

b) Für $\mu, \nu \in M(G)$ und jede messbare Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ folgt mit dem Satz von Fubini

$$\int_G f(x) d(\mu * \nu)(x) = \int_G f(x) d[(\mu \otimes \nu) \circ a^{-1}](x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{G \times G} f(a(x, y)) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_{G \times G} f(x + y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) \\
&= \int_G \int_G f(x + y) d\mu(x) d\nu(y).
\end{aligned}$$

c) Offensichtlich ist die Faltung kommutativ. Für den Nachweis der Assoziativität definieren wir zu $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in M(G)$ die gemeinsame Faltung durch

$$(\mu_1 * \mu_2 * \mu_3)(A) := (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3)(a_3^{-1}(A)) \quad (A \in \mathcal{B}(G)),$$

wobei $a_3: G \times G \times G \rightarrow G, (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3$ sei. Wie in Teil b) sieht man die Gleichheit

$$\begin{aligned}
(\mu_1 * \mu_2 * \mu_3)(A) &= \int_{G^3} \chi_A(x_1 + x_2 + x_3) d(\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3)(x_1, x_2, x_3) \\
&= \int_G \left[\int_{G \times G} \chi_A(x_1 + x_2 + x_3) d[\mu_1 \otimes \mu_2](x_1, x_2) \right] d\mu_3(x_3).
\end{aligned}$$

Dies zeigt $\mu_1 * \mu_2 * \mu_3 = (\mu_1 * \mu_2) * \mu_3$. Da die Faltung kommutativ ist, folgt daraus die Assoziativität. \square

Eine der wichtigsten Beweiszutaten für den Satz von Bochner ist ein Darstellungssatz von Riesz, welcher stetige lineare Funktionale auf dem Raum $C_0(G)$ mit Maßen identifiziert. Im Folgenden bezeichnen wir mit $C_c(G)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger und mit $C_0(G)$ die Menge aller $f \in C(G)$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \subset\subset G$ mit $|f(x)| < \varepsilon$ ($x \in G \setminus K$).

4.6 Satz (Satz von Riesz). Zu $\mu \in M(G)$ sei die Abbildung $T_\mu: C_0(G) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$T_\mu f := \int_G f(x) d\mu(x) \quad (f \in C_0(G)).$$

Dann gilt $T_\mu \in (C_0(G))'$, und die Abbildung $\mu \mapsto T_\mu, M(G) \rightarrow (C_0(G))'$ ist ein isometrischer Isomorphismus von Banachräumen. Insbesondere gilt

$$\|\mu\|_{M(G)} = \|T_\mu\|_{(C_0(G))'} = \sup_{\substack{f \in C_0(G) \\ \|f\|_\infty = 1}} \left| \int_G f(x) d\mu(x) \right| \quad (\mu \in M(G)),$$

und zu jedem $T \in (C_0(G))'$ existiert genau ein $\mu \in M(G)$ mit $T = T_\mu$. Dabei ist $\mu \in M_+(G)$ genau dann, wenn T_μ ein positives Funktional ist, d.h. wenn $T_\mu f \geq 0$ für alle $f \geq 0$ gilt.

Der Satz von Riesz wird hier nicht bewiesen.

4.7 Satz. Der Raum $M(G)$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{M(G)}$ und der Multiplikation $*$: $M(G) \times M(G) \rightarrow M(G)$, ist eine kommutative Banachalgebra mit Einheit δ_0 . Insbesondere gilt

$$\|\mu * \nu\|_{M(G)} \leq \|\mu\|_{M(G)} \|\nu\|_{M(G)} \quad (\mu, \nu \in M(G)). \quad (4-1)$$

Beweis. Nach Bemerkung 4.3 ist $M(G)$ ein Banachraum, und nach Satz 4.5 ist die Faltung wohldefiniert, kommutativ und assoziativ. Wir müssen noch die Abschätzung (4-1) zeigen. Sei dazu $f \in C_0(G)$ mit $\|f\|_\infty = 1$. Dann gilt mit Satz 4.5 b) und dem Satz von Riesz

$$\begin{aligned} \left| \int_G f(x) d(\mu * \nu)(x) \right| &\leq \int_G \int_G |f(x+y)| d\mu(x) d\nu(y) \\ &\leq \int_G \|\mu\|_{M(G)} d\nu(y) \leq \|\mu\|_{M(G)} \|\nu\|_{M(G)}. \end{aligned}$$

Für das Dirac-Maß δ_0 gilt nach Satz 4.5 b) und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} (\mu * \delta_0)(A) &= \int_G \left[\int_G \chi_A(x+y) d\delta_0(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int_G \chi_A(x+0) d\mu(x) = \mu(A) \quad (\mu \in M(G), A \in \mathcal{B}(G)). \end{aligned}$$

Damit besitzt $M(G)$ bezüglich der Faltung die Einheit δ_0 . □

4.8 Bemerkung. Im Fall $G = \mathbb{R}^n$ ist jedes $\mu \in M(G)$ eine Linearkombination von endlichen Maßen (Jordan-Zerlegung), damit kann μ auch als Element von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden. Die Definition der Fouriertransformation für Maße (siehe unten) stimmt mit der Faltung und der Fouriertransformation in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ überein, wie man sofort an den Definitionen sieht. Damit kann $M(\mathbb{R}^n)$ als Teilraum von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ betrachtet werden, und es gilt etwa die Bijektivität der Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}: M(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(M(\mathbb{R}^n))$. Die obige Definition der Faltung zweier Maße erlaubt es uns allerdings, $M(\mathbb{R}^n)$ als Unter algebra von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ zu betrachten.

Man kann auch für die anderen beiden Fälle $G = \mathbb{T}^n$ und $G = \mathbb{Z}^n$ entsprechend temperierte Distributionen definieren und erhält wieder $M(G) \subset \mathcal{S}'(G)$.

4.9 Definition. Für $\mu \in M(G)$ ist die Fourier-Stieltjes-Transformierte $\mathcal{F}_{M(G)}$ definiert durch

$$(\mathcal{F}_{M(G)}\mu)(\xi) := \hat{\mu}(\xi) := \int_G e^{-ix \cdot \xi} d\mu(x) \quad (\xi \in \Gamma).$$

4.10 Lemma. a) Für $\mu \in M(G)$ ist $\hat{\mu}: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig und beschränkt mit $\|\hat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|_{M(G)}$.

b) Für $\mu, \nu \in M(G)$ gilt

$$\mathcal{F}_{M(G)}(\mu * \nu) = (\mathcal{F}_{M(G)}\mu)(\mathcal{F}_{M(G)}\nu).$$

Für das Maß $\tilde{\mu}: \mathcal{B}(G) \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\tilde{\mu}(A) := \overline{\mu(\{x : -x \in A\})}$ ($A \in \mathcal{B}(G)$) gilt

$$(\mathcal{F}_{M(G)}\tilde{\mu})(\xi) = \overline{(\mathcal{F}_{M(G)}\mu)(\xi)} \quad (\xi \in \Gamma).$$

Somit ist die Abbildung $\mathcal{F}_{M(G)}: M(G) \rightarrow C(\Gamma)$ ein stetiger Homomorphismus von Banachalgebren.

Beweis. a) Es gilt $|\hat{\mu}(\xi)| \leq \|\mu\|_{M(G)}$ nach dem Satz von Riesz, damit ist $\hat{\mu}$ beschränkt. Da μ regulär ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \subset\subset G$ mit $|\mu|(G \setminus K) < \varepsilon$. Für $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma$ gilt

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(\xi_1) - \hat{\mu}(\xi_2)| &\leq \int_G |1 - e^{-ix \cdot (\xi_1 - \xi_2)}| d|\mu|(x) \\ &\leq \sup_{x \in K} |1 - e^{-ix \cdot (\xi_1 - \xi_2)}| |\mu|(G) + 2|\mu|(G \setminus K) \\ &\leq \varepsilon \|\mu\|_{M(G)} + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

falls $|\xi_1 - \xi_2|$ hinreichend klein ist. (Man beachte, dass $\xi \mapsto ix \cdot \xi$ auf K gleichmäßig stetig ist.) Damit ist $\hat{\mu}$ gleichmäßig stetig.

b) folgt wie im Fall von Funktionen mit dem Satz von Fubini: Es gilt

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)^\wedge(\xi) &= \int_G e^{-ix \cdot \xi} d(\mu * \nu)(\xi) \\ &= \int_G \int_G e^{-i(x+y) \cdot \xi} d\mu(x) d\nu(y) = \hat{\mu}(\xi) \hat{\nu}(\xi) \quad (\xi \in \Gamma). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$(\tilde{\mu})^\wedge(\xi) = \int_G e^{-ix \cdot \xi} d\tilde{\mu}(x) = \overline{\int_G e^{ix \cdot \xi} d\mu(-x)} = \overline{\int_G e^{-ix \cdot \xi} d\mu(x)} = \overline{\hat{\mu}(\xi)}.$$

□

4.11 Bemerkung. Falls $f \in L^1(G)$, so wird durch

$$\mu_f(A) := \int_A f(x) dx \quad (A \in \mathcal{B}(G))$$

ein Maß $\mu_f \in M(G)$ definiert, welches absolutstetig zum Haarmaß dx ist. In diesem Fall gilt $\mathcal{F}_{M(G)}\mu_f = \mathcal{F}_G f$ sowie $\mu_f * \mu_g = \mu_{f * g}$ für alle $f, g \in L^1(G)$. Damit wird $L^1(G)$ zu einer Unter algebra der Banachalgebra $M(G)$. Man kann zeigen, dass $L^1(G)$ sogar ein Ideal von $M(G)$ ist, im Allgemeinen aber nicht abgeschlossen.

b) Positiv definite Funktionen

4.12 Definition. Eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt positiv definit, falls für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und $x_1, \dots, x_N \in G$ gilt:

$$\sum_{k,\ell=1}^N c_k \bar{c}_\ell f(x_k - x_\ell) \geq 0. \quad (4-2)$$

4.13 Lemma. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ positiv definit.

a) Es gilt

$$(i) \quad f(-x) = \overline{f(x)} \quad (x \in G),$$

$$(ii) \quad |f(x)| \leq f(0) \quad (x \in G),$$

$$(iii) \quad |f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(0) \operatorname{Re}(f(0) - f(x - y)) \quad (x, y \in G).$$

b) Falls f stetig an der Stelle 0 ist, so ist f gleichmäßig stetig in G .

c) Für alle $\varphi \in L^1(G)$ gilt

$$\int_G \int_G \varphi(x) \overline{\varphi(y)} f(x - y) dx dy \geq 0. \quad (4-3)$$

Beweis. Setzt man in (4-2) $N = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $c_1 = 1$, $c_2 = c \in \mathbb{C}$, so erhält man

$$(1 + |c|^2)f(0) + cf(x) + \bar{c}f(-x) \geq 0. \quad (4-4)$$

Mit $c := 1$ folgt nun $f(x) + f(-x) \in \mathbb{R}$, für $c := i$ erhält man $i(f(x) - f(-x)) \in \mathbb{R}$ und damit $f(-x) = \overline{f(x)}$. Wählt man in (4-4) c so, dass $cf(x) = -|f(x)|$ gilt, folgt $f(0) \geq 0$.

Wähle nun $N = 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (0, x, y)$ sowie $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{\lambda|f(x) - f(y)|}{f(x) - f(y)}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $c_3 := -c_2$. Dann erhält man aus (4-2)

$$f(0)(1 + 2\lambda^2) + 2\lambda|f(x) - f(y)| - 2\lambda^2 \operatorname{Re} f(x - y) \geq 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Also hat das quadratische Polynom in λ

$$2(f(0) - \operatorname{Re} f(x - y))\lambda^2 + 2|f(x) - f(y)|\lambda + f(0)$$

keine zwei verschiedenen reellen Nullstellen, d.h. die Diskriminante

$$4|f(x) - f(y)|^2 - 8f(0)(f(0) - \operatorname{Re} f(x - y))$$

ist nicht positiv, und es folgt $|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(0) \operatorname{Re}(f(0) - f(x - y))$.

b) folgt sofort aus a) (iii).

c) Jedes $\varphi \in C_c(G)$ lässt sich als gleichmäßiger Grenzwert von Stufenfunktionen schreiben, d.h. es existieren Stufenfunktionen $\varphi_k: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\|\varphi_k - \varphi\|_\infty \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Sei $\varphi_k = \sum_{\ell=1}^N c_\ell \chi_{A_\ell}$. Dann gilt

$$\int_G \int_G \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)} f(x - y) dx dy = \sum_{j,\ell=1}^N c_j \overline{c_\ell} f(x_j - x_\ell) \lambda_G(A_j) \lambda_G(A_\ell) \geq 0.$$

Für $k \rightarrow \infty$ erhalten wir die Aussage für alle $\varphi \in C_c(G)$. Da $C_c(G)$ dicht in $L^1(G)$ liegt, folgt die Aussage für alle $\varphi \in L^1(G)$. \square

4.14 Lemma. Sei $g \in L^2(G)$, und sei $\tilde{g} \in L^2(G)$ definiert durch $\tilde{g}(x) := \overline{g(-x)}$ ($x \in G$). Dann ist $f := g * \tilde{g} \in L^1(G)$ stetig und positiv definit.

Beweis. Es gilt

$$(g * \tilde{g})(x) = \int_G g(x - y) \tilde{g}(y) dy = \int g(x - y) \overline{g(-y)} dy.$$

Wegen $\|g * \tilde{g}\|_{L^1(G)} \leq \|g\|_{L^2(G)} \|\tilde{g}\|_{L^2(G)}$ (Höldersche Ungleichung) und

$$\begin{aligned} |(g * \tilde{g})(x_1) - (g * \tilde{g})(x_2)| &= \left| \int_G (g(x_1 - y) - g(x_2 - y)) \overline{g(-y)} dy \right| \\ &\leq \|g(x_1 - \cdot) - g(x_2 - \cdot)\|_{L^1(G)} \|\tilde{g}\|_{L^1(G)} \end{aligned}$$

ist $g * \tilde{g} \in L^1(G) \cap C(G)$.

Für $N \in \mathbb{N}$ und $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$, $x_1, \dots, x_N \in G$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j,\ell=1}^N c_j \overline{c_\ell} f(x_j - x_\ell) &= \sum_{j,\ell=1}^N c_j \overline{c_\ell} \int_G g(x_j - x_\ell - y) \overline{g(-y)} dy \\ &= \sum_{j,\ell=1}^N c_j \overline{c_\ell} \int_G g(x_j - y) \overline{g(x_\ell - y)} dy = \int_G \left| \sum_{j=1}^N c_j g(x_j - y) \right|^2 dy \geq 0. \end{aligned}$$

\square

4.15 Lemma. Sei $\mu \in M_+(\Gamma)$, und sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x) := (\mathcal{F}_\Gamma \mu)(-x) = \int_\Gamma e^{ix \cdot \xi} d\mu(\xi) \quad (x \in G).$$

Dann ist f stetig und positiv definit.

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus Lemma 4.10 (mit Γ anstelle von G). Für $N \in \mathbb{N}$ und $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und $\xi_1, \dots, \xi_N \in \Gamma$ gilt

$$\sum_{j,\ell=1}^N c_j \bar{c}_\ell f(x_j - x_\ell) = \int_{\Gamma} \sum_{j,\ell=1}^N c_j \bar{c}_\ell e^{i(x_j - x_\ell) \cdot \xi} d\mu(\xi) = \int_{\Gamma} \left| \sum_{j=1}^N c_j e^{ix_j \cdot \xi} \right|^2 d\mu(\xi) \geq 0. \quad \square$$

Die Fourier-Stieltjes-Transformierte von positiven Maßen ist also positiv definit. Der berühmte Satz von Bochner besagt, dass auch die Umkehrung gilt. Als Vorbereitung beweisen wir eine (auch für sich interessante) Aussage über mehrfache Faltung einer Funktion.

4.16 Satz. Sei $f \in L^1(G)$, und sei $f^{*k} := f * \dots * f$ (k -mal). Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k} = \inf_{k \in \mathbb{N}} \|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k} = \|\hat{f}\|_{\infty}.$$

Beweis. Ein wesentlicher Teil des Beweises beruht auf Gelfand-Theorie und kann hier nur zitiert werden. Wir zeigen jedoch einige Teilaussagen.

(i) Wir zeigen folgende Aussage: Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $0 \leq a_{k+\ell} \leq a_k a_\ell$ für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(a_k)^{1/k} \rightarrow a := \inf_k (a_k)^{1/k}$ ($k \rightarrow \infty$).

Um dies zu zeigen, sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $(a_N)^{1/N} < a + \varepsilon$ und setze $b(\varepsilon) := \max\{a_1, \dots, a_N\}$. Schreibe nun $k \in \mathbb{N}$ in der Form $k = kN + r$ mit $0 \leq r < N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (a_k)^{1/k} &= (a_{kN+r})^{1/k} \leq (a_N^k a_r)^{1/k} \\ &\leq (a + \varepsilon)^{kN/k} b^{1/k} = (a + \varepsilon)(a + \varepsilon)^{-r/k} b^{1/k} \\ &= (a + \varepsilon) \left(\frac{b}{(a + \varepsilon)^r} \right)^{1/k} \\ &< a + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

falls k hinreichend groß ist. Dies zeigt die obige Aussage. Angewendet auf $a_k := \|f^{*k}\|_{L^1(G)}$, erhalten wir $\inf_{k \in \mathbb{N}} \|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k}$.

(ii) Wegen $(f^{*k})^\wedge = (\hat{f})^k$ folgt

$$\|\hat{f}\|_{\infty}^k = \|(\hat{f})^k\|_{\infty} = \|(f^{*k})^\wedge\|_{\infty} \leq \|f^{*k}\|_{L^1(G)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und damit folgt $\inf_{k \in \mathbb{N}} \|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k} \geq \|\hat{f}\|_{\infty}$.

(iii) Die andere Ungleichung

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k} \leq \|\hat{f}\|_{\infty}$$

kann mit Hilfe der Gelfand-Theorie bewiesen werden. Dazu verwendet man, dass das Spektrum von f in der C^* -Algebra $L^1(G)$ mit dem Spektrum von \hat{f} in der C^* -Algebra $C(\Gamma)$ übereinstimmt. Ein Beweis findet sich z.B. in [7], Chapter 11. \square

4.17 Satz (Satz von Bochner). *Sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist f genau dann positiv definit, falls ein positives Maß $\mu \in M_+(\Gamma)$ existiert mit*

$$f(x) = \int_{\Gamma} e^{ix \cdot \xi} d\mu(\xi). \quad (4-5)$$

Beweis. Falls $\mu \in M_+(\Gamma)$ und f durch (4-5) definiert sind, so ist f stetig und positiv definit nach Lemma 4.15. Es ist also nur die Rückrichtung zu zeigen.

Sei also $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und positiv definit. Nach Lemma 4.13 a) gilt $f(0) > 0$ (falls f nicht identisch Null ist), also sei o.E. $f(0) = 1$. Wir definieren die Abbildung $T_f: L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$T_f(\varphi) := \int_G f(x)\varphi(x)dx \quad (\varphi \in L^1(G)), \quad (4-6)$$

sowie $[\varphi, \psi] := T_f(\varphi * \tilde{\psi})$ ($\varphi, \psi \in L^1(G)$), wobei wieder $\tilde{\psi} := \overline{\psi(-\cdot)}$. Dann ist $[\cdot, \cdot]: L^1(G) \times L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ sesquilinear, und es gilt

$$[\varphi, \varphi] = T_f(\varphi * \tilde{\varphi}) = \int_G \int_G \varphi(x)\overline{\varphi(y)}f(x-y)dxdy \geq 0 \quad (\varphi \in L^1(G))$$

nach Lemma 4.13 c). Somit ist $[\cdot, \cdot]$ bis auf die Definitheit ein Skalarprodukt, und es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|[\varphi, \psi]|^2 \leq [\varphi, \varphi][\psi, \psi] \quad (\varphi, \psi \in L^1(G)). \quad (4-7)$$

Sei $V := \{x \in G : |x| < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\psi := \frac{1}{\lambda_G(V)} \chi_V$ und erhalten

$$\begin{aligned} [\varphi, \psi] - T_f(\varphi) &= \int_G \varphi(x) \frac{1}{\lambda_G(V)} \int_V [f(x-y) - f(x)] dy dx, \\ [\psi, \psi] - 1 &= \frac{1}{(\lambda_G(V))^2} \int_V \int_V [f(x-y) - 1] dx dy. \end{aligned}$$

Da f gleichmäßig stetig ist (Lemma 4.13)), konvergieren beide Differenzen gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0$. In (4-7) eingesetzt, erhält man

$$|T_f(\varphi)|^2 \leq [\varphi, \varphi] = T_f(\varphi * \tilde{\varphi}) \quad (\varphi \in L^1(G)). \quad (4-8)$$

Wir setzen $h_\varphi := \varphi * \tilde{\varphi}$. Dann gilt $h_\varphi \in L^1(G)$, und wegen

$$(\varphi * \tilde{\varphi})(x) = \int_G \varphi(y)\overline{\varphi(y-x)}dy$$

ist $\tilde{h}_\varphi = h_\varphi$. Wir wenden (4-8) iterativ an auf $h, h * h, h^{*4}, h^{*8}$ etc. anstelle von φ und erhalten

$$|T_f(\varphi)|^2 \leq T_f(h_\varphi) \leq (T_f[\varphi * h_\varphi])^{1/2} \leq \dots \leq (T_f[h^{*2^n}])^{2^{-n}} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (4-9)$$

Da f positiv definit ist, gilt $\|f\|_\infty = f(0) = 1$ und somit $\|T_f\|_{(L^1(G))'} \leq 1$. Mit (4-9) ergibt sich

$$|T_f(\varphi)|^2 \leq \|(\varphi * \tilde{\varphi})^{*2^n}\|_{L^1(G)}^{2^{-n}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt mit Lemma 4.16

$$|T_f(\varphi)|^2 \leq \|\mathcal{F}_G(\varphi * \tilde{\varphi})\|_\infty = \sup_{\xi \in \Gamma} |\hat{\varphi}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)}| = \sup_{\xi \in \Gamma} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \quad (\varphi \in L^1(G)).$$

Damit folgt insbesondere $T_f(\varphi_1) = T_f(\varphi_2)$, falls $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$, d.h. die Abbildung $\Phi_f: A(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$, $\hat{\varphi} \mapsto T_f(\varphi)$ ist wohldefiniert und stetig mit Norm nicht größer als 1. Hier ist $A(\Gamma) := \{\hat{f} : f \in L^1(G)\} \subset C_0(\Gamma)$.

Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung von Φ_f auf den Banachraum $C_0(\Gamma)$ mit gleicher Norm. Nach dem Satz von Riesz (Satz 4.7) existiert genau ein Maß $\mu \in M(\Gamma)$ mit

$$T_f(\varphi) = \int_\Gamma \hat{\varphi}(-\xi) d\mu(\xi) = \int_G \varphi(x) \left[\int_\Gamma e^{ix \cdot \xi} d\mu(\xi) \right] dx \quad (\varphi \in L^1(G)).$$

Der Vergleich mit (4-6) zeigt, dass

$$f(x) = \int_\Gamma e^{ix \cdot \xi} d\mu(\xi)$$

für fast alle $x \in G$ gilt. Da beide Seiten stetige Funktionen sind, gilt dies sogar für alle $x \in G$. Für $x = 0$ erhält man

$$1 = f(0) = \int_\Gamma 1 d\mu(\xi) = \mu(\Gamma) \leq \|\mu\|_{M(\Gamma)} \leq 1,$$

d.h. $\mu(\Gamma) = \|\mu\|_{M(\Gamma)}$ und damit $\mu \in M_+(\Gamma)$. □

4.18 Bemerkung. a) Wir schreiben die Aussage von Satz 4.17 noch einmal explizit für die beiden wichtigsten Fälle auf:

- (i) Sei $G = \mathbb{Z}^n$. Eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ ist nach Definition genau dann positiv definit, falls für alle $N \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^N c_i \overline{c_j} a_{k_i - k_j} \geq 0.$$

Nach Satz 4.7 ist dies äquivalent zu

$$a_k = \int_{\mathbb{T}^n} e^{ik \cdot \xi} d\mu(\xi) \quad (k \in \mathbb{Z}^n)$$

für ein Maß $\mu \in M_+(\mathbb{T}^n)$. Dieser Fall von Satz 4.17 heißt auch Satz von Herglotz.

- (ii) Sei $G = \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann positiv definit, falls für alle $N \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^N c_i \bar{c}_j f(x_i - x_j) \geq 0.$$

Nach Satz 4.17 ist dies äquivalent zu

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} d\mu(\xi) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

für ein Maß $\mu \in M_+(\mathbb{R}^n)$.

b) Eine wichtige Anwendung des Satzes von Herglotz findet sich in der Zeitreihenanalyse: Sei $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Folge von L^2 -Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_k = 0$. Falls die Kovarianz $\text{cov}(X_k, X_\ell)$ nur von der Differenz $k - \ell$ abhängt, so heißt X stationär im weiteren Sinne. In diesem Fall ist die Autokorrelationsfunktion $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $g(k) := \text{cov}(X_{\ell+k}, X_\ell)$ ($k \in \mathbb{Z}$). Wegen $g(k - \ell) = \langle X_k, X_\ell \rangle_{L^2}$ ist g positiv definit. Nach dem Satz von Herglotz gilt

$$g(k) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\mu(x) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

mit einem Maß $\mu \in M_+(\mathbb{T})$, dem sogenannten Spektralmaß der Zeitreihe.

c) Positiv definite Funktionen treten in der Stochastik auch in folgender Form auf: Sei $X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ eine Zufallsvariable und sei $\mu_X := P \circ X^{-1}$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X . Dann heißt $\chi_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$\chi_X(\xi) := \mathbb{E}(e^{i\xi X}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} d\mu_X(x) \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

die charakteristische Funktion von X . Der Satz von Bochner besagt, dass die charakteristischen Funktionen genau die positiv definiten stetigen Funktionen χ auf \mathbb{R} mit $\chi(0) = 1$ sind.

Literatur

- [1] H. Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 1992.
- [2] R. N. Bracewell. *The Fourier transform and its applications*. McGraw-Hill Series in Electrical Engineering. Circuits and Systems. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1986.
- [3] P. L. Butzer and R. J. Nessel. *Fourier analysis and approximation*. Academic Press, New York-London, 1971. Volume 1: One-dimensional theory, Pure and Applied Mathematics, Vol. 40.
- [4] K. Chandrasekharan. *Classical Fourier transforms*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [5] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2008.
- [6] W. Rudin. *Fourier analysis on groups*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 12. Interscience Publishers (a division of John Wiley and Sons), New York-London, 1962.
- [7] W. Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991.
- [8] M. Ruzhansky and V. Turunen. *Pseudo-differential operators and symmetries*, volume 2 of *Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010. Background analysis and advanced topics.
- [9] G. van Dijk. *Distribution theory*. De Gruyter Graduate Lectures. De Gruyter, Berlin, 2013. Convolution, Fourier transform, and Laplace transform.