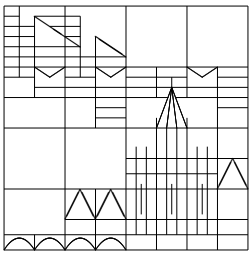
Skript zur Vorlesung

Mathematik für Physiker III

Wintersemester 2013/14

Robert Denk



Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 4. 2. 2014

Inhaltsverzeichnis

Abschnitt 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen 5

1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz 5

2 Spezielle Lösungsmethoden 17

a) Gleichungen mit getrennten Variablen 17

b) Homogene Differentialgleichungen und Substitution 19

c) Potenzreihenansatz 21

d) Exakte Differentialgleichungen 23

3 Lineare Differentialgleichungen 27

a) Homogene lineare Dgl. 27

b) Inhomogene Gleichungen 29

c) Systeme mit konstanten Koeffizienten 31

d) Lineare Dgl. höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten 35

4 Zur Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen 41

a) Grundbegriffe und explizite Einschrittverfahren 41

b) Mehrschrittverfahren 46

c) Steife Differentialgleichungen 50

5 Stabilität 52

6 Rand- und Eigenwertprobleme 61

a) Randwertaufgaben für lineare Dgl.-Systeme 62

b) Selbstadjungierte Eigenwertprobleme 65

Abschnitt 2: Funktionentheorie 72

7 Holomorphe Funktionen 72

a) Definition und erste Eigenschaften 72

b) Integration 79

8 Der Cauchysche Integralsatz und die Sätze von Morera und Liouville . 87

9 Isolierte Singularitäten und Laurentreihen 92

10 Der Residuensatz 98

11 Fourier- und Laplace-Transformation 102
Anhang 108
A Tensoren 108
Literatur 111

© Robert Denk 4. 2. 2014

Abschnitt 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Existenz- und Eindeutigkeitssatz

1.1 Worum geht's? In der Modellierung treten häufig Gleichungen der Form $y' = \alpha y$ oder (bis auf Konstanten) $y'' + y = 0$ auf. Die erste Gleichung beschreibt z.B. radioaktiven Zerfall (dann ist $\alpha < 0$) oder die Geldmenge bei kontinuierlicher fester Verzinsung α (in diesem Fall ist $\alpha > 0$ und wird meist mit r bezeichnet). Die zweite Gleichung beschreibt etwa die Bewegung eines ungedämpften Pendels.

Was sollen diese Gleichungen bedeuten? Genauer müsste man schreiben:

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{1-1}$$

Man sucht hierbei eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Gleichung (1-1) an jeder Stelle erfüllt. Derartige Gleichungen nennt man eine (gewöhnliche) Differentialgleichung (Dgl.). Natürlich gibt es hiervon mehrere Varianten:

- Die Funktion y ist nur auf einem Teilintervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert.
- Die Funktion y hat Werte in $\mathbb{R}^n$. In diesem Fall stehen links und rechts von (1-1) Vektoren der Länge n.
- Die Funktion y hat einen komplexen Wertebereich, d.h. $y\colon I \to \mathbb{C}^n$. Diesen Fall werden wir im folgenden nur selten explizit aufschreiben, aber immer im Hinterkopf behalten.

Damit eine Funktion eine Lösung von (1-1) sein kann, muss man zumindest fordern, dass $y : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist. Häufig will man sogar $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

Im Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen stellen sich in natürlicher Weise folgende Fragen (und noch viel mehr):

- Gibt es eine Lösung der Differentialgleichung, d.h. eine Funktion y, welche (1-1) erfüllt?
- Kann man die Lösung explizit angeben?
- Existiert die Lösung vielleicht nur für einen Teilbereich des Intervalls I (also lokal), oder gibt es eine globale Lösung?
- Wieviele Lösungen gibt es?

- Kann man noch mehr über die Lösung sagen, ohne sie gleich auszurechnen? Ist die Lösung z.B. sogar zweimal differenzierbar oder beschränkt? Kann man die Lösung abschätzen?
- Wie hängt die Lösung von den Daten ab? Ersetzt man z.B. in (1-1) den Parameter α durch ein $\widetilde{\alpha}$ mit $|\alpha - \widetilde{\alpha}|$ klein, was weiß man dann über die neue Lösung?

In unseren Beispielen kann man mehr sagen:

a) Eine Lösung von (1-1) ist die Funktion $y(t) = e^{\alpha t}$. Eine weitere Lösung ist z.B. $y(t) = 2e^{\alpha t}$. Falls man aber noch eine *Anfangsbedingung*

$$y(0) = 1$$

an die Lösung stellt, so ist $y(t) = e^{\alpha t}$ die einzige Lösung. Man spricht hier von einem *Anfangswertproblem* (AWP).

b) Die Dgl. $y'' + y = 0$ hat z.B. die Lösungen $y(t) = \sin t$ und $y(t) = \cos t$. Jede Lösung dieser Dgl. hat die Form

$$y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

mit reellen Konstanten c_1, c_2. Die Menge der Lösungen ist also ein zweidimensionaler Untervektorraum von $C(I; \mathbb{R})$. Durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

wird die Lösung eindeutig festgelegt, nämlich $y(t) = \cos t$.

c) Das AWP

$$y''(t) + \cos t \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

hat eine eindeutige Lösung, die man aber nicht explizit hinschreiben kann. Man kann diese Gleichung recht einfach numerisch lösen; es handelt sich übrigens um die sogenannte Hillsche Differentialgleichung. Dass man die Lösung nicht einfach analytisch ausrechnen und elementar hinschreiben kann, ist bei Dgl. der Normalfall! Man sollte sich also nicht durch die Lösungsmethoden täuschen lassen, die im folgenden in der Vorlesung noch kommen.

d) Das AWP

$$y' = \sqrt{|y|},\ y(0) = 0$$

im Intervall $[0, \infty)$ hat unendlich viele linear unabhängige Lösungen.

In diesem ersten Abschnitt geht es darum zu sehen, unter welchen Bedingungen eine Dgl. eine Lösung besitzt und wann diese eindeutig ist.

© Robert Denk 4. 2. 2014

1.2 Definition. a) Eine (gewöhnliche) Differentialgleichung (Dgl.) ist eine Gleichung der Form

$$f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0 \quad (t \in I). \tag{1-2}$$

Dabei ist $y\colon I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto y(t)$ eine unbekannte Funktion, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $D \subset I \times \mathbb{R}^{(k+1)n}$. Häufig schreibt man (1-2) in der verkürzten Form

$$f(t, y, \dots, y^{(k)}) = 0.$$

Falls f von der höchsten Ableitung $y^{(k)}$ wirklich abhängt, ist (1-2) eine Dgl. k-ter Ordnung.

Falls $m > 1$, spricht man auch von einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Falls sich die Funktion f in der Form $f(t, y, \dots, y^{(k)}) = y^{(k)} - \widetilde{f}(t, y, \dots, y^{(k-1)})$ schreiben lässt (d.h. man kann die Gleichung nach der höchsten Ableitung auflösen), so spricht man von einer expliziten Dgl. k-ter Ordnung.

Falls f nicht explizit von t abhängt, d.h. es gilt $f(t, y, \dots, y^{(k)}) = \widetilde{f}(y, \dots, y^{(k)})$, so spricht man von einer autonomen Dgl.

Falls f linear in $y, \dots, y^{(k)}$ ist, so heißt (1-2) eine lineare Dgl.

b) Ein Anfangswertproblem (AWP) ist eine Dgl. (1-2), welche zusätzlich mit Anfangsbedingungen der Form $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1}$ versehen ist. Dabei ist $t_0 \in I$ und $y_0, \dots, y_{k-1} \in \mathbb{R}^n$.

c) Eine Lösung der Dgl. (1-2) ist eine Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}^n$, für welche gilt:

- y ist k-mal differenzierbar in I,
- $\forall\, t \in I : (t, y(t), \dots, y^{(k)}(t)) \in D$,
- $\forall\, t \in I : f(t, y(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0$.

1.3 Beispiele. $y'' + y = 0$: linear, autonom, explizit, 2. Ordnung.

$y'' + \cos(t) \cdot y = 0$: linear, nicht autonom, explizit, 2. Ordnung.

$y'' + \sin(y) = 0$: nichtlinear, autonom, explizit, 2. Ordnung.

$(y')^2 + y^2 = 1$ in $[-1, 1]$: nichtlinear, autonom, nicht explizit (implizit), 1. Ordnung.

Bei impliziten Gleichungen beachte man den Satz über implizite Funktionen, der eventuell doch eine (lokale) Auflösbarkeit ergeben kann. Wir werden im folgenden fast ausschließlich explizite Dgl. betrachten.

© Robert Denk 4. 2. 2014

1.4 Bemerkung (Rückführung auf Dgl. 1. Ordnung)**.** Die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators

$$y'' = -cy$$

kann als System erster Ordnung umgeschrieben werden, indem man den Vektor $\binom{y_0}{y_1} := \binom{y}{y'}$ definiert. Es gilt dann

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= -cy_0, \end{aligned}$$

oder als Matrix

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Hier ist $y_0(t) = y(t)$ der Ort und $y_1(t) = y'(t)$ die Geschwindigkeit des schwingenden Massenpunktes zur Zeit t. Durch Vorgabe von Startwerten für Ort und Geschwindigkeit zur Zeit $t = t_0$ wird die Lösung für alle Zeiten eindeutig festgelegt.

Dieses Prinzip der Rückführung auf ein System erster Ordnung funktioniert auch allgemein. Betrachte die (explizite) Dgl. k-ter Ordnung

$$y^{(k)} = F(t, y, \dots, y^{(k-1)}), \quad y\colon I \to \mathbb{R}^n. \tag{1-3}$$

Setze für $t \in I$

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= y(t), \\ x_2(t) &:= y'(t), \\ &\vdots \\ x_k(t) &:= y^{(k-1)}(t). \end{aligned}$$

Dann ist y genau dann eine Lösung von (1-3), falls die Funktion $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^{k \cdot n}$ eine Lösung ist von

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ F(t, x_1(t), \dots, x_k(t)) \end{pmatrix} =: f(t, x(t)).$$

Damit kann man sich bei theoretischen Aussagen etwa über die Lösbarkeit stets auf Systeme erster Ordnung beschränken.

© Robert Denk 4. 2. 2014

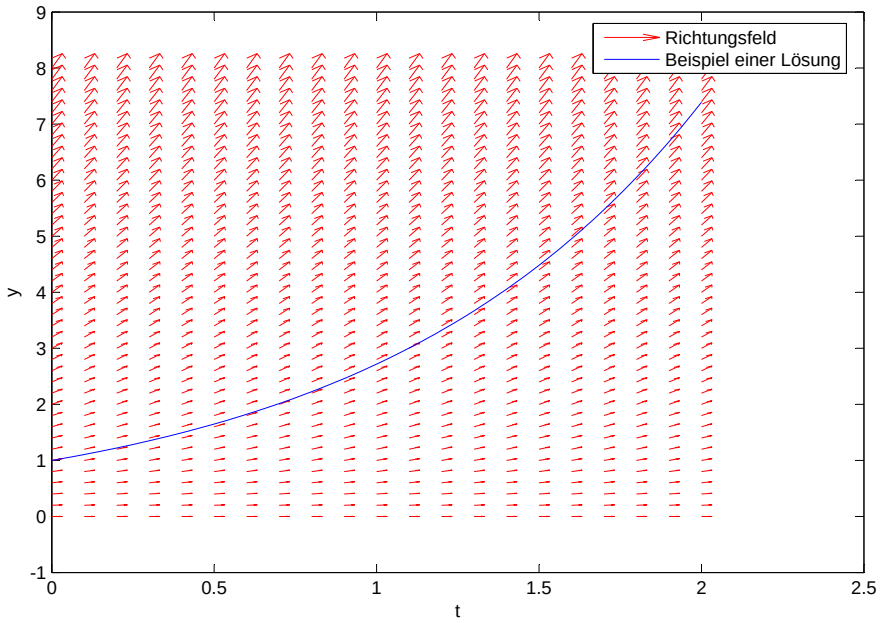


Abbildung 1: Das Richtungsfeld der Dgl. $y'(t) = y(t)$

1.5 Bemerkung (Richtungsfelder)**.** Betrachte das skalare AWP $y'(t) = f(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0$. Zu $t_1 \in I$ gibt dann $f(t_1, y(t_1))$ die Steigung von y an der Stelle t_1 an. Auch ohne die Lösung y zu kennen, kann man daher das Richtungsfeld zeichnen. Die Abbildungen 1–3 zeigen die Richtungsfelder verschiedener Dgl.

1.6 Beispiel. Ein Körper falle aus großer Höhe alleine unter dem Einfluss der Gravitation. Mit $y(t)$ bezeichnen wir den Abstand des Körpers zum Erdmittelpunkt zum Zeitpunkt t. Nach dem Gravitationsgesetz gilt für die Beschleunigung y'' die Gleichung

$$y''(t) = -c\,\frac{1}{y^2(t)}$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Multipliziere mit $2y'$:

$$2y'y'' = 2c\,\frac{-y'}{y^2},$$

also

$$\frac{d}{dt}(y')^2 = \frac{d}{dt}\Big(\frac{2c}{y}\Big)$$

und damit

$$(y')^2 = \frac{2c}{y} + \alpha,$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

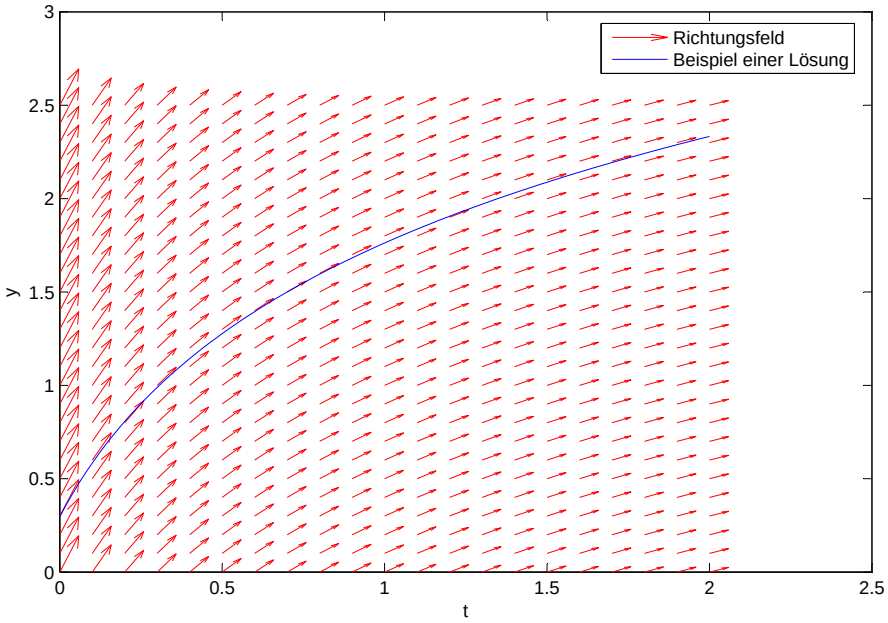


Abbildung 2: Das Richtungsfeld der Dgl. $y'(t) = (0.3 + t)^{-1}$

d.h.

$$y' = \sqrt{\frac{2c}{y} + \alpha}$$

mit einer Integrationskonstante α. Falls der Körper zur Zeit t_0 in der Höhe R und in Ruhe ist, gilt $y(t_0) = R$ und $y'(t_0) = 0$, d.h. $\alpha = -\frac{2c}{R}$. Damit erhalten wir für y die Dgl. erster Ordnung

$$y' = -\sqrt{2c}\,\sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{R}}\,. \tag{1-4}$$

Eine Lösung dieser Dgl. ist physikalisch sinnvoll und beschreibt die Bewegung des Körpers. Man sieht aber auch sofort, dass (1-4) die konstante Lösung $y(t) = R$ $(t \geq t_0)$ besitzt. Hier schwebt der Körper unbeweglich in Höhe R. Aber auch Kombinationen sind Lösungen, etwa wenn der Körper zunächst eine halbe Stunde schwebt und dann zur Erde fällt.

Wir sehen hier, dass Differentialgleichungen nicht immer eine eindeutige Lösung besitzen, und dass die Lösung einer Dgl. nicht immer physikalisch sinnvoll sein muss. Tatsächlich gibt es hier unendlich viele linear unabhängige Lösungen!

Es stellt sich also die Frage, wann eine gewöhnliche Dgl. mit entsprechenden Anfangsbedingungen eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Frage wird im wesentlichen beantwortet durch folgenden Satz. Dieser ist schon einer der Hauptsätze für die Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung. Wir betrachten nur explizite Dgl., und nach Bemerkung 1.4 können wir o.E. von einem System 1. Ordnung ausgehen. Der

© Robert Denk 4. 2. 2014

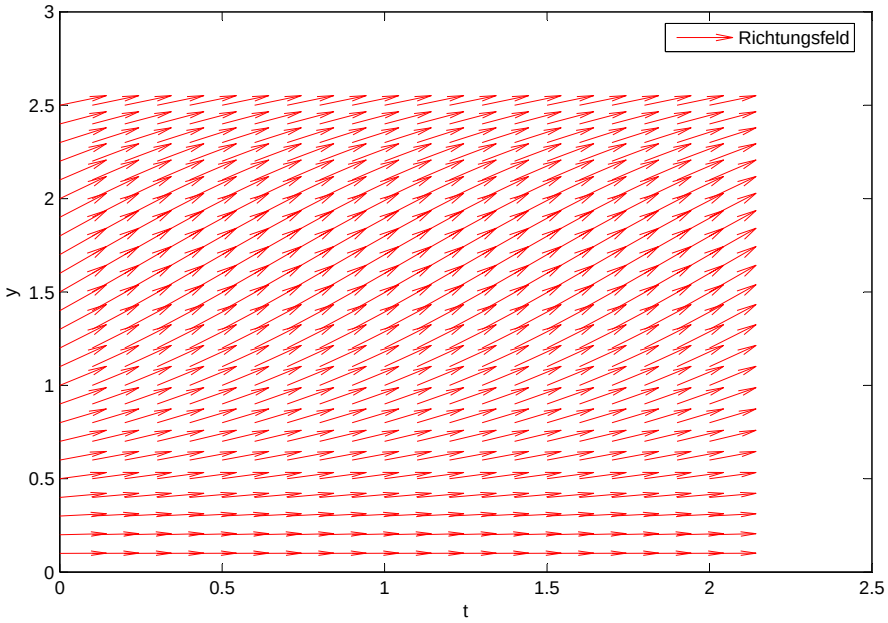


Abbildung 3: Das Richtungsfeld der Dgl. $y'(t) = \sin^2(y(t))$

Beweis enthält zwei wichtige Elemente: Die Transformation in eine Integralgleichung und den Banachschen Fixpunktsatz.

Weil der Banachsche Fixpunktsatz in der Analysis so zentral ist, wird er hier nochmal wiederholt. Zunächst eine Definition:

1.7 Definition. Sei M eine Teilmenge eines normierten Raums. Eine Abbildung $\Phi : M \to M$ heißt *kontrahierend*, falls es ein $c \in [0, 1)$ gibt mit

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq c \cdot \|x - y\| \quad (x, y \in M).$$

1.8 Satz (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Seien M eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums und $\Phi : M \to M$ kontrahierend. Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt $z \in M$, d.h. $\Phi(z) = z$.*

Definiert man zu $x_0 \in M$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset M$ durch $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, dann gilt $x_n \to z$, $n \to \infty$, und $\|x_n - z\| \leq \frac{c^n}{1-c}\|x_1 - x_0\|$ (a priori-Abschätzung).

1.9 Satz (von Picard-Lindelöf, globale Version)**.** *Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei ferner $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer globalen Lipschitz-Bedingung genügt:*

$$\exists\, L \geq 0\ \forall\, t \in I\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n :\ |f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|. \qquad (1\text{-}5)$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Dann existiert genau eine Lösung $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ des AWPs

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0.$$

Beweis. (i) Transformation in eine Integralgleichung: Falls $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ eine Lösung ist, so folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds =: (Ty)(t). \tag{1-6}$$

Ist andererseits eine Funktion $y \in C(I;\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $Ty = y$, so folgt $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ und $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, d.h. y ist eine Lösung.

(ii) Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes: Wir betrachten den Operator $T\colon C(I;\mathbb{R}^n) \to C(I;\mathbb{R}^n)$, $(Ty)(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$. Dabei versehen wir $C(I;\mathbb{R}^n)$ mit einer neuen Norm:

$$\|g\|^{\sim} := \sup_{t\in I} |e^{-(L+1)t} g(t)| \quad (g \in C(I;\mathbb{R}^n)).$$

Wegen

$$e^{-(L+1)b} \le e^{-(L+1)t} \le e^{-(L+1)a} \quad (t \in [a, b])$$

ist diese Norm äquivalent zur Supremumsnorm, und $(C(I;\mathbb{R}^n), \|\cdot\|^{\sim})$ ist ein Banachraum. Wir rechnen nach, dass T eine Kontraktion in diesem Raum ist.

Zu $x, y \in C(I;\mathbb{R}^n)$ ist

$$\|Tx - Ty\|^{\sim} = \sup_{t\in I} e^{-(L+1)t} \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s))ds \Big|.$$

Für $t \ge t_0$ ist

$$\begin{aligned}
e^{-(L+1)t} \Big| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s))ds \Big| &\le e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^{t} L|x(s) - y(s)|ds \\
&= Le^{-(L+1)t} \int_{t_0}^{t} e^{(L+1)s} \underbrace{e^{-(L+1)s}|x(s) - y(s)|}_{\le \|x-y\|^{\sim}} ds \\
&\le L \cdot \|x - y\|^{\sim} \cdot e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^{t} e^{(L+1)s} ds \\
&= L \cdot \|x - y\|^{\sim} \cdot e^{-(L+1)t} \Big(\frac{e^{(L+1)s}}{L+1} \Big) \Big|_{s=t_0}^{t} \\
&= L \cdot \|x - y\|^{\sim} \cdot e^{-(L+1)t} \cdot \frac{e^{(L+1)t} - e^{(L+1)t_0}}{L+1} \\
&\le \frac{L}{L+1} \|x - y\|^{\sim}.
\end{aligned}$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Genauso sieht man dies für $t \le t_0$. Damit folgt

$$\|Tx - Ty\|^{\sim} \le \frac{L}{L+1} \|x - y\|^{\sim}.$$

Wegen $\frac{L}{L+1} < 1$ ist die Abbildung $T\colon C(I;\mathbb{R}^n) \to C(I;\mathbb{R}^n)$ eine Kontraktion. Damit existiert genau ein Element $y \in C(I;\mathbb{R}^n)$ mit $Ty = y$ (Gleichheit in $C(I;\mathbb{R}^n)$, also insbesondere an jeder Stelle t). Dieses y ist also die eindeutige Lösung des AWPs. □

1.10 Bemerkung. a) Wendet man den Satz von Picard-Lindelöf auf explizite Dgl. k-ter Ordnung

$$y^{(k)} = F(t, y, \dots, y^{(k-1)}), \quad y\colon I \to \mathbb{R}^n$$

an, so erhält man die eindeutige Lösbarkeit für diese Dgl. mit den Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = y^0,\ y'(t_0) = y^1, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y^{k-1}$$

mit $y^j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 0, \dots, k-1$.

b) Mit dem wörtlichen gleichen Beweis gilt der Satz von Picard-Lindelöf auch für komplexwertige Funktionen, indem man $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{C}^n$ ersetzt.

1.11 Beispiele. Die Lipschitz-Stetigkeit besagt anschaulich, dass die Steigung der Sektante zweier Punkte auf dem Graph der Funktion beschränkt bleibt. So ist z.B. die Funktion

$$f(t, y) = t^2 + y^2$$

lokal Lipschitz-stetig (bzgl. y!) auf jedem beschränkten Bereich wegen

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| \le 2 \max_{|y_1, y_2|} |y_1 - y_2|,$$

aber nicht global Lipschitz-stetig in $(t, y) \in \mathbb{R}^2$. Typische Beispiele von Funktionen, die nicht Lipschitz-stetig in beschränkten Bereichen sind, sind durch Wurzeln gegeben. So erfüllt etwa die Dgl.

$$y' = -\sqrt{2c}\,\sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{R}}$$

aus Beispiel 1.6 nicht die Bedingung des Satzes von Picard-Lindelöf (was auch klar ist, da keine eindeutige Lösung existiert). Auch die Dgl. $y' = \sqrt{|y|}$ aus Abschnitt 1.1 ist nicht global Lipschitz-stetig.

1.12 Bemerkung. Wie wir aus dem Banachschen Fixpunktsatz wissen, konvergiert die Iteration $x_n := Tx_{n-1}$ für jeden Startwert $x_0 \in C(I;\mathbb{R}^n)$ gegen den Fixpunkt y, also die Lösung der Differentialgleichung. Man hat also ein konstruktives Verfahren.

© Robert Denk 4. 2. 2014

Numerisch ist es allerdings weniger geeignet, dafür gibt es wesentlich bessere Verfahren. Wir wissen auch die a priori-Fehlerabschätzung $d(y, x_n) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$ mit der Konstanten $c := \frac{L}{L+1}$. Die Abbildung 4 zeigt das Ergebnis der Picard-Iteration für die Dgl. $y' = \sin^2 y$ mit Startwert 0. Man sieht, dass die Konvergenz recht langsam ist. In Abbildung 5 wird die Konvergenz der Lösung an der Stelle $t = 4$ dargestellt.

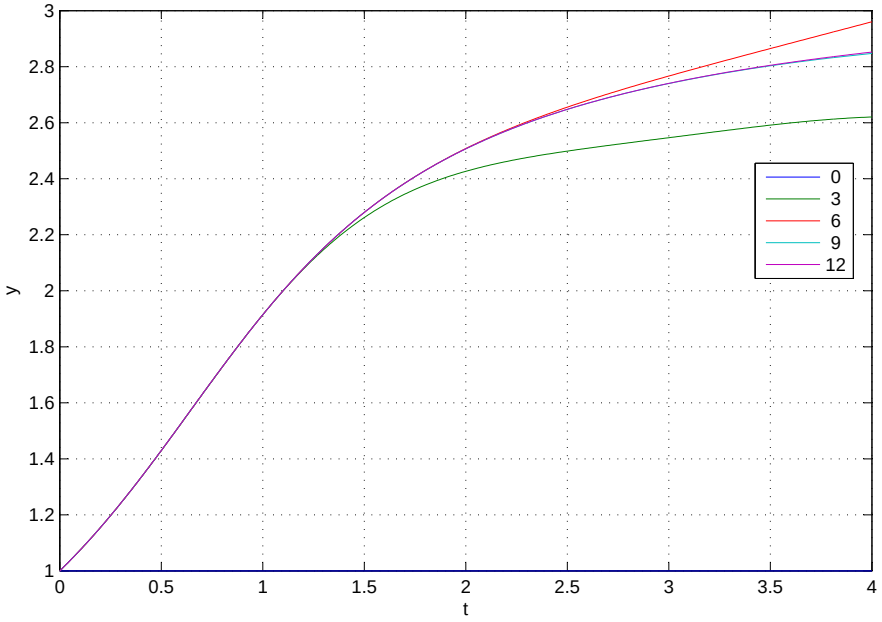


Abbildung 4: Die Picard-Iteration für die Dgl. $y' = \sin^2 y$

Die globale Lipschitz-Bedingung von Satz 1.9 ist zu stark, z.B. erfüllt die Funktion $f(t, x) := t^2 + x^2$ keine globale Lipschitz-Bedingung. Dazu brauchen wir eine lokale Variante.

1.13 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann erfüllt f eine lokale Lipschitz-Bedingung in D, falls gilt: Für alle $(t_0, x_0) \in D$ existiert eine Umgebung $U(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und eine (lokale) Lipschitz-Konstante $L(t_0, x_0) \geq 0$ mit

$$\forall\, (t, x_1), (t, x_2) \in U(t_0, x_0) \cap D : |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(t_0, x_0) \cdot |x_1 - x_2|.$$

1.14 Bemerkung. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f in D lokal Lipschitz-stetig. Denn in einer kompakten Umgebung eines Punktes $(t_0, x_0) \in D$ sind alle Ableitungen von f als stetige Funktionen beschränkt. Damit folgt die Lipschitz-Stetigkeit aus dem Mittelwertsatz. Falls $D = \mathbb{R}^n$ und f' in $\mathbb{R}^n$ beschränkt ist, so ist f sogar global Lipschitz-stetig.

© Robert Denk 4. 2. 2014

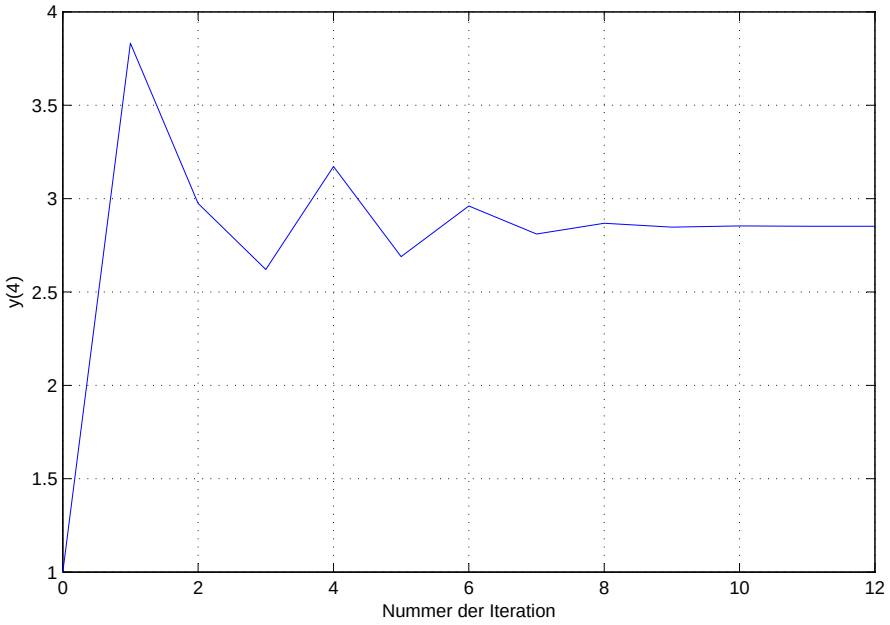


Abbildung 5: Der Wert $y(4)$ für obige Picard-Iteration

Die lokale Lipschitz-Stetigkeit ist bereits ausreichend, um die Eindeutigkeit und die lokale Existenz der Lösung zu zeigen.

1.15 Satz. *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Seien $y_1, y_2\colon I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Dgl. $y' = f(t,y)$ über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Falls $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ gilt, so folgt $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in I$.*

1.16 Satz (von Picard-Lindelöf, lokale Version)**.**
a) *Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die in D einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Dann existiert zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ ein $\delta > 0$ so, dass das AWP*

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung $y\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ besitzt.

b) *Jede solche lokale Lösung des AWPs lässt sich eindeutig fortsetzen zu einer maximalen Lösung auf einem offenen Intervall $I_{\max}$ mit $t_0 \in I_{\max}$, d.h. es gibt keine Lösung auf einem größeren Intervall $I \supsetneq I_{\max}$. Das Intervall $I_{\max}$ heißt maximales Existenzintervall des AWPs.*

Die folgenden beiden Aussagen zeigen, dass die Lösung eines AWPs stetig von den Daten f und x_0 abhängt. Die entscheidende Bedingung ist dabei wieder die Lipschitz-Stetigkeit. In Abbildung 6 wird das Beispiel $y' = \sqrt{|y|}$ dargestellt, bei welchem die Lipschitz-Stetigkeit verletzt ist. Es wird die numerisch berechnete Lösung

© Robert Denk 4. 2. 2014

(mit einem Runge-Kutta-Verfahren) gezeigt zu den Anfangswerten $y(0) = 0$ bzw. $y(0) = 10^{-12}$. Man sieht, wie die Ungenauigkeit im Anfangswert schon für kleine Werte von t explodiert. Eine solche berechnete Lösung ist nicht sinnvoll, da man stets Ungenauigkeiten in den Daten hat (z.B. durch Rundungsfehler).

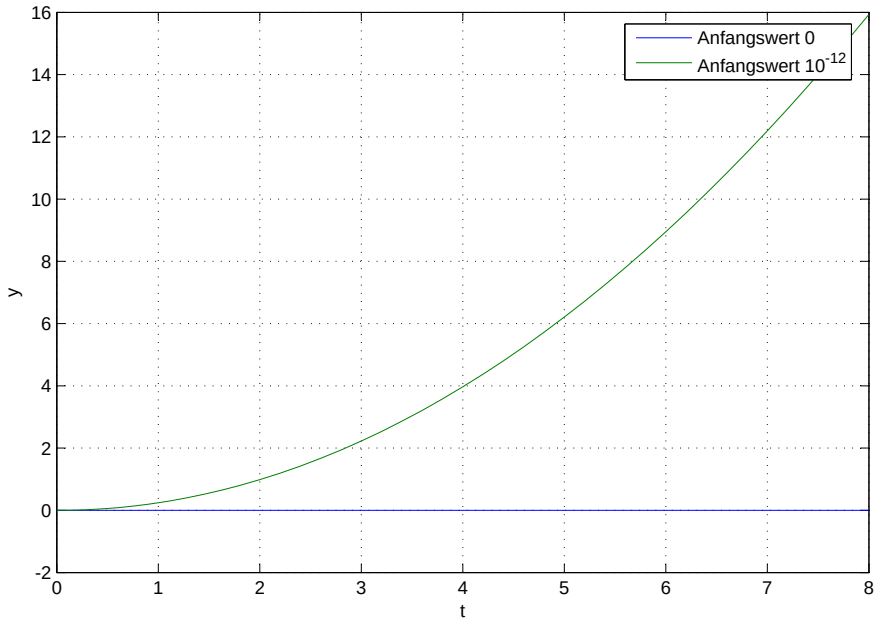


Abbildung 6: Lösungen der Dgl. $y' = \sqrt{|y|}$ zu verschiedenen Anfangswerten

1.17 Satz. *a) Sei $f \in C([0,h] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, und seien x bzw. y die Lösungen des AWP $x' = f(t,x)$, $x(0) = x_0$ bzw. $y' = f(t,y)$, $y(0) = y_0$. Dann gilt mit $c := \frac{L}{L+1}$ die Abschätzung*

$$\sup_{t\in[0,h]} |e^{-(L+1)t}(x(t) - y(t))| \leq \frac{|x_0 - y_0|}{1-c} .$$

b) Seien $f, g \in C([0,h] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_\infty < \infty$. Die Funktion f sei global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und x bzw. y die Lösungen des AWP $x' = f(t,x)$, $x(0) = x_0$ bzw. $y' = g(t,y)$, $y(0) = x_0$. Dann gilt mit $c := \frac{L}{L+1}$ die Abschätzung

$$\sup_{t\in[0,h]} |e^{-(L+1)t}(x(t) - y(t))| \leq \|f - g\|_\infty \frac{h}{1-c} .$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

2. Spezielle Lösungsmethoden

2.1 Worum geht's? Jetzt wissen wir zwar schon, wann eine Dgl. zumindest lokal eine eindeutige Lösung besitzt. Es ist aber nochmal was anderes, diese wirklich zu berechnen. Es gibt für bestimmte Typen von Gleichungen bestimmte Methoden, die mehr oder weniger funktionieren, um die Lösung explizit zu bestimmen. Im einzelnen sind dies:

- separable Gleichungen,
- homogene Gleichungen,
- Potenzreihenansatz,
- exakte Differentialgleichungen.

Ein weiterer Typ von Dgl. sind die linearen Dgl., welche im nachfolgenden Abschnitt behandelt werden. Hier werden wir Ansätze zur Lösung oben genannter Dgl. behandeln und auch einige speziellere Gleichungen lösen. Man sollte sich aber nicht verleiten lassen zu glauben, dass alle oder zumindest fast alle Dgl. explizit lösbar seien.

a) Gleichungen mit getrennten Variablen

Wir behandeln im folgenden nur den eindimensionalen Fall $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Dgl. besitzt getrennte Variablen (separable Gleichung), falls sie von der Form

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \tag{2-1}$$

ist, d.h. in diesem Fall haben wir $f(t, y(t)) = g(t) \cdot h(y(t))$.

2.2 Beispiel. Betrachte das AWP

$$y'(t) = -2ty^2(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Dies ist eine Gleichung mit getrennten Variablen mit $g(t) = -2t$ und $h(z) = z^2$. Man bringt alle y-Terme auf die linke Seite:

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = -2t.$$

Integration von t_0 bis t liefert

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \int_{t_0}^{t} (-2t) dt.$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Auf der linken Seite kann man $z = y(t)$ substituieren und erhält

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{z^2}\, dz = -\Big(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y_0}\Big).$$

Insgesamt haben wir also

$$-\Big(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y_0}\Big) = -t^2 + t_0^2,$$

d.h.

$$y(t) = \frac{1}{t^2 - t_0^2 + \frac{1}{y_0}}.$$

Aber diese Rechnung ist nur korrekt, solange im Intervall von t_0 bis t im Nenner $y^2(t)$ keine Nullstelle auftritt.

2.3 Beispiel. Betrachte das AWP $y' = y^2$, $y(0) = 1$. Die rechte Seite der Dgl. ist lokal Lipschitz-stetig, also gilt lokale Existenz und Eindeutigkeit. Wir schreiben die Aussage von Satz 2.4 etwas einprägsamer in folgender Form:

$$\frac{dy}{dt} = g(t) \cdot h(y) \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t) dt + \text{const}\,.$$

In unserem Beispiel haben wir $g(t) = 1$ und $h(x) = x^2$, d.h.

$$G(t) = \int_0^t dt = t,$$
$$H(x) = \int_1^x \frac{dz}{z^2} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Somit gilt

$$1 - \frac{1}{y(t)} = t,$$

d.h. $y(t) = \frac{1}{1-t}$. Man sieht an diesem Beispiel, dass das maximale Existenzintervall der Lösung das Intervall $(-\infty, 1)$ ist.

Die Methode der getrennten Variablen wird allgemein in folgendem Satz formuliert.

2.4 Satz. *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $g \in C(I;\mathbb{R})$, $h \in C(J;\mathbb{R})$ mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Sei $(t_0, x_0) \in I \times J$. Definiere $G(t) := \int_{t_0}^t g(\tau)d\tau$ und $H(x) := \int_{x_0}^x \frac{dz}{h(z)}$. Es gelte $G(I) \subset H(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der Dgl. (2-1) mit $y(t_0) = x_0$. Für diese Lösung gilt*

$$H(y(t)) = G(t) \quad (t \in I). \tag{2-2}$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Beweisidee. Diese Aussage wird durch den in den Beispielen gezeigten Ansatz verifiziert. Es ist lediglich noch etwas zur Auflösbarkeit der Gleichung (2-2) nach y zu bemerken: Wegen $H'(z) = \frac{1}{h(z)} \neq 0$ ist H streng monoton und damit umkehrbar, d.h. man kann (2-2) eindeutig nach y auflösen. □

2.5 Beispiel. Die homogene lineare Dgl.

$$y'(t) = a(t)y(t),\ y(t_0) = y_0$$

besitzt ebenfalls getrennte Variablen. Die Lösung ist gegeben durch

$$y(t) = \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\Big)y_0.$$

Man beachte, dass für $y_0 \neq 0$ die Lösung keine Nullstelle besitzt. Diese Gleichung ist ein Spezialfall eines linearen Systems von Dgl., welches später noch ausführlicher behandelt wird.

b) Homogene Differentialgleichungen und Substitution

In vielen Fällen ist eine Substitution nützlich, um eine Dgl. in eine lösbare Form zu transformieren. Hierzu ein Beispiel:

2.6 Beispiel. Betrachte eine Dgl. der Form

$$x'(t) = f(ax(t) + bt + c)$$

mit Konstanten a, b, c. Substituiert man $y(t) := ax(t) + bt + c$, dann erhält man

$$y'(t) = ax'(t) + b = af(y(t)) + b,$$

also eine separable Dgl.

2.7 Beispiel (homogene Dgl.)**.** Ein ähnlicher Trick funktioniert bei homogenen Dgl. Diese haben die Form

$$x'(t) = f\Big(\frac{x(t)}{t}\Big).$$

Substituiert man $y(t) := \frac{x(t)}{t}$, so folgt

$$y'(t) = \frac{x'(t)t - x(t)}{t^2} = \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = \frac{1}{t}\,(f(y(t)) - y(t)).$$

Dies ist wieder eine separable Dgl.

© Robert Denk 4. 2. 2014

2.8 Beispiel (Bernoullische Dgl.)**.** Die Bernoullische Dgl. hat die Form

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \cdot (x(t))^\alpha$$

mit einem reellen Parameter α. Für $\alpha = 0$ handelt es sich um eine lineare Dgl., die später behandelt werden, für $\alpha = 1$ um eine separable Dgl. Für $\alpha \neq 0, 1$ substituiert man $y(t) := x(t)^{1-\alpha}$. Dann ist

$$y'(t) = (1-\alpha)x(t)^{-\alpha}\big(a(t)x(t) + b(t)x(t)^\alpha\big) = (1-\alpha)\big(a(t)y(t) + b(t)\big).$$

Dies ist wieder eine lineare Dgl.

2.9 Beispiel (Riccatische Dgl.)**.** Die Riccatische Dgl. ist von der Form

$$x'(t) = k(t)x^2(t) + g(t)x(t) + h(t) \tag{2-3}$$

mit $k, h, g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Die Anfangsbedingung sei $x(t_0) = x^0$. Im Falle $h = 0$ handelt es sich um die Bernoullische Dgl. mit Exponenten $\alpha = 2$. Am Beispiel der Riccati-Gleichung soll gezeigt werden, wie eine Substitution helfen kann, die Gleichung auf eine andere Dgl. zu transformieren, welche von einfacherer Struktur ist.

(i) Transformation zur Bernoullischen Dgl.: Dies ist nur möglich, falls eine Lösung p mit $p(t_0) =: p^0 \neq x^0$ der Riccati-Gleichung bereits bekannt ist. In diesem Fall setzt man $y := x - p$ und erhält den Anfangswert $y(t_0) = x^0 - p^0$ und

$$\begin{aligned} y' = x' - p' &= kx^2 + gx + h - kp^2 - gp - h \\ &= ky^2 - 2kp^2 + 2kxp + gx - gp \\ &= ky^2 + (2kp + g)y. \end{aligned}$$

Man sieht, dass y wieder eine Riccati-Dgl. erfüllt. Allerdings besitzt die neue Gleichung für y keinen h-Term mehr, und damit handelt es sich um die Bernoullische Gleichung mit $\alpha = 2$.

(ii) Ohne das Wissen einer Lösung p kann man durch eine Substitution die Riccati-Gleichung (2-3) auf eine lineare Dgl. zweiter Ordnung zurückführen. Dazu setzt man

$$u(t) := \exp\Big(-\int_{t_0}^t k(s)x(s)ds\Big).$$

Damit folgt $u' = -kxu$ und somit

$$\begin{aligned} u'' &= k^2x^2u - k'xu - kx'u \\ &= k^2x^2u - k'xu - k^2x^2u - kgxu - khu \\ &= -k'xu - kgxu - khu \\ &= \frac{k'}{k}\,u' + gu' - khu, \end{aligned}$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

wobei $ux = -\frac{u'}{k}$ benutzt wurde. Damit ist u eine Lösung des AWPs

$$u'' - u'\Big(\frac{k'}{k} + g\Big) + khu = 0, \quad u(t_0) = 1,\ u'(t_0) = -k(t_0)x^0.$$

Dies ist wieder eine lineare Dgl.

c) Potenzreihenansatz

Der Potenzreihenansatz ist in vielen Fällen möglich, um eine Darstellung der Lösung einer Dgl. in Form einer konvergenten Potenzreihe zu erhalten. Wir diskutieren diesen Ansatz nur für lineare Dgl. zweiter Ordnung, Verallgemeinerungen sind leicht möglich.

Betrachte die lineare Dgl.

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = s(t) \tag{2-4}$$

mit den Anfangsbedingungen $y(t_0) = y^0, y'(t_0) = y^1$. Die Koeffizienten a, b und die rechte Seite s seien in einem offenen Intervall $J := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ in eine Potenzreihe um t_0 entwickelbar, d.h. in Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (t - t_0)^k$, welche mindestens in J konvergieren. In diesem Fall kann man den Ansatz

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k \tag{2-5}$$

in die Differentialgleichung einsetzen und erhält eine Rekursionsformel für die unbekannten Koeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Es kann leicht gezeigt werden, dass dieser Ansatz gerechtfertigt ist und dass die Lösung die Form (2-5) besitzt. Man beachte dazu, dass eine Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises unendlich oft differenzierbar ist und die Ableitung mit der Summation vertauscht werden kann (siehe Analysis I).

2.10 Beispiel (Hermitesche Dgl.)**.** Die Hermitesche Dgl. lautet

$$y''(t) - 2ty'(t) + \lambda y(t) = 0 \tag{2-6}$$

mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Koeffizienten sind Polynome, also insbesondere in eine überall konvergente Potenzreihe um 0 entwickelbar. Mit dem Ansatz (2-5) mit $t_0 = 0$ erhält man

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} t^k,$$
$$y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} t^k.$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Eingesetzt in die Hermitesche Dgl. ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}t^k - 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}t^{k+1} + \lambda\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k = 0.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen müssen alle Koeffizienten der Potenzreihe auf der linken Seite verschwinden (Koeffizientenvergleich). Also haben wir

$$\begin{aligned} 2c_2 + \lambda c_0 &= 0, \\ (k+2)(k+1)c_{k+2} - 2kc_k + \lambda c_k &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten c_0 und c_1 sind frei wählbar, die anderen sind dann gegeben durch die Rekursion

$$c_{k+2} = \frac{2k-\lambda}{(k+2)(k+1)}\,c_k \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Dieses Beispiel zeigt auch noch eine Besonderheit: Falls $\lambda = 2n_0 \in 2\mathbb{N}$, so ist $c_{k+2} = 0$ für alle $k = n_0, n_0+2, \ldots$. In diesem Falle existiert ein Polynom, welches die Hermitesche Dgl. löst. Z.B. kann man für $\lambda = 4$ die Anfangskoeffizienten $c_0 := 1$ und $c_1 := 0$ wählen und erhält $c_2 = \frac{-4}{2} = -\frac{1}{2}$, $c_4 = c_6 = \cdots = 0$ und $c_3 = c_5 = \cdots = 0$. Also ist $y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2$ eine Lösung der Hermiteschen Dgl. mit $\lambda = 4$. Auf diese Weise erhält man (bis auf Normierung) die Hermite-Polynome $H_n(t)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

2.11 Beispiel (Besselsche Dgl.)**.** Die Besselsche Dgl. tritt z.B. bei Schwingungen einer kreisförmigen Membran auf. Ein Spezialfall der Besselschen Dgl. lautet

$$y''(t) + \frac{1}{t}\,y'(t) + \Big(1 - \frac{n^2}{t^2}\Big)y(t) = 0. \tag{2-7}$$

Hierbei ist $n \in \mathbb{N}_0$. Setzt man $\eta(t) := t^{-n}y(t)$, so erhält man

$$\begin{aligned} y'(t) &= nt^{n-1}\eta(t) + t^n\eta'(t), \\ y''(t) &= n(n-1)t^{n-2}\eta(t) + 2nt^{n-1}\eta'(t) + t^n\eta''(t). \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich

$$t^n\eta''(t) + (2n+1)t^{n-1}\eta'(t) + \underbrace{\big[n(n-1)t^{n-2} + nt^{n-2} - n^2t^{n-2}\big]}_{=0}\eta(t) + t^n\eta(t) = 0.$$

Für $t \neq 0$ erhält man also für η die Dgl.

$$\eta''(t) + (2n+1)t^{-1}\eta'(t) + \eta(t) = 0. \tag{2-8}$$

Wegen des Terms t^{-1} handelt es sich hier um eine singuläre Dgl. Macht man dennoch den Potenzreihenansatz $\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$, so erhält man

$$\sum_{k=2}^{\infty}c_kk(k-1)t^{k-2} + (2n+1)\sum_{k=1}^{\infty}c_kkt^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k = 0,$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

und damit für die Koeffizienten

$$(2n+1)c_1 = 0,$$
$$(k+2)(2n+k+2)c_{k+2} + c_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Es folgt $c_1 = c_3 = \cdots = 0$ und für gerade $k = 2m$ die Rekursion

$$c_{2m+2} = -\frac{1}{(2m+2)(2m+2n+2)}\, c_{2m}.$$

Für die Wahl $c_0 = 1$ erhält man

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2m \cdot (2+2n) \cdot \ldots \cdot (2m+2n)}.$$

Damit sind die Koeffizienten berechnet, aber man muss noch zeigen, dass die zugehörige Potenzreihe konvergiert. Wegen

$$|c_{2m}| = \frac{1}{4^m (m!)(1+n)(2+n) \cdot \ldots \cdot (m+n)} \le \frac{1}{m!}$$

ist dies der Fall, und für die Besselsche Dgl. erhalten wir die Lösung

$$y(t) = t^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)(1+n)(2+n) \cdot \ldots \cdot (m+n)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}.$$

Jedes Vielfache dieser Lösung ist wieder eine Lösung, die Funktion

$$J_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\, y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n} \quad (t \in \mathbb{R})$$

heißt die *Besselfunktion erster Art der Ordnung n*.

d) Exakte Differentialgleichungen

Wir verwenden im folgenden den Begriff Gebiet. Dabei ist eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, falls G offen und zusammenhängend ist.

2.12 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und seien $f_1, f_2 \in C(G;\mathbb{R})$. Dann heißt die Dgl.

$$f_1(t, y(t)) + f_2(t, y(t)) \cdot y'(t) = 0 \tag{2-9}$$

exakt, falls eine Stammfunktion $F \in C^1(G;\mathbb{R})$ existiert mit $\nabla F = \binom{f_1}{f_2}$.

© Robert Denk 4. 2. 2014

2.13 Bemerkung. Definiert man die 1-Form

$$\omega(x,h) := f_1(x)h_1 + f_2(x)h_2 = f_1(x)dx_1(h) + f_2(x)dx_2(h),$$

so ist die Dgl. (2-9) genau dann exakt, wenn ω exakt ist. Formal erhält man ω durch die Umformung

$$f_1(t,y)dt + f_2(t,y)dy = 0 \tag{2-10}$$

und die Umbenennung $x_1 := t,\ x_2 := y$. Die Form (2-10) ist eine „symmetrische“ Version der ursprünglichen Dgl. (2-9).

2.14 Satz. *a) Sei die Dgl. (2-9) exakt mit Stammfunktion F und $y\colon J \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Es gelte $(t, y(t)) \in G$ für alle $t \in J$. Dann ist y genau dann eine Lösung von (2-9), wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$F(t, y(t)) = c \quad (t \in J).$$

b) Sei G sternförmig und $f_1, f_2 \in C^1(G)$. Dann ist die Dgl. (2-9) genau dann exakt, falls $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$.

Beweis. a) folgt aus

$$\frac{d}{dt}F(t,y(t)) = f_1(t,y(t)) + f_2(t,y(t)) \cdot y'(t).$$

b) folgt aus dem bekannten Kriterium für Exaktheit von 1-Formen (Analysis II). □

Zur Lösung einer exakten Dgl. muss man nach Satz 2.14 eine Stammfunktion F bestimmen. Wir wiederholen die Vorgehensweise aus der Analysis II: Gegeben sei die exakte Dgl. (2-9) mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y^0$. Um eine Stammfunktion $F\colon G \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, wählen wir zu $(t,x) \in G$ eine stückweise glatte Kurve $\Gamma = [\gamma]$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit Anfangspunkt $\gamma(a) = (t_0, y^0)$ und Endpunkt (t,x). Dann ist $F(t,x)$ durch das (wegunabhängige!) Kurvenintegral

$$F(t,x) = \int_\Gamma \omega$$

gegeben. Dabei kann die Wegunabhängigkeit ausgenutzt werden, um lokal einen Weg entlang der Koordinatenachsen zu wählen.

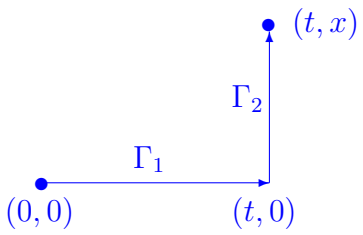
2.15 Beispiel. Betrachte die Dgl.

$$(3t^2 + 4ty(t)) + (2t^2 + 3y(t)^2) \cdot y'(t) = 0.$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Hier ist $f_1(t,x) = 3t^2+4tx$, $f_2(t,x) = 2t^2+3x^2$, und wegen $\partial_2 f_1 = 4t = \partial_1 f_2$ handelt es sich um eine exakte Dgl. Wir wählen zu $(t_0, y^0) := (0,0)$ und zu $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ die Wegstücke

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= [\gamma_1], \quad \gamma_1 \colon [0,t] \to \mathbb{R}^2,\ s \mapsto (s,0), \\ \Gamma_2 &= [\gamma_2], \quad \gamma_2 \colon [0,x] \to \mathbb{R}^2,\ s \mapsto (t,s). \end{aligned}$$



Damit ist

$$F(t,x) = \int_0^t (3s^2 + 4s\cdot 0)\cdot 1 ds + \int_0^x (2t^2+3s^2)\cdot 1 ds = t^3 + 2t^2x + x^3.$$

Die Lösung der Dgl. erhält man nach Satz 2.14 durch (lokale) Lösung der Gleichung $F(t, y(t)) = \text{const}$.

2.16 Beispiel. Die Dgl.

$$ty'(t) - ty^2(t) - y(t) = 0 \tag{2-11}$$

ist in keiner offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ exakt. Hier ist in den Bezeichnungen von Definition 2.12

$$f_1(t,z) = -tz^2 - z,\ \ f_2(t,z) = t$$

und damit $\partial_2 f_1(t,z) = -2tz - 1$, $\partial_1 f_2(t,z) = 1$. Es gilt also $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$ nur für $tz = -1$, was in keiner offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ erfüllt ist.

Bei nicht exakten Dgl. kann man versuchen, einen *integrierenden Faktor* zu finden, mit welchem die Dgl. multipliziert wird, so dass die neue Dgl. exakt ist. Setzt man den Faktor von der Form $\mu(y)$ an, d.h. betrachtet man statt (2-11) die Dgl.

$$\mu(y)ty' - \mu(y)(ty^2 - y) = 0,$$

so erhält man als Bedingung für die Exaktheit

$$\partial_t\big(t\mu(y)\big) = \partial_y\big(-\mu(y)(ty^2 - y)\big).$$

Für μ ergibt sich wiederum eine Dgl. erster Ordnung:

$$\mu(y) = -\mu'(y)(ty^2 - y) - \mu(y)(2ty + 1),$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

also

$$(ty+1)\big[y\mu'(y)+2\mu(y)\big]=0.$$

Die resultierende Dgl.

$$y\mu'(y)+2\mu(y)=0$$

(eine Dgl. mit getrennten Variablen) hat die Lösung $\mu(y)=y^{-2}$. Man erhält die neue Dgl.

$$ty^{-2}(t)y'(t)-t-y^{-1}(t)=0, \tag{2-12}$$

welche exakt ist. Allerdings haben wir durch die Multiplikation mit $y(t)^{-2}$ offensichtlich die Lösungsmenge verändert, da jetzt nur noch Lösungen mit $y(t)\neq 0$ zugelassen sind.

Zur Bestimmung einer Stammfunktion F muss man

$$\nabla F(t,z)=\begin{pmatrix}\partial_t F(t,z)\\ \partial_z F(t,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t-z^{-1}\\ tz^{-2}\end{pmatrix}$$

lösen. Aus der ersten Zeile folgt $F(t,z)=-\frac{t^2}{2}-tz^{-1}+a(z)$ mit einer Funktion $a(z)$, aus der zweiten Zeile folgt $F(t,z)=-tz^{-1}+b(t)$. Man sieht, dass $a(z):=0$ und $b(t):=-\frac{t^2}{2}$ beide Bedingungen lösen. Die Bedingung aus Satz 2.14 lautet also

$$ty^{-1}(t)+\frac{t^2}{2}=c$$

mit einer Konstanten $c\in\mathbb{R}$. Aufgelöst ergibt sich

$$y(t)=\frac{2t}{c-t^2}.$$

Dies ist aber nur zulässig in Intervallen, in denen $y(t)\neq 0$ ist (und in denen der Nenner nicht verschwindet). Man sieht aber direkt, dass z.B. für $c=1$ die Funktion $y(t)=\frac{2t}{1-t^2}$ eine Lösung im gesamten Intervall $(-1,1)$ ist.

© Robert Denk 4. 2. 2014

3. Lineare Differentialgleichungen

3.1 Worum geht's? Lineare Dgl. bilden eine besonders wichtige Klasse von Dgl., in welcher die Menge der Lösungen im wesentlichen eine Vektorraumstruktur besitzt. Das ist eine erste wichtige Verbindung zur Linearen Algebra, die im Falle von linearen Dgl. mit konstanten Koeffizienten besonders deutlich zu Tage tritt. Es kann in diesem Abschnitt nicht schaden, nochmal einen Blick in das Skript der Vorlesung Lineare Algebra zu werfen.

Auf den ersten Blick besitzen lineare Dgl. eine deutlich einfachere Struktur als nichtlineare Gleichungen. Das gilt z.B. schon in Hinblick auf die eindeutige Lösbarkeit, die hier eine direkte Folgerung aus dem Satz von Picard-Lindelöf ist. Dennoch sei hier nochmal deutlich darauf hingewiesen, dass viele lineare Dgl. nicht elementar lösbar sind.

a) Homogene lineare Dgl.

Lineare Dgl.-Systeme haben die Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad y(t_0) = y^0, \tag{3-1}$$

wobei $A \in C(J; \mathbb{C}^{n\times n})$, $b \in C(J; \mathbb{C}^n)$, $t_0 \in J$ und $y^0 \in \mathbb{C}^n$ für ein (beliebiges) Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Eine Lösung ist eine differenzierbare Funktion $y\colon J \to \mathbb{C}^n$, welche (3-1) erfüllt. Man beachte, dass dann wegen (3-1) auch $y \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$ gilt.

Es ist hier günstiger, gleich in $\mathbb{C}$ zu arbeiten, wie wir später noch sehen werden. In vielen Anwendungsfällen ist man natürlich an reellwertigen Funktionen interessiert. Man beachte, dass auf $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{C}^{n\times n}$ nach Analysis II alle Normen äquivalent sind, insbesondere der Begriff der Stetigkeit nicht von der Wahl der Norm abhängt. Meist werden wir die euklidische Norm $|\cdot|$ oder die $|\cdot|_\infty$-Norm auf $\mathbb{C}^n$ und die zugehörige Operatornorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ wählen (meist mit $\|\cdot\|$ bezeichnet).

3.2 Definition. Die euklidische Norm auf dem $\mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$|z| := \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2} \quad (z = (z_1, \ldots, z_n)^t \in \mathbb{C}^n).$$

Man beachte, dass $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1}$ für $z_1 \in \mathbb{C}$, wobei $\overline{z_1}$ die konjugiert komplexe Zahl bezeichnet.

Die zugehörige Operatornorm $\|A\|$ auf dem Raum $\mathbb{C}^{n\times n}$ aller Matrizen mit komplexen Koeffizienten ist definiert als

$$\|A\| := \sup\{|Az| : z \in \mathbb{C}^n,\ |z| = 1\}.$$

Mit anderen Worten gilt

$$|Az| \le \|A\| \cdot |z| \quad (z \in \mathbb{C}^n),$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

und statt $\|A\|$ kann man keine kleinere Konstante einsetzen.

3.3 Satz. *Unter den obigen Voraussetzungen an A und f existiert zu jedem $t_0 \in J$ und $y^0 \in \mathbb{C}^n$ genau ein $y \in C^1(J;\mathbb{C}^n)$, welches das AWP (3-1) löst.*

Beweis. Für kompakte Intervalle folgt das direkt aus dem Satz von Picard-Lindelöf (Satz 1.9): Denn für $f(t,x) := A(t)x + b(t)$ gilt

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |A(t)(x_1 - x_2)| \leq \sup_{t\in J} \|A(t)\| \cdot |x_1 - x_2|.$$

Nun ist A als stetig vorausgesetzt, damit ist auch die Abbildung $t \mapsto \|A(t)\|$ eine stetige Abbildung und besitzt auf einem kompakten Intervall ein Maximum, das dann die Lipschitz-Konstante ist. Bei unendlichen Intervallen kann man das Intervall durch endliche Intervalle ausschöpfen (z.B. Intervalle der Form $[-N,N]$ mit $N \to \infty$) und erreicht so jeden Punkt. □

3.4 Bemerkung. Für festes $t_0 \in J$ ist nach dem obigen Satz die Gleichung $y' - Ay = 0$ mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ für jedes $y_0 \in \mathbb{C}^n$ eindeutig lösbar. Betrachte die Abbildung $y \mapsto y(t_0)$, welche jeder *Lösung* y der Dgl. $y' = Ay$ ihren Wert an der Stelle t_0 zuordnet. Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit ist diese Abbildung bijektiv.

Man sieht außerdem, dass die Abbildung $y \mapsto y(t_0)$ linear ist, und die Menge der Lösungen $\mathscr{L}$ der Dgl. $y' = Ay$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Denn mit y und $\widetilde{y}$ ist auch $\alpha y + \beta\widetilde{y}$ wieder eine Lösung der Differentialgleichung für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Die Abbildung

$$\mathscr{L} \to \mathbb{C}^n,\ y \mapsto y(t_0)$$

ist also ein *Vektorraum-Isomorphismus*. Damit hat insbesondere der Lösungsraum $\mathscr{L}$ die Dimension n.

Diese Aussagen gelten unabhängig von der Wahl des Startwerts t_0.

Der folgende Satz folgt direkt aus diesen Bemerkungen, ist aber sehr wichtig für lineare Differentialgleichungen.

3.5 Satz. *Es existieren genau n linear unabhängige Lösungen in $C^1(J;\mathbb{C}^n)$ von $y'(t) = A(t)y(t)$. Ein System $\{z_1,\dots,z_n\}$ von Lösungen ist genau dann eine Basis, falls die Vektoren $\{z_1(t_0),\dots,z_n(t_0)\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ sind.*

Man beachte hier wieder, dass die lineare Unabhängigkeit von Funktionen zurückgeführt wird auf die lineare Unabhängigkeit von komplexen Vektoren, welche viel einfacher nachzuprüfen ist (z.B. durch Betrachtung der Determinante)!

© Robert Denk 4. 2. 2014

3.6 Definition. a) Sei $\{z_1, \dots, z_n\}$ ein System von Lösungen von $y'(t) = A(t)y(t)$. Dann heißt die aus den Spalten gebildete Matrix $Z := (z_1 \dots z_n) \colon J \to \mathbb{C}^{n\times n}$ die Wronski-Matrix und $w(t) := \det Z(t)$ die Wronski-Determinante.

b) Eine Basis $\{z_1, \dots, z_n\}$ des Lösungsraums von $y'(t) = A(t)y(t)$ heißt ein Fundamentalsystem. Die Wronskimatrix heißt in diesem Fall eine Fundamentalmatrix.

3.7 Bemerkung. a) Aus Satz 3.5 sehen wir: Seien $z_1, \dots, z_n$ Lösungen der Dgl. $y' = Ay$. Dann ist $\{z_1, \dots, z_n\}$ genau dann ein Fundamentalsystem, falls $w(t) = \det Z(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $w(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$ ist.

b) Eine Wronski-Matrix Z löst die Matrix-Dgl. $Z'(t) = A(t)Z(t)$ (wobei die Ableitung $Z'(t)$ komponentenweise definiert ist). Falls Z eine Fundamentalmatrix ist, so ist eine Funktion $z \in C^1(J;\mathbb{C}^n)$ genau dann eine Lösung von $y' = Ay$, falls ein $c \in \mathbb{C}^n$ existiert mit $z(t) = Z(t)c$ $(t \in J)$. Denn z ist genau dann Lösung, falls z eine Linearkombination der Spalten $z_1, \dots, z_n$ von Z ist.

3.8 Satz (Formel von Liouville)**.** *Die Wronski-Determinante ist differenzierbar mit* $w'(t) = (\operatorname{tr} A(t)) \cdot w(t)$. *Damit gilt*

$$w(t) = w(t_0) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s) ds \Big).$$

Zum Beweis sei hier nur bemerkt, dass die Dgl. für $w(t)$ ein Gleichung mit getrennten Variablen ist und daraus die explizite Formel für $w(t)$ aus der Dgl. folgt.

b) Inhomogene Gleichungen

Wir betrachten nun den inhomogenen Fall

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \tag{3-2}$$

mit $A \in C(J;\mathbb{C}^{n\times n})$, $f \in C(J;\mathbb{C}^n)$ wie oben.

3.9 Lemma. *Sei* $y_p \in C^1(J;\mathbb{C}^n)$ *eine spezielle (partikuläre) Lösung von* (3-2) *und* $Z \in C^1(J;\mathbb{C}^{n\times n})$ *eine Fundamentalmatrix. Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch* $y(t) = y_p(t) + Z(t)c$ *mit* $c \in \mathbb{C}^n$.

Beweis. Wegen $y' = y_p' + (Zc)' = Ay_p + b + A(Zc) = Ay + b$ ist jedes solche y eine Lösung. Falls andererseits y eine beliebige Lösung von (3-2) ist, so ist $\widetilde{y} := y - y_p$ eine Lösung von $\widetilde{y}' = Ay + b - Ay_p - b = A\widetilde{y}$ und damit $\widetilde{y} = Zc$ mit einem $c \in \mathbb{C}^n$ nach Bemerkung 3.7 b). □

© Robert Denk 4. 2. 2014

3.10 Satz (Variation der Konstanten)**.** *Sei $Z\colon J \to \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Dgl. $y' = Ay$. Dann erhält man eine Lösung der inhomogenen Dgl. $y' = Ay + b$ durch den Ansatz*

$$y_p(t) = Z(t)c(t),$$

wobei $c \in C^1(J;\mathbb{C}^n)$ eine Lösung von $Z(t)c'(t) = b(t)$ ist, d.h.

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} Z(s)^{-1}b(s)ds.$$

Beweis. Das folgt aus

$$\begin{aligned}(Z(t)c(t))' &= Z'(t)c(t) + Z(t)c'(t) = A(t)Z(t)c(t) + Z(t)c'(t)\\ &= A(t)y_p(t) + Z(t)c'(t).\end{aligned}$$

Man beachte, dass $Z(t)c'(t) = b(t)$ genau dann gilt, falls $c(t) = c(t_0)+\int_{t_0}^{t} Z(s)^{-1}b(s)ds$. □

3.11 Beispiel. Gegeben sei das Dgl.-System

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= -y_2(t)\\ y_2'(t) &= y_1(t) + t.\end{aligned}$$

In Matrix-Schreibweise:

$$y'(t) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}.$$

Eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$Z(t) = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$Z(t)^{-1}\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\sin t\\ t\cos t\end{pmatrix}.$$

Variation der Konstanten liefert also

$$c(t) = \int_0^t \begin{pmatrix}s\sin s\\ s\cos s\end{pmatrix} ds + \text{const}\,.$$

Partielle Integration ergibt

$$c(t) = \begin{pmatrix}-s\cos s + \sin s\\ s\sin s + \cos s\end{pmatrix}\Big|_{s=0}^{s=t},$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

und eine partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_p(t) = Z(t)c(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t\cos t + \sin t \\ t\sin t + \cos t - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t\cos^2 t + \cos t \sin t - t\sin^2 t - \sin t \cos t + \sin t \\ -t\sin t\cos t + \sin^2 t + t\sin t\cos t + \cos^2 t - \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t + \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung hat die Form $y(t) = Z(t)d + y_p(t)$, wobei $d \in \mathbb{R}^2$ durch die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ bestimmt wird.

c) Systeme mit konstanten Koeffizienten

Nun soll es um Dgl. der Form

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{3-3}$$

gehen, wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine konstante Matrix ist. Man beachte, dass im skalaren Fall $y' = \alpha y$ die Lösung durch $y(t) = c\exp(\alpha t)$ mit $c \in \mathbb{C}$ gegeben ist. Eine Möglichkeit, (3-3) zu lösen, besteht in einer Erweiterung der exp-Funktion für Matrizen.

Sei $|\cdot|$ die euklidische Norm in $\mathbb{C}^n$ und $\|\cdot\|\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to [0,\infty)$ die zugehörige Operatornorm. Man beachte, dass $\|\cdot\|$ submultiplikativ ist, d.h. es gilt

$$\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\| \quad (A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}).$$

3.12 Definition. Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

die exp-Funktion von A.

3.13 Satz. *a) Die* exp*-Reihe ist normkonvergent, d.h. es gilt* $\sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{A^n}{n!}\| < \infty$ *und damit konvergent. Es gilt* $\exp(0) = I_n$ *($n \times n$-Einheitsmatrix) und* $\|\exp(A)\| \le \exp(\|A\|)$.

b) Für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *mit* $AB = BA$ *gilt* $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

c) Durch $Z(t) := \exp(tA) \quad (t \in \mathbb{R})$ *ist die eindeutige Lösung der (Matrizen-)Dgl.* $Z'(t) = AZ(t)$ *mit* $Z(0) = I_n$ *gegeben. Eine Funktion* $y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)$ *ist genau dann eine Lösung der Dgl. (3-3), falls ein* $c \in \mathbb{C}^n$ *existiert mit* $y(t) = \exp(tA)c \quad (t \in \mathbb{R})$.

© Robert Denk 4. 2. 2014

Mit diesem Satz ist die Lösung der Dgl. (3-3) zurückgeführt auf die Berechnung der exp-Funktion einer Matrix. Um explizite Lösungen zu erhalten, verwenden wir den Satz über die Jordan-Normalform, der aus der Linearen Algebra bekannt ist:

Zu $\lambda \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}$ sei

$$J_p(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

die Jordan-Elementarmatrix (das Jordan-Kästchen) der Dimension p. Nach dem Satz von der Jordan-Normalform existiert zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix $S \in GL(n, \mathbb{C})$ mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J(\lambda_1) & & & \\ & & & J(\lambda_2) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J(\lambda_\ell) \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A sind und $J(\lambda_k)$ ein Jordan-Kästchen geeigneter Dimension zum Eigenwert λ_k ist.

Dies ist eine spezielle Darstellung der Form $S^{-1}AS = D + N$ mit $DN = ND$, wobei D eine Diagonalmatrix und N nilpotent ist. Dabei hat D auf der Diagonalen die Eigenwerte entsprechend ihrer (algebraischen) Vielfachheit und N hat nur auf der ersten Nebendiagonalen die Werte 0 und 1, sonst nur 0. Es folgt $S^{-1}(tA)S = tD+tN$ und $S^{-1}\exp(tA)S = \exp(S^{-1}tAS) = \exp(tD + tN) = \exp(tD)\exp(tN)$, d.h.

$$\exp(tA) = S\exp(tD)\exp(tN)S^{-1}.$$

Zu einem Jordan-Kästchen $J_p(\lambda_k)$ der Dimension p zu einem Eigenwert λ_k sind die zugehörigen Hauptvektoren $h_1, \ldots, h_p$ definiert durch

$$(A - \lambda_k I_n)h_j = h_{j-1} \quad (j = 1, \ldots, p),$$

wobei $h_0 := 0$ gesetzt wurde. Dabei ist h_1 ein Eigenvektor und h_j heißt Hauptvektor der Stufe j. Die Transformationsmatrix aus dem Satz über die Jordan-Normalform besteht gerade aus allen Hauptvektoren der Matrix A, denn

$$S^{-1}ASe_j = \lambda e_j + e_{j-1}$$

bedeutet für $h_j := Se_j$ (j-te Spalte der Matrix S) gerade

$$Ah_j = S(\lambda e_j + e_{j-1}) = \lambda h_j + h_{j-1}.$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

3.14 Satz. *Sei h_j für $j = 1, \dots, p$ der Hauptvektor der Stufe j zum Eigenwert λ der Matrix A. Dann ist*

$$y_j(t) := e^{\lambda t}\Big(h_j + t h_{j-1} + \frac{t^2}{2}\, h_{j-2} + \cdots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\, h_1\Big)$$

eine Lösung der Dgl. $y' = Ay$. Das System aller so gebildeten Lösungen (zu allen Jordan-Kästchen) bildet ein Fundamentalsystem der Dgl.

Beweis. Wir wissen nach Satz 3.13, dass die Spalten von $\exp(tA)$ ein Fundamentalsystem bilden. Für jedes $S \in GL(n, \mathbb{C})$ ist wegen $\frac{d}{dt}(\exp(tA)S) = A\exp(tA)S$ und $\det(\exp(tA)S)|_{t=0} = \det(S) \neq 0$ auch $Y(t) := \exp(tA)S$ ein Fundamentalsystem.

Wir verwenden die Transformationsmatrix S aus dem Satz über die Jordan-Normalform. Hier ist $\exp(tA)S = S\exp(tD)\exp(tN)$. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir an, dass A nur ein Jordan-Kästchen $J_p(\lambda)$ zum Eigenwert λ der Dimension p besitzt. In diesem Fall ist

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad N^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 1 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^p = 0.$$

Damit ist

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & & \\ & e^{\lambda t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t} I_n$$

und

$$\exp(tN) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k N^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Somit erhalten wir mit den Hauptvektoren $S = (h_1, \dots, h_p)$

$$S\exp(tD)\exp(tN) = e^{\lambda t}\Big(h_1,\dots,h_p\Big)\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{\lambda t}\left(h_1, \quad h_2 + th_1, \quad \dots, \quad h_p + th_{p-1} + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}h_1\right).$$

Im allgemeinen Fall besitzt A mehrere Jordan-Kästchen, und die obige Darstellung zu verschiedenen Jordan-Kästchen ergibt die Spalten der Matrix $Y(t) := \exp(tA)S$ und damit ein Fundamentalsystem. □

3.15 Beispiel. Betrachte $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + 1\cdot(-1\cdot 0 - (-1)(1-\lambda)) \\ &= -(\lambda-1)^3. \end{aligned}$$

Damit ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3. Das lineare Gleichungssytem $(A - 1\cdot I_3) = 0$ besitzt nur 2 linear unabhängige Lösungen (Eigenvektoren), etwa

$$h_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin gilt

$$(A - 1\cdot I_3)h_2^{(1)} = h_1^{(1)} \quad \text{für} \quad h_2^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Transformationsmatrix

$$S := \left(h_1^{(1)}, h_2^{(1)}, h_1^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

erhält man daher die Jordan-Normalform

$$S^{-1}AS = J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jede Lösung der Dgl. $y' = Ay$ hat somit die Form

$$y(t) = c_1 e^t h_1^{(1)} + c_2 e^t (h_2^{(1)} + t h_1^{(1)}) + c_3 e^t h_1^{(2)}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$.

d) Lineare Dgl. höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Überlegungen des vorherigen Abschnitts lassen sich übertragen auf Dgl. der Form

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \cdots + a_k x(t) = 0. \tag{3-4}$$

Wir setzen

$$y(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist (3-4) äquivalent zu $y'(t) = Ay(t)$.

3.16 Satz. *a) Das charakteristische Polynom der Matrix A ist gegeben durch*

$$\chi_A(\lambda) := \det(\lambda I_k - A) = \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\lambda + a_k.$$

b) Sei λ eine p-fache Nullstelle von χ_A. Dann sind

$$x_1(t) := e^{\lambda t},\ x_2(t) := te^{\lambda t},\ \dots,\ x_p(t) := t^{p-1}e^{\lambda t}$$

linear unabhängige Lösungen der Dgl. (3-4). Betrachtet man diese Lösungen für alle Nullstellen von χ_A, so erhält man ein Fundamentalsystem.

Beweis. a) wird hier nicht bewiesen (Beweis z.B. möglich durch Induktion).

© Robert Denk 4. 2. 2014

b) Wir konstruieren explizit eine Kette von Hauptvektoren. Dazu sei

$$c(\mu) := \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \\ \vdots \\ \mu^{k-1} \end{pmatrix}$$

und $h_j := \frac{1}{(j-1)!} c^{(j-1)}(\lambda)$. Es gilt

$$Ac(\mu) = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu^{k-1} \\ \mu^k - \chi_A(\mu) \end{pmatrix} = \mu c(\mu) - \chi_A(\mu) e_k.$$

Wir leiten j-mal nach t ab:

$$Ac^{(j)}(\mu) = \mu c^{(j)}(\mu) + j c^{(j-1)}(\mu) - \chi_A^{(j)}(\mu) e_k \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Falls nun λ eine p-fache Nullstelle ist, so gilt $\chi_A(\lambda) = \cdots = \chi_A^{(p-1)}(\lambda) = 0$ und damit

$$(A - \lambda I_k) c^{(j)}(\lambda) = \begin{cases} 0, & j = 0, \\ j c^{(j-1)}(\lambda), & j = 1, \dots, p-1. \end{cases}$$

Für die Vektoren h_j folgt damit

$$(A - \lambda I_k) h_j = \begin{cases} 0, & j = 1, \\ h_{j-1}, & j = 2, \dots, p. \end{cases}.$$

Damit ist $h_1, \dots, h_p$ eine Kette von Hauptvektoren. Nach Satz 3.14 sind

$$y_j(t) := e^{\lambda t} \Big(h_j + t h_{j-1} + \frac{t^2}{2} h_{j-2} + \cdots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} h_1 \Big) \quad (j = 1, \dots, p)$$

linear unabhängige Lösungen von $y' = Ay$. Wir brauchen davon nur die erste Komponente. Da die erste Komponente von h_j für $j = 1$ gleich 1 ist und für $j > 1$ verschwindet, erhalten wir

$$x_j(t) = e^{\lambda t} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \quad (j = 1, \dots, p)$$

für die ersten Komponenten. Wir können auf den Faktor $\frac{1}{(j-1)!}$ noch verzichten. Die ersten Komponenten sind linear unabhängig, da sonst auch die Vektoren y_j linear abhängig wären. □

© Robert Denk 4. 2. 2014

Bei speziellen Inhomogenitäten kann man eine partikuläre Lösung direkt hinschreiben:

3.17 Satz. *Betrachte die Dgl.*

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \cdots + a_k x(t) = t^s e^{\gamma t} \tag{3-5}$$

mit $s \in \mathbb{N}_0$ *und* $\gamma \in \mathbb{C}$. *Sei* γ *eine* p*-fache Nullstelle von* χ_A *mit* $p \in \mathbb{N}_0$, *d.h.* $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \gamma)^p \psi(\lambda)$ *mit* $\psi(\gamma) \neq 0$. *Dann ist*

$$x(t) := \frac{s!}{(p+s)!} \frac{\partial^{p+s}}{\partial \lambda^{p+s}} \Big(\frac{\exp(\lambda t)}{\psi(\lambda)} \Big) \Big|_{\lambda=\gamma}$$

eine partikuläre Lösung von (3-5).

Beweis. Betrachte den Differentialoperator

$$L \colon C^k(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to C(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ u \mapsto u^{(k)} + a_1 u^{(k-1)} + \cdots + a_k u =: \chi_A(D)u$$

mit

$$\chi_A(D) := D^k + a_1 D^{k-1} + \cdots + a_k D^0,\ D := \frac{d}{dt}.$$

Dann gilt für die Funktion $f(t) := e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ offensichtlich

$$(Lf)(t) = (\chi_A(D)f)(t) = \chi_A(\lambda) f(t) = (\lambda - \gamma)^p \psi(\lambda) f(t).$$

Somit

$$L\Big(\frac{1}{\psi(\lambda)} f \Big)(t) = (\lambda - \gamma)^p e^{\lambda t}.$$

Wir differenzieren die letzte Gleichung $(p+s)$-mal nach λ an der Stelle $\lambda = \gamma$. Auf der rechten Seite verwenden wir

$$\frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} (\lambda - \gamma)^p \Big|_{\lambda=\gamma} = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ p!, & j = p. \end{cases}$$

Mit der Produktregel erhält man für die oben definierte Funktion x:

$$\begin{aligned}
(Lx)(t) &= \frac{s!}{(p+s)!} L\Big[\frac{\partial^{p+s}}{\partial \lambda^{p+s}} \Big(\frac{\exp(\lambda t)}{\psi(\lambda)} \Big) \Big|_{\lambda=\gamma} \Big] \\
&= \frac{s!}{(p+s)!} \frac{\partial^{p+s}}{\partial \lambda^{p+s}} \Big[(\lambda - \gamma)^p e^{\lambda t} \Big] \Big|_{\lambda=\gamma} \\
&= \frac{s!}{(p+s)!} \binom{p+s}{p} p!\, t^s\, e^{\gamma t} \\
&= t^s\, e^{\gamma t}.
\end{aligned}$$

□

© Robert Denk 4. 2. 2014

3.18 Bemerkung (Leibniz-Formel)**.** Im letzten Beweis wurde die Produktregel gleich für höhere Ableitungen verwendet, die sogenannte Leibniz-Formel: Seien f, g n-fach differenzierbar. Dann gilt

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Diese Formel kann man leicht induktiv beweisen.

3.19 Bemerkung. Der obige Satz kann auch folgendermaßen angewendet werden: Man verwendet für die Lösung den Ansatz $x(t) = c_0 e^{\gamma t} + c_1 t e^{\gamma t} + \ldots + c_N t^N e^{\gamma t}$ mit $N := p + s$, wobei $c_1, \ldots, c_N$ noch unbekannt sind. Setzt man diesen Ansatz in die Gleichung ein, so kann man die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_N$ bestimmen.

Am einfachsten ist die Situation, wenn γ keine Nullstelle von χ_A ist und die rechte Seite die Form $e^{\gamma t}$ hat. Hier ist $N = 0$, und die Lösung hat die Form $c_0 e^{\gamma t}$.

Als Beispiel betrachten wir die Dgl.

$$y'' - y = te^{2t}.$$

Hier ist $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$ mit den beiden Nullstellen $+1, -1$. Hier ist $\gamma = 2$ keine Nullstelle von χ_A, d.h. es gilt $p = 0$ und $s = 1$ und damit $N = p + s = 1$. Der Ansatz für die Lösung lautet daher

$$x(t) = c_0 e^{2t} + c_1 t e^{2t}.$$

In die Dgl. eingesetzt, erhält man mit $x'(t) = (2c_1 + c_2)e^{2t} + 2c_2 te^{2t}$ und

$$x''(t) = (4c_1 + 4c_2)e^{2t} + 4c_2 te^{2t}$$

aus der Bedingung $x''(t) - x(t) = te^{2t}$ die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 4c_1 + 4c_2 - c_1 &= 0, \\ 4c_2 - c_2 &= 1 \end{aligned}$$

mit der Lösung $c_1 = -\frac{4}{9}$, $c_2 = \frac{1}{3}$.

Die direkte Anwendung der Formel aus Satz 3.17 liefert

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2 - 1}\right]\Big|_{\lambda=2} = \frac{(\lambda^2 - 1)te^{\lambda t} - 2\lambda e^{\lambda t}}{(\lambda^2 - 1)^2}\Big|_{\lambda=2} = -\frac{4}{9}e^{2t} + \frac{1}{3}te^{2t}.$$

3.20 Bemerkung. Bei Dgl. mit reellen Koeffizienten führen die bisherigen Ansätze auf komplexwertige Lösungen. Falls y eine Lösung von $y' = Ay$ ist, so ist auch $\operatorname{Re} y$

© Robert Denk 4. 2. 2014

und $\operatorname{Im} y$ eine Lösung. Wenn die Matrix A reell ist, treten komplexe Eigenwerte stets in konjugiert komplexen Paaren auf. Wegen

$$e^{\lambda t} = e^{\operatorname{Re}\lambda t}(\cos(\operatorname{Im}\lambda t) + i\sin(\operatorname{Im}\lambda t))$$

treten dann noch cos- und sin-Terme auf. Diese Überlegungen gelten analog für Dgl. höherer Ordnung.

3.21 Beispiel. Betrachte

$$x^{(4)}(t) - 2x''(t) + x(t) = 24\, t\sin t. \tag{3-6}$$

(i) Fundamentalsystem der homogenen Dgl.: Es ist

$$\chi_A(\mu) = \mu^4 - 2\mu^2 + 1 = (\mu-1)^2(\mu+1)^2.$$

Nach Satz 3.16 ist also

$$e^t,\ te^t,\ e^{-t},\ te^{-t}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.

(ii) Übergang zum Komplexen: Wegen $t\sin t = \operatorname{Im}(te^{it})$ betrachten wir zunächst die rechte Seite te^{it}.

(iii) Bestimmung einer partikulären Lösung: In der Bezeichnung von Satz 3.17 ist $s=1$, $\lambda = i$ und $p=0$. Damit ist $\psi(\lambda) = \chi_A(\lambda)$, und der Ansatz für die spezielle Lösung lautet für die Inhomogenität $t\,e^{it}$:

$$x_0(t) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\psi(\lambda)}\Big)\Big|_{\lambda=i} = \frac{\psi(\lambda)\lambda e^{\lambda t} - \psi'(\lambda)e^{\lambda t}}{\psi^2(\lambda)}\Big|_{\lambda=i} = \cdots = \frac{t+2i}{4}\,e^{it}.$$

Für die rechte Seite $24\,te^{it}$ erhalten wir damit die komplexwertige spezielle Lösung

$$\begin{aligned} 24x_0(t) &= (6t+12i)e^{it} = (6t+12i)(\cos t + i\sin t) \\ &= (6t\cos t - 12\sin t) + i(6t\sin t + 12\cos t). \end{aligned}$$

(iv) Rückkehr zur reellen Lösung: Da die ursprüngliche rechte Seite der Imaginärteil der in (iii) betrachteten Inhomogenität war, ist auch der Imaginärteil von $x_0(t)$ eine partikuläre Lösung der ursprünglichen Gleichung. Somit ist

$$\operatorname{Im} 24x_0(t) = 6t\sin t + 12\cos t$$

eine spezielle Lösung von (3-6).

(v) Allgemeine Lösung: Die allgemeine Lösung ist somit gegeben durch

$$x(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + c_4te^{-t} + 6t\sin t + 12\cos t$$

mit Konstanten $c_j \in \mathbb{C}$.

© Robert Denk 4. 2. 2014

© Robert Denk 4. 2. 2014

4. Zur Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

4.1 Worum geht's? In Anwendungen auftretende Differentialgleichungen können nur selten explizit gelöst werden, daher müssen numerische Verfahren verwendet werden. Hier soll nur ein erster Eindruck in einige einfache Verfahren vermittelt werden; in der Praxis (z.B. in Matlab) verwendete Methoden bauen üblicherweise darauf auf.

a) Grundbegriffe und explizite Einschrittverfahren

Im folgenden sei stets $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $f\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Wir betrachten das AWP

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0. \tag{4-1}$$

Wir setzen dabei voraus, dass f global Lipschitz-stetig ist, d.h. wir haben die eindeutige Lösbarkeit von (4-1).

Die Idee des expliziten Euler-Verfahrens besteht darin, die Ableitung $y'(t)$ durch den Differenzenquotienten zu approximieren. Dabei wählt man eine Partition $t_0 < t_1 < \dots$ des Zeitintervalls und setzt

$$y'(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\ .$$

Im einfachsten Fall ist $t_i = t_0 + h \cdot i$ mit einer festen Schrittweite $h > 0$. In die Differentialgleichung eingesetzt, erhält man Näherungswerte y_i als Näherung für die (unbekannte) Lösung $y(t_i)$. Wir erhalten mit obiger Näherung die Rekursion

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(t_i, y_i),$$

d.h.

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

mit dem Startwert $y_0 = y(t_0)$.

Allgemeiner hat ein explizites Einschrittverfahren die Form

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, h) \quad (i = 0, 1, \dots),$$

wobei $\Phi(t_i, y_i, h)$ eine Näherung für den Differenzenquotienten $\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h}$ ist.

© Robert Denk 4. 2. 2014

4.2 Definition. a) Zu $t_1 \in I$ und $y_1 \in \mathbb{R}^n$ sei $y(t)$ die exakte Lösung von $y' = f(t,y)$, $y(t_1) = y_1$. Definiere

$$\Delta(t_1, y_1, h) := \begin{cases} \frac{y(t_1+h)-y(t_1)}{h}, & h > 0, \\ f(t_1, y_1), & h = 0. \end{cases}$$

Dann heißt

$$\tau(t_1, y_1, h) := \Delta(t_1, y_1, h) - \Phi(t_1, y_1, h)$$

der lokale Diskretisierungsfehler des Verfahrens Φ.

b) Das Verfahren Φ heißt konsistent, falls $\lim_{h\to 0} \tau(t_1, y_1, h) = 0$ für alle genügend glatten rechten Seiten f gilt.

c) Das Verfahren Φ heißt ein Verfahren der Ordnung $p \geq 1$, falls $\tau(t_1, y_1, h) = O(h^p)$ für $h \to 0$ gilt.

d) Für $t = t_0 + ih$ sei $\widetilde{y}(t) = y_i$ die Näherung für die exakte Lösung y beim Verfahren Φ. Dann heißt $e(t,h) := \widetilde{y}(t) - y(t)$ der globale Diskretisierungsfehler von Φ. Das Verfahren Φ heißt konvergent, falls $\lim_{h\to 0} e(t,h) = 0$. Analog wird die Konvergenzordnung definiert.

In dieser Definition wurde die O-Schreibweise verwendet: Man schreibt $f(h) = O(g(h))$ (Sprechweise: „$f(h)$ ist groß O von $g(h)$“), falls $|f(h)| \leq C|g(h)|$ für eine Konstante $C > 0$ gilt. Es gibt auch die o-Notation: Es ist $f(h) = o(g(h))$ („klein o“), falls $\frac{|f(h)|}{|g(h)|} \to 0$ $(h \to 0)$.

4.3 Beispiel (Euler-Verfahren)**.** Hier ist $\Phi(t_1, y_1, h) = f(t_1, y_1)$, wie oben bereits diskutiert wurde. Um den Fehler dieses Verfahrens abzuschätzen, entwickelt man die *exakte* Lösung y in eine Taylorreihe:

$$y(t_1 + h) = y(t_1) + hy'(t_1) + \frac{h^2}{2} y''(\xi), \quad t_1 \leq \xi \leq t_1 + h.$$

Der lokale Diskretisierungsfehler ergibt sich damit als

$$\begin{aligned} \tau(t_1, y_1, h) &= \Delta(t_1, y_1, h) - \Phi(t_1, y_1, h) \\ &= \frac{y(t_1 + h) - y(t_1)}{h} - \underbrace{f(t_1, y_1)}_{=y'(t_1)} \\ &= \frac{h}{2} y''(\xi) \\ &= \frac{h}{2} \Big(\frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t)) \Big) \Big|_{t=\xi} \\ &= O(h), \end{aligned}$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

da die ersten Ableitungen von f für genügend glatte Funktionen (z.B. $f \in C^1(\mathbb{R})$) in der Nähe von t_1 beschränkt sind. Somit besitzt das Euler-Verfahren die Konsistenzordnung 1.

4.4 Beispiel (Verfahren von Heun)**.** Hier ist

$$\Phi(t_1, y_1, h) = \frac{1}{2}\Big[f(t_1, y_1) + f(t_1 + h, y_1 + hf(t_1, y_1)\Big].$$

Für den lokalen Diskretisierungsfehler erhält man damit

$$\begin{aligned}\tau(t_1, y_1, h) &= \frac{y(t_1 + h) - y(t_1)}{h} - \Phi(t_1, y_1, h)\\ &= y'(t_1) + \frac{h}{2}y''(t_1) + \frac{h^2}{3!}\,y^{(3)}(t_1) - \frac{1}{2}f(t_1, y_1)\\ &\quad - \frac{1}{2}\Big[f(t_1, y_1) + h\big(\partial_1 f(t_1, y_1) + \partial_2 f(t_1, y_1) \cdot f(t_1, y_1)\big) + O(h^2)\Big]\\ &= \frac{h}{2}\Big[y''(t_1) - \big(\partial_1 f(t_1, y_1) + \partial_2 f(t_1, y_1) \cdot f(t_1, y_1)\Big] + O(h^2).\end{aligned}$$

Da y die exakte Lösung der Differentialgleichung ist, gilt $y'(t_1) = f(t_1, y(t_1))$. Leitet man diese Gleichheit ab, erhält man

$$\begin{aligned}y''(t_1) &= \frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t))\Big|_{t=t_1}\\ &= \partial_1 f(t_1, y(t_1)) + \partial_2 f(t_1, y(t_1)) \cdot y'(t_1)\\ &= \partial_1 f(t_1, y(t_1)) + \partial_2 f(t_1, y(t_1)) \cdot y'(t_1).\end{aligned}$$

Damit ist die obige Klammer $[\cdot]$ gleich Null, und man erhält

$$\tau(t_1, y_1, h) = O(h^2) \quad (h \to 0).$$

Das Heun-Verfahren hat somit die Konsistenzordnung 2.

4.5 Beispiel (Runge-Kutta-Verfahren)**.** Ein Runge-Kutta-Verfahren der Stufe s mit $s \in \mathbb{N}$ wird folgendermaßen konstruiert:

$$y_{i+1} := y_i + h\Phi(t_i, y_i, h) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

mit

$$\Phi(t_i, y_i, h) = \sum_{m=1}^{s} b_m k_m, \quad k_m = f\Big(t_i + c_m h, y_i + h\sum_{j=1}^{m-1} a_{mj} k_j\Big) \quad (m = 1, \dots, s).$$

Hier sind $a_{mj} \in \mathbb{R}$ $(1 \le m < j \le s)$, $b_m, c_m \in \mathbb{R}$ $(1 \le m \le s)$ mit $c_1 = 0$. Anschaulich bedeutet dies, dass Φ eine Linearkombination verschiedener Werte von

© Robert Denk 4. 2. 2014

f an den Stellen $t = t_i + c_m \cdot h$ und geeignete Werte von y ist. Üblicherweise ist $\sum_{j=1}^{m-1} a_{mj} = c_m$.

a) Die Wahl $c_1 = 0, c_2 = 1, a_{21} = 1, b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ liefert

$$\Phi(t_i, y_i, h) = \frac{1}{2}\big(f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i))\big).$$

Das ist das Verfahren von Heun. Während beim Euler-Verfahren der Differenzenquotient Δ durch $\Phi = f(t_i, y_i) \approx y'(t_i)$ approximiert wird, verwendet das Verfahren von Heun den Mittelwert von $f(t_i, y_i) \approx y'(t_i)$ und $f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i)) \approx y'(t_i + h)$.

Beim Verfahren von Heun wird also für einen Schritt die rechte Seite zweimal ausgewertet, was etwa den doppelten Aufwand bedeutet. Dafür erzielt man eine Konsistenzordnung von 2. Man beachte, dass es sich nach wie vor um ein Einschrittverfahren handelt, da nur der Wert von y_i für die Berechnung von y_{i+1} verwendet wird.

Verfahren vom Runge-Kutta-Typ werden manchmal schematisch aufgeschrieben. Beim Heun-Verfahren ist das Schema gegeben durch

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

b) Das klassische Runge-Kutta-Verfahren besitzt Stufe $s = 4$ und ist von Konsistenzordnung 4. Das zugehörige Schema ist gegeben durch

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

In expliziter Form erhält man folgendes Verfahren: $\Phi(t_i, y_i, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1), \\ k_3 &= f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2), \\ k_4 &= f(t_i + h, y_i + hk_3). \end{aligned}$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Der lokale Diskretisierungsfehler kann wie in den obigen Beispielen durch Analyse des Verfahrens bestimmt werden (im wesentlichen unter Verwendung der Taylorreihe), während der globale Diskretisierungsfehler für die Anwendung des Verfahrens entscheidend ist. Bei Einschrittverfahren gibt es hier einen einfachen Zusammenhang:

4.6 Satz (Konvergenz von Einschrittverfahren)**.** *Falls die Funktion $\Phi(t,y,h)$ eines Einschrittverfahrens Lipschitz-stetig in der Variablen y ist, so ist die (lokale) Konsistenzordnung gleich der (globalen) Konvergenzordnung. So ist z.B. das Euler-Verfahren konvergent von Ordnung 1, das Heun-Verfahren von Ordnung 2 und das klassische Runge-Kutta-Verfahren von Ordnung 4.*

4.7 Bemerkung. a) Nach Satz 5.6 gilt für ein Verfahren der Ordnung p für den globalen Diskretisierungsfehler die Abschätzung $|e(t,h)| \le Ch^p$. Die Konstante C hängt von den Ableitungen der Funktion f auf der rechten Seite ab, welche in Anwendungen nicht bekannt sind. Damit ist die Abschätzung theoretischer Natur, d.h. man kann die Schrittweite nicht im Voraus so bestimmen, dass der globale Fehler unter einer gegebenen Toleranzschranke liegt.

b) Falls die rechte Seite f nur stückweise glatt ist, stimmen die obigen Abschätzungen nicht mehr. Daher an diesen Stellen neu starten!

c) Bei Runge-Kutta-Verfahren führt die Bedingung einer Konsistenzordnung auf ein nichtlineares und unterbestimmtes Gleichungssystem für die Koeffizienten des Verfahrens.

4.8 Bemerkung (Schrittweitensteuerung nach Fehlberg)**.** Für ein praktikables Verfahren muss man die Schrittweite h so bestimmen, dass eine gewisse Fehlertoleranz eingehalten wird. Nach einer Idee von Fehlberg verwendet man dazu zwei Verfahren mit gleicher Schrittweite und unterschiedlicher Ordnung: Sei Φ ein Verfahren der Ordnung p und $\hat\Phi$ ein Verfahren der Ordnung $p+1$. Man berechnet die Näherungen

$$\begin{aligned}\overline{y}_{i+1} &:= \overline{y}_i + h_i\Phi(t_i,\overline{y}_i,h_i),\\ \hat{y}_{i+1} &:= \overline{y}_i + h_i\hat\Phi(t_i,\overline{y}_i,h_i).\end{aligned}$$

Für den lokalen Diskretisierungsfehler gilt dann

$$\begin{aligned}\overline{\tau}_{i+1} &:= \Phi(t_i,\overline{y}_i,h_i) - \Delta(t_i,\overline{y}_i,h_i) = \overline{C}(t_i)h_i^p + O(h_i^{p+1}),\\ \hat{\tau}_{i+1} &:= \hat\Phi(t_i,\overline{y}_i,h_i) - \Delta(t_i,\overline{y}_i,h_i) = \hat{C}(t_i)h_i^{p+1} + O(h_i^{p+2}).\end{aligned}$$

Die Konstanten $\overline{C}(t_i)$ und $\hat{C}(t_i)$ hängen von t_i ab, ändern sich aber üblicherweise wenig, d.h. man hat $\overline{C}(t_i) \approx \overline{C}(t_{i-1})$. Für kleine h_i ist der Fehler $\hat\tau_{i+1}$ wesentlich kleiner. Es gilt

$$\frac{\overline{y}_{i+1} - \hat{y}_{i+1}}{h_i^{p+1}} = \frac{|\Phi(t_i,\overline{y}_i,h_i) - \hat\Phi(t_i,\overline{y}_i,h_i)|}{h_i^p}$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

$$= \frac{|\overline{\tau}_{i+1} - \hat{\tau}_{i+1}|}{h_i^p}$$
$$\approx \frac{|\overline{\tau}_{i+1}|}{h_i^p} = \overline{C}(t_i).$$

Damit erhält man

$$\frac{|\overline{y}_{i+1} - \hat{y}_{i+1}|}{h_i^{p+1}} \approx \frac{|\overline{y}_i - \hat{y}_i|}{h_{i-1}^{p+1}}.$$

Dies ist eine implizite Bedingung an die neue Schrittweite h_i.

Eine einfachere Bedingung ergibt sich aus der Forderung $|\overline{y}_{i+1} - \hat{y}_{i+1}| < \mathrm{TOL}$ für eine gegebene (skalierte!) Toleranz TOL. In obige Approximation eingesetzt, erhält man

$$h_i < h_{i-1}\Big(\frac{\mathrm{TOL}}{|\overline{y}_i - \hat{y}_i|}\Big)^{1/(p+1)}.$$

Verlangt man dagegen $|\overline{\tau}_{i+1}| \approx \frac{|\overline{y}_{i+1} - \hat{y}_{i+1}|}{h_i} < \mathrm{TOL}$, so erhält man

$$h_i < h_{i-1}\Big(\frac{h_{i-1} \cdot \mathrm{TOL}}{|\overline{y}_i - \hat{y}_i|}\Big)^{1/p}.$$

In der Praxis werden raffiniertere Schrittweitensteuerungen verwendet. Standardverfahren sind RKF (=Runge-Kutta-Fehlberg)-Verfahren der Ordnung 4/5 und 2/3. In Matlab sind diese implementiert in der Funktion `ode45` bzw. `ode23`.

b) Mehrschrittverfahren

4.9 Bemerkung. Sei $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. Integriert man diese Differentialgleichung über das Intervall $[t_i, t_{i+1}]$, so erhält man

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, y(t))dt.$$

Hier sieht man, dass die bisher behandelten Einschrittverfahren durch Näherung des Integrals entsteht: Man ersetzt das Integral durch die Näherung $(t_i - t_{i-1})\Phi(t_{i-1}, y_{i-1}, h_{i-1})$. Den bisher behandelten Verfahren ist gemeinsam, dass nur der Wert von y_{i-1} für die Berechnung von y_i verwendet wird.

Bei Mehrschrittverfahren approximiert man das Integral in

$$y(t_i) - y(t_{i-s}) = \int_{t_{i-s}}^{t_i} f(t, y(t))dt$$

durch eine Näherung, welche die bereits berechneten Näherungswerte $y_{i-1}, y_{i-2}, \ldots, y_{i-s}$ verwendet. So kann man etwa den Integranden durch ein Polynom ersetzen, das

© Robert Denk 4. 2. 2014

durch die Punkte (t_k, y_k) mit $k = i - s, \dots, i$ geht. Diese Aufgabe, durch gegebene Punkte ein Polynom zu legen, nennt man Interpolation. Es gilt folgender grundlegender Satz:

4.10 Satz (Interpolation). *Seien $t_0, \dots, t_N \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $y_0, \dots, y_N \in \mathbb{R}$ Dann existiert genau ein Polynom P vom Grad nicht größer als N mit $P(t_i) = y_i \quad (i = 0, \dots, N)$. Dieses ist gegeben durch*

$$P(t) = \sum_{i=0}^{N} y_i L_i(t)$$

mit den Lagrange-Faktoren

$$L_i(t) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} \, .$$

Man beachte, dass für die Lagrange-Faktoren gilt:

$$L_i(t_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Wählt man für Mehrschrittverfahren äquidistante Stützstellen $t_i = t_0 + ih$ mit Schrittweite h, so erhält man eine lineare Rekursion für y_i. Integriert wird dabei über das Intervall $[t_{i-s}, t_i]$ mit $s \in \mathbb{N}$. Das Polynom P wird so gewählt, dass

$$P(t_j) = y_j \quad (j = k - m, k - m + 1, \dots, k)$$

gilt. Hierbei ist $k \leq i$ und m bestimmt den Grad des Polynoms. Je nach Wahl von s, k und m erhält man verschiedene Verfahren. Alle haben die Form

$$y_i = y_{i-s} + h \sum_{j=k-m}^{k} \beta_j f(t_j, y_j).$$

4.11 Beispiel (Adams-Bashforth-Verfahren). Hier ist $s = 1$ und $k = i - 1$. Man erhält

$$y_i = y_{i-1} + h \sum_{j=i-1-m}^{i-1} \beta_j f(t_j, y_j) \quad (i = m + 1, m + 2, \dots). \tag{4-2}$$

Die Koeffizienten β_i sind gegeben durch Integrale über Lagrange-Faktoren; genauer ist

$$\beta_j = \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \prod_{\substack{\ell=i-1-m \\ \ell \neq j}}^{i-1} \frac{t - t_\ell}{t_j - t_\ell} \, dt$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

$$= \frac{1}{h}\int_{t_i-h}^{t_i} \prod_{\substack{\ell=i-1-m\\ \ell\neq j}}^{i-1} \frac{t-t_0-lh}{(t_0-jh)-(t_0-lh)}\,dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} \prod_{\substack{\ell=-1-m\\ \ell\neq j}}^{-1} \frac{t-lh}{(j-\ell)h}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{0} \prod_{\substack{\ell=-1-m\\ \ell\neq j}}^{-1} \frac{t-\ell}{j-\ell}\,dt.$$

Man sieht, dass β_j nicht von h abhängt. Da der Term y_i auf der rechten Seite von (4-2) nicht auftaucht, handelt es sich um ein explizites Verfahren. Schreibt man $f_j := f(t_j, y_j)$, so lauten die einfachsten Adams-Bashforth-Verfahren

$$\begin{aligned} m=0: &\quad y_i = y_{i-1} + hf_{i-1},\\ m=1: &\quad y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(3f_{i-1} - f_{i-2}),\\ m=2: &\quad y_i = y_{i-1} + \frac{h}{12}(23f_{i-1} - 16f_{i-2} + 5f_{i-3}). \end{aligned}$$

Man beachte, dass man für $m = 0$ wieder das Euler-Verfahren erhält.

4.12 Beispiel (Adams-Moulton-Verfahren)**.** Hier ist $s = 1$ und $k = i$, d.h. das Verfahren hat die Form

$$y_i = y_{i-1} + h\sum_{j=i-m}^{i} \beta_j f(t_j, y_j) \quad (i = m+1, m+2, \dots).$$

Hier taucht der unbekannte Wert y_i auf der rechten Seite wieder auf, d.h. es handelt sich um ein implizites Verfahren. Die Koeffizienten β_j sind wie beim Adams-Bashforth-Verfahren durch Integration gewisser Lagrange-Faktoren explizit bestimmbar und hängen nicht von h ab. Die einfachsten Verfahren lauten

$$\begin{aligned} m=0: &\quad y_i = y_{i-1} + hf_i,\\ m=1: &\quad y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(f_i + f_{i-1}),\\ m=2: &\quad y_i = y_{i-1} + \frac{h}{12}(5f_i + 8f_{i-1} - f_{i-2}). \end{aligned}$$

Das erste Verfahren $y_i = y_{i-1} + hf(t_i, y_i)$ heißt auch implizites Euler-Verfahren, für $m = 1$ spricht man von der Trapezregel.

Weitere Beispiele sind Nyström-Verfahren ($s = 2$ und $k = i - 1$, explizit) und die Milne-Simpson-Verfahren ($s = 2$ und $k = i$, implizit).

© Robert Denk 4. 2. 2014

4.13 Bemerkung. Jedes lineare Mehrschrittverfahren mit äquidistanten Stützstellen hat die Form

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_{i-j} + h \sum_{j=k-m}^{k} \beta_j f(t_j, y_j) =: \Phi(t_i, h, y_{i-m}, y_{i-m+1}, \ldots, y_i) \tag{4-3}$$

Zur Definition der Konsistenzordnung betrachtet man zu einem beliebigen $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ mit exakter Lösung $y(t)$. Dann heißt das Verfahren konsistent von Ordnung $p \in \mathbb{N}$, falls

$$\tau := \frac{1}{h}\big(y(t_i) - \Phi(t_i, h, y(t_{i-m}), \ldots, y(t_i)\big) = O(h^p) \quad \text{für } h \to 0$$

gilt. Ein Verfahren heißt konvergent von Ordnung p, falls $y(t_i) - y_i = O(h^p)$ für $h \to 0$ gilt. Die Konsistenzordnung kann leicht bestimmt werden durch eine Fehlerabschätzung für die verwendete Interpolation.

Das Verfahren

$$y_i := 5y_{i-2} - 4y_{i-1} + 2h\big[f(t_{i-2}, y_{i-2}) + 2f(t_{i-1}, y_{i-1})\big]$$

ist ein Verfahren der Konsistenzordnung 3, d.h. es gilt $\tau = O(h^3)$ für $h \to 0$. Wendet man dieses Verfahren auf die Differentialgleichung $y' = -y$ mit $y(0) = 1$ an, so erhält man bei 30-stelliger Rechnung in Maple mit exaktem y_1 und $h = 10^{-2}$ folgende Tabelle:

i	0	1	2	3	…	10	…	100
t_i	0	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	…	0.1	…	1
$y_i - y(t_i)$	0	0	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$-5 \cdot 10^{-8}$	…	$4 \cdot 10^{-4}$	…	$6 \cdot 10^{59}$

Bei Mehrschrittverfahren bedeutet also Konsistenz nicht Konvergenz! Der Grund dafür liegt in der sogenannten Instabilität des Verfahrens.

4.14 Definition. Ein lineares Mehrschrittverfahren der Form (4-3) heißt stabil, falls für das charakteristische Polynom

$$\psi(\lambda) := \lambda^m + \alpha_1 \lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda + \alpha_m$$

gilt: Alle Nullstellen haben Betrag nicht größer als 1, und alle Nullstellen mit Betrag 1 sind einfach.

4.15 Satz (Konvergenz von Mehrschrittverfahren)**.** *Falls ein lineares Mehrschrittverfahren stabil und konsistent von Ordnung p ist, so ist es auch konvergent von Ordnung p.*

© Robert Denk 4. 2. 2014

c) Steife Differentialgleichungen

4.16 Beispiel. Betrachte das Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(0) = \binom{1}{0}$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind -1 und -1000, die exakte Lösung ist

$$y(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-1000t} \\ -e^{-t} + e^{-1000t} \end{pmatrix}.$$

Wendet man das Euler-Verfahren $y_{i+1} := (I + hA)y_i \quad (i \in \mathbb{N}_0)$ an, so erhält man explizit

$$y_{i+1} = \begin{pmatrix} 2(1-h)^i - (1-1000h)^i \\ -(1-h)^i + (1-1000h)^i \end{pmatrix}.$$

Für $y_i \to 0 \quad (i \to \infty)$ muss somit $|1-h| < 1$ und $|1-1000h| < 1$ gelten, d.h. $h < 2$ bzw. $h < \frac{2}{1000}$. Obwohl der Lösungsanteil e^{-1000t} nichts zur Lösung beiträgt, zwingt er zur Wahl einer extrem kleinen Schrittweite und damit zu sehr hohem Rechenaufwand. Das Euler-Verfahren (wie auch die meisten anderen bisher besprochenen Verfahren) kann also nicht zur numerischen Lösung derartiger Systeme verwendet werden. Das obige Anfangswertproblem ist ein Beispiel einer steifen Differentialgleichung.

4.17 Definition. a) Ein konstantes Differentialgleichungssystem der Form $y' = Ay$ heißt steif, falls A mindestens einen Eigenwert λ mit $\operatorname{Re}\lambda < 0$ und $|\operatorname{Re}\lambda| \gg 1$ besitzt und falls

$$S(A) := \frac{\max_j |\operatorname{Re}\lambda_j(A)|}{\min_j |\operatorname{Re}\lambda_j(A)|}$$

groß ist (in der Praxis auftretende Werte sind $S(A) \approx 10^3 \ldots 10^6$).

b) Ein Anfangswertproblem $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ heißt steif, falls für die Jacobimatrix $A := D_y f(t, y(t))$ der Wert $S(A)$ groß ist.

4.18 Bemerkung. Wendet man ein (explizites oder implizites) Einschrittverfahren auf das skalare Modellproblem $y' = \lambda y$ an, so erhält man häufig eine Rekursion $y_{i+1} = g(\lambda h)y_i$. In diesem Fall heißt $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Stabilitätsfunktion des Verfahrens.

Das Euler-Verfahren besitzt die Stabilitätsfunktion $g(z) = 1 + z$, für das implizite Euler-Verfahren ist $g(z) = \frac{1}{1-z}$. Falls für ein Verfahren gilt $|g(z)| < 1$ für alle z mit $\operatorname{Re} z < 0$, so erhält man bei Anwendung auf das Modellproblem $y' = \lambda y$ mit $\operatorname{Re}\lambda < 0$ stets eine Nullfolge. In diesem Fall heißt das Verfahren A-stabil (absolut stabil). Allgemein bestimmt das absolute Stabilitätsgebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : |g(z)| < 1\}$ das Stabilitätsverhalten des Verfahrens.

© Robert Denk 4. 2. 2014

Das explizite Euler-Verfahren ist nicht A-stabil, denn hier ist $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-1)| < 1\}$. Hingegen besitzt das implizite Euler-Verfahren das Stabilitätsgebiet $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > 1\}$ und ist somit A-stabil. Das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung ist ebenfalls nicht A-stabil; man sieht leicht, dass kein explizites Verfahren A-stabil sein kann.

© Robert Denk 4. 2. 2014

5. Stabilität

5.1 Worum geht's? Für viele Anwendungen ist nicht nur die Frage der eindeutigen Lösbarkeit einer Dgl. wichtig, sondern auch die Frage, wie sich die Lösungen verhalten. Insbesondere die Stabilität der Lösungen, d.h. das Verhalten der Lösung für $t \to \infty$ ist wichtig. Eine Lösung heißt stabil, falls eine kleine Abweichung im Anfangswert eine (für alle Zeiten) kleine Abweichung in der Lösung bewirkt. Man beachte, dass kleine Abweichungen in den Daten in den Anwendungen stets vorhanden sind.

Die Stabilität der Lösung einer gewöhnlichen Dgl. (und erst recht einer partiellen Dgl.) ist sehr schwer zu beweisen. Es gibt kein allgemein gültiges Rezept, diese Frage zu beantworten. Falls man jedoch Glück hat, kann man eine Ljapunov-Funktion zur Dgl. finden und somit die Stabilität beweisen. Dieser Abschnitt soll nur einen kurzen Einblick in dieses Themengebiet liefern.

Bei der qualitativen Beschreibung des Lösungsverhaltens von Dgl. werden einige Begriffe üblicherweise verwendet, die in folgender Definition zusammengestellt werden.

5.2 Definition. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (t \in J),\ y(t_0) = y^0. \tag{5-1}$$

mit $f\colon J \times X \to X$, $X := \mathbb{R}^n$.

Der Raum X heißt der Zustandsraum oder Phasenraum.

Sei nun das Anfangswertproblem (5-1) eindeutig lösbar und $t_0 \in J$ fest. Dann heißt die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R} \times X \to X,\ (t, y^0) \mapsto \Phi(t, y^0) := y(t)$$

der Fluss der Dgl. (wobei y wieder die Lösung des Anfangswertproblems ist). Der zugehörige Wertebereich

$$\gamma(y^0) := \{\Phi(t, y^0) : t \in J\}$$

heißt der Orbit (oder Phasenkurve, Trajektorie). Ein $y^0 \in X$ heißt ein Fixpunkt, falls gilt

$$\Phi(t, y^0) = y^0 \quad (t \in J).$$

Offensichtlich ist y^0 genau dann ein Fixpunkt, wenn

$$f(t, y^0) = 0 \quad (t \in J).$$

In diesem Fall heißt y^0 ein singulärer Punkt von f. So besitzt z.B. die logistische Gleichung

$$y'(t) = y(t)(y(t) - 1)$$

die singulären Punkte $y^0 = 0$ und $y^0 = 1$.

© Robert Denk 4. 2. 2014

5.3 Beispiel. Die Dgl.

$$x'' + x = 0$$

(ungedämpftes lineares Pendel) ist äquivalent zum System

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix},$$

wobei wie üblich $y := \binom{x}{x'}$ gesetzt wurde. Zu $y^0 \in \mathbb{R}^2$ ist die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay,\ y(0) = y^0$ gegeben durch

$$\Phi(t, y^0) = y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} y^0.$$

Damit ist der Orbit periodisch mit Periode 2π.

5.4 Beispiel (Orbits bei 2×2-Matrizen)**.** Das qualitative Verhalten lässt sich gut beschreiben, falls man die lineare Dgl. $y' = Ay$ mit einer konstanten 2×2-Matrix A betrachtet. Die Lösung ist natürlich durch $y(t) = \exp(tA)y(t_0)$ gegeben, das qualitative Verhalten wird durch die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ von A bestimmt. Wir sehen an den Phasenportraits (Orbits) der Lösung folgende Möglichkeiten:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: Quelle (siehe Abbildung 7).
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d.h. $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: Senke (siehe Abbildung 8).
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d.h. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$: instabiler Sattelpunkt (siehe Abbildung 9).
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. doppelter Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ mit einfacher geometrischer Vielfachheit (Jordan-Normalform): instabiler eintangentiger Knoten (siehe Abbildung 10).
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d.h. doppelter Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ mit einfacher geometrischer Vielfachheit (Jordan-Normalform): stabiler eintangentiger Knoten (siehe Abbildung 11).
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, d.h. zwei rein imaginäre (und zueinander konjugiert komplexe) Eigenwerte $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$: Zentrum oder Wirbelpunkt (siehe Abbildung 12).

© Robert Denk 4. 2. 2014

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. zwei komplexe (und zueinander konjugierte) Eigenwerte $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ mit $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$: instabiler Strudelpunkt (siehe Abbildung 13).
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, d.h. zwei komplexe (und zueinander konjugierte) Eigenwerte $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ mit $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$: stabiler Strudelpunkt (siehe Abbildung 14).

5.5 Definition. Eine Lösung y des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y^0$$

heißt stabil, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Lösungen x des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x^0$$

mit $|x^0 - y^0| < \delta$ gilt:

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon \quad (t \in [0, \infty)).$$

Die Lösung y heißt instabil, falls sie nicht stabil ist.

Die Lösung y heißt asymptotisch stabil, falls sie stabil ist und falls für x wie oben zusätzlich gilt

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = 0.$$

In obigen Beispielen ist etwa ein Wirbelpunkt stabil, eine Senke ist asymptotisch stabil, eine Quelle ist instabil. Allgemein ist die triviale Lösung $y = 0$ der Dgl. $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann

- instabil, falls ein Eigenwert λ von A existiert mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ oder falls ein Eigenwert λ von A existiert mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$, für welchen die algebraische Vielfachheit größer ist als die geometrische Vielfachheit,
- stabil, falls für alle Eigenwerte λ von A gilt: $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ und für alle Eigenwerte λ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$ die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit ist,
- asymptotisch stabil, falls für alle Eigenwerte λ gilt $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

© Robert Denk 4. 2. 2014

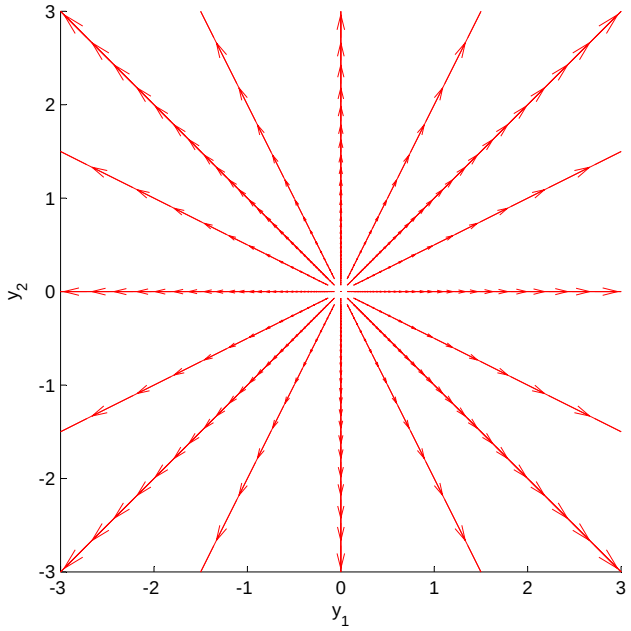


Abbildung 7: Orbits bei zwei positiven Eigenwerten (Quelle)

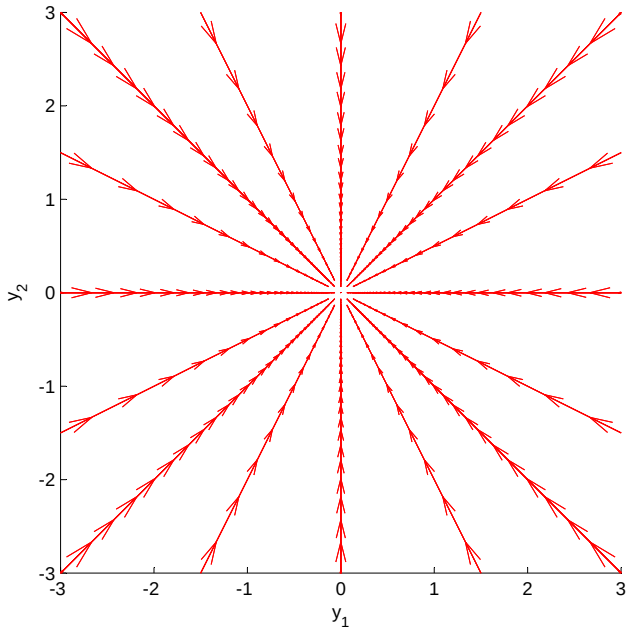


Abbildung 8: Orbits bei zwei negativen Eigenwerten (Senke)

© Robert Denk 4. 2. 2014

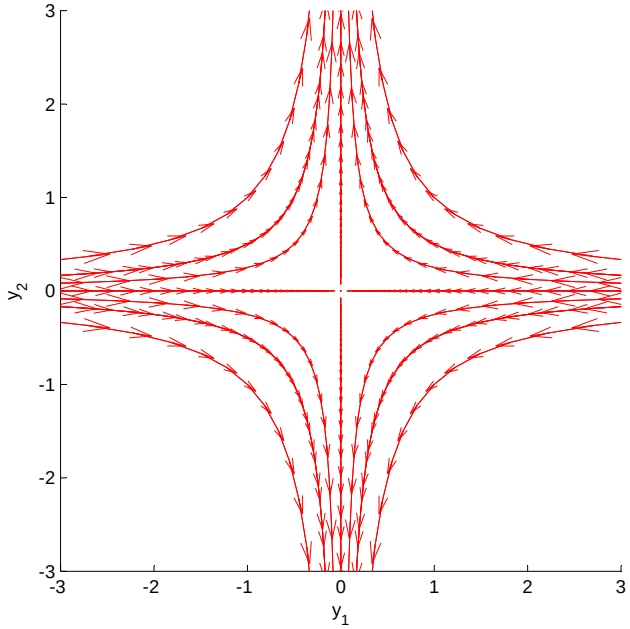


Abbildung 9: Ein positiver und ein negativer Eigenwert (instabiler Sattelpunkt)

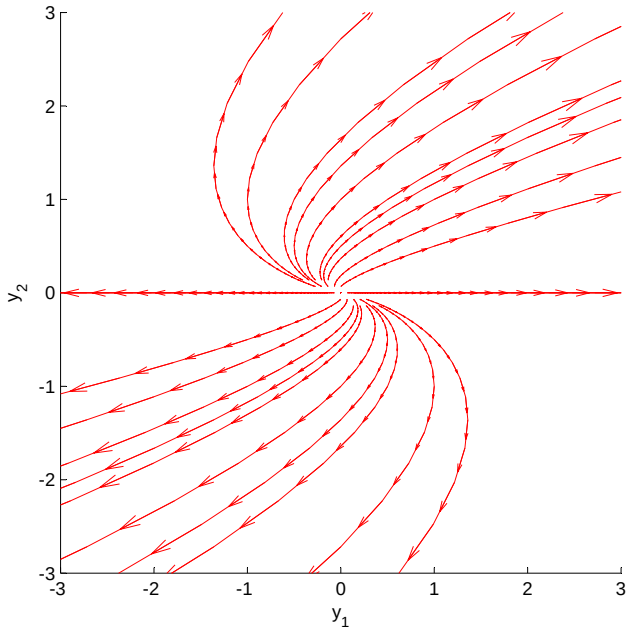


Abbildung 10: Doppelter positiver Eigenwert mit Jordan-Normalform (instabiler eintangentiger Knoten)

© Robert Denk 4. 2. 2014

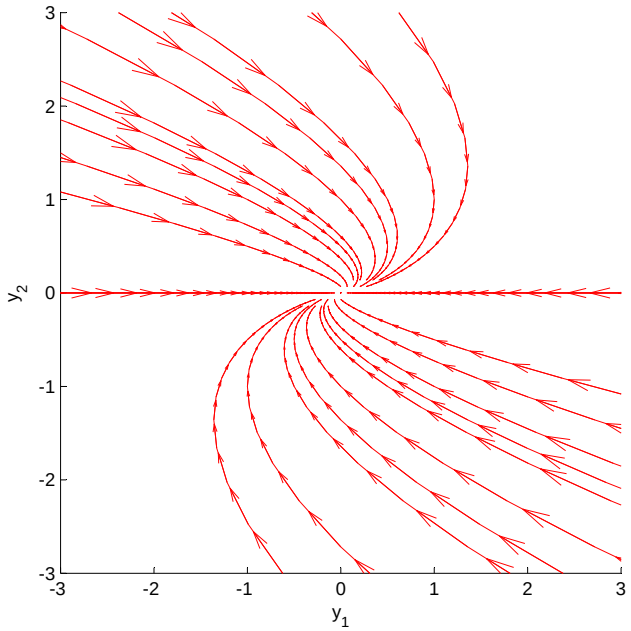


Abbildung 11: Doppelter negativer Eigenwert mit Jordan-Normalform (stabiler eintangentiger Knoten)

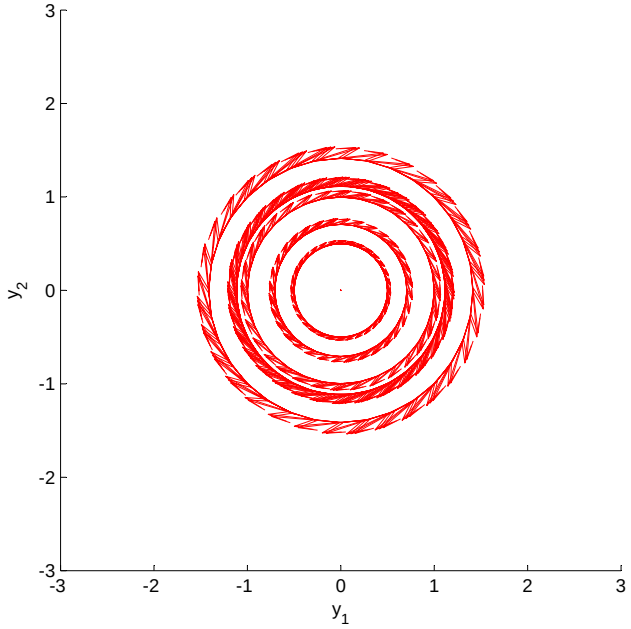


Abbildung 12: Rein imaginärer Eigenwert (Wirbelpunkt)

© Robert Denk 4. 2. 2014

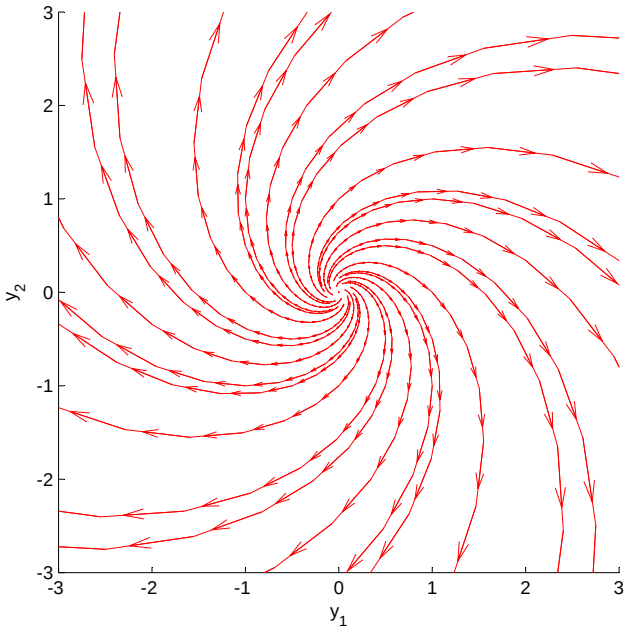


Abbildung 13: Zwei komplexe Eigenwerte mit positivem Realteil (instabiler Strudelpunkt)

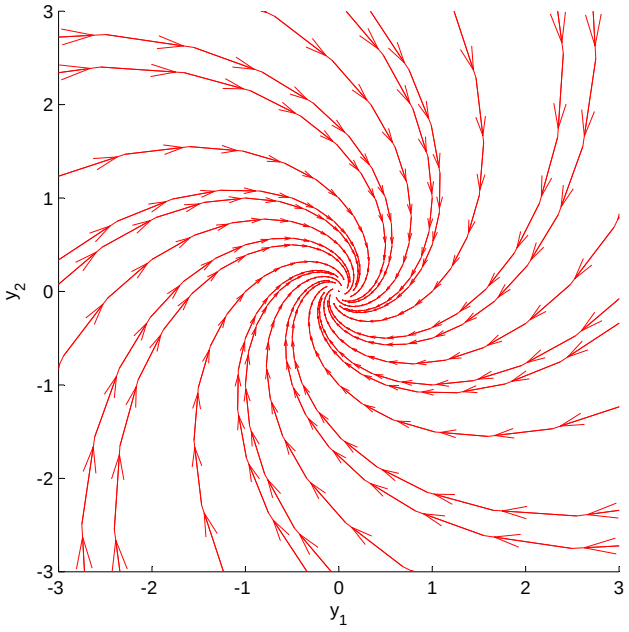


Abbildung 14: Zwei komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil (stabiler Strudelpunkt)

© Robert Denk 4. 2. 2014

5.6 Beispiel. Betrachte die Dgl. einer gedämpften Schwingung

$$y''(t) + y(t) + ry'(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

mit $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $r > 0$ der Dämpfungsfaktor ist. Wir multiplizieren mit y':

$$y''y' + yy' + r(y')^2 = 0$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dt}\left(|y'|^2 + |y|^2\right) = -2r(y')^2 \leq 0.$$

Also ist die linke Seite als Funktion von t monoton fallend, d.h.

$$|y'(t)|^2 + |y(t)|^2 \leq |y'(0)|^2 + |y(0)|^2.$$

Damit ist die Lösung $y_0(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$ eine stabile Lösung der Dgl., denn eine kleine Abweichung der Startwerte $(y(0), y'(0))$ an der Stelle 0 kann für alle $t \in \mathbb{R}$ nicht größer werden.

Schreibt man dieses Beispiel als System erster Ordnung, erhält man mit $x := \binom{y}{y'}$ die (autonome) Gleichung

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) - rx_2(t) \end{pmatrix} =: f(x(t)).$$

Für $E(x) := |x|^2$ erhält man für eine Lösung $x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$

$$\frac{d}{dt} E(x(t)) = (\nabla E(x(t)))^t \cdot x'(t) = 2x(t)^t x'(t) = -2rx_2^2(t) \leq 0.$$

Die Funktion E heißt eine Ljapunov-Funktion zur Dgl. $x'(t) = f(x(t))$.

5.7 Definition. Der Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$ sei ein isolierter singulärer Punkt des Vektorfeldes $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Dann heißt $L \in C^1(U(x^0); \mathbb{R})$, $U(x^0)$ eine Umgebung von x^0, eine Ljapunov-Funktion zur autonomen Dgl. $x'(t) = f(x(t))$ am Punkt x^0, falls gilt:

(i) $L(x) \geq 0$ und $L(x) = 0$ nur an der Stelle x^0,

(ii) Es gilt $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$.

5.8 Satz. *Sei $x^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ ein isolierter singulärer Punkt des Vektorfeldes $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Falls eine Ljapunov-Funktion L zur autonomen Dgl. $x'(t) = f(x(t))$ am Punkt x^0 existiert, so ist die konstante Lösung $y = 0$ stabil.*

© Robert Denk 4. 2. 2014

5.9 Bemerkung. a) Die Schwierigkeit in der Anwendung dieses Satzes liegt darin, eine Ljapunov-Funktion zu finden. Auch bei partiellen Dgl. ist derselbe Ansatz möglich, aber dort ist es noch schwerer, eine Ljapunov-Funktion zu konstruieren. Manchmal hilft ein physikalischer Zugang (Energie).

b) Falls in Definition 5.7 (ii) sogar

$$\langle \nabla L(x), f(x) \rangle < 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

so spricht man von einer strengen Ljapunov-Funktion, und man kann die asymptotische Stabilität beweisen.

© Robert Denk 4. 2. 2014

6. Rand- und Eigenwertprobleme

6.1 Worum geht's? Die Schwingung einer Saite führt zur partiellen Differentialgleichung

$$\partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0,$$

wobei t die Zeit und $x \in [0, L]$ den Ort auf der Saite der Länge L beschreibt. Die Lösung $u(t,x)$ ist dann die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t. Eine natürliche Bedingung ist die, dass die Saite am Rand fest eingespannt ist:

$$u(t,0) = u(t,L) = 0.$$

Wir geben noch die Auslenkung und die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ vor:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x).$$

Macht man den Ansatz $u(t,x) = a(t)v(x)$, so erhält man aus der Dgl. $a''(t)v(x) - a(t)v''(x) = 0$ und damit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{a''(t)}{a(t)} =: -\lambda$$

mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$. Für die Funktion v, welche jetzt nur noch von x abhängt, erhalten wir eine gewöhnliche Dgl.:

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0, \quad v(0) = 0,\ v(L) = 0.$$

Im Vergleich zu bisher behandelten Dgl. unterscheidet sich diese in zwei Punkten:

- Es ist nicht der Wert und die erste Ableitung an einer Stelle vorgegeben (AWP), sondern der Wert der Lösung an zwei verschiedenen Stellen (Randwertproblem, RWP).
- In der Gleichung taucht ein unbekannter Parameter λ auf, es handelt sich um eine sogenannte Eigenwertaufgabe.

Um derartige Probleme geht es in diesem Abschnitt. Die erste Frage ist wieder die nach der eindeutigen Lösbarkeit eines Randwertproblems. Jetzt stellt sich allerdings heraus, dass das RWP nicht in jedem Fall eindeutig lösbar ist. Es gibt die Fälle, in denen keine Lösung existiert, es kann aber auch unendlich viele Lösungen geben. Wenn aber eindeutige Lösbarkeit gegeben ist, kann man die Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktion berechnen.

Wir werden später sehen, dass das zugehörige Eigenwertproblem nur für bestimmte Werte von λ eine nichttriviale Lösung besitzt. Tatsächlich kann man von diesen Eigenwerten und zugehörigen Eigenfunktionen noch mehr sagen, ja sogar beliebige Funktionen nach diesen Eigenfunktionen in Reihen entwickeln, ähnlich der Theorie der Fourier-Reihen.

© Robert Denk 4. 2. 2014

a) Randwertaufgaben für lineare Dgl.-Systeme

6.2 Beispiel. Wir betrachten noch einmal das Beispiel aus dem vorherigen Abschnitt: Gesucht waren Lösungen des Randwertproblems

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = y(L) = 0.$$

Für alle Werte von λ ist die triviale Lösung $y = 0$ eine Lösung, die Frage ist also, ob es Werte λ gibt, für welche eine weitere Lösung existiert. Wir beschränken uns hier auf den Fall $\lambda \in \mathbb{R}$ (wie wir später sehen werden, gibt es für nichtreelle λ keine weitere Lösung). Die Werte λ, für welche eine nichttriviale Lösung existiert, heißen Eigenwerte der Differentialgleichung.

(a) Falls $\lambda = 0$ ist, lautet die Differentialgleichung $y''(x) = 0$. Jede Lösung dieser Gleichung hat die Form $y(x) = c_1 x + c_2$. Aus der Bedingung $y(0) = 0$ erhalten wir $c_2 = 0$, aus der Bedingung $y(L) = 0$ dann auch $c_1 = 0$. Also ist 0 kein Eigenwert.

(b) Falls $\lambda < 0$, so hat jede Lösung der Gleichung $y'' + \lambda y = 0$ die Form $y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Aus den Randbedingungen folgt dann

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ e^{\sqrt{-\lambda}L} c_1 + e^{-\sqrt{-\lambda}L} c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in den Konstanten c_1, c_2. Eine nichttriviale Lösung existiert genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}L} & e^{-\sqrt{-\lambda}L} \end{pmatrix} = e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $e^{2\sqrt{-\lambda}L} = 1$. Die letzte Bedingung kann für $\lambda < 0$ nie erfüllt sein, da $e^z > 1$ für alle $z > 0$ gilt. Also existiert kein negativer Eigenwert.

(c) Sei nun $\lambda > 0$. Jetzt ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben durch $y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Aus $y(0) = 0$ folgt $c_1 = 0$, und aus $y(L) = 0$ folgt $c_2 \sin\sqrt{\lambda}L = 0$. Die letzte Gleichung ist erfüllt, falls $\sqrt{\lambda}L = k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$, d.h. falls $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$. Die Eigenwerte des Randwertproblems sind also die positiven Zahlen $\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L^2}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Die nichttrivialen Lösungen (Eigenfunktionen) sind gegeben durch $y(x) = c_2 \sin\frac{k\pi x}{L}$.

Das obige Beispiel ist ein skalares Randwertproblem zweiter Ordnung. Ähnlich wie im Abschnitt über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, untersuchen wir zunächst Systeme erster Ordnung und wenden die Ergebnisse dann auf Gleichungen höherer Ordnung an.

Betrachte das Randwertproblem

$$y'(t) = F(t)y(t) + g(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \tag{6-1}$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

$$Ay(a) + By(b) = c. \tag{6-2}$$

Hier seien $a < b$, $F \in C([a,b], \mathbb{C}^{n\times n})$, $g \in C([a,b]; \mathbb{C}^n)$, $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $c \in \mathbb{C}^n$. Im folgenden sei $Y \in C^1([a,b]; \mathbb{C}^{n\times n})$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems, d.h.

$$Y'(t) = F(t)Y(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann erhält man durch Variation der Konstanten eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems durch

$$y_0(t) := Y(t)\Big(\int_a^t Y(s)^{-1} g(s)ds\Big).$$

Die allgemeine Lösung hat die Form

$$y(t) = y_0(t) + Y(t)d$$

mit $d \in \mathbb{C}^n$.

6.3 Satz. *Das Randwertproblem (6-1)–(6-2) ist genau dann für beliebiges g und c eindeutig lösbar, wenn die charakteristische Matrix*

$$C_Y := AY(a) + BY(b)$$

invertierbar ist. Dies ist äquivalent dazu, dass das zugehörige homogene Randwertproblem

$$y'(t) = F(t)y(t), \quad Ay(a) + By(b) = 0$$

nur die triviale Lösung $y = 0$ besitzt.

Beweis. Wir setzen die allgemeine Lösung in die Randbedingung ein und erhalten wegen $y_0(a) = 0$ die Bedingung

$$(AY(a) + BY(b))d + By_0(b) = c.$$

Dies ist genau dann eindeutig nach d auflösbar, falls $\det C_Y \neq 0$. □

6.4 Bemerkung. Seien Y und Z zwei verschiedene Fundamentalmatrizen der Dgl. (6-1). Da das zu (6-1) gehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist, gilt $Z(t) = Y(t)S$ mit der invertierbaren Matrix $S := Y(a)^{-1}Z(a)$. Für die charakteristischen Matrizen erhalten wir

$$C_Z = AZ(a) + BZ(b) = C_Y S.$$

Also ist C_Z genau dann invertierbar, falls C_Y dies ist.

© Robert Denk 4. 2. 2014

Der folgende Satz liefert eine Darstellung der Lösung des Randwertproblems mit homogenen Randbedingungen

$$y'(t) = F(t)y(t) + g(t), \quad Ay(a) + By(b) = 0. \tag{6-3}$$

6.5 Satz. *Sei C_Y invertierbar. Dann existiert eine matrizenwertige Abbildung $G\colon [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}^{n\times n}$ (die Greensche Matrix) mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Die Einschränkung von G auf die Bereiche $\{(t,s) : a \le t < s \le b\}$ und $\{(t,s) : a \le s \le t \le b\}$ ist jeweils stetig.

(ii) $G(t+0,t) - G(t-0,t) = I_n$ für $a < t < b$.

(iii) Für jedes $g \in C([a,b];\mathbb{C}^k)$ ist durch

$$y(t) := \int_a^b G(t,s)g(s)ds$$

die Lösung des Randwertproblems (6-3) gegeben.

Beweis. Die eindeutige Lösung des Randwertproblems ergibt sich mit obigen Bezeichnungen als $y(t) = y_0(t) + Y(t)d$ mit $d := -C_Y^{-1}By_0(b)$. Wir setzen die Darstellung von y_0 ein und erhalten

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^t Y(t)Y(s)^{-1}g(s)ds - Y(t)C_Y^{-1}B\int_a^b Y(b)Y(s)^{-1}g(s)ds \\ &= \int_a^b G(t,s)g(s)ds \end{aligned}$$

mit

$$G(t,s) := \begin{cases} Y(t)\big[I_n - C_Y^{-1}BY(b)\big]Y(s)^{-1}, & a \le s \le t \le b, \\ -Y(t)C_Y^{-1}BY(b)Y(s)^{-1}, & a \le t < s \le b. \end{cases}$$

Die Gleichung (ii) folgt sofort durch Einsetzen. □

6.6 Bemerkung. Aus der Definition von C_Y erhalten wir

$$I_n - C_Y^{-1}BY(b) = C_Y^{-1}AY(a)$$

und damit eine symmetrische Darstellung der Greenschen Matrix:

$$G(t,s) = \begin{cases} Y(t)C_Y^{-1}AY(a)Y(s)^{-1}, & a \le s \le t \le b, \\ -Y(t)C_Y^{-1}BY(b)Y(s)^{-1}, & a \le t < s \le b. \end{cases}$$

Da sich die Lösung des Randwertproblems durch Integration über $G(t,\cdot)$ ergibt, spielen die Werte von G auf der Diagonalen $\Delta := \{(t,t) : t \in [a,b]\}$ keine Rolle.

© Robert Denk 4. 2. 2014

b) Selbstadjungierte Eigenwertprobleme

Wir betrachten nun Randwertprobleme zweiter Ordnung, welche wir in folgender Form schreiben:

$$(Lx)(t) := -(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = r(t), \tag{6-4}$$
$$R_1 x := \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) = \gamma_1,$$
$$R_2 x := \beta_{21}x(b) + \beta_{22}x'(b) = \gamma_2. \tag{6-5}$$

Dabei sind $p \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ mit $p(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$, $q, r \in C([a,b];\mathbb{R})$ und $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \neq 0$ und $(\beta_{21}, \beta_{22}) \neq 0$. Ein Randwertproblem der Form (6-4)–(6-5) heißt ein Sturm-Liouville-Randwertproblem, der Operator L heißt formal selbstadjungiert.

Wir schreiben (6-4)–(6-5) in ein System erster Ordnung um. Wie üblich setzen wir $y(t) := \binom{x(t)}{x'(t)}$ und normieren $Lx = -(px')' + q = -px'' - p'x' + q = r$ durch Division mit p. Wir erhalten mit $f_1 := -\frac{p'}{p}$, $f_0 := \frac{q}{p}$, $\widetilde{r} := \frac{r}{p}$ das System

$$y'(t) = F(t)y(t) + g(t) \quad \text{mit } F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix}, \; g(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{r}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Randbedingungen haben die Form

$$Ay(a) + By(b) = c \quad \text{mit } A := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}, \; c := \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Im folgenden Satz ist $\Delta := \{(t,t) : t \in [a,b]\}$.

6.7 Satz. *Das homogene Randwertproblem (6-4)–(6-5) mit $r = 0$ und $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ besitze nur die triviale Lösung $y = 0$. Dann existiert eine Funktion $G\colon [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$, welche in $[a,b]^2 \setminus \Delta$ stetig ist und für welche durch*

$$x(t) := \int_a^b G(t,s)r(s)ds \quad (t \in [a,b])$$

die Lösung der Dgl. (6-4) mit homogenen Randbedingungen $R_i x = 0 \quad (i = 1,\dots,n)$ gegeben ist. Die Funktion G heißt Greensche Funktion des Randwertproblems.

Beweis. Der Beweis verwendet das äquivalente System erster Ordnung. Man sieht direkt, dass $G(t,s)$ als die rechte obere Ecke der zugehörigen Greenschen Matrix gewählt werden kann. □

Für die Berechnung der Greenschen Funktion ist die folgende Charakterisierung nützlich. Man kann sie beweisen, indem man zunächst zeigt, dass die Greensche Funktion diese Bedingungen erfüllt, und dann, dass durch die Eigenschaften (i)-(iii) bereits die Funktion G eindeutig festlegt.

© Robert Denk 4. 2. 2014

6.8 Lemma. *Die Greensche Funktion $G\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ zum Randwertproblem (6-4)–(6-5) ist durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt:*

(i) G ist stetig, und für jedes feste $s\in[a,b]$ ist $G(\cdot,s)$ in $[a,b]\setminus\{s\}$ zweimal stetig differenzierbar. Für die erste Ableitung gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t+0,t)-\frac{\partial}{\partial t}G(t-0,t)=-\frac{1}{p(t)}\quad(t\in(a,b)).$$

(ii) Für jedes feste $s\in[a,b]$ löst $G(\cdot,s)$ die homogene Dgl. (6-4) in $[a,b]\setminus\{s\}$.

(iii) Für jedes feste $s\in[a,b]$ erfüllt $G(\cdot,s)$ die homogenen Randbedingungen (6-5).

Kennt man ein Fundamentalsystem, so lässt sich die Greensche Funktion direkt hinschreiben:

6.9 Satz. *Das zu (6-4)–(6-5) gehörige homogene Randwertproblem besitze nur die triviale Lösung. Dann lässt sich die Greensche Funktion des Randwertproblems in der Form*

$$G(t,s)=\begin{cases}-\frac{1}{p(a)W(a)}\varphi(t)\psi(s), & a\le t\le s\le b,\\ -\frac{1}{p(a)W(a)}\varphi(s)\psi(t), & a\le s\le t\le b\end{cases}$$

darstellen. Dabei sind φ und ψ Lösungen von $Lx=0$ mit $R_1\varphi=0$, $R_2\varphi\neq0$ und $R_2\psi=0$, $R_1\psi\neq0$ und

$$W(t):=W(\varphi,\psi)(t):=\varphi(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi(t)$$

die Wronski-Determinante zu $\{\varphi,\psi\}$.

Beweis. Man rechnet direkt die Eigenschaften (i)–(iii) aus Lemma 6.8 nach. □

6.10 Bemerkung. a) In der Situation von Satz 6.9 gilt $G(t,s)=G(s,t)$ (Symmetrie der Greenschen Funktion).

b) Nach Bemerkung 6.4 ist das Randwertproblem (6-4)–(6-5) genau dann eindeutig lösbar, falls für ein Fundamentalsystem $\{\varphi,\psi\}$ von (6-4) gilt

$$\det\begin{pmatrix}R_1\varphi & R_1\psi\\ R_2\varphi & R_2\psi\end{pmatrix}\neq0.$$

In diesem Fall gilt dies für alle Fundamentalsysteme.

6.11 Beispiel. Betrachte für einen reellen Parameter $k\ge0$

$$(Lx)(t):=-x''(t)-k^2x(t)=r(t)\quad(t\in[0,1])$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

mit den Randbedingungen

$$R_1x := x(0) = 0,\ R_2x := x(1) = 0.$$

Hier ist $p = 1$ und $q = -k^2$. Ein Fundamentalsystem von $Lx = 0$ ist gegeben durch $\varphi_1 = \sin kt$, $\varphi_2 = \cos kt$. Dafür gilt

$$\det \begin{pmatrix} R_1\varphi_1 & R_1\varphi_2 \\ R_2\varphi_1 & R_2\varphi_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix} = -\sin k \neq 0,$$

falls $k \notin \pi\mathbb{Z}$.

Sie also $k \notin \pi\mathbb{Z}$, d.h. das Randwertproblem eindeutig lösbar. Um die Greensche Matrix zu berechnen, bestimmen wir φ und ψ aus Satz 6.9. Eine Lösung von $Lx = 0$ mit der Randbedingung $R_1x = 0$ ist $\varphi(t) := \sin kt$. Eine Lösung von $Lx = 0$ mit der Randbedingung $R_2x = 0$ ist $\psi(t) := \sin k(1-t)$. Die Wronski-Determinante an der Stelle $a = 0$ ist

$$W(0) = \varphi(0)\psi'(0) - \varphi'(0)\psi(0) = 0 \cdot (-k\cos k) - k\sin k = -k\sin k \neq 0.$$

Nach Satz 6.9 ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$G(t,s) = \frac{1}{k\sin k}\sin(kt)\sin(k(1-s)) \quad (0 \le t \le s \le 1)$$

und durch $G(t,s) = G(s,t)$ für $0 \le s \le t \le 1$.

Die Lösung des Randwertproblems $Lx = r$, $R_1x = R_2x = 0$ für $r \in C([0,1];\mathbb{C})$ ist also gegeben durch

$$(Lx)(t) = \int_0^t G(t,s)r(s)ds$$

mit obiger Greenscher Funktion G.

Wir betrachten nun wieder ein Sturm-Liouville-Randwertproblem, diesmal aber mit einem (unbekannten) Eigenwertparameter $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(Lx)(t) := -(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = \lambda x(t), \tag{6-6}$$
$$R_1x := \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) = 0,$$
$$R_2x := \beta_{21}x(b) + \beta_{22}x'(b) = 0. \tag{6-7}$$

Dabei seien die Randbedingungen nichttrivial, d.h. es gelte $(\alpha_{11},\alpha_{12}) \neq (0,0)$ und $(\beta_{21},\beta_{22}) \neq (0,0)$.

6.12 Definition. a) Der zum Eigenwertproblem (6-6)–(6-7) gehörige lineare Operator A ist definiert als Abbildung $A\colon D(A) \to C([a,b];\mathbb{C})$ mit Definitionsbereich

$$D(A) := \{x \in C^2([a,b];\mathbb{C}) : R_1x = R_2x = 0\} \subset C([a,b];\mathbb{C})$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

durch

$$Ax := Lx \quad (x \in D(A)).$$

b) Ein Eigenwert von A ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche ein $u \in D(A) \setminus \{0\}$ existiert mit $Au = \lambda u$. In diesem Fall heißt u eine Eigenfunktion von A.

c) Das zum Eigenwertproblem (6-6)–(6-7) zugehörige Skalarprodukt ist definiert als

$$\langle u, v\rangle := \int_a^b u(t)\overline{v(t)}dt \quad (u, v \in C([a, b]; \mathbb{C})).$$

Die Norm ist definiert durch $\|u\| := \|u\|_{L^2} := \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

Im folgenden bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\| \cdot \|$ stets das oben definierte Skalarprodukt bzw. die oben definiert Norm. Dass es sich tatsächlich um ein Skalarprodukt und damit um eine Norm handelt, sieht man sofort.

6.13 Bemerkung. a) Das Randwertproblem $Au = \lambda u$ hat immer die triviale Lösung $u = 0$. Die Eigenwerte sind also genau diejenigen λ, in denen keine eindeutige Lösbarkeit gegeben ist. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Fundamentalsystem der Dgl. $Lu - \lambda u = 0$, $\varphi_j = \varphi_j(t, \lambda)$. Dann existiert genau dann eine Eigenfunktion $x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$, falls

$$\sum_{j=1}^{2} c_j R_i[\varphi_j(\cdot, \lambda)] = 0 \quad (i = 1, 2)$$

eine nichttriviale Lösung besitzt. Dies ist äquivalent zur Bedingung

$$\Delta(\lambda) := \det \begin{pmatrix} R_1[\varphi_1(\cdot, \lambda)] & R_1[\varphi_2(\cdot, \lambda)] \\ R_2[\varphi_1(\cdot, \lambda)] & R_2[\varphi_2(\cdot, \lambda)] \end{pmatrix} = 0.$$

b) Nach Satz 6.9 ist die Greensche Funktion reellwertig.

6.14 Satz. *a) Der Operator A ist symmetrisch, d.h. es gilt*

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \quad (u, v \in D(A)).$$

b) Alle Eigenwerte von A sind reell. Die zugehörigen Eigenfunktionen können reell gewählt werden.

c) Die Eigenfunktionen u_1, u_2 zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind orthogonal, d.h. es gilt $\langle u_1, u_2\rangle = 0$.

Beweis. a) Für $u, v \in D(A)$ gilt mit partieller Integration

$$\langle Au, v\rangle = \int_a^b \big[(-p(t)u'(t))' + q(t)u(t)\big]\overline{v(t)}dt$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

$$= -p(t)u'(t)\overline{v(t)}\Big|_{t=a}^{b} + \int_a^b \Big(\big[p(t)u'(t)\big]\overline{v'(t)} + q(t)u(t)\overline{v(t)} \Big) dt$$

Die gleiche Rechnung für $\langle u, Av\rangle$ zeigt

$$\langle Au, v\rangle - \langle u, Av\rangle = p(t)\big[u(t)\overline{v'(t)} - u'(t)\overline{v(t)}\big]\Big|_{t=a}^{b}.$$

Da sowohl u als auch v die homogenen Randbedingungen $R_i x = 0$ erfüllen, folgt

$$\big[u(t)\overline{v'(t)} - u'(t)\overline{v(t)}\big]\Big|_{t=a}^{b} = 0. \tag{6-8}$$

Zum Beispiel gelten im Fall $\alpha_{11} \neq 0$ und $\beta_{21} \neq 0$ mit geeigneten Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ die Gleichheiten

$$\begin{aligned} u(a) &= c_1 u'(a), \\ v(a) &= c_1 v'(a), \\ u(b) &= c_2 u'(b), \\ v(b) &= c_2 v'(b). \end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man (6-8).

b) Das folgt wie in der Linearen Algebra: Sei $u \in D(A) \setminus \{0\}$ und $Au = \lambda u$. Dann gilt

$$\lambda\|u\|^2 = \langle \lambda u, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \langle u, Au\rangle = \overline{\lambda}\|u\|^2$$

und damit $\lambda = \overline{\lambda}$.

Da alle Koeffizienten der Dgl. $Lu - \lambda u = 0$ und die Randbedingungen reell sind, ist mit einer Eigenfunktion u auch $\operatorname{Re} u$ und $\operatorname{Im} u$ eine Lösung. Daher existieren stets reellwertige Eigenfunktionen.

c) Seien $u_1, u_2 \in D(A) \setminus \{0\}$ mit $Au_i = \lambda_i u_i$, wobei $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann gilt

$$\lambda_1\langle u_1, u_2\rangle = \langle Au_1, u_2\rangle = \langle u_1, Au_2\rangle = \lambda_2\langle u_1, u_2\rangle.$$

Dabei wurde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ verwendet. Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt $\langle u_1, u_2\rangle = 0$. □

6.15 Satz. *Falls 0 kein Eigenwert von A ist, so besitzt der Operator A unendlich viele Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Falls die Eigenwerte so sortiert werden, dass $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$ gilt, so folgt*

$$|\lambda_n| \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen (endlichen) Häufungspunkt.

© Robert Denk 4. 2. 2014

6.16 Definition (Verallgemeinerte Fourier-Reihe)**.** Sei 0 kein Eigenwert von A, und seien $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen von A mit $\langle u_n, u_m\rangle = \delta_{nm}$. Für eine Funktion $f \in D(A)$ heißt

$$f_n := \langle f, u_n\rangle$$

der n-te verallgemeinerte Fourier-Koeffizient von f, und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle f, u_n\rangle u_n$$

die verallgemeinerte Fourier-Reihe von f.

6.17 Satz (Entwicklung nach Eigenfunktionen)**.** *In der Situation von Definition 6.16 gilt*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, u_n\rangle u_n(t),$$

wobei die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert.

6.18 Beispiel. Betrachte das Eigenwertproblem in $C([0,1];\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} Lu &:= -u'' = \lambda u,\\ R_1u &:= u(0) = 0,\\ R_2u &:= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Für $\lambda = 0$ ist $u_1(t) := 1$, $u_2(t) := t$ ein Fundamentalsystem von $Lu = 0$. Es gilt

$$\Delta(\lambda) = \det\begin{pmatrix} R_1u_1 & R_1u_2\\ R_2u_1 & R_2u_2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Die Voraussetzung, dass 0 kein Eigenwert von A ist, ist also erfüllt.

Für $\lambda \neq 0$ ist ein Fundamentalsystem durch $u_1(t) := \exp(\sqrt{-\lambda}t)$, $u_2(t) := \exp(-\sqrt{-\lambda}t)$ gegeben. Jetzt ist

$$\Delta(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1\\ \exp(\sqrt{-\lambda}) & \exp(-\sqrt{-\lambda})\end{pmatrix} = \exp(-\sqrt{-\lambda}) - \exp(\sqrt{-\lambda}).$$

Dies ist genau dann 0, wenn $\exp(-2\sqrt{-\lambda}) = 1$, also für $-2\sqrt{-\lambda} = 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Die Eigenwerte von A sind also gegeben durch

$$\lambda = \lambda_k := k^2\pi^2 (k \in \mathbb{N}).$$

Die zugehörigen normierten Eigenfunktionen sind

$$u_k(t) := d_k \sin(k\pi t) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

wobei die Konstante d_k so zu wählen ist, dass $\|u_k\| = 1$.

Aus Satz 6.17 erhalten wir also: Sei $f \in D(A)$, d.h. $f \in C^2([0,1];\mathbb{C})$ mit $f(0) = f(1) = 0$. Dann lässt sich f in eine Reihe von Eigenfunktionen entwickeln:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k\pi t),$$

wobei

$$f_k := \langle f, u_k \rangle = \text{const} \int_0^1 f(t) \sin(k\pi t) dt.$$

Dies ist ein Spezialfall der komplexen Fourier-Reihen: Da $f(0) = 0$, können wir f als ungerade Funktion auf das Intervall $[-1,1]$ fortsetzen. Die komplexe Fourier-Reihe von f enthält dann nur ungerade Terme, also Sinus-Terme.

Das letzte Beispiel ist nur eines von vielen. Die Entwicklung nach Satz 6.17 ist viel allgemeiner, z.B. lassen sich auch Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen (etwa Hermite-Polynome, Legendre-Polynome, siehe Abschnitt 2 c)) damit beweisen.

© Robert Denk 4. 2. 2014

Abschnitt 2: Funktionentheorie

7. Holomorphe Funktionen

7.1 Worum geht's? Der zentrale Begriff dieser Vorlesung sind holomorphe Funktionen. Zunächst einmal bedeutet Holomorphie komplexe Differenzierbarkeit, ähnlich wie im zweiten Semester schon die Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ betrachtet wurde. Hier ist die Verallgemeinerung des eindimensionalen Falls sogar noch leichter: Sei $G \subset \mathbb{C}$ und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f komplex differenzierbar an der Stelle $z \in G$, falls der Grenzwert

$$f'(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \in \mathbb{C}$$

existiert.

Mit der Identifizierung $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, scheint es sich hier um einen Spezialfall der mehrdimensionalen Differenzierbarkeit zu handeln. Die komplexe Differenzierbarkeit ist aber viel mehr, wie wir später sehen werden. Dieser Abschnitt behandelt die fundamentalen Definitionen und die ersten einfachen Aussagen.

Die Funktionentheorie ist eine wunderschöne und extrem leistungsfähige Theorie, und wir werden später viele überraschende Aussagen über holomorphe Funktionen kennenlernen, zum Teil mit tiefliegenden Beweisen. Es geht aber ganz einfach los.

a) Definition und erste Eigenschaften

Im folgenden werden wir (fast) immer folgende Schreibweisen verwenden: $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, $f = u + iv$ mit $u, v\colon G \to \mathbb{R}$.

Da $\mathbb{C}$ sowohl ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (der Dimension 2) als auch ein $\mathbb{C}$-Vektorraum (der Dimension 1) ist, muss man hier auf den Unterschied zwischen $\mathbb{R}$-linearer und $\mathbb{C}$-linearer Abbildung achten. Eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lässt sich wegen $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ als 2×2-Matrix schreiben: Für $z = x + iy = \binom{x}{y}$ und $f = \binom{u}{v}$ besitzt jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Form

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

7.2 Lemma. *Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sind äquivalent:*

(i) Die von A induzierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T\binom{x}{y} := A\binom{x}{y}$, ist $\mathbb{C}$-linear.

(ii) Es gilt $c = -b$ und $d = a$, d.h.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a + ic)z.$$

Beweis. Falls T C-linear ist, so gilt $T(i) = iT(1)$. Es ist

$$T(i) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b + id$$

und

$$iT(1) = i \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = i(a + ic) = -c + ia.$$

Die Bedingung $T(i) = iT(1)$ bedeutet also gerade $b = -c$, $a = d$. Man sieht auch leicht, dass in diesem Fall die $\mathbb{C}$-Linearität folgt, d.h. die Bedingungen (i) und (ii) sind äquivalent. □

Wie üblich bei linearen Abbildungen, schreiben wir oft Tz statt $T(z)$. Im folgenden bezeichnet $\langle z, w\rangle$ für $z, w \in \mathbb{C}$ das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$.

7.3 Definition. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt winkeltreu, falls sie injektiv (und damit bijektiv) ist und falls

$$\cos(\sphericalangle(Tw, Tz)) := \frac{\langle Tw, Tz\rangle}{|Tw| \cdot |Tz|} = \frac{\langle w, z\rangle}{|w| \cdot |z|} =: \cos(\sphericalangle(w, z)).$$

7.4 Lemma. *Sei $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear. Dann ist T genau dann winkeltreu, falls ein $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert mit $Tz = az \quad (z \in \mathbb{C})$ oder $Tz = a\bar{z} \quad (z \in \mathbb{C})$.*

Beweis. Sei T winkeltreu. Da T injektiv ist, ist $a := T1 \neq 0$. Setze $b := \frac{Ti}{a}$. Dann ist $\langle i, 1\rangle = 0 = \langle Ti, T1\rangle = \langle ab, a\rangle = |a|^2\langle b, 1\rangle = |a|^2 \operatorname{Re} b$, d.h. $b = ir \in i\mathbb{R}$.

Da T $\mathbb{R}$-linear ist, gilt $Tz = T1 \cdot x + Ti \cdot y = ax + iary$. Für $z \neq 0$ erhält man aus der Winkeltreue

$$\frac{x}{|x + iy|} = \frac{\langle 1, z\rangle}{|z|} = \frac{\langle T1, Tz\rangle}{|T1| \cdot |Tz|} = \frac{\langle a, a(x + iry)\rangle}{|a|^2|x + iry|} = \frac{x}{|x + iry|}.$$

Somit gilt $|x + iry| = |x + iy|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $x \neq 0$ und damit $r = \pm 1$. Also ist $Tz = a(x \pm iy)$. Die andere Richtung des Lemmas ist klar. □

Wie bisher ist ein Gebiet (in $\mathbb{C}$ oder in $\mathbb{R}^n$ eine offene und zusammenhängende Menge. Dazu ist folgender Satz nützlich (der genauso in $\mathbb{R}^n$ gilt, hier aber in $\mathbb{C}$ formuliert wird).

© Robert Denk 4. 2. 2014

7.5 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Dann sind äquivalent:*

(i) G ist zusammenhängend.

(ii) G ist wegzusammenhängend.

In diesem Fall kann der Weg in (ii) stückweise achsenparallel gewählt werden.

7.6 Definition. Sei $G \neq \emptyset$ offen. Zwei Punkte $z_1, z_2 \in G$ heißen wegäquivalent, falls es ein Weg in G gibt, der z_1 mit z_2 verbindet.

Eine maximale zusammenhängende Teilmenge von G heißt eine Zusammenhangskomponente von G.

Die Zusammenhangskomponenten von G sind offensichtlich Äquivalenzklassen bzgl. der Wegäquivalenz. Man sieht leicht, dass die Zusammenhangskomponenten von G offen und abgeschlossen bezüglich G sind.

Wir kommen jetzt zur zentralen Definition.

7.7 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ nichtleer und offen.

a) Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $z \in G$, falls der Grenzwert

$$f'(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}$$

existiert.

b) Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ heißt holomorph in G, falls f in jedem $z \in G$ komplex differenzierbar ist. f heißt holomorph an der Stelle $z \in G$, falls eine offene Umgebung U von z existiert, so dass $f|_U$ holomorph in U ist.

c) Eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt ganz, falls f holomorph in $\mathbb{C}$ ist.

7.8 Bemerkung. a) In obiger Definition 7.7 a) ist „$\lim_{h\to 0} \cdots$“ als „$\lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{C}\setminus\{0\}} \cdots$“ zu verstehen.

b) Eine äquivalente Definition der Holomorphie, die näher an der bisherigen Ideologie der Differenzierbarkeit liegt, ist folgende: Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ heißt holomorph in $z \in G$, falls eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $T_z\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existiert mit

$$f(z+h) = f(z) + T_z h + |h| \cdot r(z,h) \quad (h \text{ klein}),$$

wobei $\lim_{h\to 0} r(z,h) = 0$. In diesem Fall setze $f'(z) := T_z$.

Dies ist die übliche Definition der Differenzierbarkeit in normierten Räumen, wobei hier in natürlicher Weise die $\mathbb{C}$-Linearität gefordert wird. Die Äquivalenz der Definitionen ist klar nach Lemma 7.2, denn jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung T ist von der Form $Th = c \cdot h$ mit einem $c \in \mathbb{C}$. Nach Definition 7.7 ist $f'(z) := c$.

© Robert Denk 4. 2. 2014

7.9 Beispiele. a) $f(z) := z^n$. Wegen

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1} \to nz_0^{n-1} \quad (z \to z_0)$$

ist f holomorph in ganz $\mathbb{C}$, also eine ganze Funktion.

b) $f(z) := |z|^2 = z\overline{z}$: An der Stelle $z_0 = 0$ ist f komplex differenzierbar wegen

$$\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \frac{|h|^2}{h} = \overline{h} \to 0 \quad (h \to 0).$$

Für $z_0 \neq 0$ ist f nicht komplex differenzierbar, denn

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{(z_0+h)(\overline{z_0}+\overline{h}) - z_0\overline{z_0}}{h} = \frac{\overline{z_0}h + z_0\overline{h} + |h|^2}{h} = \underbrace{\overline{z_0}+\overline{h}}_{\to\overline{z_0}\ (h\to 0)} + z_0\frac{\overline{h}}{h},$$

und der Limes $\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$ existiert nicht. Die Funktion f ist also nirgends holomorph.

7.10 Bemerkung. Für das Rechnen mit komplex differenzierbaren Funktionen gelten dieselben Regeln wie im Reellen (mit den wörtlich gleichen Beweisen), etwa Produktregel, Kettenregel, Quotientenregel etc.

7.11 Satz (Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen). *Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $f = u + iv\colon G \to \mathbb{C}$ und $z \in G$. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist komplex differenzierbar in z.

(ii) f ist reell differenzierbar in z, und die Ableitung $f'(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear.

(iii) f ist reell differenzierbar in z, und es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\partial_x u(z) = \partial_y v(z),$$
$$\partial_y u(z) = -\partial_x v(z).$$

Beweis. (i)⇔(ii) ist klar nach Definition bzw. Bemerkung 7.8.

(ii)⇔(iii). Die reelle Ableitung von f an der Stelle z ist gegeben durch

$$f'(z) = \begin{pmatrix} \partial_x u(z) & \partial_y u(z) \\ \partial_x v(z) & \partial_y v(z) \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 7.2 ist $f'(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-linear, falls die Cauchy-Riemann-Dgl. gelten. □

© Robert Denk 4. 2. 2014

7.12 Bemerkung. Betrachtet man für eine reell differenzierbare Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ die Ableitung $T := f'(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so lässt sich die komplexe Differenzierbarkeit nach Lemma 7.2 auf verschiedene Weise ausdrücken. Man definiert

$$\begin{aligned}
\partial_x f &:= \partial_x u + i\partial_x v, && \text{d.h. } \partial_x f(z) = T(1),\\
\partial_y f &:= \partial_y u + i\partial_y v, && \text{d.h. } \partial_y f(z) = T(i),\\
\partial f &:= \partial_z f := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f), && \text{d.h. } \partial f(z) = \tfrac{1}{2}(T(1) - iT(i)),\\
\overline{\partial} f &:= \partial_{\overline{z}} f := \tfrac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f), && \text{d.h. } \overline{\partial} f(z) = \frac{1}{2}(T(1) + iT(i)).
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Definitionen erklären sich formal dadurch, dass man z und $\overline{z}$ als unabhängige Variablen betrachtet. Aus $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ erhält man

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{i}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{i}{2}$$

und damit

$$\partial_z f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\,\partial_x f - \frac{i}{2}\,\partial_y f.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ in $z \in G$ reell differenzierbar. Dann sind äquivalent:

(i) f ist in z komplex differenzierbar.
(ii) Die Cauchy-Riemann-Dgl. gelten.
(iii) Es ist $i\partial_x f(z) = \partial_y f(z)$.
(iv) Es ist $\overline{\partial} f(z) = 0$.

In diesem Fall ist $f'(z) = \partial_x f(z) = \partial_z f(z)$.

Zum Beispiel für die Funktion $f(z) := \overline{z}$ gilt $\partial_{\overline{z}} f(z) = 1$, d.h. f ist an keiner Stelle komplex differenzierbar.

Im Folgenden werden wir auch f_x statt $\partial_x f$ etc. schreiben.

7.13 Korollar. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.*

a) Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ ist genau dann konstant in G, wenn f holomorph in G ist mit $f' = 0$.

b) Sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \in \mathbb{R} \quad (z \in G)$. Dann ist f konstant.

c) Sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| = 1 \quad (z \in G)$. Dann ist f konstant.

Beweis. a) Falls f holomorph ist mit $f' = 0$, so folgt

$$0 = f_x(z) = u_x(z) + iv_x(z) \quad (z \in G).$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Aus den Cauchy-Riemann-Dgl. erhalten wir dann auch $u_y = 0 = v_y$ in G, d.h. $\nabla u = \nabla v = 0$ in G. Da G wegzusammenhängend ist, folgt $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ in G.

b) Aus $v = 0$ erhalten wir $v_x = v_y = 0$ und nach den Cauchy-Riemann-Dgl. $u_x = u_y = 0$, also $f = \text{const}$.

c) sieht man durch Differenzieren der Identität $u^2 + v^2 = 1$ nach x bzw. y unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. □

In der folgenden Definition ist wie üblich $B(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$. Man erinnere sich auch an den Begriff Konvergenzradius aus dem ersten Semester.

7.14 Definition. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f durch Potenzreihen dargestellt, falls für jedes $a \in G$ und jedes (!) $r > 0$ mit $B(a,r) \subset G$ eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ existiert, welche (mindestens) in $B(a,r)$ konvergiert und dort gleich f ist.

Den folgenden Satz zeigt man wie im ersten Semester. Man beachte, dass die Potenzreihe für die Ableitung denselben Konvergenzradius besitzt wie die Reihe für die Funktion selbst.

7.15 Satz. *Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon G \to \mathbb{C}$ durch Potenzreihen dargestellt.*

a) Dann ist f holomorph in G mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

Diese Reihe hat denselben Konvergenzradius wie die Reihe, welche f darstellt.

b) Die Funktion f ist unendlich oft komplex differenzierbar in G mit

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}.$$

Insbesondere ist

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

d.h. die Potenzreihe ist durch f eindeutig bestimmt.

7.16 Beispiele. a) Polynome $P(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$ sind in ganz $\mathbb{C}$ holomorph, d.h. ganze Funktionen.

b) Die Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

hat Konvergenzradius ∞, ist also ebenfalls in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. In Abbildung 15 wird der Realteil der komplexen Exponentialfunktion dargestellt.

Wie im Reellen setzt man für $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z$$

mit

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$
$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Es gilt somit $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. Definiere außerdem die hyperbolischen Funktionen

$$\cosh z := \cos(iz) \quad = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),$$
$$\sinh z := -i \sin(iz) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

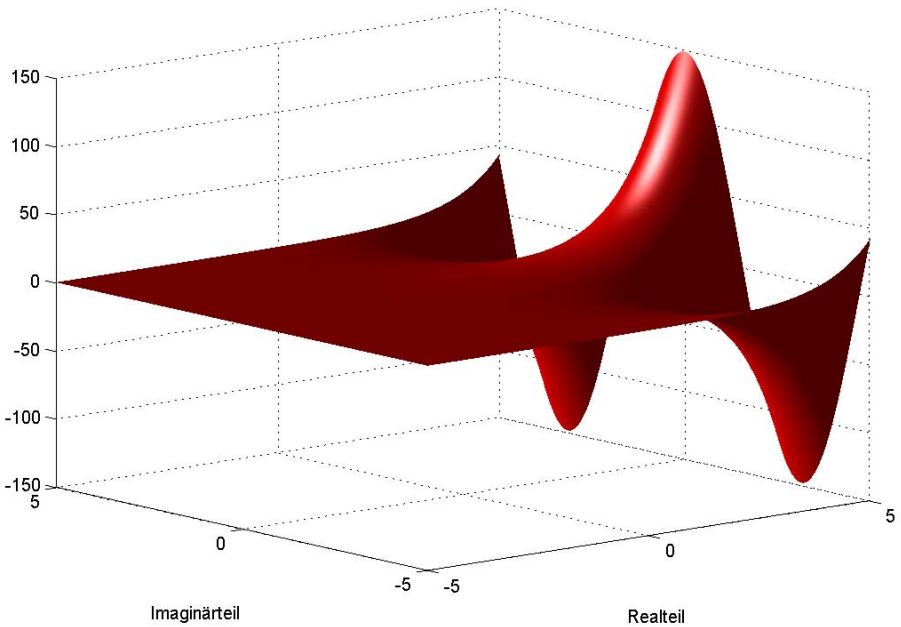


Abbildung 15: Die komplexe Exponentialfunktion, dargestellt ist $\mathrm{Re}(\exp(z))$.

© Robert Denk 4. 2. 2014

b) Integration

Eine wesentliche Zutat der Funktionentheorie sind Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$. Eine Kurve ist eine Äquivalenzklasse von orientierten Wegen. Der Wertebereich $\mathcal{R}(\Gamma)$ und Anfangs- und Endpunkt $\mathcal{A}(\Gamma)$, $\mathcal{E}(\Gamma)$ und die Länge $\mathcal{L}(\Gamma)$ sind unabhängig von der Parametrisierung, also wohldefiniert.

7.17 Definition. Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$ mit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $f\colon \mathcal{R}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Definiere das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f := \int_\Gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \in \mathbb{C}.$$

(Bei stückweise glatten Kurven interpretiert man das Integral auf der rechten Seite wie üblich als Summe der Integrale auf den glatten Teilbereichen der Kurve.)

Falls die Kurve geschlossen ist, d.h. falls $\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{E}(\Gamma)$ gilt, so ist auch die Schreibweise

$$\oint_\Gamma f(z)dz := \int_\Gamma f(z)dz$$

üblich. Häufig schreibt man auch nur den Wertebereich der Kurve Γ unter das Integral, z.B. in der Form $\int_{|z|=1} f(z)dz$. In diesem Fall wird die Kurve immer in positiver Orientierung, d.h. entgegen des Uhrzeigersinns, durchlaufen (in diesem Fall also z.B. mit der Parametrisierung $\gamma(t) := e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$).

Im folgenden werden wir stets stückweise glatte Kurven betrachten. Daher sei ab sofort unter *Kurve* stets eine stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$ gemeint!

7.18 Beispiele. a) Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Kurve. Dann ist

$$\int_\Gamma 1 = \int_a^b \gamma'(t)dt = \gamma(b) - \gamma(a) = \mathcal{E}(\Gamma) - \mathcal{A}(\Gamma).$$

b) Sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und Γ der positiv orientierte Kreis mit Radius r um a, d.h. $\Gamma = [\gamma]$ mit $\gamma(t) := a + re^{it}$ $\quad (t \in [0, 2\pi])$. Sei $f(z) := (z-a)^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})ire^{it}dt \\ &= \int_0^{2\pi} ir^{n+1}e^{i(n+1)t}dt = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt \\ &= \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

7.19 Satz. *Sei Γ eine Kurve, und $f\colon \mathcal{R}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig.*

a) Es gilt

$$\Big|\int_\Gamma f(z)dz\Big| \le \max_{z\in\mathcal{R}(\Gamma)} |f(z)| \cdot \mathcal{L}(\Gamma),$$

wobei $\mathcal{L}(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ die Länge von Γ ist.

b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\mathcal{R}(\Gamma) \subset G$ und F eine Stammfunktion zu f in G, d.h. F holomorph mit $F' = f$. Dann ist

$$\int_\Gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\mathcal{E}(\Gamma)) - F(\mathcal{A}(\Gamma)).$$

Beweis. a) Es gilt

$$\Big|\int_\Gamma f\Big| = \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\Big| \le \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|dt \le \max_{z\in\mathcal{R}(\Gamma)} |f(z)| \cdot \mathcal{L}(\Gamma).$$

b) zeigt man genauso durch direkte Rechnung:

$$\int_\Gamma f = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))dt = F(\mathcal{E}(\Gamma)) - F(\mathcal{A}(\Gamma)).$$

□

7.20 Satz. *Sei Γ eine Kurve und $g\colon \mathcal{R}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Definiere*

$$f(z) := \int_\Gamma \frac{g(w)}{w-z}dw \quad (z \in G := \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)).$$

Dann ist f auf G in Potenzreihen entwickelbar und insbesondere holomorph auf G.

Beweis. Sei $a \in G$ und $r > 0$ mit $B(a,r) \subset G$. Für $z \in B(a,r)$ und $w \in \mathcal{R}(\Gamma)$ ist

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \Big[(w-a)\Big(1-\frac{z-a}{w-a}\Big)\Big]^{-1} = \frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z-a}{w-a}\Big)^n.$$

Die Reihe konvergiert wegen $|z-a| < r \le |w-a|$. Also ist

$$\frac{g(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n.$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Für $0 < \rho < r$ konvergiert die Reihe in $\overline{B(a,\rho)} \subset B(a,r)$ gleichmäßig und absolut, und wir dürfen Integral und Summation vertauschen:

$$f(z) = \int_\Gamma \frac{g(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit

$$c_n := \int_\Gamma \frac{g(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

□

7.21 Definition und Satz. *Sei Γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ definiert man die Windungszahl von Γ um z durch*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{w-z} dw.$$

Dann ist $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$, und auf jeder Zusammenhangskomponente von $G := \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ ist Ind_Γ konstant. Auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von G ist $\mathrm{Ind}_\Gamma = 0$.

Man beachte in obiger Aussage, dass $\mathcal{R}(\Gamma)$ kompakt ist, d.h. es existiert ein $R > 0$ mit $\mathbb{C} \setminus B(0,R) \subset G$. Da $\mathbb{C} \setminus B(0,R)$ zusammenhängend ist, existiert genau eine Zusammenhangskomponente Z von G mit $\mathbb{C} \setminus B(0,R) \subset Z$. Diese heißt die unbeschränkte Zusammenhangskomponente.

Beweisidee. Sei $z \in G$. Nach Definition ist

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt.$$

Man betrachtet

$$\varphi(s) := \exp\Big(\int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt \Big) \quad (s \in [a,b])$$

und zeigt durch Betrachtung der Funktion $\frac{\varphi'}{\varphi}$, dass $\varphi(b) = \exp(2\pi i \,\mathrm{Ind}_\Gamma(z)) = 1$ gilt, d.h. $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$. Da Ind_Γ eine stetige Funktion ist, ist sie konstant auf jeder Zusammenhangskomponente. □

7.22 Definition (Logarithmus). Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = z \quad (z \in G)$ heißt ein stetiger Zweig des Logarithmus auf G. In diesem Fall heißt

$$\arg z := \mathrm{Im}\, f(z)$$

eine Argumentfunktion von z.

© Robert Denk 4. 2. 2014

7.23 Bemerkung. a) Bekanntlich hat die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ den Wertebereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ist aber nicht injektiv. Auf dem Streifen $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \le \pi\}$ ist exp bijektiv mit Wertebereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, die Umkehrfunktion ist aber nicht stetig.

b) Nach Definition gilt $z = \exp(f(z)) = |z| \exp(i \operatorname{Im} f(z))$. Dies rechtfertigt die Bezeichnung $\arg z$. Man beachte, dass ebenso wie der Logarithmus die Argumentfunktion nicht eindeutig ist!

c) Man kann folgende Aussage zeigen: Es existiert zu jeder Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\exp(f(t)) = \gamma(t) \quad (t \in [a,b])$. Achtung: Im allgemeinen existiert *keine* stetige Funktion $f\colon \mathcal{R}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = z \quad (z \in \mathcal{R}(\Gamma))$.

7.24 Definition und Satz. *a) Sei* $S_0 := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$. *Dann wird durch* $\ln := (\exp|_{S_0})^{-1}$ *ein stetiger Zweig* $\ln\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to S_0 \subset \mathbb{C}$ *definiert, der sog. Hauptzweig, und die zugehörige Argumentfunktion* $\arg\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to (-\pi, \pi)$, $z \mapsto \operatorname{Im} \ln z$. *Für* $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *und* $w \in \mathbb{C}$ *sei* $z^w := \exp(w \ln z)$. *Speziell bezeichnet man* $\sqrt{z} := z^{1/2}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *als den Hauptzweig der Wurzel. Die Abbildung 16 zeigt den Realteil des Logarithmus, die Abbildung 17 den Imaginärteil, wobei der Hauptzweig des Logarithmus betrachtet wird.*

b) Falls G *ein Gebiet ist, unterscheiden sich zwei stetige Zweige des Logarithmus auf* G *durch ein Vielfaches von* $2\pi i$.

c) Jeder stetige Zweig f *des Logarithmus auf einem Gebiet* $G \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *ist holomorph mit* $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Beweis. a) ist klar.

b) Seien f, g stetige Zweige. Für $h := f - g$ folgt dann

$$\exp(h(z)) = \exp(f(z) - g(z)) = \frac{\exp(f(z))}{\exp(g(z))} = \frac{z}{z} = 1 \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

und damit $h(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Da h stetig und G zusammenhängend ist, ist h auf G konstant.

c) folgt wie im ersten Semester: Sei $G \ni z_k \to z \in G$, $y_k := \ln z_k$ und $y := \ln z$. Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln z_k - \ln z}{z_k - z} = \lim_{k\to\infty} \frac{y_k - y}{\exp(y_k) - \exp(y)} = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{z}\,.$$

□

© Robert Denk 4. 2. 2014

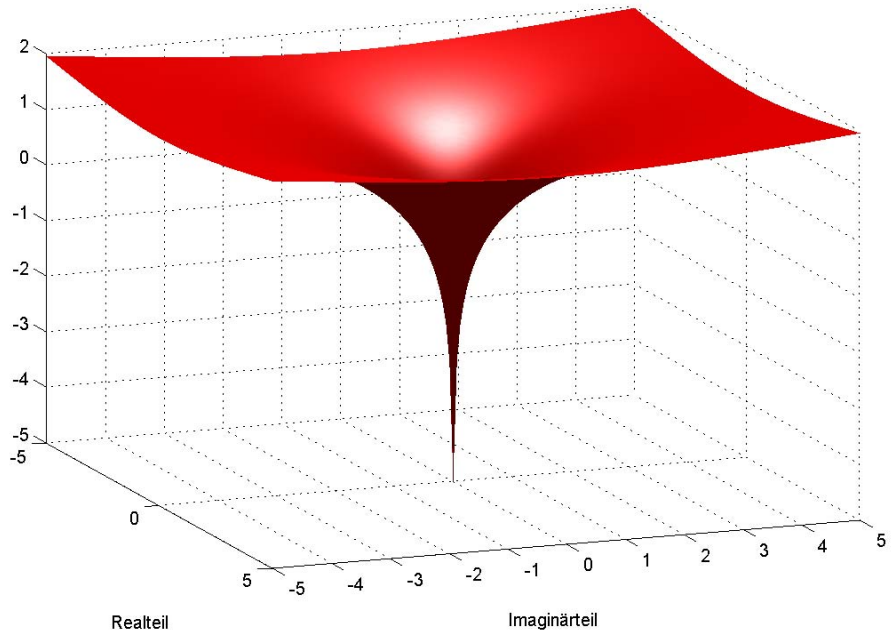


Abbildung 16: Der Realteil der Logarithmus-Funktion.

7.25 Bemerkung (Anschauliche Bedeutung der Windungszahl)**.** Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine geschlossene Kurve, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und $0 \notin \mathcal{R}(\Gamma)$. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig mit $\exp(f(t)) = \gamma(t)$ (Bemerkung 7.23 c)). Dann gilt

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_a^b \frac{\exp(f(t))f'(t)}{\exp(f(t))} dt = \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Nach Satz 7.21 ist die linke Seite rein imaginär, wir betrachten also nur die Imaginärteile:

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi} \big[\operatorname{Im}(f(b)) - \operatorname{Im}(f(a)) \big] = \frac{\arg \gamma(b) - \arg \gamma(a)}{2\pi}.$$

Die Windungszahl gibt also den Zuwachs des Arguments einer Parametrisierung an. Dies gilt genauso bei der Windungszahl $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)$ statt $\operatorname{Ind}_\Gamma(0)$ (betrachte die verschobene Kurve).

7.26 Beispiele. a) Sei Γ die positiv orientierte Kreislinie um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$. Dann ist

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \begin{cases} 1, & |z-a| < r, \\ 0, & |z-a| > r, \end{cases}$$

siehe Beispiel 7.18.

© Robert Denk 4. 2. 2014

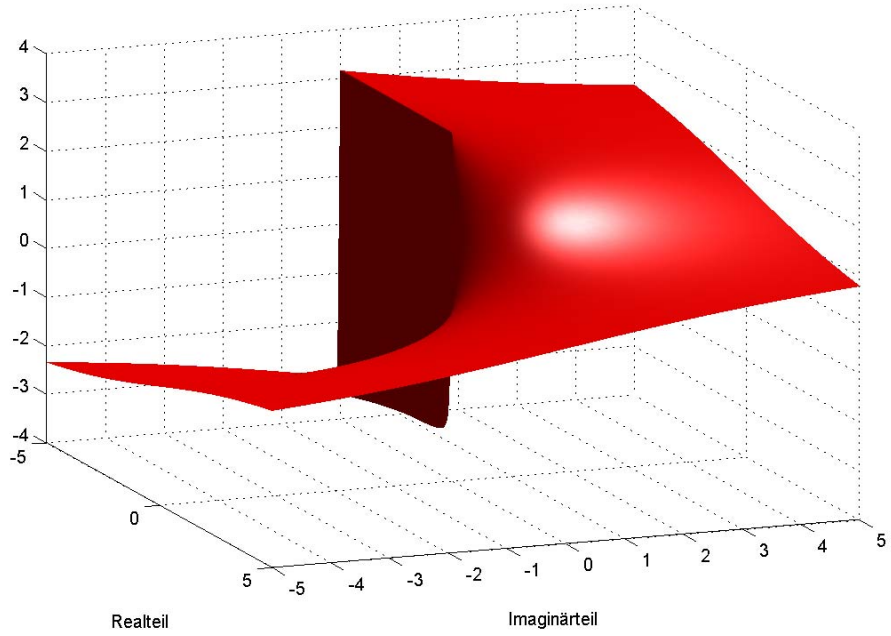


Abbildung 17: Der Imaginärteil der Logarithmus-Funktion (Hauptzweig).

b) Sei Γ eine geschlossene Kurve, $n \in \mathbb{Z}$ und $0 \notin \mathcal{R}(\Gamma)$ falls $n < 0$. Dann ist

$$\int_\Gamma z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i \operatorname{Ind}_\Gamma(0), & n = -1. \end{cases}$$

Für $n = -1$ ist dies gerade die Definition der Windungszahl, für $n \neq -1$ ist $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von f, damit folgt die Aussage aus Satz 7.19 b).

7.27 Satz. *Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:*

(i) *f hat auf G eine holomorphe Stammfunktion.*

(ii) *Für jede geschlossene Kurve Γ in G ist $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

Falls G zusätzlich konvex ist (und damit insbesondere ein Gebiet), so ist dies äquivalent zu

(iii) *Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ ist $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.*

(Dabei ist $\partial\Delta$ in positiver Orientierung zu durchlaufen.)

Beweis. (i)⇒(ii). Satz 7.19 b).

© Robert Denk 4. 2. 2014

(ii)⇒(i). Sei Z eine Zusammenhangskomponente von G. Dann ist Z offen und zusammenhängend, also wegzusammenhängend. Wähle $a \in Z$ fest und setze

$$F(z) := \int_{\Gamma_z} f(w)dw \quad (z \in Z),$$

wobei Γ_z eine Kurve von a nach z ist. Dann ist F wohldefiniert, da das Integral wegunabhängig ist. Man rechnet direkt nach, dass F in Z komplex differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. Durch Zusammensetzen der Stammfunktionen auf den Zusammenhangskomponenten erhält man eine Stammfunktion auf G zu f.

Falls G konvex ist, kann man den Weg $\Gamma_z := s_{az}$ wählen kann. Man benötigt dann nur die Wegunabhängigkeit für Wege, die als Rand eines Dreiecks gegeben sind. □

Bevor wir uns weiter mit Eigenschaften holomorpher Funktionen beschäftigen, geben wir einen kleinen Ausblick: Eine wesentliche Anwendung der Funktionentheorie liegt in der Möglichkeit, Integrale (über $\mathbb{R}$) berechnen zu können. Die wesentliche Grundlage dafür liegt im sogenannten Residuensatz, welchen hier nur in einer einfachen Form angeben. Allgemeinere Versionen sowie die dafür notwendigen Begriffe werden in den folgenden Kapiteln untersucht.

7.28 Definition. Sei $f\colon B(a,r) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann besitzt f einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ an der Stelle a, falls sich f schreiben lässt als $f = \frac{g}{h}$ mit holomorphen Funktionen g und h, wobei $g(a) \neq 0$ und $h(z) = (z-a)^m\varphi(z)$ mit $\varphi(a) \neq 0$. In diesem Fall heißt

$$\operatorname{res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\Big[\Big(\frac{d}{dz}\Big)^{m-1}\frac{g(z)}{\varphi(z)}\Big]\Big|_{z=a}$$

das Residuum von f an der Stelle a.

7.29 Beispiel. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ besitzt jeweils einen Pol erster Ordnung an den Stellen $p_1 = i$ und $p_2 = -i$. An der Stelle p_1 gilt $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$, d.h. es gilt $g(z) = 1$, $h(z) = 1 + z^2$, $\varphi(z) = z + i$ und damit

$$\operatorname{res}(f,p_1) = \frac{1}{\varphi(p_1)} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Analog folgt $\operatorname{res}(f,p_2) = \frac{i}{2}$.

7.30 Satz (Residuensatz für konvexe Gebiete)**.** *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, Γ eine geschlossene Kurve in G und $p_1,\dots,p_m \in G\backslash\mathcal{R}(\gamma)$. Sei $f\colon G\backslash\{p_1,\dots,p_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph und besitze an den Stellen $p_1,\dots,p_m$ einen Pol. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}(f,p_j)\operatorname{Ind}_\Gamma(p_j).$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

7.31 Beispiel. Wir berechnen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$. Dazu setze $f(z) := \frac{1}{1+z^2}$. Wie oben berechnet, gilt $\operatorname{res}(f, i) = \frac{1}{2i}$. Wir wählen $G := \mathbb{C}$, $p_1 = i$, $p_2 = -i$.

Betrachte als Integrationsweg Γ den Rand von $H_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$ für $R > 1$. Dann gilt $\operatorname{Ind}_\Gamma(i) = 1$ und $\operatorname{Ind}_\Gamma(-i) = 0$. Nach dem Residuensatz gilt

$$\int_{\partial H_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}(f, i) = \pi.$$

Für $R \to \infty$ schätze das Integral über den Halbkreis ab: Wir parametrisieren $z = \gamma(\varphi) := Re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0, \pi]$. Dann ist $|\gamma'(\varphi)| = |iRe^{i\varphi}| \leq R$ und

$$|1 + z^2| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1.$$

Damit

$$\Big| \int_{|z|=R, \operatorname{Im} z>0} f(z)dz \Big| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2 - 1} d\varphi = \frac{R\pi}{R^2 - 1} \to 0.$$

Andererseits gilt $\int_{-R}^{R} f(z)dz \to \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$ für $R \to \infty$. Insgesamt erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\partial H_R} f(z)dz = \pi.$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

8. Der Cauchysche Integralsatz und die Sätze von Morera und Liouville

8.1 Worum geht's? Nachdem wir nun schon erste Eigenschaften holomorpher Funktionen kennengelernt haben, können wir jetzt sehr schnell die Früchte ernten. In diesem Abschnitt werden sehr starke Eigenschaften holomorpher Funktionen untersucht, welche relativ einfach zu beweisen sind.

Grundlage ist das Lemma von Goursat bzw. der Cauchysche Integralsatz, welche besagen, dass das Integral einer holomorphen Funktion über einer geschlossenen Kurve den Wert Null hat. Dies führt sofort zu einer Darstellung holomorpher Funktionen als Integral, was wiederum eine Potenzreihendarstellung beweist. Potenzreihen sind aber unendlich oft differenzierbar, so dass wir ablesen können: Jede holomorphe Funktion ist unendlich oft komplex (und damit insbesondere reell) differenzierbar.

Die Darstellung als Potenzreihe lässt auch sofort beweisen, dass eine holomorphe Funktion nicht beschränkt sein kann, es sei denn, sie ist konstant. Das ist der berühmte Satz von Liouville. Als Korollar dieses Satzes beweisen wir den Fundamentalsatz der Algebra.

8.2 Satz (Lemma von Goursat)**.** *Sei G ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Dieselbe Aussage gilt, falls f nicht in ganz G holomorph ist, sondern stetig in G und holomorph in $G \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ für endlich viele Ausnahmepunkte $z_1, \dots, z_N$ ist.

Beweisidee. Man teilt das Dreieck Δ in vier kleinere Dreiecke auf und schreibt das Integral über $\partial\Delta$ als die Summe der vier Integrale über die kleineren Dreiecke, wobei sich die Integrale über die inneren Strecken wieder wegkürzen. Iterativ erhält man eine Folge von ineinander geschachtelten Dreiecken. Der Durchschnitt all dieser Dreiecke besteht aus genau einem Punkt, und die Holomorphie von f an diesem Punkt liefert eine Abschätzung für den Betrag des Integrals, welche für immer kleiner werdende Dreiecke gegen Null konvergiert.

Die Zusatzaussage erhält man, indem man das Dreieck in einem ersten Schritt so in drei Teildreiecke zerlegt, dass die Spitze der kleineren Dreiecke ein Ausnahmepunkt ist, und dann die obige Formel für die drei Teildreiecke anwendet. □

8.3 Satz (Cauchyscher Integralsatz für konvexe Gebiete)**.** *Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph mit Ausnahme endlich vieler*

© Robert Denk 4. 2. 2014

Punkte. Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Beweis. Nach dem Lemma von Goursat ist Bedingung (iii) von Satz 7.27 erfüllt. Nach Satz 7.27 folgt die Behauptung. □

8.4 Satz (Cauchysche Integralformel für konvexe Gebiete)**.** *Sei* $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ *ein konvexes Gebiet,* $f\colon G \to \mathbb{C}$ *holomorph und* Γ *eine geschlossene Kurve in* G*. Für* $z \in G \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ *gilt dann*

$$f(z)\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Speziell gilt für den (positiv orientierten) Rand des Kreises $B(z,r) \subset G$ *um* z*:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Beweis. Zu $z \in G \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ definiere

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z, \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Da f holomorph ist, ist g stetig in G und holomorph in $G \setminus \{z\}$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Gamma g(w)dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}dw \\ &= \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - 2\pi i \operatorname{Ind}_\Gamma(z) f(z). \end{aligned}$$

□

Der nächste Satz ist zentral für die weiteren Überlegungen (auch wenn kein berühmter Name mit ihm verbunden ist).

8.5 Satz (Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen)**.** *Sei* $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f\colon G \to \mathbb{C}$ *holomorph. Dann ist* f *in* G *durch Potenzreichen darstellbar und insbesondere unendlich oft komplex (und damit auch reell) differenzierbar.*

© Robert Denk 4. 2. 2014

Genauer gilt für $a \in G$ und $r_0 > 0$ mit $B(a, r_0) \subset G$ die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

wobei $0 < r < r_0$.

Es ist

$$|c_n| \leq r^{-n} \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Beweis. Da $B(a,r)$ konvex ist, können wir die Cauchy-Integralformel auf die Kreislinie, d.h. die Kurve $\Gamma_{a,r} := [\gamma_{a,r}]$ mit $\gamma_{a,r}(t) := a + re^{it} \quad (t \in [0, 2\pi])$ anwenden. Wir erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,r}} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (z \in B(a,r)).$$

Nach Satz 7.20 ist f durch Potenzreihen darstellbar, und es gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,r}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

(siehe Beweis von Satz 7.20). Man beachte, dass dieses Integral für $0 < r < r_0$ unabhängig von r ist, da es nur durch die Ableitung von f an der Stelle a bestimmt ist.

Wir schätzen c_n ab und erhalten

$$|c_n| \leq \mathcal{L}(\Gamma_{a,r}) \cdot \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \mathcal{R}(\Gamma_{a,r})} |f(w)| \cdot r^{-n-1} = r^{-n} \max_{|w-a|=r} |f(w)|.$$

□

Der letzte Satz hat viele wichtige Folgerungen.

8.6 Satz (von Morera). *Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig mit $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$. Dann ist f holomorph in G.*

Beweis. Betrachte wie im Beweis von Satz 8.5 $f|_{B(a,r)}$. Nach Satz 7.27 hat $f|_{B(a,r)}$ eine Stammfunktion F. Nach Satz 8.5 ist aber $F' = f$ holomorph in $B(a,r)$. □

8.7 Satz (von Liouville). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

© Robert Denk 4. 2. 2014

Beweis. Sei f in holomorph in $\mathbb{C}$. Nach Satz 8.5 existiert eine in ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Ebenfalls nach Satz 8.5 gilt für alle $r > 0$

$$|c_n| \leq r^{-n} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq r^{-n} \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|.$$

Da f beschränkt ist, konvergiert die rechte Seite gegen 0 für $r \to \infty$, falls $n \geq 1$. Damit ist $c_n = 0$ für alle $n \geq 1$, d.h. $f(z) = c_0$. □

8.8 Satz (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes komplexe Polynom P vom Grad $n \geq 1$ hat n komplexe Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt). Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ besitzt n Eigenwerte.*

Beweis. (i) Für $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ mit $a_n \neq 0$ gilt

$$|P(z)| \geq |z|^n \cdot \left| |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right| \geq \frac{|z|^n \cdot |a_n|}{2},$$

falls $|z| \geq R$ mit einem geeignet gewählten $R > 0$. Falls P keine komplexe Nullstelle besitzt, so ist $\frac{1}{P}$ eine ganze Funktion. Wählt man R so groß, dass $|P(z)| \geq 1$ für $|z| \geq R$ gilt, so ist

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{1}{|P(z)|} \leq \max\left\{1, \max_{|z|\leq R} \frac{1}{|P(z)|}\right\} < \infty,$$

da $\frac{1}{P}$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\{|z| \leq R\}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist $\frac{1}{P}$ konstant, Widerspruch.

(ii) Nach (i) hat P mindestens eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist $P(z) = (z - \lambda)P_1(z)$ mit $\deg P_1 = n-1$. Falls $n-1 > 0$, wende wieder (i) an und erhalte iterativ n (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen von P.

(iii) Die Aussage über Matrizen folgt, da die Eigenwerte einer Matrix die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind. □

Der Cauchysche Integralsatz und die Folgerungen daraus wurden oben für konvexe Gebiete formuliert. Für Anwendungen ist dies zu wenig, wir benötigen daher noch eine Verallgemeinerung auf sogenannte einfach zusammenhängende Gebiete. Dafür definieren wir zunächst den Begriff der Homotopie.

© Robert Denk 4. 2. 2014

8.9 Definition. a) Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $a < b$, und seien $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to G$ zwei Wege in G. Dann heißen γ_0 und γ_1 homotop in G, falls es eine stetige Funktion $H \colon [a,b] \times [0,1] \to G$ gibt mit $H(\cdot,0) = \gamma_0$ und $H(\cdot,1) = \gamma_1$. (D.h. der Weg γ_0 lässt sich in stetiger Weise zum Weg γ_1 deformieren, ohne das Gebiet G zu verlassen.)

b) Die Homotopie definiert in natürlicher Weise eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in G. Die Menge der Äquivalenzklassen geschlossener Wege bzgl. Homotopie in G heißt die Fundamentalgruppe von G.

c) Ein Weg $\gamma \colon [a,b] \to G$ heißt nullhomotop, falls γ homotop zum konstanten Weg $\widetilde{\gamma}(t) := c \quad (t \in [a,b])$ für ein $c \in G$ ist.

d) Ein Gebiet G heißt einfach zusammenhängend, falls jeder geschlossene Weg nullhomotop ist. (Dies ist äquivalent dazu, dass die Fundamentalgruppe nur aus einer Äquivalenzklasse besteht, also trivial ist.)

Anschaulich ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet ein Gebiet ohne Löcher, da sich jeder Weg auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Dies wäre nicht möglich, falls G ein Loch besitzt und der Weg um das Loch läuft. Konvexe Gebiete sind einfach zusammenhängend, wie man sofort sieht, ebenso sternförmige Gebiete. Für einfach zusammenhängende Gebiete gelten folgende Verallgemeinerungen:

8.10 Satz. *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und γ eine geschlossene Kurve in G. Sei $f \in \mathscr{H}(G)$.*

a) **(Cauchyscher Integralsatz)** *Es gilt $\int_\gamma f(w)dw = 0$.*

b) **(Cauchysche Integralformel)** *Es gilt*

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \quad (z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)).$$

Allgemeiner gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

9. Isolierte Singularitäten und Laurentreihen

9.1 Worum geht's? Die Nullstellenmenge einer holomorphen Funktion ist (falls es sich nicht um die Nullfunktion handelt) höchstens abzählbar. Eine wichtige Folgerung aus dieser Eigenschaft ist der Identitätssatz für holomorphe Funktionen, der in Anwendungen recht nützlich ist. Eine isolierte Singularität ist ein Punkt, so dass die Funktion in einer Umgebung dieses Punktes mit Ausnahme des Punktes selbst holomorph ist. Die Klassifikation isolierter Singularitäten leitet über zu den Laurentreihen, welche eine Verallgemeinerung der Taylorreihen darstellen und später für den Residuensatz wichtig sein werden.

9.2 Definition. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen.

a) Die Menge der in G holomorphen Funktionen wird mit $\mathscr{H}(G)$ bezeichnet.

b) Die Menge $\mathcal{N}(f) := \{a \in G : f(a) = 0\}$ heißt die Nullstellenmenge von f.

9.3 Bemerkung. Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sin(1/z)$. Dann gilt $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. Die Nullstellenmenge $\mathcal{N}(f) = \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ ist abzählbar und besitzt einen Häufungspunkt an der Stelle 0. Dieser Häufungspunkt liegt aber nicht im Gebiet $G = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, sondern auf dem Rand dieses Gebietes. Dies ist tatsächlich bei allen holomorphen Funktionen der Fall, wie der folgende Satz zeigt.

9.4 Satz. *Sei G ein Gebiet und $f \in \mathscr{H}(G)$ nicht die Nullfunktion. Dann ist $\mathcal{N}(f)$ abzählbar und hat keinen Häufungspunkt in G. Zu jedem $a \in \mathcal{N}(f)$ existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit*

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$

für eine geeignete Funktion $g \in \mathscr{H}(G)$ mit $g(a) \neq 0$. Die Zahl m heißt die Nullstellenordnung von f an der Stelle a.

9.5 Korollar (Identitätssatz)**.** *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g \in \mathscr{H}(G)$ mit $f(z) = g(z)$ auf einer Menge, die in G einen Häufungspunkt besitzt. Dann ist $f = g$.*

Beweis. Wende Satz 9.4 auf $f - g$ an. Da $\mathcal{N}(f-g)$ einen Häufungspunkt in G besitzt, muss $f - g$ nach Satz 9.4 die Nullfunktion sein. □

9.6 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Ein Punkt $a \in G$ heißt eine isolierte Singularität von f, falls $f \in \mathscr{H}(U\setminus\{a\})$ für eine offene Umgebung $U \subset G$ von a. Falls f zu einer in einer offenen Umgebung von a holomorphen Funktion fortgesetzt werden kann, heißt a eine hebbare Singularität von f.

© Robert Denk 4. 2. 2014

Z.B. hat die Funktion $\frac{\sin z}{z}$ eine (durch den Wert 1) hebbare Singularität an der Stelle 0.

Offensichtlich existieren verschiedene Arten von isolierten Singularitäten. So haben z.B. die Funktion $\frac{1}{z}$ einen Pol an der Stelle 0 und die Funktion $\frac{\sin z}{z}$ eine hebbare Singularität. Tatsächlich gibt es noch eine dritte Art der Singularität, die sogenannte wesentliche Singularität, welche bei der Funktion $\exp(\frac{1}{z})$ auftritt. Es gibt eine Charakterisierung der isolierten Singularitäten über das Verhalten der Funktion in der Nähe der Singularität, wie der folgende Satz zeigt.

9.7 Satz (Casorati-Weierstraß). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in G$ und $f \in \mathscr{H}(G \setminus \{a\})$, d.h. a ist eine isolierte Singularität von f. Dann liegt einer der drei folgenden Fälle vor:*

(1) *f ist in einer Umgebung von a beschränkt. Dann hat f eine hebbare Singularität an der Stelle a.*

(2) *Es gilt $|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$. Dann hat f einen Pol an der Stelle a, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}$ und $c_{-1}, \dots, c_{-m} \in \mathbb{C}$ mit $c_{-m} \neq 0$, so dass*

$$f - \sum_{n=1}^{m} c_{-n}(z-a)^{-n}$$

eine hebbare Singularität an der Stelle a hat. In diesem Fall heißt a ein Pol der Ordnung m von f und $\sum_{n=1}^{m} c_{-n}(z-a)^{-n}$ der Hauptteil von f in a.

(3) *Für jedes $r > 0$ ist der Wertebereich $f(B(a,r) \setminus \{a\})$ dicht in $\mathbb{C}$. In diesem Fall heißt a eine wesentliche Singularität von f.*

Teil (1) des obigen Satzes ist auch als Riemannscher Hebbarkeitssatz bekannt.

Die Abbildung 18 zeigt ein Beispiel einer wesentlichen Singularität. Gezeigt wird $\mathrm{Re}(\exp(\frac{1}{z}))$. Eine typische Funktion mit Polen ist $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, siehe Abbildung 19. Man beachte, dass dies ein Beispiel einer Funktion ist, die im Reellen C^∞ ist, deren Potenzreihe aber (z.B. bei Entwicklung um 0) keinen unendlichen Konvergenzradius hat. Geht man ins Komplexe über, erkennt man die Pole bei $\pm i$, und der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe wird ersichtlich. Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß sind die Polstellen durch die Bedingung $|f(z)| \to \infty$ charakterisiert, was man schön an der Zeichnung sehen kann.

Ein Sonderrolle nimmt der Logarithmus ein: Beim ersten Hinsehen glaubt man, einen Pol an der Stelle 0 zu erkennen (da $|\ln(z)| \to \infty \quad (z \to 0)$). Aber tatsächlich handelt es sich hier gar nicht um eine isolierte Singularität, denn ln ist in $B(0,r) \setminus \{0\}$ nicht holomorph. Der Satz von Casorati-Weierstraß greift hier also nicht. Die Abbildung 16 zeigt den Realteil des Logarithmus, die Abbildung 17 den Imaginärteil. Es handelt sich hierbei um den Hauptzweig. Man sieht, dass der Imaginärteil gleich

© Robert Denk 4. 2. 2014

dem Argument der komplexen Zahl ist (eigentlich ist das ja die Definition des Arguments), während der Realteil rotationssymmetrisch ist. Dies wird anschaulich klar aus der Formel $\ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$.

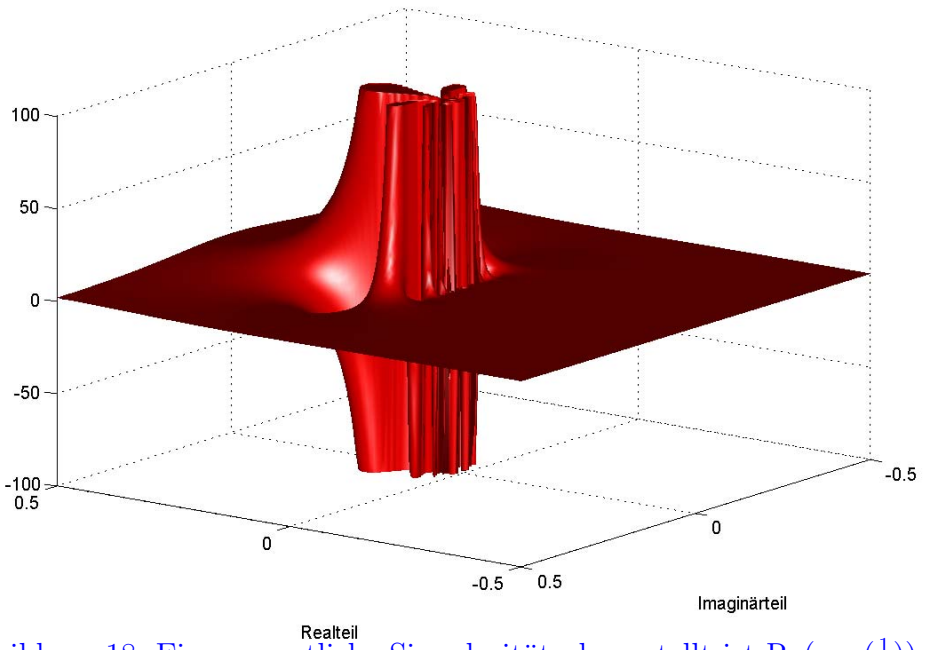


Abbildung 18: Eine wesentliche Singularität, dargestellt ist $\mathrm{Re}(\exp(\frac{1}{z}))$.

9.8 Satz (Cauchysche Integralformel für isolierte Singularitäten)**.** *Seien $a \in \mathbb{C}$, $f \in \mathscr{H}(B(a,r) \setminus \{a\})$ und $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$. Dann gilt für $r_1 < |z-a| < r_2$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Beweis. Man zerlegt das Gebiet $G := B(a,r) \setminus \{a\}$ in Sektoren, welche in konvexen Teilbereichen von G verlaufen. Dabei wähle man die Sektoren so, dass z auf keiner Trennlinie liegt. Dann liegt z in genau einem der Sektoren. Der Rand der Sektoren sei durch die Kurven $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ gegeben, wobei o.E. $z \in \Gamma_1$ sei. Da z im Äußeren von $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ liegt, folgt

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_j}(z) = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach der Cauchyschen Integralformel für konvexe Gebiete gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

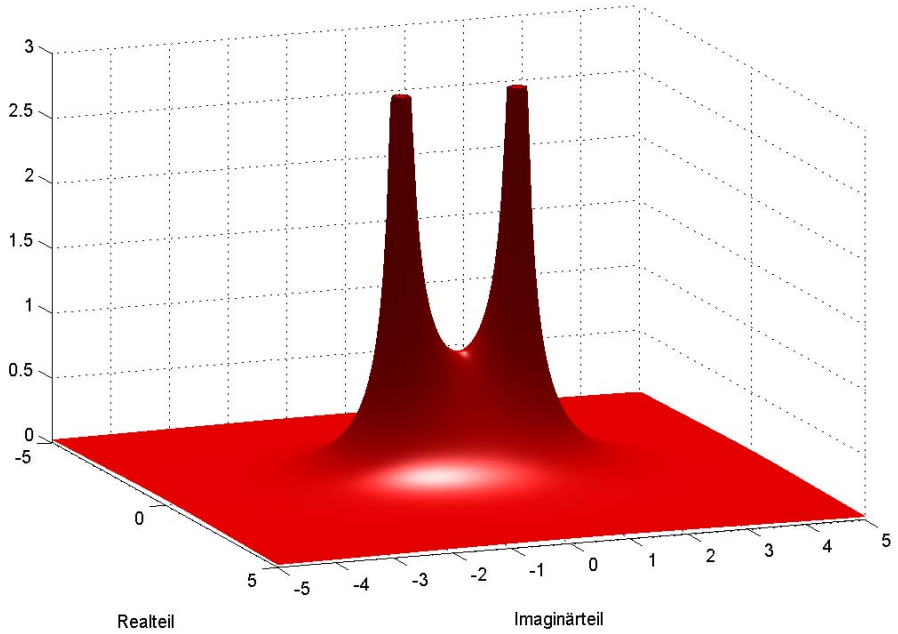


Abbildung 19: Eine Funktion mit zwei Polstellen, dargestellt ist $|(1+z^2)^{-1}|$.

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\Gamma_j}(z) f(z) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{1j} f(z) = f(z).$$

□

9.9 Satz (Laurent-Reihen). *Sei $f \in \mathscr{H}(B(a,r) \setminus \{a\})$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad (z \in B(a,r) \setminus \{a\}),$$

wobei für beliebiges $\rho \in (0,r)$ der Koeffizient c_k gegeben ist durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\, dw.$$

Beide Reihen $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ konvergieren gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $B(a,r) \setminus \{a\}$.

Beweis. Sei $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$. Für $r_1 < |z-a| < r_2$ gilt nach Satz 9.8 $f(z) = F(z) + H(z)$ mit

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

$$H(z) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r_1} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Dabei ist F holomorph in $B(a,r)$ und lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln. Es gilt $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ mit

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}dw.$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist das Integral unabhängig von $\rho \in (0,r)$.

Für $H(z)$ verwenden wir

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-a}\Big[1-\frac{w-a}{z-a}\Big]^{-1} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{w-a}{z-a}\Big)^n.$$

Dabei konvergiert die rechte Seite wegen $r_1 = |w-a| < |z-a|$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} H(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r_1} \frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r_1} f(w)(w-a)^n(z-a)^{-(n+1)}dw \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k, \end{aligned}$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r_1} f(w)(w-a)^{-k-1}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=\rho} f(w)(w-a)^{-k-1}dw$$

unabhängig von $\rho \in (0,r)$. □

9.10 Bemerkung. Die Laurent-Reihe einer Funktion ist die Verallgemeinerung der Taylorreihe. Falls die Funktion f in einer Kreisscheibe $B(a,r)$ holomorph ist, so lässt sich f dort in eine Potenzreihe entwickeln, in die Taylorreihe an der Stelle a. Falls aber f nur in der punktierten Kreisscheibe $B(a,r)\setminus\{a\}$ holomorph ist (d.h. eine isolierte Singularität an der Stelle a besitzt), so hat man die Taylorreihe durch die Laurent-Reihe zu ersetzen, in der auch negative Potenzen $(z-a)^k$ für $k<0$ auftreten.

9.11 Definition (Residuum). Sei a eine isolierte Singularität von f, d.h. $f \in \mathscr{H}(B(a,r)\setminus\{a\})$, und sei $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$ die Laurent-Reihe von f. Dann heißt

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

der Hauptteil der Laurentreihe oder der Hauptteil von f an der Stelle a. Das Residuum von f an der Stelle a ist definiert als

$$\operatorname{res}(f,a) := \operatorname{res}_{z=a} f(z) := c_{-1}.$$

9.12 Bemerkung. Mit obiger Definition können wir die drei Fälle des Satzes von Casorati-Weierstraß durch den Hauptteil beschreiben:

(i) f hat in a eine hebbare Singularität genau dann, wenn der Hauptteil gleich Null ist.

(ii) f hat in a einen Pol genau dann, wenn der Hauptteil nur eine endliche Summe ist, die Reihe also abbricht.

(iii) f hat in a genau dann eine wesentliche Singularität, falls der Hauptteil unendlich viele Terme hat.

Man beachte, dass das Residuum nach Satz 9.9 berechnet werden kann durch

$$\operatorname{res}(f,a) = c_{-1} = \int_{|w-a|=\rho} f(w)dw.$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

10. Der Residuensatz

10.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden die Überlegungen über Kurvenintegrale nochmal vertieft und ausgebaut. Erlaubt sind daher nicht nur holomorphe Funktionen, sondern meromorphe Funktionen, d.h. Funktionen mit isolierten Singularitäten (wobei keine wesentlichen Singularitäten auftreten dürfen).

Wir werden sehen, dass das entsprechende Kurvenintegral über f nicht mehr notwendig gleich Null ist, sondern durch die Residuen der Funktion gegeben ist. Dabei werden alle Pole gezählt, welche von der Kurve bzw. der Kette eingeschlossen werden. Man erhält statt des Cauchyschen Integralsatzes den Residuensatz. Dieser ist besonders nützlich für die Berechnung bestimmter Integrale.

10.2 Definition. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion f heißt auf G meromorph, falls eine Menge $P_f \subset G$ existiert, so dass f holomorph ist in $G \setminus P_f$, an jeder Stelle $p \in P_f$ einen Pol besitzt und P_f keinen Häufungspunkt in G hat. Wir schreiben $f \in \mathscr{M}(G)$ und $P_f := \{z \in G : f \text{ besitzt einen Pol an der Stelle } z\}$.

Da jede beschränkte unendliche Menge in $\mathbb{C}$ einen Häufungspunkt besitzt, kann P_f höchstens abzählbar sein. Auf dem Rand von G können Häufungspunkte von P_f auftreten. Wir erinnern daran, dass eine meromorphe Funktion an jeder Stelle $p \in P_f$ eine Laurent-Entwicklung mit dem zugehörigen Residuum $\operatorname{res}(f,p)$ besitzt. Wir werden in der Notation nicht mehr zwischen Kurven und Wegen unterscheiden und $\int_\gamma f(z)dz$ statt (korrekt) $\int_{[\gamma]} f(z)dz$ schreiben.

10.3 Satz (Residuensatz)**.** *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und γ ein geschlossener Weg in G. Sei $f \in \mathscr{M}(G)$ mit Polmenge P_f, wobei $P_f \cap \mathcal{R}(\gamma) = \emptyset$ gelte. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{p\in P_f} \operatorname{res}(f,p)\operatorname{Ind}_\gamma(p). \tag{10-1}$$

Insbesondere gilt für einen einfach geschlossenen Integrationsweg (d.h. falls $\operatorname{Ind}_\gamma(p)$ nur die Werte 0 oder 1 annimmt): Das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$ ist die Summe aller Residuen in den von γ umschlossenen Polstellen von f.

Beweis. Man kann zeigen, dass $P_f^0 := \{p \in P_f : \operatorname{Ind}_\gamma(p) \neq 0\}$ endlich ist. Damit treten in der Summe in (10-1) nur endlich viele Punkte $p_1, \dots, p_m$ auf. Seien $h_1, \dots, h_m$ die Hauptteile von f an den Stellen $p_1, \dots, p_m$. Dann ist $g := f - h_1 - \cdots - h_m$ holomorph auf G fortsetzbar. Nach dem Cauchyschen Integralsatz 8.10 gilt

$$0 = \int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^m \int_\gamma h_j(z)dz.$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Sei $h_j(z) = \sum_{\ell=-M_j}^{-1} c_\ell^{(j)}(z-p_j)^\ell$. Dann folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h_j(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\ell=-M_j}^{-1} c_\ell^{(j)}\int_\gamma (z-p_j)^\ell dz = c_{-1}^{(j)}\operatorname{Ind}_\gamma(p_j) = \operatorname{res}(f,p_j)\operatorname{Ind}_\gamma(p_j).$$

(Beachte, dass für $\ell \neq -1$ eine Stammfunktion zu $(z-p_j)^\ell$ existiert.)

Für einen einfach geschlossenen Integrationsweg gilt $\operatorname{Ind}_\gamma(p) = 1$ für die von γ eingeschlossenen Pole und $\operatorname{Ind}_\gamma(p) = 0$ für die Pole, die außerhalb von γ liegen. □

10.4 Beispiel. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi.$$

Dabei ist das Integral als uneigentliches Riemann-Integral zu verstehen, d.h. als $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}$. Beachte, dass an der Stelle $x = 0$ keine Singularität vorliegt.

Setze $f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$. Dann ist f meromorph in $\mathbb{C}$ mit einzigem Pol an der Stelle 0. Als Integrationsweg wählen wir $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_4$ mit

$$\begin{aligned}
\gamma_1&\colon [0,R] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto R + it,\\
\gamma_2&\colon [-R,R] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto -t + iR,\\
\gamma_3&\colon [0,R] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto -R + i(1-t).
\end{aligned}$$

Der Weg γ_4 durchlaufe $[-R,-\varepsilon] \cup \{z = \varepsilon e^{i\varphi} : 0 \le \varphi \le \pi\} \cup [\varepsilon, R]$ in Richtung von „-“ nach „+“.

Da f im von γ umschlossenen Bereich holomorph ist, gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

(i) Auf γ_1 schätzen wir den Integranden durch $\frac{e^{-t}}{R}$ ab und erhalten

$$\Big|\int_{\gamma_1} f(z)dz\Big| \le \int_0^R \frac{e^{-t}}{R}dt \le \frac{1}{R} \to 0 \quad (R\to\infty).$$

Analog folgt $\int_{\gamma_3} f(z)dz \to 0$ für $R \to \infty$.

(ii) Auf γ_2 schätzen wir den Integranden durch $\frac{e^{-R}}{R}$ ab und erhalten

$$\Big|\int_{\gamma_2} f(z)dz\Big| \le \int_{-R}^R \frac{e^{-R}}{R}dt = 2e^{-R} \to 0 \quad (R\to\infty).$$

(iii) Auf dem Halbkreis (in negativer Richtung durchlaufen) ist das Integral gegeben durch

$$-\int_0^\pi f(\varepsilon e^{i\varphi})i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi = -\int_0^\pi i\exp(i\varepsilon e^{i\varphi})d\varphi \to -i\pi \quad (\varepsilon\to 0).$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Dabei haben wir die Abschätzung $|\exp(i\varepsilon e^{i\varphi})| \le \exp(|\varepsilon|) \le e$ für $\varepsilon \in (0,1)$ und majorisierte Konvergenz verwendet. Die Integrale auf der reellen Achse sind

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx &= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx \\ &= 2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}dx \\ &= i\int_{[-R,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,R]} \frac{\sin x}{x}dx \\ &\to i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx \quad (R\to\infty,\ \varepsilon\to 0).\end{aligned}$$

(iv) Insgesamt erhalten wir

$$i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = i\pi.$$

10.5 Bemerkung. Sei G ein Gebiet und $a \in G$ eine Polstelle von f. Nach Satz 8.10 gilt dann für kleines r

$$\operatorname{res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r} f(w)dw.$$

Falls $f = \frac{g}{h}$ und $h(z) = (z-a)^m\varphi(z)$ mit $\varphi \in \mathscr{H}(G)$, $\varphi(a) \neq 0$, so folgt

$$\operatorname{res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r} \frac{\frac{g}{\varphi}(w)}{(w-a)^m}dw = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{g}{\varphi}\right)^{(m-1)}(a).$$

Dies ist eine Möglichkeit, Residuen zu berechnen. Wir fassen einige Berechnungsmöglichkeiten zusammen:

- Man kann das Residuum direkt über die Potenzreihenentwicklung (Laurentreihe) bestimmen, indem man den Koeffizienten bei $(z-a)^{-1}$ abliest.
- Sei wie oben $f = g/h$, wobei h eine m-fache Nullstelle an der Stelle a habe. Dann gilt $\operatorname{res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}(\frac{g}{\varphi})^{(m-1)}(a)$.
- Falls $f = \frac{g}{h}$ und h an der Stelle a eine einfache Nullstelle hat, so gilt

$$\operatorname{res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

  Man beachte hierbei, dass $h'(a) = \lim_{z\to a}\frac{h(z)}{z-a}$ wegen $h(a) = 0$ gilt.

© Robert Denk 4. 2. 2014

- Falls a einfacher Pol von f ist und $g \in \mathscr{H}(G)$, so ist
$$\operatorname{res}(f \cdot g, a) = g(a) \operatorname{res}(f, a).$$
- Das Residuum ist linear. Speziell gilt: Falls a Polstelle von f ist und $g \in \mathscr{H}(G)$, so ist
$$\operatorname{res}(\alpha f + g, a) = \alpha \operatorname{res}(f, a).$$

10.6 Satz (Satz vom Nullstellen und Polstellen zählenden Integral)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f \in \mathscr{M}(G)$ und γ ein einfach geschlossener Weg, auf welchem keine Nullstelle und keine Polstelle von f liegt. Sei N bzw. P die Anzahl der von γ eingeschlossenen Nullstellen bzw. Polstellen von f (entsprechend der Vielfachheit gezählt). Dann gilt*
$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Beweis. Sei p eine Nullstelle der Ordnung m von f. Schreibe $f(z) = (z-p)^m g(z)$ mit $g(z) \neq 0$ in der Nähe von p. Dann folgt
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-p)^{m-1} g(z) + (z-p)^m g'(z)}{(z-p)^m g(z)} = \frac{m}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$
Da $\frac{g'}{g}$ in der Nähe von p holomorph ist, folgt $\operatorname{res}(\frac{f'}{f}, p) = m$. Analog erhält man $\operatorname{res}(\frac{f'}{f}, p) = -m$ bei einem Pol der Ordnung m. Die Behauptung folgt nun aus dem Residuensatz. □

10.7 Korollar (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Ein Polynom P von Grad n besitzt genau n komplexe Nullstellen.*

Beweis. Wähle $R > 0$ mit $|P(z)| \geq 1$ für alle $|z| \geq R$. Für $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ folgt
$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{n a_n z^{n-1} + \cdots + a_1}{a_n z^n + \cdots + a_0} = \frac{n}{z} + \sum_{j=2}^{\infty} c_j z^{-j}$$
(Laurent-Entwicklung um ∞). Die Anzahl der Nullstellen von P ist nach Satz 10.6
$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = n.$$
□

© Robert Denk 4. 2. 2014

11. Fourier- und Laplace-Transformation

11.1 Worum geht's? Die Fouriertransformation ist eines der wichtigsten Hilfsmittel der mathematischen Physik. Sie ist ein Isomorphismus auf dem Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$, welcher partielle Ableitungen in eine punktweise Multiplikation verwandelt und eine Faltung zweier Funktionen in ein punktweises Produkt. Eng verwandt mit der Fouriertransformation ist die Laplacetransformation, welche unter anderem zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder zur Beschreibung von linearen Systemen verwendet wird. Die Verbindung der beiden Transformationen verwendet komplexe Funktionen.

11.2 Definition. Die Fouriertransformation einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$(\mathscr{F} f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

Hierbei ist $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_i\xi_i$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Es gibt in der Literatur verschiedene Normierungen, so wird häufig der Faktor $(2\pi)^{-n/2}$ weggelassen, manchmal taucht im Exponenten auch $ix\cdot\xi$ statt $-ix\cdot\xi$ auf. Die Fouriertransformierte ist dabei zunächst definiert für (Lebesgue-) integrierbare Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

11.3 Satz. *Falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt die Umkehrformel*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)d\xi.$$

Dieser Satz liefert auch eine Interpretation der Fouriertransformierten: Hier wird $f(x)$ als eine Überlagerung (Integral) von Schwingungen $e^{ix\cdot\xi}$ dargestellt. Man spricht daher auch von der Frequenzdarstellung oder Spektraldarstellung. Es gibt reelle Versionen der Fouriertransformation, bei welchen über sin- und cos-Terme integriert wird. In dieser Darstellung sind allerdings die obigen Formeln etwas komplizierter.

11.4 Bemerkung. Besonders interessant ist im Zusammenhang mit der Fouriertransformation der Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ der quadratintegrierbaren Funktionen. Dieser ist definiert als der Raum aller messbaren Funktionen, für welche

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \Big)^{1/2}$$

endlich ist. Versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

wird $L^2(\mathbb{R}^n)$ zu einem Hilbertraum, der etwa in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle spielt. (Genauer gesagt, bestehen sowohl $L^1(\mathbb{R}^n)$ als auch $L^2(\mathbb{R}^n)$ nicht

© Robert Denk 4. 2. 2014

aus Funktionen, sondern aus Äquivalenzklassen von Funktionen. Dabei sind zwei Funktionen äquivalent, falls sie sich höchstens auf einer Lebesgue-Nullmenge unterscheiden.)

11.5 Satz. *Die Fouriertransformation lässt sich von $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ eindeutig fortsetzen zu einer Abbildung $\mathscr{F}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, welche bijektiv, stetig und eine Isometrie ist, d.h. es gilt $\|\mathscr{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.*

11.6 Bemerkung. Die Fouriertransformation ist in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wichtig, da sie Ableitungen in eine punktweise Multiplikation mit einer Funktion verwandelt. Genauer gilt

$$\mathscr{F}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j} f\Big](\xi) = i\xi_j(\mathscr{F}f)(\xi)$$

für alle $j = 1, \dots, n$. Für den Laplace-Operator $\Delta := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ folgt damit $\mathscr{F}[\Delta f](\xi) = -|\xi|^2(\mathscr{F}f)(\xi)$.

11.7 Definition. Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist die Faltung $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(f * g)(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Auch hier gibt es wieder verschiedene Normierungen, vor allem wird der Vorfaktor oft weggelassen.

11.8 Satz. *Unter geeigneten Integrierbarkeitsbedingungen an $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gilt*

$$[\mathscr{F}(f * g)](\xi) = (\mathscr{F}f)(\xi)(\mathscr{F}g)(\xi).$$

Der letzte Satz besagt, dass die Faltung im Fourierbild zu einer punktweisen Multiplikation der beiden Funktionen dargestellt wird. In der Numerik gibt es schnelle Verfahren zur Berechnung der (diskreten) Fouriertransformation, welche unter dem Namen FFT (=Fast Fourier Transform) bekannt wurden. Die Verwendung der FFT und des obigen Satzes ist auch eine numerische Möglichkeit zur Berechnung der Faltung. In Anwendungen tritt die Faltung an vielen Stellen auf, insbesondere bei linearen zeitinvarianten Kanälen und Systemen, bei welchen der Output des Systems als Faltung des Inputsignals mit der sogenannten Impulsantwort des Systems gegeben ist.

Im Folgenden werden wir die Laplace-Transformation diskutieren. Diese ist eng verwandt mit der eindimensionalen Fourier-Transformation. Daher geben wir hier noch einen Satz über die Umkehrformel der eindimensionalen Fourier-Transformation an, welcher zum einen eine präzisere Angabe als Satz 11.3 macht, zum anderen nicht die Integrierbarkeit von $\hat{f}$ voraussetzt.

© Robert Denk 4. 2. 2014

11.9 Satz. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ stetig bis auf endlich viele Sprungstellen. Dann gilt*

$$(2\pi)^{-1/2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{ix\xi}(\mathscr{F}f)(\xi)d\xi$$
$$= \begin{cases} f(x), & \text{falls } f \text{ an der Stelle } x \text{ stetig ist,} \\ \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0)), & \text{falls } f \text{ an der Stelle } x \text{ eine Sprungstelle hat.} \end{cases}$$

11.10 Definition. Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion, d.h. an jeder Stelle existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte, und f besitzt nur endlich viele Sprungstellen. Weiter sei f exponentiell wachsend von Ordnung $M \in \mathbb{R}$, d.h. es existiere eine Konstante $C_f > 0$ (abhängig von f) mit

$$|f(t)| \le C_f \exp(Mt) \quad (t \in [0,\infty)).$$

Dann definiert man die Laplace-Transformierte $\mathscr{L}f$ von f durch

$$(\mathscr{L}f)(z) := \int_0^\infty e^{-tz} f(t)dt \quad (z \in \mathbb{C}_M := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > M\}).$$

11.11 Bemerkung. Die Laplace-Transformation von f wird häufig auch mit Großbuchstaben geschrieben, d.h. $F := \mathscr{L}f$, $G := \mathscr{L}g$ etc.

Man sieht leicht (z.B. mit einem Satz über parameterabhängige Integrale oder mit dem Satz von Morera), dass $\mathscr{L}f$ im Gebiet $\mathbb{C}_M$ holomorph ist. Man beachte dabei, dass das Integral wegen

$$\int_0^\infty |e^{-tz} f(t)|dt \le \int_0^\infty C_f e^{(M-\operatorname{Re} z)t}dt < \infty$$

für alle $z \in \mathbb{C}_M$ existiert.

Die folgenden Beispiele zeigt man alle durch direktes Nachrechnen. Dabei ist

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

die Gamma-Funktion. Die Gamma-Funktion interpoliert die Fakultät, denn sie ist eine holomorphe Funktion auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ mit der Eigenschaft $\Gamma(n+1) = n!$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

11.12 Satz. *Die Laplace-Transformierte $F = \mathscr{L}f$ ist durch folgende Tabelle gegeben.*

© Robert Denk 4. 2. 2014

$f = f(t)$		$F = F(z)$	
t^n,	$n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{n!}{z^{n+1}}$,	$\operatorname{Re} z > 0$
t^α,	$\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}$,	$\operatorname{Re} z > 0$
$e^{\alpha t}$,	$\alpha \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{z-\alpha}$,	$\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \alpha$
$\sin(\omega t)$,	$\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{z^2+\omega^2}$,	$\operatorname{Re} z > 0$
$\cos(\omega t)$,	$\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{z}{z^2+\omega^2}$,	$\operatorname{Re} z > 0$

11.13 Satz (Umkehrformel der Laplace-Transformation). *Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und exponentiell beschränkt mit Schranke M, und sei $F(z)$ die Laplace-Transformation von f. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{zt} F(z)\,dz$$
$$= \begin{cases} f(t), & \text{falls } f \text{ stetig an der Stelle } t \text{ ist,} \\ \frac{1}{2}(f(t+0) - f(t-0)), & \text{falls } f \text{ an der Stelle } t \text{ eine Sprungstelle hat,} \\ \frac{1}{2} f(0), & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

Dabei ist $\gamma > M$ frei wählbar, und das Integral bezeichnet das komplexe Kurvenintegral entlang der vertikalen Linie von $\gamma - iR$ nach $\gamma + iR$.

Beweis. Man definiert

$$f_\gamma(t) := \begin{cases} e^{-\gamma t} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Dann ist f_γ integrierbar, und für die Fouriertransformierte $\hat{f}_\gamma$ von f_γ gilt

$$\hat{f}_\gamma(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} f_\gamma(t)\,dt = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty e^{-(\gamma+i\xi)t} f(t)\,dt$$
$$= (2\pi)^{-1/2} F(\gamma + i\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Für Stetigkeitsstellen $t > 0$ von f gilt nach Satz 11.9 und mit der Substitution $z = \gamma + i\xi$

$$f_\gamma(t) = (2\pi)^{-1/2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{it\xi} \hat{f}_\gamma(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{it\xi} F(\gamma + i\xi)\,d\xi$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{(z-\gamma)t} F(z)\,dz$$

und damit

$$f(t) = e^{\gamma t} f_\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{zt} F(z)\,dz.$$

Analog folgt die Aussage für Sprungstellen. □

© Robert Denk 4. 2. 2014

Die Nützlichkeit der Laplace-Tranformation ergibt sich aus den folgenden Eigenschaften, die alle einfach nachgerechnet werden können.

11.14 Satz (Laplace-Transformation und Ableitung). *Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ k-fach stetig differenzierbar und exponentiell beschränkt mit Schranke M. Dann gilt für die Laplace-Transformation der Ableitung von f die Gleichheit*

$$(\mathscr{L} f^{(k)})(z) = z^n F(z) - z^{n-1} f(0) - z^{k-2} f'(0) - \ldots - z f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0).$$

Insbesondere gilt

$$(\mathscr{L} f')(z) = zF(z) - f(0),$$
$$(\mathscr{L} f'')(z) = z^2 F(z) - zf(0) - f'(0),$$

und im Falle $f(0) = 0$ auch $(\mathscr{F} f')(z) = zF(z)$.

11.15 Satz (Laplace-Transformation und Faltung). *Seien $f, g\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetige und exponentiell beschränkt mit Schranken M_f, M_g. Die Faltung $f * g$ ist definiert durch*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-s) g(s) ds \quad (t \in [0,\infty)).$$

Dann ist auch $f*g$ exponentiell beschränkt, und für $z \in \mathbb{C}_M$ mit $M := \max\{M_f, M_g\}$ gilt

$$\mathscr{L}(f * g)(z) = (\mathscr{L} f)(z)(\mathscr{L} g)(z).$$

11.16 Beispiel. Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$x''(t) + x(t) = \sin(3t),\ x(0) = 2,\ x'(0) = 7.$$

Wir setzen $f(t) := \sin(3t)$ und erhalten für die Laplace-Transformierten X und F die Gleichung

$$(z^2 X(z) - z \cdot 2 - 7) + X(z) = F(z).$$

Mit $F(z) = \frac{3}{z^2+9}$ (Satz 11.12) erhält man

$$(z^2+1)X(z) = \frac{3}{z^2+9} + 2z + 7,$$

und daraus mit Partialbruchzerlegung

$$X(z) = \frac{3}{(z^2+9)(z^2+1)} + \frac{2z+7}{z^2+1} = \frac{\alpha}{z-i} + \frac{\beta}{z+i} + \frac{\gamma}{z-3i} + \frac{\delta}{z+3i}$$

mit leicht zu berechnenden $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. (Es gilt $\alpha = 1 - \frac{59}{16}i$, $\gamma = \frac{1}{16}i$ und $\beta = \overline{\alpha}$, $\delta = \overline{\gamma}$.) Wieder aus der Tabelle in Satz 11.12 folgt daraus

$$x(t) = \alpha e^{it} + \beta e^{-it} + \gamma e^{3it} + \delta e^{-3it}.$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Die Bedeutung der Faltung ergibt sich auch aus der Anwendung auf lineare zeitinvariante Systeme. Dies ist ein abstraktes System mit einem Inputsignal und einem Outputsignal, bei welchen folgende Annahmen gelten:

- Der Output hängt linear vom Input ab,
- das System selbst ist zeitinvariant, hängt also nicht von der Zeit ab,
- das System ist kausal, d.h. der Output zur Zeit t hängt nur vom Input bis zur Zeit t ab und nicht vom Input zur Zukunft.

Man kann zeigen, dass unter diesen Bedingungen das Outputsignal $y = y(t)$ in der Form $y(t) = (x * h)(t)$ vom Inputsignal $x = x(t)$ abhängt mit einer das System charakterisierenden Funktion $h = h(t)$. Die Funktion h heißt auch Impulsantwort des Systems. Für die Laplace-Transformierten (Bildbereich oder Frequenzbereich) erhält man $Y(z) = H(z)X(z)$, und $H(z)$ heißt auch die Übertragungsfunktion des Systems.

© Robert Denk 4. 2. 2014

Anhang

A. Tensoren

Falls E und F normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume sind, definiert man die Menge der linearen stetigen Operatoren durch

$$L(E,F) := \{T\colon E \to F \,|\, T \text{ linear und stetig}\}.$$

Auf $L(E,F)$ wird üblicherweise die Operatornorm $\|T\| := \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F$ betrachtet. Insbesondere heißt $E' := L(E,\mathbb{R})$ der (topologische) Dualraum von E.

Im Folgenden seien E und F endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. In diesem Fall ist die oben geforderte Stetigkeit automatisch erfüllt.

A.1 Definition. Seien $r,s \in \mathbb{N}_0$. Ein E-Tensor der Stufe (r,s) ist eine multilineare Abbildung

$$T\colon \underbrace{E' \times \cdot \times E'}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{E \times \cdot \times E}_{s\text{-mal}} \to \mathbb{R}.$$

Hier heißt multilinear linear in jedem Argument, d.h. es gilt

$$T(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_r y_r, \beta_1 x_1, \ldots, \beta_s x_s) = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_r \cdot \beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_s T(y_1, \ldots, y_r, \beta_1, \ldots, \beta_s).$$

Die Menge aller (r,s)-Tensoren wird mit $E^{(r,s)}$ bezeichnet. Die Tensoren in $E^{(r,0)}$ heißen kontravariante Tensoren, die Tensoren in $E^{(0,s)}$ heißen kovariante Tensoren.

A.2 Beispiele. a) Es gilt $E^{(0,1)} := \{T\colon E \to \mathbb{R} \,|\, T \text{ linear}\} = E'$. In der kanonischen Darstellung endlich-dimensionaler Vektorräume (nach Wahl einer Basis) ist $E \cong \mathbb{R}^n$ mit $n := \dim E$ (Spaltenvektoren). Somit ist $E' \cong \mathbb{R}^{1\times n}$, d.h. jeder Tensor in $E^{(0,1)}$ lässt sich als Zeilenvektor $y \in \mathbb{R}^{1\times n}$ schreiben. Die zugehörige Abbildung ist dann gegeben durch $x \mapsto yx$, wobei $yx = \sum_{j=1}^n y_j x_j$ das Matrizenprodukt von $y \in \mathbb{R}^{1\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ist.

b) Es gilt $E^{(1,0)} := \{T\colon E' \to \mathbb{R} \,|\, T \text{ linear}\} = E''$. Definiert man für $x \in E$ die Abbildung $T_x\colon E' \cong \mathbb{R}^{1\times n} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto yx$, so erhält man ein Element von E''. Tatsächlich kann man in dieser Form alle Elemente von E'' erhalten, d.h. es gilt $E'' \cong E$.

c) Nach Definition ist $E^{(0,2)} = \{T\colon E \times E \to \mathbb{R} \,|\, T \text{ bilinear}\}$. Sei $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix. Dann definiert die Abbildung $(a,b) \mapsto \langle Ga, b\rangle$ ein Element in $E^{(0,2)}$. Falls G symmetrisch und positiv definit ist, so definiert

$$\langle Gx, y\rangle \quad (x,y \in E)$$

sogar ein Skalarprodukt und damit eine zugehörige Norm. Man spricht von einer Metrik auf E. Auch indefinite Matrizen sind hier interessant, z.B. die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(Lorentz-Metrik, Minkowski-Raum).

d) Ein Beispiel eines Tensors in $E^{(0,3)}$ für $E := \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die Abbildung

$$T\colon E^3 \to \mathbb{R},\ T(a,b,c) := \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k.$$

Hier ist

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{falls } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ 0, & \text{falls mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Konkret heißt dies $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ und $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$ sowie $\varepsilon_{ijk} = 0$ sonst. Das Symbol ε_{ijk} heißt Levi-Civita-Symbol.

A.3 Bemerkung. Ein wichtiges Thema bei Tensoren ist das Verhalten bei Basiswechsel. Wir erinnern an die lineare Theorie: Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^n$. Man bildet die Matrix $S := \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$, d.h. man schreibt $b'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} b_i$.

a) Sei $u \in E$. Schreibt man u in Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$, d.h. in der Form

$$u = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j = \sum_{k=1}^{n} x'_k b'_k, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ x' := \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

so erhält man die Transformation

$$x' = S^{-1} x.$$

Man spricht von einer kontravarianten Transformation.

b) Sei nun $y = (y_1, \dots, y_n) \in E' \cong R^{1\times n}$. Dann gilt unter Verwendung von $x = Sx'$

$$yx = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_i x = \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j=1}^{n} s_{ij} x'_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i s_{ij} \Big) x'_j = \sum_{j=1}^{n} y'_j x'_j.$$

© Robert Denk 4. 2. 2014

Man erhält die kovariante Transformation

$$y' = yS.$$

c) Die Ergebnisse unter a) sowie die obigen Begriffe lassen sich auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern: Hier gilt die Gleichheit $M \cong E$ mit einem endlich-dimensionalen Vektorraum E nur noch approximativ und lokal: Zu jedem Punkt $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset M$ von x und ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge von $E \cong \mathbb{R}^n$. Man kann damit z.B. ortsabhängige Metriken $G = (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ betrachten. Ein Beispiel einer drei-/vierdimensionalen Mannigfaltigkeit ist der gekrümmte Raum/Raumzeit der allgemeinen Relativitätstheorie.

A.4 Bemerkung. Üblicherweise verwendet man bei Rechnungen mit Tensoren die Einsteinsche Summenkonvention. Hierbei werden die Koordinaten von kovarianten Tensoren unten geschrieben, die Koordinaten kontravarianter Tensoren oben. Summiert wird über Paare von Indizes mit gleicher Bezeichnung, wobei einer der beiden Indizes oben, der andere unten steht.

a) Beachtet man $E^{(1,0)} \cong E$, so werden Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ in der neuen Schreibweise zu x^j.

b) Analog werden Zeilenvektoren $y = (y_1, \dots, y_n) \in E' \cong \mathbb{R}^{1\times n}$ zu y_j.

c) Das Matrizenprodukt $yx = \sum_{j=1}^n y_j x_j$ wird in neuer Schreibweise zu $y_j x^j$.

d) Das Skalarprodukt zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ kann man nicht in der Form $a^j b^j$ schreiben, da hier nicht ein Index oben, einer unten ist. Man verwendet daher das Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

und erhält für das Skalarprodukt $\sum_{j=1}^n a_i b_i$ in neuer Schreibweise $a^i \delta_{ij} b^j$.

e) Eine Metrik $\langle Ga, b\rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} a_i b_j$ wird in neuer Schreibweise zu $g_{ij} a^i b^j$. Der Levi-Civita-Tensor hat jetzt die Form $\varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k$.

f) Betrachtet man eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als Abbildung $x \mapsto Ax =: b$, so schreibt man konsequenterweise $A = (a_i^k)$ und $b^k = a_i^k x^i$. Der kontravariante Basiswechsel hat die Form $(x')^k = (S^{-1})_i^k x^i$, der kovariante Basiswechsel schreibt sich als $y_i = s_i^k y_k$.

© Robert Denk 4. 2. 2014

Literatur

[Am] Amann, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. De Gruyter, Berlin 1995.

[Ar] Arnol'd, V. I.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Aufl., Dt. Verl. der Wissenschaften, Berlin 1991.

[Br] Braun, M.: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen. 2. Aufl., Springer Berlin 1991.

[Fi] Fischer, W., Lieb I.: Funktionentheorie. Vieweg, Wiesbaden 1994.

[FH1] Forst, W., Hoffmann, D.: Gewöhnliche Differentialgleichungen - Theorie und Praxis. Springer Berlin 2005.

[FH2] Forst, W., Hoffmann, D.: Funktionentheorie erkunden mit Maple. Springer Berlin 2002.

[Fo] Forster, O.: Analysis 2. Vieweg-Verlag 1979.

[FB] Freitag, E., Busam, R.: Funktionentheorie. Springer Berlin 1995.

[Heu] Heuser, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3. Aufl., Teubner Stuttgart 1995.

[Jae1] Jänich, K.: Analysis für Physiker und Ingenieure. 2. Aufl., Springer Berlin 1990.

[Jae2] Jänich, K.: Funktionentheorie. Springer Berlin 1999.

[Re] Remmert, R.: Funktionentheorie I. Springer Berlin 1995.

[Wa] Walter W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 7. Aufl., Springer Berlin 2000.

© Robert Denk 4. 2. 2014