# Skript zur Vorlesung

# Mathematik für Physiker I

**Wintersemester 2012/13**

**Robert Denk**

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 11. 2. 2013

# Inhaltsverzeichnis


1 Grundlagen: Zahlen, Funktionen, Gruppen . . . . . 1

a) Mengen und Abbildungen . . . . . 1

b) Reelle Zahlen, Gruppen und Körper . . . . . 3

c) Die komplexen Zahlen . . . . . 6

2 Vektorräume . . . . . 9

a) Vektoren in der Ebene und im Raum . . . . . 9

b) Vektorräume, Basen, Dimension . . . . . 13

c) Vektorräume mit Skalarprodukt . . . . . 21

3 Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . . 28

a) Homomorphismen . . . . . 28

b) Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . . 31

c) Invertierbare Matrizen, Lösen von linearen Gleichungssystemen . . . . . 36

d) Basiswechsel und Koordinatentransformation . . . . . 46

4 Folgen und Reihen . . . . . 49

a) Folgen und Reihen in normierten Räumen, Vollständigkeit . . . . . 49

b) Reihen in normierten Räumen . . . . . 53

c) Folgen und Reihen reeller Zahlen . . . . . 56

d) Potenzreihen . . . . . 60

5 Funktionen einer reellen Variablen . . . . . 62

a) Stetige Funktionen . . . . . 62

b) Elementare Funktionen . . . . . 69

6 Differentiation . . . . . 77

a) Der Begriff der Ableitung . . . . . 77

b) Der Mittelwertsatz und seine Folgerungen . . . . . 81

c) Folgen und Reihen von Funktionen und die Taylorreihe . . . . . 84

7 Iterationsverfahren und der Banachsche Fixpunktsatz . . . . . 92

A Anmerkungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . . . 95

B Koordinatentransformationen . . . . . . . . . . 97
Literatur . . . . . . . . . . 99
Index . . . . . . . . . . 100

# 1. Grundlagen: Zahlen, Funktionen, Gruppen

**Worum geht's?** In diesem ersten Kapitel werden einige grundlegende Begriffe wie Mengen und Abbildungen vorgestellt, daneben werden die wichtigsten Zahlkörper und ihre Eigenschaften diskutiert. Neben den rationalen Zahlen und den reellen Zahlen tauchen hier auch die komplexen Zahlen auf, welche als Erweiterung der reellen Zahlen gesehen werden können. Alle diese Zahlkörper besitzen ähnliche Rechenregeln; formalisiert wird dies durch den Begriff der Gruppe und des Körpers. Mit den natürlichen Zahlen verbunden ist ein wichtiges Beweisprinzip, das der vollständigen Induktion.

## a) Mengen und Abbildungen

Zentrale Grundlagen der Mathematik sind die Begriffe "Menge" und "Abbildung", wobei wir uns auf die sogenannte naive Mengenlehre beschränken. Eine Menge ist danach eine "Zusammenfassung von (endlich oder unendlich vielen) Objekten (Elementen) zu einem Ganzen". Schreibweisen für Mengen sind etwa $M = \{1, 5\}$ oder $M = \{x | x \text{ ist eine gerade natürliche Zahl}\}$. Wir werden die folgenden Mengen von Zahlen verwenden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{(natürliche Zahlen)},\\
\mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\},\\
\mathbb{Z} &:= \{x \,|\, x \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -x \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{(ganze Zahlen)},\\
\mathbb{Q} &:= \{x \,|\, x = \frac{m}{n} \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \text{ und ein } n \in \mathbb{N}\} \quad \text{(rationale Zahlen)},\\
\mathbb{R} &: \text{reelle Zahlen.}
\end{aligned}$$

Für die leere Menge schreibt man $\emptyset$ oder $\{\}$. Wir verwenden folgende Schreibweisen für die Beziehung zwischen Mengen:

$$\begin{aligned}
x \in M &: x \text{ ist Element von } M,\\
x \notin M &: x \text{ ist nicht Element von } M,\\
M \subset N &: M \text{ ist eine Teilmenge von } N,\\
M \subsetneq N &: M \text{ ist echte Teilmenge von } N,\\
M \cup N &:= \{x \,|\, x \in M \text{ oder } x \in N\} \quad \text{(Vereinigung)},\\
M \cap N &:= \{x \,|\, x \in M \text{ und } x \in N\} \quad \text{(Durchschnitt)},\\
M \setminus N &:= \{x \,|\, x \in M \text{ und } x \notin N\} \quad \text{(Komplement von } N \text{ bzgl. } M)
\end{aligned}$$

Bei gegebenen zwei Mengen $X$ und $Y$ werde jedem $x \in X$ genau ein Element in $Y$ zugeordnet, welches $f(x)$ genannt wird. Dann heißt diese Zuordnung eine Abbildung oder Funktion von $X$ nach $Y$. Man schreibt $f\colon X \to Y$, $x \mapsto f(x)$. Dabei heißt $X$

der Definitionsbereich oder die Definitionsmenge von $f$, und $R(f) := f(X) := \{y \in Y \,|\, \text{Es gibt ein } x \in X \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt der Wertebereich von $f$.

Ein Beispiel einer Funktion ist $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Hier sind der Definitionsbereich $[-1,1]$ und der Wertebereich $[0,1]$. Die Formulierung "die Funktion $\sqrt{1-x^2}$" ist aus Sicht der Mathematik nicht präzise genug, so fehlt die Angabe des Definitionsbereiches. Präziser würde man schreiben "die Funktion $[-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$". Oft wird auch nicht unterschieden zwischen der Funktion $f$ und dem Funktionswert $f(x)$, d.h. statt "die Funktion $f(x)$" sollte es besser heißen "die Funktion $x \mapsto f(x)$" oder "die Funktion $f$".

**1.1 Definition.** (i) Für zwei Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon C \to D$ mit $f(A) \subset C$ heißt $h := g \circ f : A \to D$, $x \mapsto g(f(x))$ die Verkettung oder Verknüpfung oder Komposition von $f$ und $g$.

(ii) Für $f\colon X \to Y$ heißt $G(f) := \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\} \subset X \times Y$ der Graph von $f$, wobei $X \times Y := \{(x,y) \,|\, x \in X,\ y \in Y\}$ das kartesische Produkt von $X$ und $Y$ ist.

(iii) Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt injektiv, falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt: $x_1 = x_2$. Die Funktion $f$ heißt surjektiv, falls $f(X) = Y$ gilt, und bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist. Für eine bijektive Funktion ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon Y \to X$ definiert.

Die obigen Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ist weder injektiv noch surjektiv. Hingegen ist $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ injektiv und $h\colon [0,1] \to [0,1], x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sogar bijektiv. In diesem Fall ist die Umkehrfunktion $h^{-1}$ definiert (und wieder durch $y \mapsto \sqrt{1-y^2}$ gegeben).

Manchmal werden in der Mathematik Abkürzungen für logische Schlüsse und Quantoren verwendet. Für Aussagen $A$ und $B$, welche die Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch" annehmen können, schreiben wir $\neg A$ für die logische Negation von $A$, $A \wedge B$ für "sowohl $A$ als auch $B$", $A \vee B$ für "entweder $A$ oder $B$ (oder beide)" und $A \Rightarrow B$ für "aus $A$ folgt $B$". Es werden manchmal auch die Quantoren $\forall$ (für alle) und $\exists$ (es existiert) benutzt, z.B. in den beiden wahren logischen Aussagen

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

oder

$$\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

(z.B. $x = \sqrt{2}$). Die erste Formel schreiben wir in diesem Skript auch in der Form

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

## b) Reelle Zahlen, Gruppen und Körper

Eine wichtige Beweismethode (welche mit der Axiomatik der natürlichen Zahlen verknüpft ist) ist die vollständige Induktion. Dabei sei $A_n$ für jede natürliche Zahl $n$ eine Aussage. Um die Wahrheit aller Aussagen $A_1, A_2, A_3, \dots$ zu beweisen, genügen die folgenden beiden Schritte:

(i) Induktionsanfang: Die Aussage $A_1$ ist wahr.

(ii) Induktionsschritt: Falls die Aussagen $A_n$ wahr ist, so ist auch die Aussage $A_{n+1}$ wahr.

Dazu ein Beispiel.

**1.2 Lemma.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*

*Beweis.* Sei für $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A_n$ gegeben durch "$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$". Wir beweisen die Gültigkeit aller $A_n$ durch vollständige Induktion.

(i) Induktionsanfang $n = 1$: $A_1$ ist wahr, da $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ gilt.

(ii) Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$: Wir dürfen $A_n$ als wahr annehmen und müssen $A_{n+1}$ zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= \big[1 + 2 + \cdots + n\big] + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

also ist auch $A_{n+1}$ wahr.

$\square$

Für die Aussage in obigem Lemma kann man folgende abkürzende Schreibweise verwenden:

**1.3 Definition.** Für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \le n$ und Zahlen $a_k$ für $k = m, m+1, \dots, n$ schreibt man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \quad \text{(Summe)},$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k. = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n \quad \text{(Produkt)}.$$

Falls $m > n$, so setzt man $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$ und $\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$ (leere Summe bzw. leeres Produkt).

Die Aussage von Lemma 1.2 lautet damit $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Die vollständige Induktion kann statt bei $n = 1$ bei einem anderen Startwert beginnen, man zeigt mit dieser Beweismethode dann die Gültigkeit der Aussage ab diesem Startwert.

**1.4 Lemma** (Bernoullische Ungleichung)**.** *Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $x > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt*

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

*Beweis.* Vollständige Induktion nach $n$:

(i) Induktionsanfang $n = 2$: Es gilt $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$.

(ii) Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$: Wir dürfen jetzt die Gültigkeit der Aussage für $n$ bereits voraussetzen. Für $n + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x)\\ &= 1 + nx + x + nx^2 > 1 + (n + 1)x,\end{aligned}$$

also gilt die Aussage für $n + 1$.

□

Wir fassen bekannte Eigenschaften der reellen Zahlen zusammen. Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln:

(i) Rechenregeln der Addition:

(1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativität der Addition),

(2) $0 + a = a + 0 = a$ (0 ist neutrales Element der Addition),

(3) Für alle $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $b \in \mathbb{R}$ mit $a + b = 0$ (Existenz eines inversen Elements bzgl. Addition),

(4) $a + b = b + a$ (Kommutativität der Addition),

(ii) Rechenregeln der Multiplikation:

(1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativität der Multiplikation),

(2) $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ (1 ist neutrales Element der Multiplikation),

(3) Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ existiert ein $b \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot b = 1$ (Existenz eines inversen Elements bzgl. Multiplikation),

(4) $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativität der Multiplikation),

(iii) Distributivgesetz: Es gilt $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Man erkennt sofort die Ähnlichkeit zwischen (i) und (ii). Dies ist der Anlass für folgende Definition:

**1.5 Definition.** (i) Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Menge $G$ mit einer Abbildung $\circ\colon G \times G \to G, (x,y) \mapsto x \circ y$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Assoziativität: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ $(x, y, z \in G)$,

(2) Existenz eines neutralen Elements: Es gibt genau ein $e \in G$ so, dass für alle $x \in G$ gilt: $e \circ x = x \circ e = x$,

(3) Existenz des inversen Elements: Für alle $x \in G$ existiert ein $y \in G$ mit $x \circ y = y \circ x = e$.

(ii) Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt abelsch, falls die Verknüpfung $\circ$ kommutativ ist, d.h. falls gilt $a \circ b = b \circ a$ $(a, b \in G)$.

(iii) Eine Menge $G$ mit zwei Verknüpfungen $\oplus\colon G \times G \to G$ und $\odot\colon G \times G \to G$ heißt ein Körper, falls gilt

(1) $(G, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe,

(2) $(G \setminus \{0\}, \odot)$ ist eine abelsche Gruppe, wobei 0 hier das neutrale Element von $(G, \oplus)$ bezeichne,

(3) es gilt das Distributivgesetz: $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$ $(x, y, z \in G)$.

Damit sieht man aus den obigen Rechenregeln: $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind jeweils abelsche Gruppen, und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Es gilt:

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper,
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe, aber $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist keine abelsche Gruppe.
- $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist kein Körper, und $(\mathbb{N}, +)$ ist keine abelsche Gruppe.

Neben den Körpereigenschaften kennen wir in $\mathbb{R}$ noch eine Anordnung, d.h. eine Ordnungsrelation "$\leq$" mit folgenden Eigenschaften:

(i) Reflexivität: $a \leq a$ $(a \in \mathbb{R})$,

(ii) Antisymmetrie: Wenn $a \leq b$ und $b \leq a$ gilt, so folgt $a = b$,

(iii) Transitivität: Wenn $a \leq b$ und $b \leq c$ gilt, so folgt $a \leq c$.

Die Ordnungsstruktur ist mit der Körperstruktur verträglich in folgendem Sinn:

(i) Wenn $a \leq c$ und $b \leq d$, so folgt $a + b \leq c + d$,

(ii) wenn $a \leq b$ und $0 \leq c$, so folgt $ac \leq bc$.

Man sagt, $\mathbb{R}$ (ebenso wie $\mathbb{Q}$) bildet einen vollständig geordneten Körper.

Wir verwenden die üblichen Schreibweisen $a < b :\Leftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$ etc. sowie für reelle Intervalle die Schreibweisen, z.B.

$$\begin{aligned} (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}, \\ [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}, \\ (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}, \\ (a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}. \end{aligned}$$

Der Betrag einer reellen Zahl ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln für den Betrag, welche uns später noch öfter begegnen werden (es handelt sich um die definierenden Eigenschaften einer Norm).

**1.6 Lemma.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

*(i)* $|x| \geq 0$,

*(ii)* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

*(iii)* $|xy| = |x|\,|y|$,

*(iv)* $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung).*

## c) Die komplexen Zahlen

Im Körper der reellen Zahlen sind nicht alle algebraischen Gleichungen lösbar, so besitzt etwa die Gleichung $x^2 + 2 = 0$ keine reelle Lösung. Dies ist einer der Gründe für die Einführung der komplexen Zahlen.

Wir definieren die komplexen Zahlen als $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, d.h. eine komplexe Zahl ist ein Tupel $x = (x_1, x_2)$ und erklären die Rechenoperationen $+, \cdot$ auf $\mathbb{C}$ für $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}$ durch

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$x \cdot y := (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Damit wird $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ zu einem Körper. Das neutrale Element der Addition ist $(0, 0)$, das neutrale Element der Multiplikation ist $(1, 0)$. Zu $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist das inverse Element gegeben durch

$$\frac{1}{x} = \Big(\frac{x_1}{|x|^2}, \frac{-x_2}{|x|^2}\Big) = \frac{1}{|x|^2}(x_1, -x_2),$$

wobei der Absolutbetrag definiert ist durch

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Diese Eigenschaften rechnet man sofort direkt nach, ebenso wie folgende Identitäten:

$$(x_1, 0) + (y_1, 0) = (x_1 + y_1, 0), \quad (x_1, 0) \cdot (y_1, 0) = (x_1y_1, 0).$$

Man sieht hier, dass komplexe Zahlen der Form $(x_1, 0)$ sich verhalten wie reelle Zahlen. In diesem Sinne sind die reellen Zahlen eine Teilmenge der komplexen Zahlen. Man setzt außerdem

$$i := (0, 1).$$

Die Zahl $i$ heißt imaginäre Einheit und wird teilweise auch mit $j$ bezeichnet, insbesondere in der Elektrotechnik. Direktes Nachrechnen zeigt $i^2 = (-1, 0)$, d.h. mit der obigen Identifizierung gilt $i^2 = -1$. Mit dieser Bezeichnung und der Identifizierung $(x_1, 0) = x_1$ erhalten wir eine wesentlich einfachere Darstellung der komplexen Zahlen:

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1 + x_2 \cdot (0, 1) = x_1 + ix_2.$$

Die Multiplikation erhält mit dieser Darstellung die Form

$$xy = (x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2) = (x_1y_2 - x_2y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Somit kann man mit komplexen Zahlen in der Form $x_1 + ix_2$ wie gewohnt rechnen, wenn man die Zusatzregel $i^2 = -1$ mit berücksichtigt.

Für $x = (x_1, x_2) = x_1 + ix_2$ definiert man

- den Realteil $\operatorname{Re} x := x_1$,
- den Imaginärteil $\operatorname{Im} x := x_2$,
- die komplex konjugierte Zahl $\overline{x} := (x_1, -x_2) = x_1 - ix_2$.

**1.7 Lemma.** *Für $x \in \mathbb{C}$ gilt*

*(i)* $|x| = |\overline{x}|$ *und* $|x|^2 = x \cdot \overline{x}$,

*(ii)* $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$, $\overline{\overline{x}} = x$,

*(iii)* $\operatorname{Re} x = \frac{1}{2}(x + \overline{x})$, $\operatorname{Im} x = \frac{1}{2i}(x - \overline{x})$.

*Für den Absolutbetrag in $\mathbb{C}$ gelten die Eigenschaften von Lemma 1.6, d.h. der Absolutbetrag ist eine Norm.*

*Beweis.* All dies rechnet man sofort nach, man beachte, dass die zweite Aussage in (iii) in der Form $\frac{1}{2}(x - \overline{x}) = (0, x_2)$ geschrieben werden kann. □

**1.8 Bemerkung.** a) Die Eigenschaft der komplexen Zahlen sind also denen der reellen Zahlen sehr ähnlich. Es gibt jedoch neben der Tatsache, dass in $\mathbb{C}$ die Gleichung $x^2 + 2 = 0$ eine Lösung besitzt (nämlich $x = i\sqrt{2}$) noch einen wesentlichen Unterschied: Die Ordnungsrelation ist nicht von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ übertragbar! Eine Ungleichung der Form $x \leq y$ ist für $x, y \in \mathbb{C}$ nicht allgemein definiert, lediglich falls $x, y$ beides reelle Zahlen sind.

b) Nach Definition sind komplexe Zahlen Elemente von $\mathbb{R}^2$, d.h. der zweidimensionalen reellen Ebene. Somit kann ein eine komplexe Zahl als ein Vektor in der Ebene gedeutet werden, man spricht auch von der komplexen Ebene. In dieser Darstellung ist der Absolutbetrag $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ die Länge des Vektors, und die Addition entspricht der Addition zweier Vektoren in der Ebene. Eine Beschreibung der Multiplikation wird später folgen.

# 2. Vektorräume

**Worum geht's?** Neben den skalaren Körpern bilden die Vektorräume eine zentrale Struktur in vielen Bereichen von Mathematik und Physik. Die einfachsten Beispiele von Vektorräumen sind der zwei- und dreidimensionale Raum, aber Vektorräume können auch unendlich-dimensional sein. So ist der grundlegende Raum in der Quantenmechanik ein unendlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt (ein Hilbertraum). Wichtige Begriffe in der Theorie der Vektorräume sind unter anderem Dimension, Basis und Skalarprodukt.

## a) Vektoren in der Ebene und im Raum

Physikalische Größen können skalar sein (wie etwa Temperatur, Zeit, Masse) oder vektoriell (etwa Kraft, Geschwindigkeit). Während skalare Größen durch (reelle) Zahlen beschrieben werden, werden vektorielle Größen durch einen Pfeil veranschaulicht, dessen Länge den Betrag der jeweiligen Größe angibt. Bereits ohne Einführung eines Koordinatensystems können folgende Operationen von Vektoren geometrisch definiert werden:

- Zwei Vektoren können durch "Aneinanderhängen" addiert werden (Parallelogrammkonstruktion), so addieren sich etwa zwei Kräfte, welche an einem Punkt angreifen, zu einer resultierenden Gesamtkraft.
- Ein Vektor kann mit einer positiven reellen Zahl multipliziert werden, wobei sich nur die Länge entsprechend ändert. Bei einer negativen Zahl dreht sich die Richtung des Pfeils um.

Typischerweise beschreibt man Vektoren in einer Ebene oder im dreidimensionalen Raum unter Verwendung eines Koordinatensystems. Ein Koordinatensystem in der Ebene besteht aus zwei Koordinatenachsen, welche sich im Ursprung schneiden, und je einem Vektor (Basisvektor) pro Achse. Dabei wählt man üblicherweise die Basisvektoren $e_1$ und $e_2$ so, dass $e_1$ "nach rechts" und $e_2$ "nach oben" zeigt, aber man kann auch andere Koordinatensysteme wählen, sogar welche, bei denen die Achsen sich nicht rechtwinklig schneiden. Bei einem kartesischen Koordinatensystem schneiden sich die Achsen rechtwinklig, und die Basisvektoren haben jeweils Länge 1.

Ein Ortsvektor ist ein Vektor $\overrightarrow{OP}$, der am Ursprung beginnt. Falls man Basisvektoren $e_1, e_2$ gewählt hat, kann jeder Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ eindeutig in der Form $\overrightarrow{OP} = x_1e_1 + x_2e_2$ mit reellen Zahlen $x_1, x_2$ geschrieben werden. Wir erhalten eine eindeutige Zuordnung von Ortsvektoren nach $\mathbb{R}^2$. Das Tupel $x = \binom{x_1}{x_2}$ heißt auch der Koordinatenvektor des zugehörigen Ortsvektors. Offensichtlich sind die Koordinatenvektoren von $e_1$ bzw. $e_2$ gegeben durch $\binom{1}{0}$ bzw. $\binom{0}{1}$.

Man beachte, dass die Koordinaten eines Vektors von der Wahl der Basisvektoren abhängen! Die obigen geometrischen Operationen werden in Koordinatendarstellung (bzgl. einer fest gewählten Basis) beschrieben durch

- Addition zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$
- Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl:
$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Operationen wird $\mathbb{R}^2$ zu einem sogenannten Vektorraum.

Im Folgenden sei ein kartesisches Koordinatensystem fest gewählt. Dann identifiziert man üblicherweise Ortsvektoren und die zugehörigen Koordinatenvektoren. Die Länge eines Vektors $x$ ist gegeben durch $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Falls $\varphi$ den Winkel zwischen dem Vektor $x$ und der $e_1$-Achse bezeichnet, so gilt $x_1 = |x| \cos \varphi$ und $x_2 = |x| \sin \varphi$. Analog sei $\psi$ der Winkel zwischen einem zweiten Vektor $y$ und der $e_1$-Achse. Für den Winkel $\alpha = \sphericalangle(x, y)$ zwischen $x$ und $y$ erhält man dann $\alpha = \psi - \varphi$, und aus dem Additionstheorem für den Kosinus (welches später noch behandelt wird) erhält man

$$\cos \alpha = \cos(\psi - \varphi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi = \frac{x_1}{|x|} \frac{y_1}{|y|} + \frac{x_2}{|x|} \frac{y_2}{|y|}.$$

Auf der rechten Seite taucht das Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \left( x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right)$$

auf. Manchmal schreibt man auch $x \cdot y := \langle x, y \rangle$. Damit erhalten wir

$$\cos(\sphericalangle(x, y)) = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|\,|y|} \quad (x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

Insbesondere stehen $x$ und $y$ genau dann senkrecht aufeinander, falls $\langle x, y \rangle = 0$ gilt. In diesem Fall heißen $x$ und $y$ orthogonal zueinander.

Betrachtet man Vektoren im dreidimensionalen Raum, so gelten dieselben Überlegungen analog. Jetzt benötigen wir drei Basisvektoren, welche in einem kartesischen Koordinatensystem wieder Länge 1 besitzen und aufeinander senkrecht stehen. Nach fester Wahl einer derartigen Basis kann die Menge aller Vektoren mit dem $\mathbb{R}^3$ identifiziert werden, wobei die Koordinatenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

jetzt drei Komponenten besitzen.

Um Platz zu sparen, verwendet man manchmal folgende Schreibweise für Tupel mit $n$ Komponenten:

$$(x_1, \dots, x_n)^\top := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Sprechweise: "$(x_1, \dots, x_n)$ transponiert".

Wir erhalten folgende Verknüpfungen bzw. Definitionen für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$:

(i) Addition zweier Vektoren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix},$$

(ii) Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl $\lambda$:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix},$$

(iii) Skalarprodukt zweier Vektoren:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

(iv) Länge eines Vektors:

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Im dreidimensionalen Raum (und nur dort) kann noch ein weiteres Produkt zwischen zwei Vektoren definiert werden. Wieder sei ein kartesisches Koordinatensystem mit den Basisvektoren $e_1, e_2, e_3$ fest gewählt.

**2.1 Definition.** Zu zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt definiert durch

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

**2.2 Satz.** *Für alle $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:*

*a) Das Vektorprodukt ist bilinear, d.h.*

$$\begin{aligned}(\alpha x) \times y &= \alpha(x \times y),\\ (x+y) \times z &= (x \times z) + (y \times z),\\ x \times (\alpha y) &= \alpha(x \times y),\\ x \times (y+z) &= (x \times y) + (x \times z).\end{aligned}$$

*b) Das Vektorprodukt ist antikommutativ, d.h.*

$$x \times y = -y \times x.$$

*c) Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ, aber es gilt*

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0 \in \mathbb{R}^3.$$

*d) Entwicklungssatz:*

$$x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z.$$

*e) Identität von Lagrange:*

$$\langle x \times y, z \times w\rangle = \langle x, z\rangle \, \langle y, w\rangle - \langle x, w\rangle \, \langle y, z\rangle.$$

*f) $x \times y$ steht senkrecht auf $x$ und $y$:*

$$\langle x, x \times y\rangle = \langle y, x \times y\rangle = 0.$$

*g) Sei $\varphi := \sphericalangle(x, y)$ der Winkel zwischen $x$ und $y$. Dann gilt*

$$|x \times y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2 = |x|^2|y|^2 \sin^2(\varphi).$$

*Beweis.* Das zeigt man alles durch direktes (und manchmal mühsames) Einsetzen in die Definition. □

**2.3 Bemerkung.** a) Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist nach Definition wieder ein Vektor. Die obigen Aussagen zeigen, dass der entstehende Vektor $x \times y$ senkrecht sowohl zu $x$ als auch zu $y$ ist und seine Länge proportional zu $|x|$, zu $|y|$ und zu $|\sin(\varphi)|$ ist. Genauer ist nach g) die Länge $|x \times y|$ gleich der Fläche des Parallelogramms, das von $x$ und $y$ aufgespannt wird. Damit sieht man auch, dass $x \times y = 0$ genau dann gilt, falls einer der beiden Vektoren $x$, $y$ der Nullvektor ist oder falls die beiden Vektoren parallel oder antiparallel sind. Speziell gilt etwa $x \times x = 0$.

Falls die Basisvektoren $e_1, e_2, e_3$ ein Rechtssystem bilden, d.h. in dieser Reihenfolge im Raum liegen wie Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand, so bilden auch $x$, $y$ und $x \times y$ ein Rechtssystem.

b) Speziell für die Basisvektoren gilt

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 = -(e_2 \times e_1), \\ e_2 \times e_3 &= e_1 = -(e_3 \times e_2), \\ e_3 \times e_1 &= e_2 = -(e_1 \times e_3) \end{aligned}$$

(zyklisches Vertauschen!) sowie $e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = 0$.

Die oben angegebenen Verknüpfungen $x+y$, $\lambda x$ sowie das Skalarprodukt $\langle x, y\rangle$ lassen sich in offenkundiger Weise auf Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $n$ Komponenten ($n \in \mathbb{N}$) übertragen. So ist etwa $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

## b) Vektorräume, Basen, Dimension

Die oben diskutierte Struktur des zwei- und dreidimensionalen Raums tritt häufig in der Mathematik auf, daher wird ein zugehöriger Begriff definiert, der des Vektorraums. Wir werden später noch einige andere Beispiele für Vektorräume kennenlernen.

Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**2.4 Definition.** Eine Menge $V$ mit zwei Abbildungen $+\colon V \times V \to V$ und $\cdot\colon \mathbb{K} \times V \to V$ heißt ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (oder ein Vektorraum über $\mathbb{K}$), falls gilt:

(i) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\vec{0} \in V$,

(ii) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ und $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ (Distributivgesetze),

(iii) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und alle $v \in V$ gilt $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ (Assoziativgesetz),

(iv) Es gilt $1 \cdot v = v$ für alle $v \in V$.

In Teil (i) der obigen Definition ist die $\vec{0}$ nicht die Null des Körpers, sondern die Null des Vektorraums. Daher schreibt man manchmal auch $\mathbf{0}$ oder $\underline{0}$. Wir werden aber meistens einfach 0 sowohl für die Null in $\mathbb{K}$ als auch für die Null in $V$ verwenden. Die Abbildung $\cdot\colon \mathbb{K} \times V \to V$ heißt Skalarmultiplikation.

**2.5 Beispiele.** Beispiele für $\mathbb{R}$-Vektorräume sind $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Der Körper $\mathbb{C}$ ist sowohl ein $\mathbb{R}$-Vektorraum als auch ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ein anderes Beispiel für einen

$\mathbb{R}$-Vektorraum ist die Menge $\mathbb{R}[X]$ aller reellen Polynome, d.h. aller Funktionen $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und mit den Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Analog ist $\mathbb{C}[X]$ (die Menge aller komplexen Polynome) ein Vektorraum sowohl über $\mathbb{R}$ als auch über $\mathbb{C}$.

Alleine aus den Axiomen eines Vektorraums kann man erste Folgerungen ziehen, wobei wir hier zur Klarstellung nochmal die Schreibweise $\vec{0} \in V$ verwenden:

**2.6 Lemma.** *Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gilt für alle $v, w \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$:*

*(i)* $0 \cdot v = \vec{0}$,

*(ii)* $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$,

*(iii)* $(-1) \cdot v = -v$.

*Beweis.* (i) Für alle $v \in V$ gilt $v + 0 \cdot v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = (1+0) \cdot v = 1 \cdot v = v = v + \vec{0}$. Addiert man auf beiden Seiten $-v$, so erhält man $0 \cdot v = \vec{0}$.

(ii) Genauso wie in (i) folgt $\alpha \cdot v + 0 = \alpha \cdot v = \alpha \cdot (v + \vec{0}) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot \vec{0}$ und damit $0 = \alpha \cdot \vec{0}$.

(iii) Man verwendet $u + (-1) \cdot u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = \vec{0} = u + (-u)$. Nach Subtraktion von $u$ auf beiden Seiten erhält man $(-1) \cdot u = -u$. □

Wir hatten vorher gesehen, dass jeder Vektor $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ sich eindeutig darstellen lässt in der Form $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, wobei $e_1$ und $e_2$ die beiden Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$ seien. In diesem Fall ist die Darstellung trivial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ersetzt man die Einheitsvektoren durch andere Vektoren, ist die Darstellbarkeit nicht so klar: Es gilt z.B.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

aber nicht jeder Vektor lässt sich durch die Vektoren $\binom{1}{0}$ und $\binom{2}{0}$ darstellen.

Im Folgenden sei $V$ stets ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

**2.7 Definition.** a) Ein Vektor $v$ der Form $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ und $v_1, \dots, v_n \in V$ heißt eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_n$. Man definiert

$$\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} := \{v \,|\, v \text{ ist eine Linearkombination von } v_1, \dots, v_n\}$$

(Span der Vektoren $v_1, \dots, v_n$, lineare Hülle der $v_j$, der von $v_j$ aufgespannte Unterraum). Wir setzen noch $\operatorname{span} \emptyset := \{\vec{0}\}$.

b) Sei $U \subset V$ eine Menge von Vektoren aus $V$. Dann definiert man $\operatorname{span} U$ als die Menge aller Linearkombinationen von endlich vielen Vektoren aus $U$. Die Menge $U$ heißt auch ein Erzeugendensystem von $\operatorname{span} U$.

b) $V$ heißt endlich erzeugt, falls es endlich viele Vektoren $v_1, \dots, v_n$ gibt mit $V = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

In obigem Beispiel gilt etwa

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\} \neq \mathbb{R}^2.$$

**2.8 Definition.** Eine Menge $U \subset V$ heißt Unterraum oder Untervektorraum von $V$, falls $\vec{0} \in U$ und falls $(U, +, \cdot)$ selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. (Dabei wird von der Addition $+$ und von der Multiplikation $\cdot$ jeweils die Einschränkung auf $U \times U$ bzw. auf $\mathbb{K} \times U$ betrachtet).

**2.9 Satz.** *Sei $U \subset V$ mit $\vec{0} \in U$ abgeschlossen bzgl. Addition und Skalarmultiplikation, d.h. es gelte $v + w \in U$ und $\alpha v \in U$ für alle $v, w \in U$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist $(U, +, \cdot)$ ein Untervektorraum von $V$.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist die Summe zweier Vektoren aus $U$ wieder in $U$, d.h. die Addition in $U$ ist wohldefiniert als Abbildung $+\colon U \times U \to U$. Analog ist $\cdot\colon \mathbb{K} \times U \to U$ wohldefiniert. Die Gesetze (ii)-(iv) aus Definition 2.4 gelten sogar in ganz $V$, also insbesondere auch in $U$. Zu zeigen ist noch (i) in Definition 2.4. Die Existenz des neutralen Elements (bezüglich $+$) ist klar wegen $\vec{0} \in U$, und zu $u \in U$ ist $-u = (-1)u \in U$ das Inverse (bezüglich $+$). Also ist $(U, +)$ eine abelsche Gruppe, und $U$ ist Untervektorraum von $V$. □

**2.10 Lemma.** *Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann ist $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Untervektorraum von $V$.*

*Beweis.* Man rechnet die Voraussetzungen von Satz 2.9 nach. □

**2.11 Beispiel.** Die Menge $\mathbb{P}_2$ aller reellen Polynome vom Grad nicht größer als 2 ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$. Denn das Nullpolynom liegt in $\mathbb{P}_2$, und die Summe zweier Polynome sowie das Vielfache eines Polynoms vom Grad $\leq 2$ ist wieder ein Polynom vom Grad $\leq 2$.

Offensichtlich gilt

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

aber hinsichtlich der Darstellbarkeit von Vektoren gibt es einen wesentlichen Unterschied: Jedes $x \in \mathbb{R}^2$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von $e_1$ und $e_2$ darstellen, aber die Darstellung als Linearkombination von $e_1, e_2$ und $\binom{1}{1}$ ist nicht eindeutig:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (x_1 - x_2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Wir werden sehen, dass der zentrale Begriff die lineare Unabhängigkeit ist.

**2.12 Definition.** a) Eine endliche Menge $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, $n \geq 1$, heißt linear abhängig, falls $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ existieren, welche nicht alle gleich 0 sind, so dass $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$ gilt. Sonst heißt $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig.

b) Sei $U \subset V$ eine Teilmenge. Dann heißt $U$ linear unabhängig, falls jede endliche Familie linear unabhängig ist. Sonst heißt $U$ linear abhängig.

c) Eine (endliche oder unendliche) Teilmenge $U \subset V$ heißt eine Basis von $V$, falls $U$ linear unabhängig ist und ein Erzeugendensystem von $V$ ist (d.h. es gilt $\operatorname{span} U = V$).

**2.13 Bemerkung.** a) Nach Definition 2.12 b) ist eine Menge $U \subset V$ genau dann linear abhängig, falls endlich viele $u_1, \dots, u_n \in U$, $n \geq 1$, und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, nicht alle $\alpha_j = 0$, existieren mit $\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j = \vec{0}$.

Eine Menge $U \subset V$ ist genau dann linear unabhängig, falls für alle endlichen Teilmengen $\{u_1, \dots, u_n\} \subset U$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \vec{0} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

b) Die Menge $\{\vec{0}\} \subset V$ ist linear abhängig, die leere Menge $\emptyset \subset V$ ist linear unabhängig. Es gilt $\operatorname{span} \emptyset = \{0\}$.

c) Falls einer der Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ gleich $\vec{0}$ ist, so ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear abhängig.

**2.14 Beispiele.** a) Die Menge $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$, die Menge $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{1}\}$ ist ein Erzeugendensystem, aber keine Basis von $\mathbb{R}^2$.

b) Es gibt auch unendliche unabhängige Mengen: So ist z.B. $\{1, x, x^2, \dots,\} \subset \mathbb{R}[X]$ linear unabhängig und tatsächlich eine Basis von $\mathbb{R}[X]$.

c) Die Menge $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$, aber die Menge $\{1\}$ ist eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}$.

**2.15 Satz.** *Eine Menge $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ ist genau dann eine Basis von $V$, falls jedes Element $v \in V$ eindeutig als Linearkombination von $\{v_1, \dots, v_n\}$ dargestellt werden kann.*

*Beweis.* (i) Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $V$. Wegen $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = V$ lässt sich jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ darstellen.

Sei $v = \sum_{j=1}^n \widetilde{\alpha}_j v_j$ eine weitere Darstellung von $v$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j - \widetilde{\alpha}_j) v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j - \sum_{j=1}^n \widetilde{\alpha}_j v_j = x - x = \vec{0}.$$

Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig sind, folgt $\alpha_j - \widetilde{\alpha}_j = 0$ für alle $j$, d.h. die Darstellung von $v$ als Linearkombination ist eindeutig.

(ii) Jeder Vektor $v \in V$ sei eindeutig als Linearkombination der $v_j$ darstellbar. Dann gilt offensichtlich $V = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Sei $\vec{0} = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$. Wegen

$$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = \vec{0} = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$$

und der Eindeutigkeit der Darstellung als Linearkombination folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Also existiert keine nichttriviale Linearkombination von $\vec{0}$, und $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist linear unabhängig. $\square$

**2.16 Bemerkung.** Der obige Beweis zeigt, dass die Aussage auch für unendliche Basen gilt: Eine Menge $U \subset V$ ist genau dann eine Basis von $V$, falls jedes Element $v \in V$ eindeutig als (endliche!) Linearkombination von Elementen aus $U$ dargestellt werden kann.

**2.17 Lemma.** *Sei $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ linear unabhängig, und sei $u \notin \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Dann ist auch $\{v_1, \dots, v_n, u\}$ linear unabhängig.*

*Beweis.* Sei $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta u = 0$. Wir haben zu zeigen, dass $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta = 0$ gilt.

Falls $\beta \neq 0$, können wir durch $\beta$ teilen und erhalten

$$u = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} v_n$$

im Widerspruch zu $u \notin \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Also gilt $\beta = 0$ und damit $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig ist, folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. $\square$

**2.18 Satz** (Basisergänzungssatz). *Sei* $V = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ *(insbesondere* $V$ *endlich erzeugt), und sei* $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ *linear unabhängig. Dann kann* $\{u_1, \dots, u_m\}$ *durch Vektoren aus* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *zu einer Basis von* $V$ *ergänzt werden.*

*Beweis.* Falls $U := \{u_1, \dots, u_m\}$ bereits $V$ erzeugt, so ist $U$ bereits eine Basis und muss nicht ergänzt werden. Ansonsten existiert ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $v_j \notin \operatorname{span} U$. Denn sonst wäre $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \operatorname{span} U$, und da nach Lemma 2.10 $\operatorname{span} U$ ein Untervektorraum von $V$ ist, wäre jede Linearkombination der $v_j$ ebenfalls in $\operatorname{span} U$, Widerspruch zu $V \neq \operatorname{span} U$.

Wir wählen ein (z.B. minimales) $j$ mit $v_j \notin \operatorname{span} U$ und ergänzen $U$ damit zu $\widetilde{U} := U \cup \{v_j\}$. Dann ist $\widetilde{U}$ nach Lemma 2.17 immer noch linear unabhängig. Mit dieser neuen Familie beginnen wir wieder von vorne. Nach spätestens $n$ Schritten ist jeder Vektor $v_j$ in die Familie $U$ eingefügt worden, und nach obiger Überlegung ist das ergänzte System sowohl linear unabhängig als auch ein Erzeugendensystem von $V$, also eine Basis von $V$. □

Der folgende Satz ist zentral für die Theorie der Vektorräume.

**2.19 Satz** (Basissatz). *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*

*Beweis.* Für endlich erzeugte Vektorräume $V \neq \{0\}$ folgt dies aus dem Basisergänzungssatz: Sei $V$ endlich erzeugt, d.h. es gelte $V = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, wobei o.E. $v_1 \neq \vec{0}$ gelte. Wir wählen $U := \{v_1\}$. Dann ist $U$ linear unabhängig, und nach dem Basisergänzungssatz kann $U$ zu einer Basis von $V$ ergänzt werden.

Für nicht endlich erzeugte Vektorräume gilt dieser Satz ebenfalls, der Beweis ist aber wesentlich schwerer und kann hier nicht ausgeführt werden. □

Im letzten Beweis haben wir für nichttriviale endlich erzeugte Vektorräume folgendes gezeigt:

**2.20 Satz** (Basisauswahlsatz). *Sei* $V = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. *Dann lässt sich aus den Vektoren* $v_1, \dots, v_n$ *eine Basis von* $V$ *auswählen.*

Der folgende Satz ist zentral für den Begriff der Dimension.

**2.21 Satz.** *Sei* $V \neq \{0\}$ *endlich erzeugt. Dann haben je zwei Basen von* $V$ *dieselbe Länge.*

Der Beweis dieses Satzes folgt aus folgendem Lemma.

**2.22 Lemma.** *Seien* $n \in \mathbb{N}$, $U = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ *und* $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ *mit* $w_j \in \operatorname{span} U$ *für alle* $j = 1, \dots, m$ *und* $m > n$. *Dann ist* $W$ *linear abhängig.*

*Beweis.* Vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

Induktionsbeginn $n = 1$: Es ist $U = \{u_1\}$. Wegen $w_j \in \operatorname{span} U$ gilt $w_j = \alpha_j u_1$ für alle $j$ mit $\alpha_j \in \mathbb{K}$. Falls $w_j = \vec{0}$ für ein $j$ gilt, so ist $W$ linear abhängig (siehe Bemerkung 2.13 c)), o.E. sei daher $\alpha_j \neq 0$ für alle $j$. Dann ist $W$ linear abhängig wegen $\alpha_2 w_1 - \alpha_1 w_2 = \alpha_2\alpha_1 u_1 - \alpha_1\alpha_2 u_1 = \vec{0}$ und $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$.

Induktionsschritt $n \to n+1$ (es sei jetzt also $m > n+1$): Da $W \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$, existieren $\alpha_{jk} \in \mathbb{K}$ mit

$$w_j = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{jk} u_k \quad (j = 1, \dots, m).$$

O.E. sei $w_m \neq 0$. Dann sind nicht alle $\alpha_{mk} = 0$. Durch Umnummerierung der $u_k$ kann man annehmen, dass $\alpha_{m,n+1} \neq 0$ gilt. Wir definieren

$$\widetilde{w}_j := w_j - \frac{\alpha_{j,n+1}}{\alpha_{m,n+1}}\, w_m = \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\frac{\alpha_{jk}\alpha_{m,n+1} - \alpha_{j,n+1}\alpha_{mk}}{\alpha_{m,n+1}}}_{=:\widetilde{\alpha}_{jk}} u_k \quad (j = 1, \dots, m-1).$$

Dann gilt $\widetilde{\alpha}_{j,n+1} = 0$ und damit $\widetilde{w}_j \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ für alle $j = 1, \dots, m-1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\{\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_{m-1}\}$ linear abhängig, d.h. es existieren $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$, nicht alle gleich 0, mit

$$0 = \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \widetilde{w}_j = \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \Big( w_j - \frac{\alpha_{j,n+1}}{\alpha_{m,n+1}}\, w_m \Big) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j,$$

wobei $\beta_m := -\frac{1}{\alpha_{m,n+1}} \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j \alpha_{j,n+1}$ gesetzt wurde. Da nicht alle $\beta_j$ gleich 0 sind, ist $\{w_1, \dots, w_m\}$ linear abhängig. □

*Beweis von Satz 2.21.* Seien $U$ und $W$ zwei Basen der Länge $n$ bzw. $m$ von $V$. Wir nehmen an, dass $m > n$ gilt. Dann gilt $W \subset \operatorname{span} U = V$, und aus Lemma 2.22 folgt die lineare Abhängigkeit von $W$ im Widerspruch zur Basiseigenschaft. □

**2.23 Definition.** Die Dimension des $\mathbb{K}$-Vektorraums $V$ wird definiert durch

$$\dim V := \begin{cases} 0, & \text{falls } V = \{\vec{0}\}, \\ n, & \text{falls } V \text{ eine Basis aus } n \text{ Elementen besitzt}\}, \\ \infty, & \text{falls } V \text{ nicht endlich erzeugt ist.} \end{cases}$$

Falls $\dim V \in \mathbb{N}_0$, so heißt $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

**2.24 Lemma.** *Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum mit $n \in \mathbb{N}$ und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann ist $\dim U \le n$, und jede Basis $\{u_1, \dots, u_m\}$ von $U$ kann zu einer Basis $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ von $V$ ergänzt werden.*

*Beweis.* Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von $V$. Die Vektoren $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ sind als Basis von $U$ linear unabhängig, also gilt nach Lemma 2.22 $m \le n$. Nach dem Basisergänzungssatz 2.18 kann $\{u_1, \dots, u_m\}$ durch Vektoren aus $\{v_1, \dots, v_n\}$ zu einer Basis von $V$ ergänzt werden. Nach Satz 2.21 hat diese Basis wieder die Länge $n$. □

**2.25 Lemma.** *Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum und $U$ ein Untervektorraum von $V$ mit $\dim U = \dim V$. Dann gilt $U = V$.*

*Beweis.* Sei $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine Basis von $U$. Falls ein $x \in V \setminus U$ existiert, gilt $x \notin \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$, und $\{u_1, \dots, u_n, x\}$ ist linear unabhängig nach Lemma 2.17. Damit folgt $\dim V \ge n + 1$ im Gegensatz zur Voraussetzung. □

**2.26 Definition.** Seien $U, V \subset W$ Untervektorräume eines Vektorraums $W$. Dann definiert man den Durchschnitt von $U$ und $V$ als $U \cap V$ und die Summe von $U$ und $V$ als

$$U + V := \{w = u + v \,|\, u \in U,\, v \in V\}$$

(jeweils mit der Einschränkung der Addition und Skalarmultiplikation auf $U \cap V$ bzw. $U + V$). Falls für alle $w \in U + V$ die Darstellung $w = u + v$ mit $u \in U$ und $v \in V$ eindeutig ist, so heißt $U + V$ die direkte Summe von $U$ und $V$; Schreibweise $U \oplus V$.

Analog werden für Unterräume $U_1, \dots, U_k$ eines Vektorraums $W$ der Durchschnitt $\bigcap_{j=1}^k U_j$, die Summe $U_1 + \dots + U_k$ und die direkte Summe $\bigoplus_{j=1}^k U_j$ definiert.

Man sieht leicht, dass $U \cap V$ und $U + V$ wieder Untervektorräume sind.

**2.27 Satz** (Dimensionsformel)**.** *Seien $U, V$ Untervektorräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums $W$. Dann gilt*

$$\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U + V).$$

*Beweis.* Sei $\dim U = k$, $\dim V = \ell$, $\dim(U \cap V) = r$. Zu zeigen ist also $\dim(U + V) = k + \ell - r$. Sei $\{w_1, \dots, w_r\}$ eine Basis von $U \cap V$. Dann können wir nach Lemma 2.24 diese Basis ergänzen zu einer Basis $\{w_1, \dots, w_r, u_{r+1}, \dots, u_k\}$ von $U$ sowie zu einer Basis $\{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_\ell\}$ von $V$. Die Menge

$$B := \{w_1, \dots, w_r, u_{r+1}, \dots, u_k, v_{r+1}, \dots, v_\ell\}$$

ist ein Erzeugendensystem von $U + V$. Wir zeigen, dass $B$ auch linear unabhängig ist.

Sei dazu
$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j w_j + \sum_{j=r+1}^{k} \beta_j u_j + \sum_{j=r+1}^{\ell} \gamma_j v_j = \vec{0}. \tag{2-1}$$

Für $u := \sum_{j=r+1}^{k} \beta_j u_j$ gilt dann $u \in U$, aber wegen

$$u = -\sum_{j=1}^{r} \alpha_j w_j - \sum_{j=r+1}^{\ell} \gamma_j v_j \tag{2-2}$$

auch $u \in V$. Somit ist $u \in U \cap V$, und daher existieren $\mu_j \in \mathbb{K}$ mit

$$u = \sum_{j=1}^{r} \mu_j w_j. \tag{2-3}$$

Durch die Gleichungen (2-2) und (2-3) sind zwei Darstellungen von $u$ bzgl. der Basis $\{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_\ell\}$ von $V$ gegeben. Nach Satz 2.15 ist diese Darstellung eindeutig, es folgt also $\gamma_{r+1} = \dots = \gamma_\ell = 0$.

Damit verschwindet in (2-1) die letzte Summe. $\{w_1, \dots, w_r, u_{r+1}, \dots, u_k\}$ eine Basis von $U$ und damit linear unabhängig ist, folgt aus (2-1), dass alle Koeffizienten gleich 0 sind, d.h. es gilt $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ sowie $\beta_{r+1} = \dots = \beta_k = 0$.

Damit ist $B$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis, von $U+V$. Da $B$ genau $k + \ell - r$ Elemente besitzt, folgt $\dim(U + V) = k + \ell - r$. □

## c) Vektorräume mit Skalarprodukt

Im Beispiel von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ hatten wir ein Skalarprodukt betrachtet. Dieser Begriff wird folgendermaßen definiert. Wie bisher sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**2.28 Definition.** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ heißt ein Skalarprodukt, falls gilt:

(i) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ $(u, v \in V)$ (symmetrisch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. hermitesch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$),

(ii) $u \mapsto \langle u, v\rangle$ ist für jedes feste $v \in V$ linear, d.h. es gilt

$$\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle \text{ und } \langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle \quad (u, u_1, u_2, v \in V,\ \alpha \in \mathbb{K}).$$

(iii) $\langle u, u\rangle \geq 0$ $(u \in V)$ und $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (positiv definit).

In diesem Fall heißt $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt.

**2.29 Bemerkung.** a) Aus (i) und (ii) folgt $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$ sowie $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle$, d.h. $v \mapsto \langle u, v\rangle$ ist konjugiert linear.

b) Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt aus (i), dass $\langle u, u\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$ gilt. Daher ist die Bedingung $\langle u, u\rangle \geq 0$ als Ungleichung in $\mathbb{R}$ sinnvoll.

c) In der physikalischen Literatur wird das Skalarprodukt oft als linear in der zweiten Komponente und konjugiert linear in der ersten Komponente definiert. Das ist Geschmackssache.

**2.30 Beispiele.** a) In $\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ ist das Standard-Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

b) Analog ist in $\mathbb{C}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}\}$ das Standard-Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j} \quad (x, y \in \mathbb{C}^n).$$

c) Sei $C([0, 1])$ die Menge aller reellwertigen stetigen Funktionen auf $[0, 1]$. Dann ist durch

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (f, g \in C([0, 1]))$$

ein Skalarprodukt definiert. Dasselbe Skalarprodukt ist auch für den Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ aller reellwertigen Polynome definiert. Wir werden dieses Beispiel und die dafür benötigten Begriffe später behandeln.

Aus dem Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, hatten wir die Länge eines Vektors durch $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ bestimmt. Dafür gilt eine wichtige Ungleichung.

**2.31 Satz** (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)**.** *Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Dann gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \quad (x, y \in V).$$

*Beweis.* O.E. sei $y \neq 0$. Für $\alpha := \|y\|^2 > 0$ und $\beta := -\langle x, y\rangle$ gilt dann

$$0 \leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha\overline{\alpha}\langle x,x\rangle + \alpha\overline{\beta}\langle x,y\rangle + \overline{\alpha}\beta\langle y,x\rangle + \beta\overline{\beta}\langle y,y\rangle \\
&= |\alpha|^2\|x\|^2 - 2\alpha|\langle x,y\rangle|^2 + |\beta|^2\|y\|^2 \\
&= \|y\|^2\big(\|y\|^2\|x\|^2 - 2|\langle x,y\rangle|^2 + |\langle x,y\rangle|^2\big) \\
&= \|y\|^2\big(\|y\|^2\|x\|^2 - |\langle x,y\rangle|^2\big).
\end{aligned}
$$

Somit folgt $\|x\|\,\|y\|^2 - |\langle x,y\rangle|^2 \le 0$. □

**2.32 Definition.** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ heißt eine Norm auf $V$, falls gilt:

(i) $\|u\| \ge 0$ $(u \in V)$, und $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$ $(\alpha \in \mathbb{K},\ u \in U)$.

(iii) $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$ $(u, v \in V)$ (Dreiecksungleichung).

In diesem Fall heißt $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

**2.33 Beispiele.** a) Der Betrag auf $\mathbb{R}$ oder auf $\mathbb{C}$ ist eine Norm.

b) Beispiele für eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und auf $\mathbb{C}^n$ sind

$$
\begin{aligned}
|x| := |x|_2 &:= \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \quad \text{(euklidische Norm oder } \ell^2\text{-Norm)},\\
|x|_1 &:= |x_1| + \dots + |x_n| \quad (\ell^1\text{-Norm}),\\
|x|_\infty &:= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \quad \text{(Maximumsnorm oder } \ell^\infty\text{-Norm)}.
\end{aligned}
$$

**2.34 Bemerkung.** Falls $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum ist, gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\|x-y\| \ge \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \quad (x, y \in V).$$

Dies sieht man durch Anwenden der Dreiecksungleichung auf $\|x\| = \|(x-y)+y\|$ bzw. $\|y\| = \|(y-x)+x\|$.

Das obige Beispiel der euklidischen Norm ist kein Zufall:

**2.35 Satz.** *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann ist die Abbildung $V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ eine Norm auf $V$ (die vom Skalarprodukt induzierte Norm).*

*Beweis.* Wegen $\langle u,u\rangle \geq 0$ ist auch die Wurzel definiert und $\geq 0$. Es gilt $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nach der Definition des Skalarprodukts. Dies zeigt Bedingung (i) in Definition 2.32.

Bedingung (ii) folgt aus $\|\alpha u\|^2 = \langle \alpha u, \alpha u\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle u,u\rangle = |\alpha|^2\|u\|^2$.

Bedingung (iii) schließlich (die Dreiecksungleichung) folgt unter Verwendung von $\operatorname{Re} z \leq |z|$ $(z \in \mathbb{C})$ sowie der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\big(\langle x,y\rangle\big) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

□

**2.36 Lemma.** *Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Dann gilt für alle $x,y \in V$:*

*(i) Satz von Pythagoras:*

$$\langle x,y\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

*(ii) Parallelogrammgleichung:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

*(iii) Polarisationsformel: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big),$$

*für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big).$$

*Beweis.* Direktes Nachrechnen. □

**2.37 Definition.** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt.

a) Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen orthogonal oder aufeinander senkrecht, falls $\langle u, v\rangle = 0$ gilt; Schreibweise $u \perp v$.

b) Eine (endliche oder unendliche) Menge $\{u_j : j \in J\}$ heißt ein Orthogonalsystem, falls $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ gilt. Sie heißt ein Orthonormalsystem, falls gilt:

$$\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Das Symbol $\delta_{ij}$ heißt Kroneckersches Delta-Symbol.

c) Ein Orthonormalsystem, welches zugleich eine Basis von $V$ ist, heißt eine Orthonormalbasis von $V$.

d) Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann heißt

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement von $U$.

**2.38 Beispiel.** Sei $e_j$ der $j$-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$, d.h. die $i$-te Komponente von $e_j$ ist $\delta_{ij}$. Dann ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

Bei Orthonormalbasen lassen sich die Koeffizienten eines Vektors leicht berechnen:

**2.39 Satz.** *Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt, und sei $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine Orthonormalbasis von $V$. Dann ist jeder Vektor $u \in V$ eindeutig darstellbar in der Form*

$$u = \sum_{j=1}^n \langle u, u_j\rangle u_j.$$

*Für die induzierte Norm gilt die Parsevalsche Gleichung (manchmal auch Besselsche Gleichung genannt)*

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle u, u_j\rangle|^2.$$

*Beweis.* Da $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine Basis ist, existiert eine eindeutige Darstellung der Form $u = \sum_{j=1}^n c_j u_j$ mit $c_j \in \mathbb{K}$. Wir nehmen auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit $u_\ell$ für ein festes $\ell$ und erhalten mit der Linearität des Skalarprodukts

$$\langle u, u_\ell\rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^n c_j u_j, u_\ell \Big\rangle = \sum_{j=1}^n c_j \langle u_j, u_\ell\rangle = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{j\ell} = c_\ell.$$

Analog gilt

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^n c_i u_i, \sum_{j=1}^n c_j u_j \Big\rangle = \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \langle u_i, u_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n |c_i|^2.$$

□

**2.40 Bemerkung.** Die Aussagen von Satz 2.39 gelten auch für unendliche Orthonormalsysteme $\{u_j : j \in J\}$. Allerdings muss man dazu zunächst die Bedeutung von z.B. $\sum_{j\in J}\langle u, u_j\rangle u_j$ erklären und verstehen.

**2.41 Satz** (Orthormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt)**.** *Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $\{v_1, v_2, \dots\}$ eine (endliche oder unendliche) linear unabhängige Menge von Vektoren. Definiere rekursiv*

*(i)* $w_1 := v_1,\ u_1 := \frac{1}{\|w_1\|} w_1,$

*(ii)* $w_{n+1} := v_{n+1} - \sum_{j=1}^n \langle v_{n+1}, u_j\rangle u_j,\ u_{n+1} := \frac{1}{\|w_{n+1}\|} w_{n+1},\ n \geq 1.$

*Dann sind alle $u_n$, $n \in \mathbb{N}$, wohldefiniert, $\{u_1, u_2, \dots\}$ ist ein Orthonormalsystem, und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist* $\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

*Beweis.* Induktion nach $n$, wobei der Induktionsanfang klar ist wegen $v_1 \neq \vec{0}$ (sonst wäre $\{v_1, v_2, \dots\}$ linear abhängig).

Wäre $w_{n+1} = \vec{0}$, so wäre $v_{n+1} \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ (mit Induktionsvoraussetzung). Dies ist aber ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der $v_j$. Es gilt für alle $\ell \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}\langle w_{n+1}, u_\ell\rangle &= \langle v_{n+1}, u_\ell\rangle - \sum_{j=1}^n \langle v_{n+1}, u_j\rangle\, \langle u_j, u_\ell\rangle \\ &= \langle v_{n+1}, u_\ell\rangle - \sum_{j=1}^n \langle v_{n+1}, u_j\rangle\, \delta_{j\ell} \\ &= \langle v_{n+1}, u_\ell\rangle - \langle v_{n+1}, u_\ell\rangle = 0,\end{aligned}$$

wobei wieder die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde. Also ist $w_{n+1}$ orthogonal zu jedem $u_\ell$, und wegen $\|u_{n+1}\| = 1$ bildet $\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ ein Orthonormalsystem. □

**2.42 Korollar.** *Jeder endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt besitzt eine Orthonormalbasis.*

*Beweis.* Man wählt eine (endliche) Basis und wendet auf diese das Gram-Schmidt-Orthonormalsisierungsverfahren an. □

**2.43 Satz.** *Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \subset V$ ein endlich-dimensionaler Unterraum. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$, d.h. zu jedem $v \in V$ existiert eine eindeutige Darstellung der Form $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in U^\perp$.*

*Beweisskizze.* Sei $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine Orthonormalbasis von $U$. Dann betrachtet man zu gegebenem $v \in V$ den Vektor $u := \sum_{j=1}^n c_j u_j \in U$ und zeigt $w := v - u \in U^\perp \Leftrightarrow c_j = \langle v, u_j \rangle$. □

# 3. Lineare Abbildungen und Matrizen

**Worum geht's?** Viele Abbildungen zwischen Vektorräumen sind linear, wie etwa die Ableitung als Abbildung zwischen Funktionenräumen. Speziell für endlich-dimensionale Vektorräume bietet es sich an, lineare Abbildungen in Form von Matrizen darzustellen. Damit tritt die ursprüngliche Struktur des Vektorraums in den Hintergrund, und man rechnet nur noch im $\mathbb{K}^n$. Gleichungen in den ursprünglich gegebenen Vektorräumen werden damit zu linearen Gleichungssystemen, welche mit Standardmethoden gelöst werden können. Hier wird das Gauß-Jordan-Verfahren etwas näher diskutiert.

## a) Homomorphismen

Im Folgenden sei wieder $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und es seien $U, V$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume.

**3.1 Definition.** a) Eine Abbildung $f\colon U \to V$ heißt linear, falls gilt:

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ $(x, y \in U)$,

(ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $(x \in U, \lambda \in \mathbb{K})$.

Eine lineare Abbildung wird auch Homomorphismus oder linearer Operator genannt. Die Menge aller Homomorphismen von $U$ nach $V$ wird mit $\operatorname{Hom}(U, V)$ oder $\mathcal{L}(U, V)$ bezeichnet. Im Falle $U = V$ spricht man auch von einem Endomorphismus, Schreibweise $\mathcal{L}(U) := \mathcal{L}(U, U)$. Im Falle $V = \mathbb{K}$ heißt ein Element von $\operatorname{Hom}(U, \mathbb{K})$ auch ein lineares Funktional. Für $T \in \mathcal{L}(U, V)$ ist auch die Schreibweise $Tx := T(x)$ gebräuchlich.

b) Sei $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Dann heißt $f$ ein Isomorphismus, falls $f$ bijektiv ist. Die Vektorräume $U$ und $V$ heißen isomorph, falls ein Isomorphismus von $U$ nach $V$ existiert. Die Menge aller Isomorphismen von $U$ nach $V$ wird mit $\operatorname{Isom}(U, V)$ bezeichnet.

**3.2 Beispiele.** a) Die Abbildung $U \to V$, $x \mapsto 0_V$ ist ein Homomorphismus. Die Abbildung $\operatorname{id}_U\colon U \to U$, $x \mapsto x$ ist ein Endomorphismus von $U$ und wird Identität auf $U$ genannt. Offensichtlich ist $\operatorname{id}_U$ ein Isomorphismus von $U$ nach $U$.

b) Sei $U = C([0, 1]; \mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Abbildungen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung $U \mapsto \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ ein lineares Funktional.

c) Sei $U = C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Dann ist $\delta_0\colon U \mapsto \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$ ein lineares Funktional. Die Abbildung $\delta_0$ heißt auch Delta-Distribution und wird z.B. für die Beschreibung von Punktmassen verwendet.

**3.3 Bemerkung.** a) Für $f_1, f_2 \in \operatorname{Hom}(U,V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ kann man in kanonischer Weise die Summe und die Skalarmultiplikation definieren:

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(x) &:= f_1(x)+f_2(x) \quad (x \in U),\\ (\lambda f_1)(x) &:= \lambda f_1(x) \quad (x \in U).\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass damit $\operatorname{Hom}(U,V)$ selbst zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum wird.

b) Für $\mathbb{K}$-Vektorräume $U, V, W$ kann man die Komposition oder Hintereinanderausführung linearer Abbildungen in natürlicher Weise definieren. Für $S \in \operatorname{Hom}(U,V)$ und $T \in \operatorname{Hom}(V,W)$ ist $T \circ S$ gegeben durch $(T \circ S)(x) := T(S(x))$. Es gilt $T \circ S \in \operatorname{Hom}(U,W)$. Man schreibt auch $TS := T \circ S$.

**3.4 Definition.** Sei $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$. Dann heißt

$$\ker f := \{u \in U \,|\, f(u) = 0\} \subset U$$

der Kern von $f$ und

$$R(f) := \{f(u) \,|\, u \in U\} \subset V$$

das Bild von $f$ (vgl. Abschnitt 1 a)). Andere Bezeichnungen sind $N(f) := \ker f$ sowie $\operatorname{Im} f := \operatorname{Bild} f := \operatorname{img} f := R(f)$.

**3.5 Lemma.** *a) Sei $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$. Dann sind $\ker f \subset U$ und $R(f) \subset V$ Untervektorräume von $U$ bzw. $V$.*

*b) Eine lineare Abbildung $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$ ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$ gilt.*

*Beweis.* a) Wir verwenden Satz 2.9. Wegen $f(0) = 0$ ist $0 \in \ker f$. Seien $x, y \in \ker f$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt unter Verwendung der Linearität $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$ und $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$ und damit $x + y \in \ker f$ sowie $\lambda x \in \ker f$. Also ist $\ker f$ ein Untervektorraum von $U$.

Wieder wegen $f(0) = 0$ gilt $0 \in R(f)$. Für $x, y \in R(f)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ erhalten wir $f(x) + f(y) = f(x+y) \in R(f)$ und $\lambda f(x) = f(\lambda x) \in R(f)$, und daher ist $R(f)$ ein Untervektorraum von $V$.

b) Falls $f$ injektiv ist, so existiert nur ein $x_0 \in U$ mit $f(x_0) = 0$. Wegen $f(0) = 0$ folgt $x_0 = 0$. Also gilt $\ker f = \{0\}$.

Sei andererseits $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$ mit $\ker f = \{0\}$ gegeben, und seien $x_1, x_2 \in U$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0$ und damit $x_1 - x_2 \in \ker f = \{0\}$. Also ist $x_1 = x_2$, und $f$ ist injektiv. □

**3.6 Definition.** Sei $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$. Dann heißt $\dim \ker f$ der Defekt von $f$ und $\operatorname{rang} f := \dim R(f)$ der Rang von $f$.

**3.7 Satz** (Dimensionsformel)**.** *Sei* $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$, *und sei* $U$ *endlich-dimensional mit* $\dim U = n \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*

$$\dim \ker f + \operatorname{rang} f = n.$$

*Beweis.* Falls $n = 0$, so gilt $U = \{0\}$ und damit $R(f) = \{0\}$, also $\dim \ker f + \operatorname{rang} f = 0$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$, und sei $m := \dim \ker f \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\ker f \subset U$ gilt $m \leq n$. Wir wählen eine Basis $\{b_1, \dots, b_m\}$ von $U$ und ergänzen sie nach dem Basisergänzungssatz 2.18 zu einer Basis $\{b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n\}$ von $U$. Wir zeigen, dass $B := \{f(b_{m+1}), \dots, f(b_n)\}$ eine Basis von $R(f)$ ist.

Für $x \in U$ gilt $x = \sum_{j=1}^n x_j b_j$ (Satz 2.15). Damit folgt

$$f(x) = f(\sum_{j=1}^n x_j b_j = \sum_{j=1}^n x_j f(b_j) = \sum_{j=m+1}^n x_j f(b_j),$$

wobei $f(b_j) = 0$ für $j = 1, \dots, m$ verwendet wurde. Also ist $B$ ein Erzeugendensystem von $R(f)$.

Sei andererseits $\sum_{j=m+1}^n \lambda_j f(b_j) = 0$. Für $x := \sum_{j=m+1}^n \lambda_j b_j$ gilt damit $f(x) = 0$, d.h. $x \in \ker f$. Da $\{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis von $\ker f$ ist, existiert eine Darstellung

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j b_j, \qquad \text{aber auch } x = \sum_{j=m+1}^n \lambda_j b_j.$$

Da $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von $U$ ist und die Darstellung bezüglich einer Basis eindeutig ist (Satz 2.15), folgt $\lambda_j = 0$ für alle $j$. Also ist $B$ linear unabhängig.

Somit ist $B$ eine Basis von $R(f)$, und da $B$ genau $n - m$ Elemente hat und $\ker f$ genau $m$ Elemente hat, folgt die Behauptung. □

**3.8 Korollar.** *Sei* $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$ *injektiv, und sei* $\{b_1, \dots, b_n\}$ *eine Basis von* $U$. *Dann ist* $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ *eine Basis von* $R(f)$.

*Beweis.* Das wurde im Beweis von Satz 3.7 mit bewiesen (wobei jetzt $m = 0$ ist). □

**3.9 Korollar.** *Seien $U, V$ endlich-dimensional.*

*a) Falls $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$ injektiv ist, so gilt $\dim U \le \dim V$. Falls $f$ surjektiv ist, gilt $\dim U \ge \dim V$.*

*b) Falls $U$ und $V$ beide die gleiche Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ haben, so sind für $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$ äquivalent:*

*(i) $f$ ist injektiv,*

*(ii) $f$ ist surjektiv,*

*(iii) $f$ ist bijektiv.*

*Beweis.* a) Falls $f$ injektiv ist, gilt $\dim \ker f = 0$ und nach der Dimensionsformel gilt $\dim U = n = \operatorname{rang} f \le \dim V$.

Falls $f$ surjektiv ist, gilt $\dim V = \operatorname{rang} f \le n = \dim U$.

b) Falls $f$ injektiv ist, so gilt nach der Dimensionsformel $\operatorname{rang} f = n = \dim V$ und damit $R(f) = V$ nach Lemma 2.25. Falls andererseits $f$ surjektiv ist, gilt $\operatorname{rang} f = \dim V$ und damit nach der Dimensionsformel $\dim \ker f = 0$, d.h. $f$ ist injektiv. Wir haben damit gezeigt, dass $f$ genau dann injektiv ist, wenn $f$ surjektiv ist. In diesem Fall ist $f$ nach Definition bijektiv, d.h. die drei Eigenschaften in b) sind äquivalent. □

## b) Lineare Abbildungen und Matrizen

Lineare Abbildungen sind schon durch die Werte einer Basis bestimmt, wie der folgende Satz zeigt.

**3.10 Satz.** *Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von $U$, und seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren in $V$. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$ mit $f(b_j) = v_j$ $(j = 1, \dots, n)$. Diese ist gegeben durch die Formel*

$$f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n. \tag{3-1}$$

*Beweis.* Jedes $x \in U$ lässt sich eindeutig darstellen in der Form $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$ (Satz 2.15). Damit gilt für jedes $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$ die Gleichheit $f(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(b_j)$. Somit ist $f$ durch die Werte $f(b_j)$ bereits eindeutig festgelegt. Andererseits kann (3-1) als Definition von $f$ verwendet werden, und man sieht leicht, dass $f$ wieder linear ist. □

Durch den obigen Satz kann man lineare Abbildungen nach Wahl von geeigneten Basen in Form von Matrizen darstellen: Seien $\mathcal{A} := \{u_1, \dots, u_n\}$ eine Basis von $U$ und $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von $V$, und sei $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Dann ist $f$ nach Satz 3.10 durch die Werte $f(u_1), \dots, f(u_n)$ eindeutig festgelegt. Wir entwickeln $f(u_j)$ bezüglich der Basis $\{v_1, \dots, v_m\}$ und erhalten

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$$

mit Koeffizienten $a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Üblicherweise schreibt man die Koeffizienten in folgender Form:

$$A := \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dieses Schema heißt die Matrix von $f$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Man schreibt $A =: M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f)$. Die Matrix $A$ heißt eine $m \times n$-Matrix (d.h. sie hat $m$ Zeilen und $n$ Spalten). Die Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{K}$ heißen Einträge oder Komponenten oder Koeffizienten der Matrix. Man beachte, dass der erste Index $i$ die Zeilen nummeriert und der zweite Index $j$ die Spalte. Die $j$-te Spalte von $A$, gegeben durch

$$a_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

besteht aus den Koeffizienten von $f(u_j)$, dargestellt bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ (Koordinatendarstellung, vergleiche Abschnitt 2 a)).

Im Falle $U = V$ mit $\dim U = n$ hat die Identität $\mathrm{id}_U \colon U \to U$, $x \mapsto x$ bezüglich jeder Basis $\mathcal{B}$ die Darstellung

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_U) = I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $I_n$ heißt $n$-dimensionale Einheitsmatrix. Zur Nullabbildung $U \to V$, $x \mapsto 0$ gehört die Nullmatrix

$$O := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$ wird mit $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ oder $\mathbb{K}^{m\times n}$ bezeichnet. Man definiert auch $\mathrm{Mat}(m, \mathbb{K}) := \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$.

Eine $m \times 1$-Matrix ist ein Spaltenvektor, eine $1 \times m$-Matrix ist ein Zeilenvektor.

**3.11 Definition.** a) Für $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ definiert man die Summe $A + B$ und die Skalarmultiplikation $\lambda A$ durch

$$\begin{aligned}(A + B)_{ij} &:= a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n),\\ (\lambda A)_{ij} &:= \lambda a_{ij} \quad (i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n).\end{aligned}$$

b) Für zwei Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n\times \ell}$ definiert man das Produkt $AB \in \mathbb{K}^{m\times \ell}$ durch

$$(AB)_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \quad (i = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, \ell).$$

Speziell ist das Produkt einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit einem Spaltenvektor $x \in \mathbb{K}^n$ definiert durch

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m.$$

**3.12 Beispiel.** Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 11, \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**3.13 Bemerkung.** a) Mit der oben angegebenen Addition und Skalarmultiplikation wird $\mathbb{K}^{m\times n}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

b) Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann ist die induzierte Abbildung $f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$, linear, d.h. $f_A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Sei $a_j$ die $j$-te Spalte von $A$, $j = 1, \dots, n$. Dann gilt $a_j = Ae_j$, wobei $e_j$ der $j$-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ ist. Somit sind die Spalten von $A$ die Bilder der Einheitsvektoren unter der Abbildung $f_A$. Für einen beliebigen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{K}^n$ ist das Bild gegeben durch

$$f_A(x) = Ax = A\Big(\sum_{j=1}^n x_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^n x_j A e_j = \sum_{j=1}^n x_j a_j,$$

d.h. $Ax$ ist eine Linearkombination der Spalten von $A$, wobei die Koeffizienten der Linearkombination gerade die Koeffizienten von $x$ sind.

c) Wählt man in b) die kanonische Basis $\mathcal{A} = \{e_1, \dots, e_n\}$ von $\mathbb{K}^n$ und $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$ in $\mathbb{K}^m$, so gilt mit b)

$$f_A(e_j) = a_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i \quad \text{und damit } M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f_A) = A.$$

Insbesondere gilt für zwei Matrizen $A, \widetilde{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$A = \widetilde{A} \iff f_A = f_{\widetilde{A}}.$$

d) Nach Definition des Matrizenprodukts ist in Definition 3.11 b) die $k$-te Spalte von $AB$ gegeben durch das Produkt von $A$ mit der $k$-ten Spalte $b_k = (b_{1k}, \dots, b_{nk})^\top$ von $B$. Mit Teil b) folgt daher $(AB)e_k = Ab_k = A(Be_k)$ $(k = 1, \dots, \ell)$.

**3.14 Lemma.** *Sei $U$ ein $n$-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V$ ein $m$-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ gegeben. Wir wählen eine feste Basis $\mathcal{A}$ von $U$ und eine feste Basis $\mathcal{B}$ von $V$. Für $u \in U$ sei $x := (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{K}^n$ der Koeffizientenvektor von $x$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$, und $y := (y_1, \dots, y_m)^\top \in \mathbb{K}^m$ der Koeffizientenvektor von $f(u)$ bezüglich der Basis $B$. Dann gilt*

$$y = Ax \quad \textit{mit der Matrix } A := M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f).$$

*Beweis.* Sei $\mathcal{A} = \{u_1, \dots, u_n\}$ und $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$. Für $u = \sum_{j=1}^n x_j u_j$ gilt nach Definition der Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f)$:

$$f(u) = \sum_{j=1}^n x_j f(u_j) = \sum_{j=1}^n x_j \Big(\sum_{i=1}^m a_{ij} v_i\Big) = \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\Big) v_i = \sum_{i=1}^m y_i v_i,$$

und es gilt nach Definition des Produkts $Ax$ die Gleichheit $y = Ax$. □

**3.15 Satz.** *Seien $U$, $V$, $W$ $\mathbb{K}$-Vektorräume, und seien $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineare Abbildungen. Bezüglich fester Basen $\mathcal{A}$ von $U$, $\mathcal{B}$ von $V$ und $\mathcal{C}$ von $W$ gilt dann für die Verknüpfung $g \circ f \in \mathrm{Hom}(U, W)$ die Gleichheit*

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g) M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f),$$

*d.h. der Verknüpfung wird durch das Produkt der Matrizen dargestellt, wobei die Reihenfolge wichtig ist.*

*Beweis.* Seien $\mathcal{A} = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ und $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_\ell\}$, und seien

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f) = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n}}\quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g) = \big(b_{ki}\big)_{\substack{k=1,\dots,\ell,\\ i=1,\dots,m}}\quad M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}(f\circ g) = \big(c_{kj}\big)_{\substack{k=1,\dots,\ell.\\ j=1,\dots,n}}$$

Dann gilt nach Definition der Matrizen

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}v_j,\quad g(v_i) = \sum_{k=1}^\ell b_{ki}w_k,\quad (g\circ f)(u_j) = \sum_{k=1}^\ell c_{kj}w_k.$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned}(g\circ f)(u_j) = g(f(u_j)) &= g\Big(\sum_{i=1}^m a_{ij}v_i\Big) = \sum_{i=1}^m a_{ij}g(v_i)\\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^\ell b_{ki}w_k\Big) = \sum_{k=1}^\ell\Big(\sum_{i=1}^m b_{ki}a_{ij}\Big)w_k.\end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten folgt $c_{kj} = \sum_{i=1}^m b_{ki}a_{ij}$, was zu zeigen war. □

**3.16 Korollar.** *Seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{\ell\times m}$, $C \in \mathbb{K}^{k\times\ell}$.*

*a) Für die induzierten linearen Abbildungen (vgl. Bemerkung 3.13 b)) gilt $f_{BA} = f_B \circ f_A$.*

*b) Es gilt $(CB)A = C(BA)$, d.h. die Matrizenmultiplikation ist assoziativ.*

*Beweis.* a) ist gerade Satz 3.15 für den Spezialfall $U = \mathbb{K}^n$, $V = \mathbb{K}^m$, $W = \mathbb{K}^\ell$, $f = f_A$ und $g = g_B$.

b) Nach a) erhalten wir (mit der Assoziativität der Komposition von Abbildungen)

$$f_{(CB)A} = f_{CB}\circ f_A = (f_C\circ f_B)\circ f_A = f_C\circ(f_B\circ f_A) = f_C\circ f_{BA} = f_{C(BA)}.$$

Nach Bemerkung 3.13 c) folgt aus der Gleichheit der Abbildungen die Gleichheit der Matrizen, d.h. $(CB)A = C(BA)$. □

**3.17 Definition.** a) Zu $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definiert man die transponierte Matrix $A^\top$ durch

$$A^\top := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times m},\quad \text{falls } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

d.h. die Zeilen von $A$ bilden die Spalten von $A^\top$. In Kurzschreibweise:

$$A^\top := \big(a_{ji}\big)_{\substack{j=1,\dots,n,\\ i=1,\dots,m}} \qquad \text{falls } A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m.\\ j=1,\dots,n}}$$

b) Zu $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definiert man die adjungierte Matrix $A^*$ durch

$$A^* := \big(\overline{a_{ji}}\big)_{\substack{j=1,\dots,n,\\ i=1,\dots,m}} \qquad \text{falls } A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\dots,m.\\ j=1,\dots,n}}$$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt $A^* = A^\top$. Gebräuchlich ist auch die Schreibweise $A^H := A^*$.

**3.18 Bemerkung.** Für $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \dots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x^\top y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y\rangle = y^\top x,$$

man erhält also das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ aus Abschnitt 2 a).

Analog gilt für $x, y \in \mathbb{C}^n$ die Gleichheit

$$\overline{x^* y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = \langle x, y\rangle = y^* x.$$

**3.19 Lemma.** *Für $A \in \mathbb{K}^{n\times m}, B \in \mathbb{K}^{m\times \ell}$ gilt*

$$(AB)^\top = B^\top A^\top \ \textit{ und } \ (AB)^* = B^* A^*.$$

*Beweis.* Direktes Nachrechnen. □

## c) Invertierbare Matrizen, Lösen von linearen Gleichungssystemen

**3.20 Definition.** Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, und sei $f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$ die induzierte Abbildung. Dann definiert man $R(A) := R(f_A) \subset \mathbb{K}^m$, $\operatorname{rang} A := \operatorname{rang} f_A (= \dim R(f_A))$ und $\ker A := \ker f_A = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$.

Die Matrix $A$ heißt invertierbar oder regulär, falls $f_A$ bijektiv ist. Wir definieren

$$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}.$$

**3.21 Beispiele.** Es gilt

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

da hier jeweils $R(A) = \mathbb{R}^2$ ist. Hingegen ist

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

wegen $R(A) = \operatorname{span}\{(1,0)^\top\}$.

**3.22 Satz.** *a) Für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt die Dimensionsformel* $\dim\ker A + \operatorname{rang} A = n$.

*b) Die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist gleich dem Rang von $A$.*

*c) Falls $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ invertierbar ist, so gilt $m = n$. Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind äquivalent:*

*(i)* *$A$ ist invertierbar,*

*(ii)* $\ker A = \{0\}$,

*(iii)* $\operatorname{rang} A = n$,

*(iv)* *die Spalten von $A$ sind eine Basis von $\mathbb{K}^n$,*

*(v)* *es existiert ein $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = BA = I_n$.*

*In diesem Fall ist die Matrix $B$ in (v) eindeutig bestimmt und heißt inverse Matrix zu $A$, Schreibweise $A^{-1}$.*

*d) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $AB = I_n$. Dann sind $A$ und $B$ beide invertierbar, und es gilt $B = A^{-1}$ und $A = B^{-1}$.*

*e) Für $A, B \in GL(n,\mathbb{K})$ gilt $AB \in GL(n,\mathbb{K})$ und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

*f) Für $A \in GL(n,\mathbb{K})$ gilt $A^* \in GL(n,\mathbb{K})$ mit $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ sowie $A^\top \in GL(n,\mathbb{K})$ mit $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.*

*Beweis.* a) Satz 3.7 angewendet auf $f_A$.

b) Nach Bemerkung 3.13 b) bilden die Spalten $a_j := Ae_j$, $j = 1,\dots,n$ von $A$ ein Erzeugendensystem von $R(f_A)$, d.h. es gilt $\operatorname{rang} f_A = \dim R(f_A) = \dim\operatorname{span}\{a_1,\dots,a_n\}$. Nach dem Basisauswahlsatz ist $\operatorname{rang} f_A$ die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren in $\{a_1,\dots,a_n\}$.

c) Die Äquivalenz (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii) ist Korollar 3.9 b), angewendet auf $f_A$. Mit b) folgt die Äquivalenz von (iii) und (iv), da $n$ Vektoren im $\mathbb{K}^n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn sie eine Basis bilden.

(i)$\Rightarrow$(v): Sei $B$ die zu $(f_A)^{-1}$ gehörige Matrix (bzgl. der Einheitsbasis im $\mathbb{K}^n$). Dann gilt nach Korollar 3.16 $f_{BA} = f_B \circ f_A = (f_A)^{-1} \circ f_A = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = f_{I_n}$. Mit Bemerkung 3.13 c) folgt $BA = I_n$. Analog folgt $AB = I_n$.

(v)$\Rightarrow$(ii): Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = 0$. Dann folgt $x = I_n x = BAx = B0 = 0$. Somit ist $\ker A = \{0\}$.

Es ist noch zu zeigen, dass $B$ eindeutig bestimmt ist. Sei $\widetilde{B}$ eine weitere Matrix mit $A\widetilde{B} = \widetilde{B}A = I_n$. Dann gilt $\widetilde{B} = \widetilde{B}I_n = \widetilde{B}(AB) = (\widetilde{B}A)B = I_n B = B$.

d) Aus $AB = I_n$ folgt wie oben $\ker B = \{0\}$. Nach c) ist $B$ invertierbar, und es gilt $B^{-1} = I_n B^{-1} = ABB^{-1} = AI_n = A$. Als Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung ist auch $f_A$ selbst bijektiv, und es gilt $B = A^{-1}AB = A^{-1}$.

e) Dies folgt sofort aus $ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ und Teil d).

f) Dies folgt sofort aus $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I_n^* = I_n$ und Teil d), analog für $A^\top$. □

Im Folgenden werden wir lineare Gleichungen betrachten, d.h. Gleichungen der Form $f(x) = b$, wobei $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $b \in V$ gegeben sind und $x \in U$ gesucht ist.

**3.23 Lemma.** *Seien $U, V$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, und $b \in V$ gegeben. Dann gilt: Falls $x_1$ und $x_2$ beide Lösungen der inhomogenen Gleichung $f(x) = b$ sind, so ist $x_1 - x_2$ eine Lösung der homogenen Gleichung $f(x) = 0$. Somit gilt: Ist $x_p$ eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung von der Form $x = x_p + x_h$, wobei $x_h$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist.*

*Beweis.* Dies sieht man sofort durch Einsetzen. □

**3.24 Beispiel.** Sei $A = (1, \ -1) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ und $b = 1$. Dann hat die homogene Gleichung $Ax = 0$ die allgemeine Lösung $x_h = \binom{r}{r}$, wobei $r \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar ist. Eine spezielle Lösung der homogenen Gleichung $Ax = b$ ist gegeben durch $x_p = \binom{1}{0}$. Somit ist die allgemeine Lösung von $Ax = b$ von der Form $x = \binom{1}{0} + \binom{r}{r}$ mit einem frei wählbaren Parameter $r$.

Hier ist $\dim \ker A = 1$, denn $\ker A = \{\binom{r}{r} \,|\, r \in \mathbb{R}\} = \mathrm{span}\{\binom{1}{1}\}$. Es gilt weiter $\mathrm{rang}\, A = 1$, wie man sofort direkt oder aus der Dimensionsformel sieht. Die Matrix $A$ (genauer: die induzierte Abbildung $f_A$) ist somit surjektiv, aber nicht injektiv.

**3.25 Satz.** *Seien $U$ und $V$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume, und sei $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Dann gilt*

*a) Die Gleichung $f(x) = b$ hat genau dann für jedes $b \in V$ mindestens eine Lösung, wenn $\operatorname{rang} f = \dim V$.*

*b) Die Gleichung $f(x) = b$ hat genau dann für jedes $b \in V$ höchstens eine Lösung, wenn $\operatorname{rang} f = \dim U$.*

*c) Die Gleichung $f(x) = b$ ist genau dann für jedes $b \in V$ eindeutig lösbar, wenn $\operatorname{rang} f = \dim U = \dim V$.*

*Beweis.* a) Die Bedingung ist eine Umformulierung der Surjektivität von $f$, d.h. äquivalent zur Bedingung $R(f) = V$. Dies ist aber äquivalent zu $\operatorname{rang} f = \dim V$ nach Lemma 2.25.

b) Die Bedingung ist eine Umformulierung der Injektivität von $f$, d.h. äquivalent zu $\ker f = \{0\}$ und damit zu $0 = \dim \ker f = \dim U - \operatorname{rang} f$ nach der Dimensionsformel.

c) folgt direkt aus a) und b). □

Wir formulieren den obigen Satz noch einmal für lineare Gleichungssysteme.

**3.26 Satz.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.*

*a) Sei $y \in \mathbb{K}^m$ gegeben. Dann ist das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ genau dann lösbar, wenn $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|y)$ gilt, wobei $(A|y) \in \mathbb{K}^{m\times(n+1)}$ die Matrix sei, welche durch Nebeneinanderstellen von $A$ und $y$ entsteht.*

*b) Es sind äquivalent:*

*(i) $Ax = y$ besitzt für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$,*

*(ii) $\operatorname{rang} A = m$,*

*(iii) die Spalten von $A$ erzeugen $\mathbb{K}^m$.*

*c) Es sind äquivalent:*

*(i) $Ax = y$ besitzt für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ maximal eine Lösung,*

*(ii) $\operatorname{rang} A = n$,*

*(iii) die Spalten von $A$ sind lineare unabhängig.*

*d) Es sind äquivalent:*

*(i)* $Ax = y$ *besitzt für jedes* $y \in \mathbb{K}^m$ *genau eine Lösung,*

*(ii)* $\operatorname{rang} A = n = m$*,*

*(iii)* $A$ *ist invertierbar.*

*Beweis.* a) Seien $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von $A$. Dann gilt $Ax = y$ lösbar $\Leftrightarrow y \in \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\} \Leftrightarrow \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\} = \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n, y\} \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|y)$.

b)-d) sind Umformulierungen von Satz 3.25. □

Um die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu berechnen, kann man das Gaußsche Eliminationsverfahren (Gauß-Jordan-Verfahren) verwenden. Dazu beschreiben wir elementare Umformungen durch Multiplikation mit speziellen Matrizen.

**3.27 Definition.** a) Die Permutationsmatrix $P^{(i,j)} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ definiert durch

$$P^{(i,j)} := \begin{array}{c@{\;}l} \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 && \cdots && 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && \cdots && 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

b) Die Matrix $S^{(i)}(\lambda)$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist definiert durch

$$S^{(i)}(\lambda) := \begin{array}{c@{\;}l} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

c) Die Eliminationsmatrix $L^{(i,j)}(\lambda)$ mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ hat die Form

$$L^{(i,j)}(\lambda) := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 1 &&&&&&& \\ &&& \vdots & 1 &&&&&& \\ &&& \vdots && \ddots &&&&& \\ &&& \lambda & \cdots & \cdots & 1 &&&& \\ &&&&&&& 1 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} .$$

Die Matrizen $P^{(i,j)}$, $S^{(i)}(\lambda)$ und $L^{(i,j)}(\lambda)$ heißen auch Elementarmatrizen.

**3.28 Bemerkung.** a) Die Multiplikation von $A$ mit $P^{(i,i)}$ von links (d.h. Berechnung von $PA$) vertauscht die Zeilen $i$ und $j$ von $A$, die Multiplikation mit $P^{(i,j)}$ von rechts (d.h. $AP$) vertauscht die Spalten $i$ und $j$ von $A$. Es gilt $(P^{(i,j)})^2 = I_n$ und damit $P^{(i,j)} \in GL(n, \mathbb{K})$ mit $(P^{(i,j)})^{-1} = P^{(i,j)}$.

b) Bei Multiplikation mit $S^{(i)}(\lambda)$ von links wird die Zeile $i$ mit dem Faktor $\lambda$ multipliziert, bei Multiplikation von rechts die Spalte $i$. Falls $\lambda \neq 0$, so ist $S^{(i)}(\lambda) \in GL(n, \mathbb{K})$ mit $(S^{(i)}(\lambda))^{-1} = S^{(i)}(\frac{1}{\lambda})$.

Bei Multiplikation mit $L^{(i,j)}(\lambda)$ von links wird das $\lambda$-fache der $i$-ten Zeile zur $j$-ten Zeile addiert, bei Multiplikation von rechts wird das $\lambda$-fache der $j$-ten Spalte zur $i$-ten Spalte addiert. Es gilt $L^{(i,j)}(\lambda) \in GL(n, \mathbb{K})$ mit $(L^{(i,j)}(\lambda))^{-1} = L^{(i,j)}(-\lambda)$.

Mit den oben angegebenen Elementarmatrizen lassen sich folgende Zeilenumformungen einer (nicht notwendigerweise quadratischen) Matrix betrachten:

- Vertauschen zweier Zeilen (Multiplikation von links mit einer Permutationsmatrix),
- Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor $\neq 0$ (Multiplikation von links mit $S^{(i)}(\lambda)$),
- Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (Multiplikation von links mit $L^{(i,j)}(\lambda)$).

Damit kann jede Matrix auf Zeilenstufenform gebracht werden, d.h. auf folgende

Form:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei steht $*$ für einen beliebigen Eintrag. Zeilenstufenform heißt:

- Unterhalb und links von den Stufen stehen nur Nullen,
- jede Stufe ist genau eine Zeile hoch und eine oder mehr als eine Spalte breit,
- im Stufenknick steht eine 1.

Das Gauß-Jordan-Verfahren lautet nun folgendermaßen:

(1) Wähle die erste Spalte $j_0$ von links, in welcher mindestens ein Eintrag verschieden von Null ist.

(2) Wähle in dieser Spalte ein von Null verschiedenes Element und vertauscht die zugehörige Zeile $i_0$ mit der ersten Zeile (Pivotsuche). In der entstehenden Matrix ist dann $a_{1j_0} \neq 0$.

(3) Dividiere die erste Ziele durch $a_{1j_0}$. Damit ist der neue Koeffizient $a_{1j_0} = 1$.

(4) Alle von Null verschiedenen Einträge in Spalte $j_0$ werden nun durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeile annulliert. In der $j_0$-ten Spalte steht nun der Vektor $(1, 0, \ldots, 0)^\top$.

(5) Wende nun iterativ das Verfahren (i)-(iv) auf die Restmatrix an, welche aus der ursprünglichen Matrix durch Streichen der ersten Zeile und der ersten $j_0$ Spalten entsteht. Die erste Zeile und die ersten $j_0$ Spalten bleiben dabei unverändert.

Um das Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, erweitert man die Matrix $A$ um die rechte Seite, bildet also $(A|b)$ und wendet das Gauß-Jordan-Verfahren auf die erweiterte Matrix an.

**3.29 Beispiel.** Gesucht die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrl} & 4x_2 & +4x_3 & +3x_4 & -2x_5 & = 16, \\ -3x_1 & -3x_2 & +3x_3 & +x_4 & -2x_5 & = -2, \\ & 2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & -4x_5 & = 14, \\ 4x_1 & -x_2 & -9x_3 & -2x_4 & -x_5 & = -5. \end{array}$$

Wir schreiben dies in der Form $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & -9 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \; b := \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Das Gauß-Eliminationsverfahren (siehe Abbildung 1 auf Seite 44) liefert folgende Zeilenstufenform der erweiterten Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dies entspricht wiederum dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & -\frac{1}{3}x_4 & +\frac{2}{3}x_5 & = \frac{2}{3}, \\ & x_2 & +x_3 & +\frac{3}{4}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 & = 4, \\ & & & x_4 & -2x_5 & = 4. \end{array}$$

Man sieht, dass etwa $x_5$ und $x_3$ frei wählbar sind und die anderen Komponenten von $x$ eindeutig (und einfach) aus dem obigen Gleichungssystem bestimmt werden können.

**3.30 Bemerkung.** a) Durch Zeilenumformungen ändert sich die Lösungsmenge nicht, daher wird mit dem Gauß-Jordan-Verfahren die Lösung des ursprünglichen Systems berechnet. Man darf aber keine Spaltenumformungen vornehmen (z.B. würde ein Vertauschen der Spalten eine Umnummerierung der $x_j$ bedeuten).

b) Aus numerischer Sicht ist es sinnvoll, als Pivotelement das betragsgrößte Element der jeweiligen Spalte zu nehmen.

c) Wie oben beschrieben, entspricht jeder Umformung der Multiplikation der Matrix $A$ von links mit einer Elementarmatrix. Falls keine Permutationen notwendig sind, so erhält man das Produkt von Elementarmatrizen. Man kann leicht sehen, dass dieses Produkt eine untere Dreiecksmatrix $\widetilde{L}$ ist, d.h. alle Elemente über der Diagonalen sind Null. Die resultierende Matrix ist analog eine obere Dreiecksmatrix $R$. Wir erhalten also eine Darstellung $\widetilde{L}A = R$ oder $A = LR$ mit $L := \widetilde{L}^{-1}$, wobei $L$ wieder eine untere Dreiecksmatrix ist. In der Numerik spricht man von einer LR-Zerlegung von $A$. Mit Permutationen erhält man eine Darstellung $PA = LR$.

**3.31 Beispiel** (Berechnung der inversen Matrix)**.** Um die inverse Matrix zu berechnen, kann man das Gauß-Jordan-Verfahren gleichzeitig mit den rechten Seiten

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Erweitertes System: | $0$ | $4$ | $4$ | $3$ | $-2$ | $16$ |
| | $-3$ | $-3$ | $3$ | $1$ | $-2$ | $-2$ |
| | $0$ | $2$ | $2$ | $3$ | $-4$ | $14$ |
| | $4$ | $-1$ | $-9$ | $-2$ | $-1$ | $-5$ |
| Pivotsuche (2. Zeile): | $-3$ | $-3$ | $3$ | $1$ | $-2$ | $-2$ |
| | $0$ | $4$ | $4$ | $3$ | $-2$ | $16$ |
| | $0$ | $2$ | $2$ | $3$ | $-4$ | $14$ |
| | $4$ | $-1$ | $-9$ | $-2$ | $-1$ | $-5$ |
| Normierung des Pivotelements auf 1: | $1$ | $1$ | $-1$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| | $0$ | $4$ | $4$ | $3$ | $-2$ | $16$ |
| | $0$ | $2$ | $2$ | $3$ | $-4$ | $14$ |
| | $4$ | $-1$ | $-9$ | $-2$ | $-1$ | $-5$ |
| Elimination 4. Zeile: | $1$ | $1$ | $-1$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| | $0$ | $4$ | $4$ | $3$ | $-2$ | $16$ |
| | $0$ | $2$ | $2$ | $3$ | $-4$ | $14$ |
| | $0$ | $-5$ | $-5$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{11}{3}$ | $-\frac{23}{3}$ |
| Pivot: 2. Zeile, Normierung des Pivotelements auf 1: | $1$ | $1$ | $-1$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| | $0$ | $1$ | $1$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $4$ |
| | $0$ | $2$ | $2$ | $3$ | $-4$ | $14$ |
| | $0$ | $-5$ | $-5$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{11}{3}$ | $-\frac{23}{3}$ |
| Elimination 3. und 4. Zeile: | $1$ | $1$ | $-1$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| | $0$ | $1$ | $1$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $4$ |
| | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{3}{2}$ | $-3$ | $6$ |
| | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{37}{12}$ | $-\frac{37}{6}$ | $\frac{37}{3}$ |
| Pivot: 3. Zeile, Normierung des Pivotelements auf 1: | $1$ | $1$ | $-1$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| | $0$ | $1$ | $1$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $4$ |
| | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $-2$ | $4$ |
| | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{37}{12}$ | $-\frac{37}{6}$ | $\frac{37}{3}$ |
| Elimination 4. Zeile: | $1$ | $1$ | $-1$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| | $0$ | $1$ | $1$ | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ | $4$ |
| | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $-2$ | $4$ |
| | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

Abbildung 1: Beispiel eines Gauß-Jordan-Verfahrens

$e_1, \dots, e_n$ durchführen, d.h. man betrachtet die erweiterte Matrix $(A|I_n)$. Sei etwa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix},$$

so liefert das Gauß-Jordan-Verfahren, angewendet auf

$$\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array},$$

die Zeilenstufenform

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}.$$

Durch Rückwärtselimination (in diesem Fall Addition der dritten Zeile zur zweiten und Addition des fünffachen der dritten Zeile zur ersten) können noch die Elemente oberhalb der Diagonalen annulliert werden. Insgesamt erhält man dann durch elementare Zeilenumformungen eine Matrix der Form

$$[I_n|Y] = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -38 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Dann ist $Y = A^{-1}$, denn die $j$-te Spalte der Matrix $Y$ ist eine Lösung von $Ax = e_j$, und damit gilt $AY = I_n$.

**3.32 Bemerkung.** Die Reduktion auf Zeilenstufenform (Vorwärtselimination) kann ergänzt durch Elimination der Elemente oberhalb der Pivotelemente ergänzt werden (Rückwärtselimination). Bei invertierbaren Matrizen erhält man die Einheitsmatrix, bei allgemeinen Matrizen erhält man nach Vertauschen der Spalten (d.h. Umnummerieren der Komponenten von $x$) eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $r$ der Rang der Matrix. Verwendet man jetzt elementare Spaltenumformungen, also Multiplikation mit Elementarmatrizen von rechts, so können die $*$-Elemente auch noch annulliert werden, und man erhält eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**3.33 Satz.** *Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ existieren invertierbare Matrizen $T \in GL(m,\mathbb{K})$ und $S \in GL(n,\mathbb{K})$ mit*

$$TAS = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{K}^{m\times n}. \tag{3-2}$$

*Beweis.* Wir haben oben gesehen, dass sich $A$ durch elementare Zeilenumformungen und Spaltenumformungen auf die angegebene Form bringen lässt. Da Elementarmatrizen invertierbar sind und Produkte invertierbarer Matrizen invertierbar sind, erhalten wir eine Darstellung der Form (3-2). □

## d) Basiswechsel und Koordinatentransformation

Im Folgenden seien $U$ und $V$ zwei endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, und seien $\mathcal{A} := \{u_1,\dots,u_n\}$ und $\mathcal{A}' := \{u_1',\dots,u_n'\}$ zwei Basen von $U$. Zu $u \in U$ bezeichnen wir den Koordinatenvektor von $u$ bezüglich $\mathcal{A}$ mit $x := u_{\mathcal{A}} \in \mathbb{K}^n$, d.h es gilt

$$u = \sum_{j=1}^n x_j u_j, \quad x = (x_1,\dots,x_n)^\top = u_{\mathcal{A}}.$$

Analog sei $x' := u_{\mathcal{A}'} \in \mathbb{K}^n$ der Koordinatenvektor von $u$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}'$.

**3.34 Satz.** *Sei $S := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_U) \in \mathbb{K}^{n\times n}$, d.h. es gelte*

$$u_j' = \sum_{i=1}^n s_{ij} u_i \quad (j = 1,\dots,n)$$

*(die $j$-te Spalte von $S$ ist der Koordinatenvektor $(u_j')_{\mathcal{A}}$ von $u_j'$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$). Dann gilt $S \in GL(n,\mathbb{K})$ mit $S^{-1} = M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_U)$, und für $u \in U$ und die Koordinatenvektoren $x := u_{\mathcal{A}}$ bezüglich $\mathcal{A}$ und $x' := u_{\mathcal{A}'}$ bezüglich $\mathcal{A}'$ gilt*

$$x' = S^{-1}y.$$

*Beweis.* Für die Abbildung $f = \mathrm{id}_U$ und die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ gilt nach Definition der Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(f)$ und nach Lemma 3.14 die Gleichheit

$$x = u_{\mathcal{A}} = (id_U u)_{\mathcal{A}} = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_U)u_{\mathcal{A}'} = Sx'.$$

Nach Satz 3.15 gilt

$$I_n = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_U) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_U \circ \mathrm{id}_U) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_U)M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_U) = SM^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_U).$$

Also ist $S$ invertierbar mit $S^{-1} = M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_U)$. □

**3.35 Beispiel.** In vielen Fällen ist $\mathcal{A} = \{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis. Sei $\mathcal{A}' = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine weitere Basis des $\mathbb{K}^n$. Dann wird die Transformationsmatrix $S$ definiert durch $S = (b_1|b_2|\dots|b_n)$, d.h. die $j$-te Spalte von $S$ sind die Koordinaten von $b_j$. Für einen Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ wird der Koordinatenvektor bzgl. der neuen Basis berechnet durch $x' = S^{-1}x$.

**3.36 Satz.** *a) Seien $U$ und $V$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim U = n$ und $\dim V = m$, und seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ zwei Basen von $U$ und $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ zwei Basen von $V$. Seien $S := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_U) \in GL(n, \mathbb{K})$ und $T := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \in GL(m, \mathbb{K})$ die Transformationsmatrizen. Sei $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ mit zugehörigen Matrizen $A := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f)$ und $A' := M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{A}'}(f)$. Dann gilt*

$$A' = T^{-1}AS.$$

*b) Im Spezialfall $U = V = \mathbb{K}^n$ seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ zwei Basen von $\mathbb{K}^n$ mit Transformationsmatrix $S := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_U)$. Zu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ sei $A := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ die Matrix bzgl. der Basis $\mathcal{A}$ und $A' := M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}'}(f)$ die Matrix bzgl. der Basis $\mathcal{A}'$. Dann gilt*

$$A' = S^{-1}AS.$$

*Beweis.* a) Sei $u \in U$. Für $x := u_{\mathcal{A}}$ und $y := (f(u))_{\mathcal{B}}$ gilt $y = Ax$, analog folgt $y' = A'x'$. Nach Satz 3.34 gilt $x = Sx'$ und $y' = T^{-1}y$ und damit

$$A'x' = y' = T^{-1}y = T^{-1}Ax = T^{-1}ASx' \quad (x' \in U).$$

Da die Transformationsmatrix durch die Abbildung eindeutig festgelegt ist, gilt $A' = T^{-1}AS$.

b) Dies folgt aus a) mit $S = T$. □

**3.37 Korollar.** *a) Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit induzierter Abbildung $f_A$, und seien $S \in GL(n, \mathbb{K})$ und $T \in GL(m, \mathbb{K})$. Wählt man die Spalten von $S$ als Basis von $\mathbb{K}^n$ und die Spalten von $T$ als Basis von $\mathbb{K}^m$, so ist $A' := T^{-1}AS$ die Darstellung von $f_A$ bezüglich dieser Basen. Insbesondere gilt $\mathrm{rang}\, A' = \mathrm{rang}\, A$.*

*b) Zu jedem $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ existieren Basen $\mathcal{A}$ von $\mathbb{K}^n$ und $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^m$, so dass $f$ bezüglich dieser Basen die Matrixdarstellung*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

*mit $r = \mathrm{rang}(f)$ besitzt.*

*c) Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt $\mathrm{rang}\, A^\top = \mathrm{rang}\, A$, d.h. der Zeilenrang (definiert als Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen) stimmt mit dem Spaltenrang überein.*

*Beweis.* a) folgt aus Satz 3.36 a), wenn man $U = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{A} = \{e_1, \dots, e_n\}$ und für $\mathcal{A}'$ die Spalten von $S$ (analog für $V$) wählt. Da $\operatorname{rang} A = \dim R(f_A)$ unabhängig von der Basiswahl ist, bleibt der Rang bei der Transformation $A \mapsto T^{-1}AS$ erhalten.

b) Nach Satz 3.33 existieren invertierbare Matrizen $S, \widetilde{T}$ mit

$$\widetilde{T}AS = B := \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wählt man $T := \widetilde{T}^{-1}$, so folgt die Behauptung aus a).

c) Offensichtlich gilt $\operatorname{rang} B^\top = \operatorname{rang} B$. Damit und mit a) erhalten wir

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(\widetilde{T}AS) = \operatorname{rang}(\widetilde{T}AS)^\top = \operatorname{rang}(S^\top A^\top \widetilde{T}^\top) = \operatorname{rang} A^\top.$$

□

**3.38 Definition.** Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißen ähnlich, falls eine Matrix $S \in GL(n, \mathbb{K})$ existiert mit $B = S^{-1}AS$.

# 4. Folgen und Reihen

**Worum geht's?** In diesem Abschnitt, der der Analysis zuzuordnen ist, beschäftigen wir uns mit den zentralen Begriffen Grenzwert und Konvergenz. Die wichtigsten Räume der Analysis sind Banachräume, d.h. normierte Vektorräume, welche zusätzlich noch vollständig sind. Beispiele sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, nicht aber $\mathbb{Q}$. Behandelt werden Konvergenz von Folgen und Reihen in Banachräumen, aber auch speziell im Reellen.

## a) Folgen und Reihen in normierten Räumen, Vollständigkeit

Im Folgenden sei $U$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_U$ (zur Definition einer Norm siehe Definition 2.32). Die wichtigsten Beispiele für das Folgende sind $U = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{C}^n$, aber auch unendlich-dimensionale Räume wie $U = C([0,1])$, die Menge der stetigen Funktionen auf $[0,1]$, versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

**4.1 Definition.** Sei $M$ eine Menge. Dann heißt eine Abbildung $\mathbb{N} \to M$, $n \mapsto a_n$ eine Folge in $M$. Man schreibt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ oder auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$. Im Falle $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{C}$ spricht man von Zahlenfolgen bzw. reellen/komplexen Folgen.

Ein zentraler Begriff bei Folgen ist der der Konvergenz. So konvergiert etwa die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$ offensichtlich gegen Null. Allgemein definiert man:

**4.2 Definition.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ eine Folge.

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in U$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_0 : \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreibt man $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ oder $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, und $a$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Eine gegen Null konvergente Folge heißt auch Nullfolge. Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent ist, heißt sie divergent.

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine Cauchyfolge in $U$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n, m \geq n_0 : \|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

c) Die Definitionen in a) und b) übertragen sich in natürlicher Weise auf den Fall, dass $U$ eine Teilmenge eines normierten Raums ist.

In den meisten Fällen wird hier $U$ als der ganze normierte Raum gewählt, allerdings ist manchmal auch die Konvergenz einer Folge in einer Teilmenge von Bedeutung.

Man beachte, dass in diesen Definitionen $n_0$ von $\varepsilon$ abhängt. Bei einer konvergenten Folge wird also der Abstand der Folgenglieder zu einem festen Grenzwert ab einem bestimmten Index beliebig klein, bei einer Cauchyfolge der Abstand der Folgenglieder untereinander.

**4.3 Beispiel.** a) Die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $a_n := a$ $(n \in \mathbb{N})$ für ein gegebenes $a \in U$ ist sowohl konvergent als auch Cauchyfolge.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_n := (-1)^n$ ist weder konvergent noch Cauchyfolge.

Die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n := \frac{1}{n}$ konvergiert gegen Null, man wählt $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ in der Definition.

b) Sei $U = (0,1)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit Standardnorm $\|a\| := |a|$ und $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 > \frac{1}{2\varepsilon}$. Für $n, m \geq n_0$ gilt dann

$$|a_n - a_m| = |\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m}| \leq |\tfrac{1}{n}| + |\tfrac{1}{m}| \leq \tfrac{2}{n_0} < \varepsilon,$$

also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$ eine Cauchyfolge. Andererseits besitzt $(a_n)_n$ keinen Grenzwert in $U$, da $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0 \notin U$.

c) Auch in Vektorräumen $U$ können Cauchyfolgen ohne Grenzwert existieren. Sei etwa $U = \mathbb{Q}$, und

$$(a_1, a_2, \dots) := (3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots)$$

die Folge der abgebrochenen Dezimalbrüche von $\pi$. Dann ist diese Folge eine Cauchyfolge, aber es existiert in $\mathbb{Q}$ kein Grenzwert wegen $\pi \notin \mathbb{Q}$.

**4.4 Beispiele.** a) Sei $p \in \mathbb{C}$ und $a_n := p^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, falls $|p| < 1$. Falls $|p| > 1$, ist $(a_n)_n$ nicht konvergent.

Denn falls $|p| < 1$, schreiben wir $|q| = \frac{1}{1+h}$ mit $h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung (Lemma 1.4) gilt dann

$$\frac{1}{|q^n|} = \frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh$$

und damit $|q^n| \leq \frac{1}{hn} \to 0$ $(n \to \infty)$. Die Divergenz im Fall $|q| > 1$ sieht man analog.

b) Für $p > 0$ gilt $a_n := \sqrt[n]{p} \to 1$ $(n \to \infty)$. Für $p > 1$ betrachtet man ähnlich zu a) $\sqrt[n]{p} = 1 + h_n$ mit $h_n > 0$ und erhält $p = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n$ und damit $0 < h_n \leq \frac{p-1}{n} \to 0$. Für $p \in (0,1)$ geht der Beweis analog, für $p = 1$ ist die Behauptung klar.

**4.5 Definition.** a) Der normierte Vektorraum $U$ heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in $U$ konvergiert. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt auch Banachraum.

b) Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum, falls er mit der durch das Skalarprodukt induzierten Norm (siehe Satz 2.35) vollständig, d.h. ein Banachraum ist.

Die folgende Aussage wird hier als Axiom behandelt, d.h. als eine Aussage, die nicht bewiesen werden kann bzw. muss, sondern als wahr angenommen wird. Je nach Definition der reellen Zahlen (welche wir hier nicht formal definiert haben) wird dieses Axiom zu einem beweisbaren Satz.

**4.6 Axiom.** *Die reellen Zahlen* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *sind vollständig.*

**4.7 Korollar.** *Die Räume* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ *sind (jeweils mit dem kanonischen Skalarprodukt) Hilberträume.*

*Beweis.* Nach Definition des Skalarprodukts und der zugehörigen Norm konvergiert ein Vektor in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn jede Komponente konvergiert, wir können also den Grenzwert jeder Komponente betrachten, der nach Satz 4.6 existiert. Über die Identifizierung $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ erhält man den komplexen Fall. □

**4.8 Satz.** *a) Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ *konvergent. Dann ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge.*

*b) Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ *eine Cauchyfolge. Dann ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt, d.h. es existiert ein* $C > 0$ *mit*

$$\|a_n\| \le C \quad (n \in \mathbb{N}).$$

*Beweis.* a) Sei $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0(\varepsilon)$ mit $\|a_n - a\| < \varepsilon$ $(n \ge n_0(\varepsilon))$. Setzt man $n_1(\varepsilon) := n_0(\frac{\varepsilon}{2})$, so folgt

$$\|a_n - a_m\| = \|(a_n - a) - (a_m - a)\| \le \|a_n - a\| + \|a_m - a\| \le \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n, m \ge n_1(\varepsilon)).$$

Also ist $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge.

b) Wählt man z.B. $\varepsilon = 1$ und das zugehörige $n_0$ aus der Definition der Cauchyfolge, so erhält man $\|a_n\| = \|a_n - a_{n_0} + a_{n_0}\| \le C_0 := 1 + \|a_{n_0}\|$ für alle $n \ge n_0$. Mit $C := \max\{C_0, \|a_1\|, \ldots, \|a_{n_0-1}\|\}$ folgt die Behauptung. □

**4.9 Lemma.** *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ *eine Folge und* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Teilfolge, d.h.* $n_1, n_2, \ldots$ *sind eine Folge natürlicher Zahlen mit* $n_1 < n_2 < \ldots$.

*a) Falls* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit Grenzwert* $a$ *ist, so ist auch* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit demselben Grenzwert.*

*b) Falls* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyfolge ist, so auch* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

*Beweis.* Leichtes Nachrechnen. □

**4.10 Lemma.** *a) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ zwei konvergente Folgen und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sind, so ist auch $(\alpha a_n + \beta b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n.$$

*b) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ konvergent mit Grenzwert $a$ ist, gilt $\|a_n\| \to \|a\|$ $(n \to \infty)$.*

*Beweis.* a) Das folgt aus

$$\|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)\| \le |\alpha|\, \|a_n - a\| + |\beta|\, \|b_n - b\|.$$

b) Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung erhält man

$$\big|\, \|a_n\| - \|a\| \,\big| \le \|a_n - a\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

□

Es folgen einige Begriffe aus der Topologie.

**4.11 Definition.** a) Zu $x \in U$ und $r > 0$ heißt $B(x, r) := \{y \in U \,|\, \|x - y\| < r\}$ die (offene) Kugel um $x$ mit Radius $r$. Eine Menge $M \subset U$ heißt beschränkt, falls ein $r > 0$ und ein $x \in U$ existieren mit $M \subset B(x, r)$.

b) Sei $M \subset U$. Dann heißt $x \in M$ ein innerer Punkt von $M$, falls ein $r > 0$ existiert mit $B(x, r) \subset M$. Die Menge $M$ heißt offen, falls jeder Punkt von $M$ ein innerer Punkt ist. Die Menge aller offenen Punkte von $M$ heißt das Innere von $M$, Schreibweise $\overset{\circ}{M}$.

c) Sei $M \subset U$. Dann heißt $M^c := U \setminus M$ das Komplement von $M$ in $U$. Ein Punkt $x \in M$ heißt ein Randpunkt von $M$, falls für alle $r > 0$ gilt $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ und $B(x, r) \cap M^c \neq \emptyset$. Die Menge aller Randpunkte von $M$ heißt der Rand von $M$ und wird mit $\partial M$ bezeichnet.

d) Seien $M \subset U$ und $x \in U$. Dann heißt $x$ ein Häufungspunkt von $M$, falls für jedes $r > 0$ ein $y \in M$ existiert mit $y \neq x$ und $\|y - x\| < r$. Die Menge $M$ heißt abgeschlossen, falls jeder Häufungspunkt von $M$ in $M$ liegt. Die Vereinigung $\overline{M} := M \cup \{x \in U \,|\, x \text{ ist Häufungspunkt von } M\}$ heißt der Abschluss von $M$.

e) Seien $M \subset U$ und $x \in M$. Dann heißt $x$ ein isolierter Punkt von $M$, falls ein $r > 0$ existiert mit $M \cap B(x, r) = \{x\}$.

f) Wieder übertragen sich die obigen Definitionen in natürlicher Weise auf den Fall, dass $U$ eine Teilmenge eines normierten Raumes ist.

**4.12 Beispiele.** a) In jedem normierten Raum $U$ sind die Mengen $U$ und $\emptyset$ jeweils sowohl offen als auch abgeschlossen.

b) Das Intervall $M := [0,1) \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen. Es gilt $\partial M = \{0,1\}$, $\mathring{M} = (0,1)$, $\overline{M} = [0,1]$.

c) Die Kugeln $B(x,r)$ sind offen, es gilt $\partial B(x,r) = \{y \in U \mid \|x-y\| = r\}$ und $\overline{B(x,r)} = \{y \in U \mid \|x-y\| \le r\}$.

**4.13 Satz.** *a) Sei $M \subset U$. Dann ist $M$ genau dann offen, wenn das Komplement $M^c := U \setminus M$ abgeschlossen ist.*

*b) Eine Menge $M \subset U$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\partial M \subset M$. Eine Menge $M \subset U$ ist genau dann offen, wenn $M = \mathring{M}$.*

*Beweis.* Das folgt direkt durch Einsetzen in die Definitionen. □

## b) Reihen in normierten Räumen

Im Folgenden sei wieder $(U, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

**4.14 Definition.** a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ eine Folge. Dann heißt $\sum_{n=1}^\infty a_n$ die (unendliche) Reihe mit Summanden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alternative Schreibweise $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Für $N \in \mathbb{N}$ ist die $N$-te Partialsumme $s_N$ definiert durch $s_N := \sum_{n=1}^N a_n$.

b) Man sagt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert, falls die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall heißt $s := \lim_{N\to\infty} s_N$ der Wert der Reihe, und man schreibt $\sum_{n=1}^\infty a_n := s$. Die Reihe heißt divergent, falls sie nicht konvergent ist.

**4.15 Satz.** *Falls die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert, so gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.*

*Beweis.* Nach Satz 4.8 ist $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Zu $\varepsilon > 0$ existiert also $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|s_N - s_M\| < \varepsilon$ $(N, M \ge N_0)$. Speziell für $N := M+1$ erhält man

$$\|s_N - s_{N-1}\| = \Big\| \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \Big\| = \|a_N\| < \varepsilon.$$

□

**4.16 Bemerkung.** Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen nicht, z.B. divergiert die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$.

**4.17 Satz.** *Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^\infty q^n$, $q \in \mathbb{C}$, konvergiert für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| \geq 1$. Für $|q| < 1$ gilt*

$$\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q}.$$

*Beweis.* Mit Induktion zeigt man leicht, dass für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gilt

$$s_N = \sum_{n=0}^N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

Für $|q| < 1$ gilt $q^{N+1} \to 0$ nach Beispiel 4.4 und damit $s_N \to \frac{1}{1-q}$. Falls $|q| \geq 1$, ist $(|q^N|)_{N\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, also ist nach Satz 4.15 die Reihe divergent. □

**4.18 Definition.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$. Dann heißt die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent, falls die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \|a_n\|$ reeller Zahlen konvergiert.

**4.19 Satz.** *Sei $U$ ein Banachraum und sei die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent. Dann ist die Reihe auch konvergent.*

*Beweis.* Die Konvergenz von $(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ impliziert für die Partialsummen von $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

$$\|s_N - s_M\| = \Big\| \sum_{n=M+1}^N a_n \Big\| \leq \sum_{n=M+1}^N \|a_n\| \to 0 \quad (N, M \to \infty).$$

Also ist $(s_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset U$ eine Cauchyfolge, und da $U$ nach Voraussetzung vollständig ist, auch konvergent. □

Die Konvergenz von Reihen kann meist durch einen Vergleich mit einer Majorante gezeigt werden:

**4.20 Satz** (Majorantenkriterium)**.** *Sei $U$ ein Banachraum, und für die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ existiere eine konvergente Majorante, d.h. $c_n \geq 0$ mit $\|a_n\| \leq c_n$ $(n \geq n_0)$, für welche $\sum_{n=1}^\infty c_n < \infty$ konvergiert. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut.*

*Beweis.* Da sich das Konvergenzverhalten einer Reihe durch Änderung endlich vieler Terme nicht ändert, können wir o.E. $n_0 = 1$ annehmen. Für die Partialsummen $s_N := \sum_{n=1}^N \|a_n\|$ erhalten wir (o.E. $M > N$)

$$|s_N - s_M| = \sum_{n=N+1}^M \|a_n\| \leq \sum_{n=N+1}^M c_n \to 0 \quad (N, M \to \infty).$$

Also ist $(s_N)_N$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, und aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt die Konvergenz von $(s_N)_N$, also die Konvergenz von $\sum_{n=1}^N \|a_n\|$ und damit die absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty a_n$. □

Aus dem Majorantenkriterium ergeben sich die zwei wichtigsten Kriterien für die Konvergenz einer Reihe.

**4.21 Satz** (Quotientenkriterium). *Sei $U$ Banachraum, und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U \setminus \{0\}$. Falls*

$$\exists\, q \in (0,1)\, \exists\, k \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq k : \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq q,$$

*so konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ absolut.*

*Beweis.* Für $m \in \mathbb{N}$ ist $\|a_{k+m}\| \leq q^m \|a_k\|$. Somit hat $\sum_{j=0}^\infty \|a_{k+j}\|$ die konvergente Majorante $\|a_k\| \sum_{j=0}^\infty q^j$. □

**4.22 Satz** (Wurzelkriterium). *Sei $U$ Banachraum, und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$. Falls*

$$\exists\, q \in (0,1)\, \exists\, k \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq k : \sqrt[n]{\|a_n\|} \leq q,$$

*so konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ absolut.*

*Beweis.* Aus $\sqrt[n]{\|a_n\|} \leq q$ folgt $\|a_n\| \leq q^n$, d.h. $\sum_{n=k}^\infty q^n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=k}^\infty \|a_n\|$. □

**4.23 Beispiel.** Zu $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (Fakultät von $n$). Dann konvergiert für jedes feste $z \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$$

absolut. Denn es gilt

$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1$$

für $n \geq 2|z|$, und damit ist das Quotientenkriterium (mit $q = \frac{1}{2}$) anwendbar. Die Reihe $\exp(z)$ heißt Exponentialreihe. Man definiert $e := \exp(1)$ (Eulersche Zahl).

## c) Folgen und Reihen reeller Zahlen

Bei reellen Zahlen gibt es noch weitere Kriterien für die Konvergenz von Folgen und Reihen, welche mit der Ordnung auf $\mathbb{R}$ zusammenhängen. Wir definieren zuerst einige Begriffe.

**4.24 Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}$.

a) Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt eine obere Schranke von $M$, falls $x \leq s$ $(x \in M)$ gilt. In diesem Fall heißt $M$ nach oben beschränkt. Analog wird untere Schranke und nach unten beschränkt definiert.

b) Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von $M$, falls gilt:

(i) $s$ ist eine obere Schranke von $M$,

(ii) für alle oberen Schranken $a$ von $M$ gilt $s \leq a$.

Analog wird größte untere Schranke (Infimum) von $M$ definiert. Man schreibt $s = \sup M$ bzw. $s = \inf M$.

c) Falls $s = \sup M$ sowie zusätzlich $s \in M$ gilt, heißt $s$ das Maximum von $M$ (analog Minimum). Schreibweise $s = \max M$ bzw. $s = \min M$ (oder $s = \max_{x \in M} x$).

**4.25 Bemerkung.** a) Die Menge $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ besitzt kein Supremum und damit kein Maximum, es gilt $0 = \inf M$, aber $M$ besitzt kein Minimum. Für die Menge $M := (0, 1]$ gilt $\sup M = \max M = 1$ und $\inf M = 0$, und $M$ besitzt kein Minimum.

b) Die Definition 4.24 lässt sich auf vollständig geordneten Mengen verallgemeinern. Für die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x \geq 0,\, x^2 \leq 2\}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ gilt: $0 = \inf M = \min M$, aber $M$ besitzt weder ein Maximum noch ein Supremum.

c) Direkt aus der Definition von Supremum folgt, dass dieses eindeutig ist, analog für das Infimum.

**4.26 Satz.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monoton wachsend, d.h. es gilt $a_n \leq a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, und nach oben beschränkt. Dann ist $(a_n)_n$ konvergent, und es gilt $a_n \to \sup\{a_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. (Analog für monoton fallende und nach unten beschränkte Folgen.)*

*Beweis.* Wir zeigen, dass $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge ist, d.h. dass gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, N \in \mathbb{N} \,\forall\, n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Wir nehmen an, dass dies nicht der Fall ist. Dann gilt die logische Negation dieser Aussage, d.h. es gilt

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \,\forall\, N \in \mathbb{N} \,\exists\, n, m \geq N : |a_n - a_m| \geq \varepsilon_0.$$

Damit existiert eine Folge von Indizes $n_1 < n_2 < \dots$ mit $n_j \to \infty$ $(j \to \infty)$ und $|a_{k_2} - a_{k_1}| \ge \varepsilon_0$, $|a_{k_4} - a_{k_3}| \ge \varepsilon_0$ etc.

Wegen der Monotonie erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{k_2} &\ge a_{k_1} + \varepsilon_0, \\ a_{k_4} &\ge a_{k_3} + \varepsilon_0 \ge a_{k_2} + \varepsilon_0 \ge a_{k_1} + 2\varepsilon_0, \\ a_{k_6} &\ge a_{k_5} + \varepsilon_0 \ge a_{k_4} + \varepsilon_0 \ge a_{k_1} + 3\varepsilon_0 \end{aligned}$$

etc. Damit folgt $a_{k_j} \to \infty$ für $j \to \infty$, was einen Widerspruch zur Beschränktheit nach oben darstellt. Somit ist $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge, und aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt die Konvergenz.

Sei $s := \lim_{n\to\infty} a_n$. Wegen der Monotonie ist $s$ eine obere Schranke von der Menge $M := \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Für jede Zahl $s' < s$ gilt (wegen Konvergenz von $a_n$ gegen $s$) für hinreichend große $n$ die Ungleichung $a_n > s'$, d.h. $s$ ist die kleinste obere Schranke von $M$. □

**4.27 Satz** (Satz von Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede unendliche beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

*Beweis.* Seien $x_1, x_2, \dots$ paarweise verschiedene Punkte in $M$. Man definiert $c_n := \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Dann ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und nach Satz 4.26 konvergent gegen $c := \sup\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Es gilt für höchstens einen Index $k$ die Gleichheit $x_k = c$, dieses $x_k$ wird aus der Folge gestrichen. Wir zeigen, dass $c$ ein Häufungspunkt von $M$ ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Da $c_n \to c$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, k \ge n_0 : |c_k - c| \le \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Definition von $c_n$ existiert ein $x_k$, $k \ge n_0$, mit $|x_k - c_{n_0}| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Insgesamt folgt

$$|x_k - c| \le |x_k - c_{n_0}| + |c_{n_0} - c| \le \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

□

Der obige Beweis schreibt sich leichter mit folgender Definition:

**4.28 Definition.** Sei $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ eine reelle Folge, welche nach oben beschränkt ist. Dann heißt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k$$

der Limes Superior der Folge $(a_n)_n$.

Analog definiert man den Limes Inferior $\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ für nach unten beschränkte Folgen.

**4.29 Bemerkung.** Für eine beschränkte Folge $(a_n)_n$ ist $\limsup_{n\to\infty} a_n$ der größte Häufungspunkt der Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ der kleinste Häufungspunkt. Eine beschränkte Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n =: a$ gilt (und in diesem Fall gegen $a$).

**4.30 Korollar.** *Sei $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann besitzt jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\mathbb{R}$. Dies gilt analog für beschränkte Mengen $M \subset \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{C}^n$.*

*Beweis.* Falls unendlich viele Folgenglieder gleich sind, bilden diese eine konstante und damit konvergente Teilfolge. Ansonsten ist die Menge der Folgenglieder beschränkt und unendlich, und die Behauptung folgt aus dem Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß. Für $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ folgen die Aussagen, da eine Folge in $\mathbb{R}^n$ genau dann konvergiert, wenn jede Komponente konvergiert: Man wählt eine Teilfolge, für welche die erste Komponente konvergiert, und davon wiederum eine Teilfolge, für welche auch die zweite Komponente konvergiert etc. □

**4.31 Satz** (Prinzip der Intervallschachtelung)**.** *Seien $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle mit $a_n \le a_{n+1}$, $b_n \ge b_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{x_0\}$. Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in [a_n, b_n]$ gilt $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.*

*Beweis.* Wähle $x_n \in [a_n, b_n]$, wobei o.E. $x_n \ne x_m$ für $n \ne m$ sei. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 4.27) eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wir definieren $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_0 \notin [a_n, b_n]$, so folgt wegen $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ sogar $x_0 \notin [a_k, b_k]$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon := \max\{|x_0 - a_n|, |x_0 - b_n|\}$ gilt $|x_0 - z| \ge \varepsilon$ für alle $z \in [a_k, b_k]$, $k \ge n$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Konvergenz $x_{n_k} \to x_0$. Somit gilt $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$.

Seien $x_0, x_0' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$, wobei o.E. $x_0 \le x_0'$ gelte. Dann gilt $a_n \le x_0 \le x_0' \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und wegen $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ erhalten wir $x_0 = x_0'$, d.h. es gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{x_0\}$. Dieselbe Überlegung zeigt, dass jede Folge $(x_n)_n$ mit $a_n \le x_n \le b_n$ gegen $x_0$ konvergiert. □

**4.32 Definition.** Sei $U$ ein normierter Raum. Dann heißt eine Menge $K \subset U$ kompakt, falls jede Folge eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $K$ besitzt.

**4.33 Bemerkung.** a) Sei $U$ Banachraum und $K \subset U$ kompakt. Dann ist $K$ abgeschlossen und beschränkt, wie man direkt aus der Definition sieht.

b) Für $U = \mathbb{R}^n$ gilt auch die Umkehrung von a): Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt. Denn nach Korollar 4.30 besitzt jede Folge eine konvergente Teilfolge, und da $K$ abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert wieder in $K$.

Wir betrachten noch einige nützliche Konvergenzkriterien in $\mathbb{R}$.

**4.34 Satz** (Sandwichprinzip). *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $a_n \le b_n \le c_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Falls $a_n \to A$ und $c_n \to A$, so gilt auch $b_n \to A$.*

*Speziell gilt für eine konvergente Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n \le c$ für ein festes $c \in \mathbb{R}$ auch $\lim_{n\to\infty} b_n \le c$.*

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gilt existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - A| < \varepsilon \ (n \ge n_1) \ \text{ und } |c_n - A| < \varepsilon \ (n \ge n_2).$$

Dann gilt für $n_3 := \max\{n_1, n_2\}$

$$A - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A + \varepsilon \quad (n \ge n_3).$$

□

Man beachte, dass die obige Aussage mit „<“ statt „≤“ nicht gilt: Zum Beispiel folgt aus $b_n > 0$ zwar $\lim_{n\to\infty} b_n \ge 0$ nach obigem Satz, aber nicht $\lim_{n\to\infty} b_n > 0$, wie das Gegenbeispiel $b_n = \frac{1}{n}$ zeigt.

**4.35 Satz** (Leibniz-Kriterium). *Sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine alternierende Reihe, d.h. ein Reihe mit reellen Summanden mit wechselndem Vorzeichen. Falls $|a_n|$ monoton gegen 0 konvergiert, so konvergiert die Reihe.*

*Beweis.* O.E. sei $a_{2n} \ge 0$ und $a_{2n-1} \le 0$. Dann gelten für die Partialsummen $s_N := \sum_{n=1}^N a_n$ die Ungleichungen $s_{2N} = s_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots \ge s_1$ (da alle Klammern nichtnegativ sind) sowie $s_{2N+2} = s_{2N} + (a_{2N+1} + a_{2N+2}) \le s_{2N}$ (da die Klammer negativ ist). Also ist $(s_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt und damit konvergent. Analog ist die Folge $(s_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und nach oben beschränkt und damit ebenfalls konvergent. Wegen $|s_{2N+1} - s_{2N}| = |a_{2N+1}| \to 0$ gilt $\lim_{N\to\infty} s_{2N} = \lim_{N\to\infty} s_{2N+1}$, und damit konvergiert die Reihe. □

**4.36 Beispiel.** Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ ist divergent, aber die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n}$ ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. Es gilt $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n} = -\ln 2 \approx -0.6931$, aber das können wir erst später beweisen.

## d) Potenzreihen

**4.37 Definition.** Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

mit $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$. Dabei sind $a_n$ und $z_0$ (= Entwicklungspunkt) fest und $z$ variabel.

**4.38 Beispiele.** a) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist eine Potenzreihe mit $a_n = 1$ und $z_0 = 0$. Sie konvergiert in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und divergiert für $|z| \geq 1$.

b) Die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist eine Potenzreihe, welche für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.

**4.39 Definition.** Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ heißt gleichmäßig auf einer Menge $M \subset \mathbb{C}$ konvergent gegen eine Funktion $f(z)$, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_0\, \forall\, z \in M : \Big| \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k - f(z) \Big| < \varepsilon.$$

Man beachte, dass in obiger Definition die Zahl $n_0$ zwar von $\varepsilon$, nicht aber von $z$ abhängt.

**4.40 Definition.** Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ist definiert als

$$r := \begin{cases} 0, & \text{falls } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ nicht existiert,} \\ \frac{1}{a}, & \text{falls } a := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ existiert mit } a \neq 0, \\ \infty, & \text{falls } a := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ existiert mit } a = 0. \end{cases}$$

**4.41 Satz.** *Sei $r$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Dann gilt konvergiert die Reihe absolut für $|z-z_0| < r$ und divergiert für $|z-z_0| > r$. Auf dem Rand $\{|z-z_0| = r\}$ des Konvergenzkreises ist Konvergenz oder Divergenz möglich.*

*Für $r_0 < r$ konvergiert die Reihe auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \leq r_0\}$ absolut und gleichmäßig.*

*Beweis.* Wir zeigen nur die Konvergenz im Fall $a \neq 0$. Für $|z-z_0| < r$ wählen wir $r_0, r_1$ mit $|z-z_0| \leq r_0 < r_1 < r$. Da $a = \frac{1}{r}$ der größte Häufungspunkt der Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$ ist, gilt mit $\frac{1}{r} < \frac{1}{r_1}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{r_1} \quad (n \geq n_0)$$

für hinreichend großes $n_0 \in \mathbb{N}$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{r_0}{r_1} < 1 \quad (n \ge n_0).$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe absolut.

Die obige Abschätzung zeigt, dass die Konvergenz auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \le r_0\}$ gleichmäßig ist. □

**4.42 Beispiele.** a) Für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ gilt $a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$. Die Reihe konvergiert an keiner Stelle des Randes des Konvergenzkreises, d.h. für kein $z$ mit $|z| = 1$.

b) Wir wissen bereits, dass die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Aus Satz 4.27 folgt nun $r = \infty$.

c) Für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ gilt $a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$. Auf dem Rand des Konvergenzkreises, d.h. für $|z| = 1$, tritt sowohl Konvergenz ($z = -1$) als auch Divergenz ($z = 1$) auf.

d) Die Potenzreihe $s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ konvergiert für $|z| < 1$. Es gilt für $|z| < 1$ die Gleichheit

$$s(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (iz^2)^n = \frac{1}{1-(iz)^2} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Man erkennt, dass der Konvergenzradius $r = 1$ im Reellen nur schwer zu verstehen ist, aber im Komplexen hat die Funktion $s(z) = \frac{1}{1+z^2}$ die Pole $z = \pm i$.

# 5. Funktionen einer reellen Variablen

**Worum geht's?** In diesem Abschnitt werden wir Funktionen betrachten, welche von einer Variablen abhängen. Zentrale Begriffe sind hier die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit. Die Stetigkeit ist ein topologischer Begriff, welche in viel allgemeineren Situationen definiert werden kann, während die Differenzierbarkeit zumindest an eine Vektorraumstruktur gebunden ist.

## a) Stetige Funktionen

Wir werden im Folgenden reell- oder komplexwertige Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ betrachten. Bei reellwertigen Funktionen kann man von Monotonie sprechen:

**5.1 Definition.** Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f$ monoton steigend, falls gilt:

$$\forall\, x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2),$$

und monoton fallend, falls gilt:

$$\forall\, x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \ge f(x_2).$$

Gilt in obigen Formeln sogar $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$, heißt $f$ streng monoton steigend bzw. fallend.

**5.2 Satz.** *Seien $S, T \subset \mathbb{R}$ und $f\colon S \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon R(f) \to \mathbb{R}$ und ist wieder streng monoton.*

*Beweis.* Seien $x_1, x_2 \in S$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Falls $x_1 < x_2$ folgt aus der strengen Monotonie sofort $f(x_1) \neq f(x_2)$, analog für $x_1 > x_2$. Daher ist $f$ injektiv und als Abbildung $f\colon S \to R(f)$ bijektiv. Für die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon R(f) \to S, y \mapsto f^{-1}(y)$ gilt (o.E. sei $f$ streng monoton steigend) $y_1 < y_2 \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. □

**5.3 Beispiele.** a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$ ist streng monoton fallend in $(-\infty, 0]$ und streng monoton steigend in $[0, \infty)$.

b) Die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \begin{cases} x, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1 - x & , \text{ für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist bijektiv, aber nicht monoton. Die strenge Montonie ist also nicht notwendig für die Bijektivität.

**5.4 Definition und Satz.** *a) Seien $U, V$ normierte Räume und $S \subset U$. Dann wird die Menge $\mathcal{F}(S,V) := \{f \mid f\colon S \to V$ Abbildung$\}$ mit den Verknüpfungen*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \quad (x \in \mathbb{R})\\ (\alpha f)(x) &:= \alpha f(x) \quad (x \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

*für $f, g \in \mathcal{F}(S,V)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Vektorraum.*

*b) Eine Funktion $f \in \mathcal{F}(S,V)$ heißt beschränkt, falls eine Konstante $C > 0$ (welche von $f$ abhängen darf) existiert mit*

$$\|f(x)\|_V \leq C \quad (x \in S).$$

*Die Menge $B(S,V) := \{f \in \mathcal{F}(S,V) \mid f$ beschränkt$\}$ aller beschränkten Funktionen ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(S,V)$.*

**5.5 Definition.** a) Sei $S \subset \mathbb{R}$ und $f\colon S \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f$ stetig an der Stelle $x_0 \in S$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in S \text{ mit } |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Falls $f$ an jeder Stelle $x_0 \in S$ stetig ist, heißt $f$ stetig in $S$; Schreibweise $f \in C(S, \mathbb{R})$.

b) Analog definiert man für normierte Räume $U, V$ und $S \subset U$, $f\colon S \to V$: Die Funktion $f$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in S$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in S \text{ mit } \|x - x_0\|_U < \delta : \|f(x) - f(x_0)\|_V < \varepsilon.$$

**5.6 Beispiele.** a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig in allen $x_0 \in \mathbb{R}$, da

$$|f(x) - f(x_0)| = \big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0|.$$

Man wählt in der Definition $\delta := \varepsilon$.

b) Die Heaviside-Funktion

$$H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0,\\ 0 & \text{für } x < 0\end{cases}$$

ist unstetig an der Stelle $x_0 = 0$, denn für jedes $x < 0$ ist $|f(x) - f(x_0)| = 1$, d.h. beispielsweise für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existiert kein $\delta > 0$, für welches die Bedingung aus Definition 5.5 erfüllt ist.

c) Sei $x_0$ kein Häufungspunkt von $S$, d.h. ein isolierter Punkt. Dann existiert ein $r > 0$ mit $S \cap B(x_0, r) = \{x_0\}$. Wählt man in Definition 5.5 $\delta < r$, so gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $f$ ist stetig an der Stelle $x_0$. Damit sind z.B. Folgen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, an jeder Stelle $n \in \mathbb{N}$ stetig.

**5.7 Definition.** a) Sei $S \subset \mathbb{R}$, $x_0$ ein Häufungspunkt von $S$ und $f\colon S \to \mathbb{R}$ oder $f\colon S\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $y_0 \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f$ an der Stelle $x_0$, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ gilt: $f(x_n) \to y_0$. Man schreibt $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

b) In der Situation von a) schreibt man $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ oder $f(x) \to \infty$ $(x \to x_0)$, falls für alle Folgen $(x_n)_n$ mit $x_n \to x_0$ und für alle $K > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $f(x) \geq K$ $(n \geq n_0)$. Analog wird $f(x) \to -\infty$ $(x \to x_0)$ definiert.

c) Falls in a) oder b) nur Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n > x_0$ betrachtet werden, so spricht man von einem rechtsseitigen Limes und schreibt $\lim_{x\searrow x_0} f(x)$ oder $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$; analog wird der linksseitige Limes $\lim_{x\nearrow x_0} f(x)$ definiert.

Man beachte, dass in der obigen Definition nicht gefordert ist, dass $f$ an der Stelle $x_0$ definiert ist, und selbst in diesem Fall muss nicht unbedingt $f(x_0) = y_0$ gelten. Tatsächlich gilt die letzte Gleichheit gerade bei stetigen Funktionen:

**5.8 Satz.** *Sei $S \subset \mathbb{R}$ und $f\colon S \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0$ ein Häufungspunkt von $S$. Dann ist $f$ an der Stelle $x_0 \in S$ genau dann stetig, wenn gilt:* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *gilt.*

*Beweis.* **(i)** Sei $f$ stetig in $x_0$, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ eine Folge mit $x_n \to x_0$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, falls $|x_n - x_0| < \delta$. Da $x_n \to x_0$, existiert zu diesem $\delta$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Insgesamt folgt $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, d.h. es gilt $f(x_n) \to f(x_0)$.

**(ii)** Es gelte $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Wir nehmen an, dass $f$ nicht stetig in $x_0$ ist, d.h.

$$\exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Wählt man $\delta := \frac{1}{n}$, so erhält man eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

**5.9 Korollar.** *Seien $f\colon S \to \mathbb{R}$ und $g\colon T \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(S) \subset T$. Falls $f$ stetig in $x_0 \in S$ und $g$ stetig in $f(x_0) \in T$ sind, so ist $g \circ f$ stetig an der Stelle $x_0$.*

*Beweis.* Nach Satz 5.8 gilt $y_n := f(x_n) \to y_0 := f(x_0)$ für jede Folge $x_n \to x_0$ wegen der Stetigkeit von $f$. Da $g$ stetig an der Stelle $y_0$ ist, folgt $g(y_n) \to g(y_0)$, d.h. $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$. □

**5.10 Bemerkung.** Die obigen Aussagen übertragen sich wörtlich auf den Fall, dass die Funktion $f\colon S \to V$ Werte in einem Banachraum $V$ annimmt. Man muss lediglich den Betrag $|f(x) - f(x_0)|$ durch die Norm $\|f(x) - f(x_0)\|_U$ ersetzen.

Wir werden im Folgenden insbesondere komplexwertige Funktionen $f\colon S \to \mathbb{C}$ betrachten (wobei immer noch $S \subset \mathbb{R}$ gilt). Insbesondere sei $C(S) := C(S, \mathbb{C})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der stetigen Funktionen $f\colon S \to \mathbb{C}$.

**5.11 Satz.** *Seien $f, g\colon S \to \mathbb{C}$ stetig an der Stelle $x_0 \in S$. Dann sind auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f \cdot g$ und – falls $g(x_0) \neq 0$ – die Funktion $\frac{f}{g}$ stetig an der Stelle $x_0$.*

*Beweis.* Man rechnet leicht nach, dass für komplexe Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$ gilt $\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha a + \beta b$, $a_n b_n \to ab$ sowie im Fall $b \neq 0$ gilt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ (Lemma 4.10 bzw. Übungsaufgabe). Die Behauptung folgt nun aus Satz 5.8, da die Stetigkeit durch die Konvergenz von Folgen beschrieben werden kann. □

**5.12 Beispiele.** a) Konstante Funktionen, d.h. Funktionen der Form $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f(x) = c$ sind trivialerweise stetig.

b) Lineare Funktionen, d.h. Funktionen der Form $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = cx$, sind stetig (für $c \neq 0$ kann man in der Definition $\delta := \varepsilon/|c|$ wählen).

c) Nach Satz 5.11 folgt aus a) und b), dass Polynomfunktionen, d.h. Funktionen der Form $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, stetig sind. Gebrochen rationale Funktionen, d.h. der Quotient zweier Polynomfunktionen, sind an allen Stellen stetig, an denen der Nenner verschieden von Null ist.

Die Kompaktheit überträgt sich bei stetigen Funktionen, wie der folgende Satz zeigt:

**5.13 Satz.** *Seien $U, V$ Banachräume, $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge von $U$ und $f\colon K \to V$ eine stetige Funktion. Dann ist der Wertebereich $R(f) \subset V$ kompakt.*

*Beweis.* Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(f)$ eine Folge. Wegen $y_n \in R(f)$ existiert ein $x_n \in S$ mit $y_n = f(x_n)$. Da $K$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Für $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ gilt wegen der Stetigkeit von $f$ die Konvergenz $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Setzt man $y_0 := f(x_0)$, so gilt $y_0 \in R(f)$ und $y_{n_k} \to y_0$ $(k \to \infty)$. Damit haben wir eine konvergente Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden, und $R(f)$ ist kompakt. □

**5.14 Definition.** Sei $S \subset \mathbb{R}$ und $f\colon S \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definiert man $\inf_{x\in S} f(x) := \inf R(f)$, $\sup_{x\in S} f(x) := \sup R(f)$, $\max_{x\in S} f(x) := \max R(f)$ und $\min_{x\in S} f(x) := \min R(f)$, falls existent.

**5.15 Korollar.** *In der Situation von Satz 5.13 ist $f$ beschränkt, und der Wertebereich $R(f)$ ist abgeschlossen. Sei insbesondere $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f \in C(K, \mathbb{R})$. Dann ist $f$ beschränkt, und $\min_{x\in K} f(x)$ und $\max_{x\in K} f(x)$ existieren.*

*Beweis.* Dies folgt sofort aus Satz 5.13 und der Tatsache, dass kompakte Mengen in Banachräumen abgeschlossen und beschränkt sind (Bemerkung 4.33). □

Nach Korollar 5.15 nimmt eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ ihr Minimum und Maximum an. Tatsächlich zeigt der nächste Satz, dass auch jeder Wert dazwischen angenommen wird:

**5.16 Satz** (Zwischenwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ mit $f(a) < f(b)$. Dann wird jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ angenommen, d.h. zu jedem $z \in (f(a), f(b))$ existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = z$.*

*Beweis.* O.E. sei $z = 0$ (sonst betrachtet man die stetige Funktion $g(x) := f(x) - z$. Nach Voraussetzung ist $f(a) < 0 < f(b)$. Wir setzen $a_0 := a$, $b_0 := b$ und verwenden das Bisektionsverfahren: Sei $c_0 := \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ das arithmetische Mittel zwischen $a_0$ und $b_0$. Wir setzen iterativ

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, c_n], & \text{falls } f(c_n) > 0, \\ [c_n, b_n], & \text{falls } f(c_n) < 0, \end{cases} \quad c_{n+1} := \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. Damit ist $[a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung, und nach Satz 4.31 gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: x_0$. Da $f$ stetig ist, gilt mit Satz 4.34 $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$ und $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$ und damit $f(x_0) = 0$. □

Wir diskutieren noch den Begriff der Supremumsnorm und der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionen. Bei Funktionen gibt es verschiedene Konvergenzbegriffe, welche sorgfältig unterschieden werden müssen.

Im Folgenden seien $D \subset \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ eine Folge komplexwertiger Funktionen.

**5.17 Definition.** a) Für eine Funktion $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ heißt

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|$$

die Supremumsnorm von $f$, falls das Supremum existiert. Falls $D$ kompakt ist und $f$ stetig ist, so existiert das Supremum und es gilt $\|f\|_\infty = \max_{x\in D} |f(x)|$. In diesem Fall spricht man auch von der Maximumsnorm.

b) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt punktweise konvergent gegen $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$, falls gilt

$$f_n(x) \to f(x)\ (n \to \infty) \text{ für alle } x \in D.$$

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$, falls gilt

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0\ (n \to \infty).$$

Die Folge $(f_n)_n$ heißt eine gleichmäßige Cauchyfolge, falls sie bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ eine Cauchyfolge ist.

**5.18 Beispiele.** a) Sei $D = [0,1]$ und $f_n(x) := x^n$ $(n \in \mathbb{N}, x \in D)$. Dann konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Wegen des Zwischenwertsatzes nimmt jedes $f_n$ auch den Wert $\frac{1}{2}$ an, daher gilt $\|f_n - f\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Konvergenz ist also nicht gleichmäßig.

b) Sei $D = \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) := \chi_{[n,n+1]}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [n,n+1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen 0, aber nicht gleichmäßig. Die Folge $(g_n)_n$ mit $g_n := \frac{1}{n} f_n$ konvergiert punktweise und gleichmäßig gegen 0.

**5.19 Satz.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(D,\mathbb{C})$ eine gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ konvergente Funktionenfolge. Dann ist $f \in C(D,\mathbb{C})$.*

*Beweis.* Seien $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in D$ gegeben. Da $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergiert, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da $f_n$ an der Stelle $x_0$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ falls $|x - x_0| < \delta$. Für $|x - x_0| < \delta$ erhalten wir

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist $f$ stetig an der Stelle $x_0$, und da $x_0 \in D$ beliebig war, folgt $f \in C(D,\mathbb{C})$. □

Wir erinnern an die Definition der Stetigkeit: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt stetig, falls

$$\forall\, x_0 \in D\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Man beachte, dass hier $\delta$ im Allgemeinen sowohl von $\varepsilon$ als auch von $x_0$ abhängt. Falls man die Wahl von $\delta$ unabhängig von $x_0$ treffen kann, spricht man von gleichmäßiger Stetigkeit:

**5.20 Definition.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig, falls gilt
$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x_0 \in D\, \forall\, x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**5.21 Beispiele.** a) Die Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x^2$, ist gleichmäßig stetig, denn es gilt
$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0| \le 2|x - x_0| < \varepsilon,$$
falls $|x - x_0| < \delta := \frac{\varepsilon}{3}$.

b) Die Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Denn für alle $\delta > 0$ existieren $x, x_0 \in (0,1)$ mit $|x - x_0| < \delta$, aber $|f(x) - f(x_0)| \ge 1$. Um dies zu sehen, wählt man $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge \frac{1}{\delta}$ und setzt $x_0 := \frac{1}{n}$ und $x := \frac{1}{2n}$. Dann ist $|x - x_0| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| = n$.

**5.22 Satz.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge gleichmäßig stetiger Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ konvergiert. Dann ist auch $f$ gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Das zeigt man genauso wie im Beweis von Satz 5.19. □

**5.23 Korollar.** *a) Falls $K \subset \mathbb{R}$ kompakt ist, so ist $C(K,\mathbb{C})$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, ein Banachraum.*

*b) Die folgenden Räume sind jeweils mit der Supremumsnorm ein Banachraum:*

- *Der Raum $B(D,\mathbb{C})$ aller beschränkten Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$,*
- *der Raum $BC(D,\mathbb{C}) = C_b(D)$ aller beschränkten und stetigen Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$,*
- *der Raum $BUC(D,\mathbb{C})$ aller beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$.*

*Beweis.* Man rechnet leicht nach, dass $\|\cdot\|_\infty$ auf dem Raum aller beschränkten Funktionen (endlich und) eine Norm ist, ebenso die Vollständigkeit des Raums der beschränkten Funktionen. Die beiden anderen Aussagen in b) folgen dann aus Satz 5.19 bzw. Satz 5.22. Die Aussage in a) folgt daraus, da jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge beschränkt ist. □

Wie in Abschnitt 4 b) und 4 d) übertragen sich diese Begriffe wieder auf die Konvergenz von Funktionenreihen $\sum_{n=0}^\infty f_n$ mit $f_n \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$. Man beachte, dass die Definition der gleichmäßigen Konvergenz aus Definition 4.39 im Wesentlichen übereinstimmt mit Definition 5.17; der Unterschied besteht nur darin, dass wir uns jetzt auf reelle $z$ beschränken.

## b) Elementare Funktionen

Wir werden im Folgenden einige elementare Funktionen wie die exp-Funktion, den Logarithmus und die trigonometrischen Funktionen diskutieren. Wir beginnen mit der binomischen Formel.

**5.24 Definition.** Die Fakultät einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird definiert als $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Man setzt $0! := 1$. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

der zugehörige Binomialkoeffizient, gesprochen „$n$ über $k$“ oder „$k$ aus $n$“. Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ wird analog der allgemeine Binomialkoeffizient $\binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha-j+1}{j}$ definiert.

**5.25 Lemma.** *a) Für $n, k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

*b) Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k \le n$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

*Beweis.* a) folgt direkt aus der Definition, für b) setzt man die Definition auf der rechten Seite und fasst die beiden Brüche zusammen. □

**5.26 Satz** (Binomische Formel)**.** *Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

*Beweis.* Dies kann man unter Verwendung von Lemma 5.26 mit Induktion über $n$ zeigen. □

Der folgende Satz behandelt das Produkt zweier Reihen und ist technisch etwas aufwändiger zu beweisen; auf den Beweis wird hier verzichtet.

**5.27 Satz** (Cauchyprodukt von Reihen)**.** *Seien* $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *und* $\sum_{k=0}^\infty b_k$ *zwei absolut konvergente Reihen. Für* $m \in \mathbb{N}_0$ *definiert man*

$$c_m := \sum_{n+k=m} a_n b_k = \sum_{n=0}^m a_n b_{m-n} = a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \ldots a_m b_0.$$

*Dann ist die Reihe* $\sum_{m=0}^\infty c_m$ *(Cauchyprodukt der beiden Reihen) absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{m=0}^\infty c_m = \Big(\sum_{n=0}^\infty a_n\Big)\Big(\sum_{k=0}^\infty b_k\Big).$$

Für die Exponentialfunktion

$$e^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

erhält man damit folgende Aussage:

**5.28 Satz** (Additionstheorem der exp-Funktion, Funktionalgleichung der exp-Funktion)**.** *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

*Beweis.* Wir schreiben $\exp(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n$, $\exp(w) = \sum_{n=0}^\infty b_n$ mit $a_n := \frac{z^n}{n!}$ und $b_n := \frac{w^n}{n!}$. Das Cauchyprodukt der beiden Reihen ist $\sum_{n=0}^\infty c_n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{1}{n!}(z+w)^n,$$

wobei wir die binomische Formel verwendet haben. Damit gilt

$$\exp(z)\exp(w) = \Big(\sum_{n=0}^\infty a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big) = \sum_{n=0}^\infty c_n = \exp(z+w).$$

□

**5.29 Korollar.** *a) Es gilt* $\exp(z) \neq 0$, $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *sowie* $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

*b) Die Funktion* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig.*

*c) Die reelle Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend. Es gilt* $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$ *und* $\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$, *und der Wertebereich der reellen Exponentialfunktion ist* $(0,\infty)$.

*Beweis.* a) Nach Definition der Reihe gilt $\exp(0) = 1$. Aus der Funktionalgleichung folgt $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$ und damit $\exp(z) \neq 0$ sowie $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$. Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ ist $\exp(x) = (\exp(\frac{x}{2}))^2 > 0$ und damit auch $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0$.

b) Nach Beispiel 4.42 b) ist der Konvergenzradius der exp-Reihe gleich $\infty$. Nach Satz 4.41 konvergiert die Reihe in jeder beschränkten Teilmenge von $\mathbb{C}$ absolut und gleichmäßig. Man sieht leicht, dass Polynome als Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ stetig sind, d.h. die Partialsummen sind stetig. Nach Satz 5.19 (wieder in der komplexen Version) ist der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen stetig.

c) Für $x > 0$ gilt $\exp(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = 1+x+\sum_{n=2}^\infty \frac{x^n}{n!} > 1+x$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $h > 0$ gilt damit $\exp(x+h) = \exp(x)\exp(h) > \exp(x)$, d.h. die exp-Funktion ist streng monoton steigend. Wegen $\exp(x) > 1+x$ für $x > 0$ folgt $\exp(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und damit $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \to 0$ für $x \to -\infty$. Die Aussage über den Wertebereich folgt aus dem Zwischenwertsatz. □

**5.30 Definition** (Logarithmus und allgemeine Potenzen)**.** Der natürliche Logarithmus $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \ln y$ wird definiert als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$. Für $b > 0$, $b \neq 1$, definiert man

$$\log_b a\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \log_b y := \frac{\ln y}{\ln b},$$

den Logarithmus zur Basis $b$.

Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert man

$$a^x := \exp(x \ln a).$$

Speziell für $x = \frac{1}{n}$ setzt man $\sqrt[n]{a} := a^{1/n}$ sowie $\sqrt{a} := a^{1/2}$.

Direkt aus dem Additionstheorem der exp-Funktion erhalten wir entsprechende Rechenregeln für den Logarithmus und die Potenzfunktionen:

**5.31 Lemma.** *a) Die Logarithmusfunktion* $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton steigend und bijektiv, und es gilt* $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ *für* $x, y > 0$.

*b) Für* $a, b > 0$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\begin{aligned}
\ln(a^x) &= x \ln a, \\
(ab)^x &= a^x b^x, \\
a^{x+y} &= a^x a^y, \\
a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, \\
(a^x)^y &= a^{xy}.
\end{aligned}$$

**5.32 Definition.** Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $\cos x := \mathrm{Re}(e^{ix})$ der Cosinus von $x$ und $\sin x := \mathrm{Im}(e^{ix})$ der Sinus von $x$.

**5.33 Bemerkung.** a) Direkt nach Definition gilt damit die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \ (x \in \mathbb{R}).$$

b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$, d.h. die komplexe Zahl $e^{ix}$ liegt auf dem Einheitskreis. Damit ist $x$ ein Maß für den Winkel oder die Bogenmaß der komplexen Zahl $e^{ix}$. Später werden wir sehen, dass der Winkel von 360° der Bogenlänge von $2\pi$ entspricht.

c) Direkt aus der Definition folgt

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned} \tag{5-1}$$

und damit

$$\cos(-x) = \cos x, \ \sin(-x) = -\sin x, \ \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

**5.34 Satz** (Additionstheoreme)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \sin x - \sin y &= 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2}), \\ \cos x - \cos y &= -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}). \end{aligned}$$

*Beweis.* Aus $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ erhält man

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = \big(\cos x + i \sin x\big)\big(\cos y + i \sin y\big).$$

Ausmultiplizieren und Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert die ersten beiden Gleichungen.

Setzt man $u := \frac{x+y}{2}$, $v := \frac{x-y}{2}$, so folgt $u + v = x$ und $u - v = y$ und damit $\sin x - \sin y = \sin(u+v) - \sin(u-v)$. Jetzt wendet man die zweite Zeile auf $\sin(u \pm v)$ an und fasst die Terme auf der rechten Seite zusammen und erhält die dritte Zeile des Satzes. Analog für den Cosinus. $\square$

**5.35 Definition und Satz.** *Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots ,$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots .$$

*Beide Reihen haben Konvergenzradius $\infty$, konvergieren daher für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut und sind stetige Funktionen von $z \in \mathbb{C}$. Man definiert daher die komplexe Cosinus- und Sinusfunktion $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch die obigen Reihen. Die Eulersche Formel sowie die Identitäten (5-1) gelten auch für komplexe $x$.*

*Beweis.* Wegen

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 4m \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0, \\ i, & \text{falls } n = 4m+1 \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0, \\ -1, & \text{falls } n = 4m+2 \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0, \\ -i, & \text{falls } n = 4m+3 \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

erhält man für $z \in \mathbb{R}$

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} = \Big( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \Big) + \Big( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \Big) i.$$

Die absolute Konvergenz folgt sofort mit dem Quotientenkriterium, die Stetigkeit aus Satz 4.41 und Satz 5.19. Die obige Gleichheit gilt auch für $z \in \mathbb{C}$, und man erhält die Eulersche Formel sowie (5-1). □

**5.36 Definition und Satz.** *Die Funktion $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle. Diese wird als $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet.*

*Beweis.* Es gilt $\cos 0 = 1 > 0$ sowie $\cos 2 < 0$ wegen

$$\cos 2 = \Big(1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!}\Big) - \Big(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\Big) - \cdots = -\frac{1}{3} - \Big(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\Big) - \cdots < -\frac{1}{3}.$$

Analog folgt $\sin x > 0$ für alle $x \in (0, 2]$ aus

$$\sin x = x\Big(1 - \frac{x^2}{3!}\Big) + \frac{x^5}{5!}\Big(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\Big) + \ldots .$$

Damit ist cos streng monoton fallend im Intervall $[0, 2]$, da für $0 \le x < y \le 2$ gilt

$$\cos y - \cos x = -2 \sin(\tfrac{x+y}{2}) \sin(\tfrac{y-x}{2}) < 0.$$

Als stetige Funktion besitzt cos nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $[0, 2]$, und aufgrund der strengen Monotonie existiert genau eine Nullstelle. □

**5.37 Bemerkung.** Numerisch kann man $\frac{\pi}{2}$ und damit $\pi$ berechnen. Es gilt $\pi = 3,14159265\ldots$.

**5.38 Satz.** *a) Es gilt folgende Wertetabelle:*

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $e^{ix}$ | $1$ | $i$ | $-1$ | $-i$ | $1$ |

*Insbesondere gilt*

$$\boxed{1 + e^{i\pi} = 0.}$$

*b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x, \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x, \\ \sin(x + \pi) &= -\sin x, \\ \cos(x + \pi) &= -\cos x, \\ \cos x &= \sin(\tfrac{\pi}{2} - x), \\ \sin x &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) \end{aligned}$$

*sowie* $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

*c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\begin{aligned} \sin z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = k\pi, \\ \cos z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = k\pi + \tfrac{\pi}{2}, \\ e^z = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i. \end{aligned}$$

*Beweis.* a) Es gilt $\sin(\frac{\pi}{2})^2 = 1 - \cos(\frac{\pi}{2})^2 = 1$, und wegen $\sin x > 0$ im Intervall $[0, 2]$ folgt $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Also gilt $e^{i\pi/2} = i$ und damit $e^{ik\pi/2} = i^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies liefert die letzte Zeile der Tabelle, und der Vergleich von Real- und Imaginärteil die ersten beiden Zeilen.

b) folgt aus a) und den Additionstheoremen.

c) Für reelle $z$ folgen die Äquivalenzen in c) aus der Tatsache, dass $\cos z > 0$ für $z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt, und den Identitäten in b). Falls $z = x + iy$ komplex ist, so schreibt man etwa

$$\begin{aligned}\cos z &= \tfrac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) = \tfrac{1}{2}(e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y})\\ &= \tfrac{1}{2}\big(\cos x(e^{-y} + e^{y}) + i \sin x(e^{-y} - e^{y})\big).\end{aligned}$$

Wegen $e^y + e^{-y} > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ folgt aus $\cos z = 0$ und damit $\operatorname{Re}\cos z = 0$ bereits $\cos x = 0$ und damit $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Für diese $x$ gilt aber $\sin x \neq 0$, und aus $\operatorname{Im}\cos z = 0$ folgt $e^{-y} = e^{y}$ und damit $y = 0$. Analog folgt die Aussage über den Sinus.

Falls $e^z = e^{x+iy} = 1$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so erhält man $e^x(\cos y + i \sin y) = 1$ und damit $e^x \cos y = 1$ und $e^x \sin y = 0$. Aus $\sin y = 0$ folgt $y = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und wegen $\cos y = e^{-x} > 0$ kommen nur gerade Vielfache von $\pi$ in Frage, d.h. es gilt sogar $y = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Für diese $y$ ist $\cos y = 1$ und damit $e^x = 1$, also $x = 0$. Also ist $z = 2k\pi i$. $\square$

Wir haben oben bereits die strenge Monotonie der Cosinus- und Sinus-Funktion betrachtet. Auf entsprechenden Intervallen sind diese daher bijektiv, und man kann die Umkehrfunktionen definieren:

**5.39 Definition.** a) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ heißt $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ die Tangens-Funktion von $x$, und für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ heißt $\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$ die Cotangens-Funktion von $x$.

b) Die Funktion $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist streng monoton fallend und bijektiv. Die Umkehrfunktion $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ heißt Arcus-Cosinus.

Die Funktion $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist streng monoton steigend und bijektiv. Die Umkehrfunktion $\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heißt Arcus-Sinus.

Die Funktion $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend und bijektiv. Die Umkehrfunktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ heißt Arcus-Tangens.

c) Die hyperbolischen Funktionen sind definiert durch

$$\begin{aligned}&\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \cosh z := \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}),\\ &\sinh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \sinh z := \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}),\\ &\tanh\colon \mathbb{C} \setminus \{(k\pi + \tfrac{\pi}{2})i : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C},\ \tanh z := \tfrac{\sinh z}{\cosh z}.\end{aligned}$$

**5.40 Bemerkung.** Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Setzt man $r := |z|$ und $\widetilde{z} := \frac{z}{r}$, so gilt $|\widetilde{z}| = \frac{|z|}{r} = 1$. Für $\widetilde{z} = x + iy$ folgt daher $x^2 + y^2 = 1$ und $|x| \leq 1$. Für $\alpha := \arccos x \in [0, \pi]$

folgt $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - x^2 = y^2$, d.h. $\sin\alpha = \pm y$. Man definiert

$$\varphi := \begin{cases} \alpha, & \text{falls } y = \sin\alpha \geq 0, \\ 2\pi - \alpha, & \text{falls } y = -\sin\alpha < 0. \end{cases}$$

Dann gilt in allen Fällen $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\sin\varphi = y$, d.h. $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = x + iy = \widetilde{z}$ und damit

$$z = re^{i\varphi}.$$

Man spricht von der Darstellung von $z$ in Polarkoordinaten. Für $z = 0$ setzt man $r = 0$. Falls $z \neq 0$, so ist der Winkel $\varphi$ bis auf Vielfache von $2\pi$ eindeutig bestimmt, denn falls $z = re^{i\varphi} = re^{i\psi}$ gilt, so folgt $e^{i(\varphi-\psi)} = 1$ und damit $\varphi - \psi = 2\pi k$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Meistens wählt man wie oben $\varphi \in [0, 2\pi)$ und schreibt $\arg z := \varphi \in [0, 2\pi)$ (Argument/Winkel von $z$).

Für zwei komplexe Zahlen $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ lässt sich die komplexe Multiplikation einfach beschreiben: Es ist $z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, d.h. die Beträge der Zahlen multiplizieren sich und die Winkel addieren sich.

# 6. Differentiation

**Worum geht's?** In diesem Abschnitt werden differenzierbare Funktionen und wichtige Eigenschaften der Ableitung behandelt. Die Ableitung einer Funktion kann als lineare Approximation der Funktion gesehen werden, welche lokal (falls die Funktion differenzierbar ist) eine gute Näherung darstellt. Geometrisch ist der Begriff der Ableitung mit der Steigung verbunden, die zweite Ableitung mit der Krümmung. Einer der wichtigsten Sätze ist der Satz von Taylor, welcher entsprechend oft differenzierbare Funktionen durch Polynome approximiert.

## a) Der Begriff der Ableitung

**6.1 Definition.** Seien $I \subset \mathbb{R}$ offen, $x \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt $f$ differenzierbar an der Stelle $x$, falls

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =: f'(x)$$

existiert. Andere Schreibweisen sind $\frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}f(x)$. Falls $f = f(t)$, wobei $t$ die Bedeutung der Zeit hat, schreibt man auch $\dot{f}(t) := f'(t)$.

Falls $f$ an jeder Stelle $x \in I$ differenzierbar ist, so heißt $f$ differenzierbar in $I$, und $f'$ heißt die Ableitung von $f$.

**6.2 Bemerkung.** a) Der Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ beschreibt die Steigung der Geraden, auf der die Punkte $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ liegen. Der Grenzwert $f'(x)$ ist also die Steigung der Tangente an die Funktion an der Stelle $x$.

b) Falls $x$ ein Häufungspunkt von $I$ ist (z.B. der linke Randpunkt eines Intervalls), so definiert man analog links- bzw. rechtsseitige Differenzierbarkeit.

**6.3 Beispiele.** a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \to nx^{n-1} \quad (h \to 0).$$

Also ist $f$ in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$.

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \sum_{n=1}^\infty \frac{h^{n-1}}{n!} \to e^x \quad (h \to 0).$$

Also ist $f$ in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = e^x = f(x)$.

c) Sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$. Für $x=0$ und $h\neq 0$ gilt

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1, & \text{falls } h>0,\\ -1, & \text{falls } h<0.\end{cases}$$

Daher existiert der Grenzwert für $h\to 0$ nicht, und $f$ ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar. An der Stelle 0 ist $f$ rechtsseitig differenzierbar mit rechtsseitiger Ableitung $+1$ sowie linksseitig differenzierbar mit linksseitiger Ableitung -1.

**6.4 Satz.** *Sei $f\colon I\to\mathbb{C}$ differenzierbar an der Stelle $x\in I$. Dann ist $f$ an der Stelle $x$ stetig.*

*Beweis.* Für $h\to 0$ gilt $f(x+h)-f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h\to f'(x)\cdot 0=0$. □

**6.5 Bemerkung.** Sei $f\colon I\to\mathbb{C}$ eine Funktion und $x\in I$. Dann gilt für jedes $g(x)\in\mathbb{C}$ die Gleichheit

$$f(x+h)=f(x)+g(x)h+\Big(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\Big)h.$$

Somit ist $f$ genau dann an der Stelle $x$ differenzierbar, falls

$$r(x,h):=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\to 0 \quad (h\to 0),$$

und in diesem Fall gilt $g(x)=f'(x)$. Damit sieht man, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $f$ ist differenzierbar an der Stelle $x$.

(ii) Es existiert ein $g(x)\in\mathbb{C}$ mit $f(x+h)=f(x)+g(x)h+r(x,h)h$ und $r(x,h)\to 0$ für $h\to 0$.

(iii) Es gilt $f(x+h)=f(x)+f_1(x,h)h$, wobei $h\mapsto f_1(x,h)$ an der Stelle $h=0$ stetig ist.

In diesem Fall gilt $g(x)=f'(x)$ bzw. $\lim_{h\to 0}f_1(x,h)=f'(x)$. Dies liefert eine alternative Definition der Differenzierbarkeit, welche auch in allgemeineren Situationen verwendet werden kann, wie die folgende Definition zeigt.

**6.6 Definition.** Seien $U,V$ normierte Räume und $D\subset U$ offen. Eine Funktion $f\colon D\to V$ heißt an der Stelle $x\in D$ differenzierbar, falls eine lineare stetige Abbildung $g(x)\colon U\to V$ existiert mit

$$f(x+h)=f(x)+g(x)h+r(x,h)\quad\text{und}\quad \lim_{h\to 0}\frac{\|r(x,h)\|_V}{\|h\|_U}=0.$$

In diesem Fall heißt $g(x)\colon U\to V$ die Ableitung von $f$ an der Stelle $x$.

**6.7 Definition.** Falls $f\colon I \to \mathbb{C}$ in $I$ differenzierbar ist und $f'\colon I \to \mathbb{C}$ stetig ist, so heißt $f$ stetig differenzierbar in $I$. Der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen wird mit $C^1(I) = C^1(I, \mathbb{C})$ bezeichnet. Falls $f'$ differenzierbar ist, so heißt $f$ zweimal differenzierbar etc. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $C^k(I)$ die Menge aller $k$-fach stetig differenzierbaren Funktionen. Wir setzen $C^\infty(I) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(I)$, die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Bei reellwertigen Funktionen schreibt man auch $C^k(I, \mathbb{R})$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

**6.8 Satz.** *Seien $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ an der Stelle $x \in I$ differenzierbare Funktionen, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

*a) $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$, d.h. die Ableitung ist linear.*

*b) Produktregel: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.*

*c) Quotientenregel: Falls $g(x) \neq 0$, gilt*

$$\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

*Beweis.* a) folgt sofort aus der Linearität des Grenzwerts.

Für b) kann man Bemerkung 6.5 verwenden: Sei $f(x+h) = f_1(x,h)h$, $g(x+h) = g(x) + g_1(x,h)h$ mit $f_1(x,h) \to f'(x)$, $g_1(x,h) \to g'(x)$ für $h \to 0$. Dann gilt

$$f(x+h)g(x+h) = f(x)g(x) + \big[f_1(x,h)g(x) + f(x)g_1(x,h)\big]h$$

mit $f_1(x,h)g(x) + f(x)g_1(x,h) \to f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ für $h \to 0$.

Für c) sei zunächst $f = 1$. Dann gilt

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \to -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \quad (h \to 0)$$

und damit $(\frac{1}{g})'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$. Die allgemeine Quotientenregel folgt nun mit Teil b) wegen $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. □

**6.9 Satz** (Kettenregel)**.** *Seien $S, T \subset \mathbb{R}$ offen, $f\colon S \to \mathbb{R}$, $g\colon T \to \mathbb{C}$ Abbildungen mit $f(S) \subset T$. Falls $f$ an der Stelle $x \in S$ differenzierbar ist und $g$ an der Stelle $y := f(x) \in T$ differenzierbar ist, so ist $g \circ f$ an der Stelle $x$ differenzierbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) = (g'(f(x))) \cdot f'(x).$$

*Beweis.* Sei $f(x+h) = f(x) + f_1(x,h)h$ und $g(y+t) = g(y) + g_1(y,t)$, wobei $f_1(x,\cdot)$ und $g_1(y,\cdot)$ jeweils an der Stelle 0 stetig seien. Dann gilt (man setzt $t = f_1(x,h)h$

$$g(f(x+h)) = g(y + f_1(x,h)h) = g(y) + g_1(y, f_1(x,h)h)f_1(x,h)h.$$

Somit folgt die Behauptung aus

$$g_1(y, f_1(x,h)h)f_1(x,h) \to g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x) \quad (h \to 0).$$

□

Das Vorzeichen der Ableitung sagt etwas über die Monotonie einer Funktion aus. Die folgende Aussage werden wir später beweisen.

**6.10 Lemma.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Dann ist $f$ streng monoton wachsend.*

Eine weitere wichtige Aussage behandelt die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion. Man beachte, dass auch die (lokale) Existenz der Umkehrfunktion gezeigt wird. In der Formulierung des folgenden Satzes ist eine offene Umgebung von $x_0$ eine offene Teilmenge, welche $x_0$ enthält, also z.B. ein Intervall der Form $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit kleinem $\varepsilon > 0$.

**6.11 Satz** (Satz von der lokalen Umkehrbarkeit)**.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in I$, und $f$ in einer offene Umgebung $U(x_0) \subset I$ von $x_0$ stetig differenzierbar. Falls $f'(x_0) \neq 0$, so existiert eine Umgebung $V(y_0)$ von $y_0 := f(x_0)$, in der die Umkehrabbildung $g := f^{-1}$ existiert und stetig differenzierbar ist. Es gilt dann*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}. \tag{6-1}$$

*Beweis.* Sei o.E. $f'(x_0) > 0$. Da $f'$ in einer Umgebung von $x_0$ stetig ist, gilt $f'(x) > 0$ für $x \in I_0$ für ein offenes Intervall $I_0 \subset U(x_0)$ mit $x_0 \in I_0$. Nach Lemma 6.10 ist $f\colon I_0 \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und damit bijektiv. Wir setzen $V(y_0) := f(I_0)$. Für die Umkehrfunktion $g\colon V(y_0) \to \mathbb{R}$ gilt dann $f(g(y)) = y$ $(y \in V(y_0))$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(y_0+h) - y_0}{h} = \frac{f(g(y_0+h)) - f(g(y_0))}{h} \\ &= \frac{f(g(y_0+h)) - f(g(y_0))}{g(y_0+h) - g(y_0)} \cdot \frac{g(y_0+h) - g(y_0)}{h}. \end{aligned}$$

Schreibt man $f(g(y_0+h)) = f(g(y_0) + \widetilde{h})$ mit $\widetilde{h} := g(y_0+h) - g(y_0)$, so sieht man mit der Stetigkeit von $g$, dass $\widetilde{h} \to 0$ für $h \to 0$ gilt. Also können wir den Limes $h \to 0$ nehmen und erhalten die Differenzierbarkeit von $g$ sowie $1 = f'(g(y_0))g'(y_0)$. Da $f'(g(y_0)) \neq 0$, folgt (6-1). Da $f'$ und $g$ beide stetig sind, erhalten wir aus (6-1) die Stetigkeit von $g'$. □

**6.12 Satz** (Ableitung elementarer Funktionen)**.** *a) Für* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x)' = \exp(x)$*. Für* $a > 0$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $(a^x)' = (\ln a)a^x$*.*

*b) Für* $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *gilt* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$*. Für* $a \in \mathbb{R}$ *und* $x > 0$ *gilt* $(x^a)' = ax^{a-1}$*.*

*c) Für die reellen trigonometrischen Funktionen gilt*

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,\ (\tan x)' = 1 + \tan^2 x.$$

*d) Für die Arcusfunktionen gilt*

$$\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1)),\\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1)),\\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

*Beweis.* a) $(e^x)' = e^x$ war Beispiel 6.3 b), und mit der Kettenregel erhält man $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a$.

b) Nach Satz 6.11 ist $(\ln x)' = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$. Damit ist $(x^a)' = (\exp(a\ln x))' = \exp(a\ln x)\frac{a}{x} = x^a\frac{a}{x} = ax^{a-1}$.

c) folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil aus $(e^{ix})' = ie^{ix}$ und (für den Tangens) aus der Quotientenregel.

d) Wieder aus Satz 6.11 erhält man unter Beachtung von $\cos z > 0$ für $z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Analog erhält man anderen beiden Ableitungen. □

## b) Der Mittelwertsatz und seine Folgerungen

**6.13 Satz.** *Sei* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *in einer Umgebung* $U(x_0)$ *von* $x_0 \in I$ *differenzierbar, und* $f$ *besitze ein lokales Minimum an der Stelle* $x_0$*, d.h. es gelte* $f(x_0+h) \ge f(x_0)$ *für* $|h| \le h_0$ *mit einem* $h_0 > 0$*. Dann gilt* $f'(x_0) = 0$*. Die analoge Aussage gilt für ein lokales Maximum und damit für ein lokales Extremum.*

*Beweis.* Für $h \ge 0$ ist $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 0$, und für $h \searrow 0$ erhält man $f'(x_0) \ge 0$. Für $h \le 0$ ist $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0$ und es folgt $f'(x_0) \le 0$. Somit ist $f'(x_0) = 0$. □

**6.14 Bemerkung.** Dieser Satz sagt, dass die Bedingung $f'(x_0) = 0$ notwendig ist für ein lokales Extremum. Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ in $\mathbb{R}$ zeigt.

**6.15 Satz** (Satz von Rolle)**.** *Sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ differenzierbar in $(a,b)$, und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

*Beweis.* O.E. sei $f(a) = f(b) = 0$ (sonst betrachte $g(x) := f(x) - f(a)$). Nach Korollar 5.15 existiert $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Falls $M > 0$ ist, so existiert nach Definition des Maximums ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = M$. Damit ist $x_0$ ein lokales Maximum, und nach Satz 6.13 ist $f'(x_0) = 0$. Falls $M = 0$, betrachte analog $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$. Im Falle $m < 0$ existiert analog ein lokales Minimum $x_0$ mit $f(x_0) = 0$, und im Falle $M = m = 0$ ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ und damit $f'(x) = 0$ für alle $x$. □

**6.16 Satz** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ differenzierbar in $(a,b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

*Somit besitzt die Tangente an der Stelle $x_0$ dieselbe Steigung wie die Strecke durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.*

*Beweis.* Sei $F(x) := f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dann ist $F$ in $(a,b)$ differenzierbar, und es gilt $F(a) = F(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $F'(x_0) = 0$ und damit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

**6.17 Korollar.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

*a) Es gilt $f'(x) = 0$ $(x \in I)$ genau dann, wenn $f$ eine Konstante ist (d.h. wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = c$ $(x \in I)$; Schreibweise $f = \text{const}$).*

*b) Die Funktion $f$ ist genau dann monoton wachsend, falls gilt $f'(x) \geq 0$ $(x \in I)$.*

*Beweis.* a) Aus $f = c$ folgt $f' = 0$. Sei also $f' = 0$. Für $x, y \in I$ gilt dann $f(x) - f(y) = (x - y)f'(x_0) = 0$ und damit $f(x) = f(y)$. Also ist $f$ konstant.

b) Falls $f$ monoton wachsend ist, folgt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ $(h \geq 0)$ und damit $f'(x) \geq 0$ $(x \in I)$. Falls andererseits $f' \geq 0$, so gilt für $x, y \in I$ mit $x < y$ die Ungleichung $f(y) - f(x) = (y - x)f'(x_0) \geq 0$ für ein $x_0 \in (x,y)$ und damit $f(x) \leq f(y)$. Also ist $f$ monoton wachsend. □

**6.18 Satz** (Taylorreihe bis zum linearen Term). *Sei $f \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ in $(a,b)$ zweimal differenzierbar. Dann existiert zu $x \in [a,b]$ und $h > 0$ mit $[x, x+h] \subset [a,b]$ ein $\theta \in (0,1)$ mit*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(h) + \frac{h^2}{2} f''(x+\theta h).$$

*Beweis.* Ähnlich wie im Beweis des Mittelwertsatzes betrachtet man die Hilfsfunktion

$$F(z) := f(x+h) - f(x+z) - (h-z)f'(x+z) - m\frac{(h-z)^2}{2}\,.$$

Dann gilt

$$F(0) = f(x+h) - f(x) - hf'(x) - m\frac{h^2}{2}$$

und $F(h) = 0$. Man wählt $m \in \mathbb{R}$ so, dass auch $F(0) = 0$ gilt und wendet den Satz von Rolle an. Somit existiert ein $z_0 \in (0,h)$ mit $F'(z_0) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 = F'(z_0) &= -f'(x+z_0) + f'(x+z_0) - (h-z_0)f''(x+z_0) + m(h-z_0) \\ &= (h-z_0)(-f''(x+z_0) + m). \end{aligned}$$

Also gilt $m = f''(z_0)$ und wegen $F(0) = 0$ folgt

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x+z_0).$$

Wir schreiben nun $z_0 = \theta h$ mit $\theta \in (0,1)$ und erhalten die Behauptung. □

**6.19 Korollar** (Hinreichende Bedingung für Extremum). *Sei $f \in C^2(I,\mathbb{R})$. Falls für ein $x_0 \in I$ gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so hat $f$ an der Stelle $x_0$ ein isoliertes lokales Minimum (analog für $f''(x_0) < 0$ und Maximum).*

*Beweis.* Mit der Taylorreihe aus Satz 6.18 und $f'(x_0) = 0$ folgt für $x_0 + h \in I$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0+\theta h).$$

Da $f''(x_0) > 0$ und $f''$ stetig ist, gilt auch $f''(x) > 0$ für alle $x$ in einer Umgebung von $x_0$. Für $x_0 + h$ mit hinreichend kleinem $|h|$ folgt daher $f(x_0+h) > f(x_0)$. □

**6.20 Beispiel.** Gesucht ist das Rechteck, welches unter allen Rechtecken mit gegebenem festen Umfang $U$ den größten Flächeninhalt besitzt. Seien $a, b$ die Seitenlängen, dann ist der Umfang $U = 2a + 2b$ und die Fläche $F = ab = a(\frac{U}{2} - a) = \frac{aU}{2} - a^2$. Für die Funktion $F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(a) = \frac{aU}{2} - a^2$ gilt $F'(a) = \frac{U}{2} - 2a$ und damit $F'(a) = 0$ für $a = a_0 := \frac{U}{4}$ und $F''(a) = -2 < 0$. Daher hat $F$ ein lokales

Maximum an der Stelle $a = \frac{U}{4}$. Für diesen Wert von $a$ gilt $a = b$, d.h. es handelt sich um das Quadrat. Da an keiner anderen Stelle die notwendige Bedingung $F'(a) = 0$ erfüllt ist und an den Randpunkten $a = 0$ und $a = \frac{U}{2}$ der Flächeninhalt 0 ist, handelt es sich um ein globales Maximum.

Die folgenden beiden Aussagen sind leicht zu beweisen und für manche Rechnungen nützlich. Der Beweis des erweiterten Mittelwertsatzes ist dabei ähnlich zum Beweis des Mittelwertsatzes selbst.

**6.21 Lemma.** *a) (Erweiterter Mittelwertsatz) Seien $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$ in $(a,b)$ differenzierbar und $g(a) \neq g(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(x_0).$$

*b) (Regel von L'Hospital) Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in I$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Dann gilt*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad (x \to x_0),$$

*falls der Limes auf der rechten Seite existiert. Analoge Aussagen gelten auch im Fall $x_0 = \pm\infty$ und im Fall $f(x_0) = g(x_0) = \infty$.*

**6.22 Beispiel.** a) Es gilt mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1} = 0.$$

b) Genauso erhalten wir $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

c) Aus $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$ erhält man

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \exp\Big(\frac{\ln(1+x)}{x}\Big) = \exp(1) = e.$$

## c) Folgen und Reihen von Funktionen und die Taylorreihe

Wir wissen bereits, dass der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen wieder stetig ist. Eine ähnliche Aussage gilt auch für die Differenzierbarkeit. Hier ist die gleichmäßige Konvergenz der Ableitung wichtig. Wir formuliere die folgenden Aussagen für reellwertige Funktionen, sie gelten aber genauso für komplexwertige Funktionen.

**6.23 Satz.** *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1([a,b];\mathbb{R})$ *eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen, und sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit* $f_n \to f$ *punktweise. Falls* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b];\mathbb{R})$ *gleichmäßig konvergent ist, so ist* $f$ *stetig differenzierbar, und es gilt* $f_n' \to f'$ *gleichmäßig. In diesem Fall gilt also* $(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty}(f_n')$.

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen. Man beachte, dass es für die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen schon ausreicht, dass $(f_n')_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b];\mathbb{R})$ eine Cauchyfolge ist, da der Raum $(C([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

Als Anwendung erhalten wir eine Aussage über Potenzreihen:

**6.24 Korollar.** *Sei* $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ *mit* $a_n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. *Sei* $r \in (0,\infty]$ *der Konvergenzradius der Reihe. Dann konvergiert die Reihe für alle* $x \in I := (x_0 - r, x_0 + r)$ *mit allen Ableitungen absolut, und es gilt* $f \in C^\infty(I;\mathbb{R})$. *Für die Ableitungen gilt*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^\infty n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

*Beweis.* Sei $x \in I$ und $r_0$ mit $|x-x_0| \le r_0 < r$. Dann gilt nach Definition des Konvergenzradius für $n \ge n_0$ mit geeignetem $n_0$ die Abschätzung $|a_n| \le \frac{1}{r_0}$ und damit $|a_n(x-x_0)^n| \le q^n$ mit $q := \frac{r}{r_0} < 1$. Sei $s_N(x) := \sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n$ die $N$-te Partialsumme. Dann gilt $s_N'(x) = \sum_{n=1}^N na_n(x-x_0)^{n-1}$. Für $x \in I$, $x \ne x_0$, folgt

$$|na_n(x-x_0)^{n-1}| \le \frac{n}{|x-x_0|}\, q^n \quad (n \ge n_0).$$

Also ist die konvergente Reihe $\sum_{n=n_0}^\infty \frac{n}{|x-x_0|} q^n$ eine Majorante für die Reihe der Ableitungen $\sum_{n=1}^\infty na_n(x-x_0)^{n-1}$. □

**6.25 Satz** (Identitätssatz für Potenzreihen)**.** *Seien* $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ *und* $g(x) = \sum_{n=0}^\infty b_n(x-x_0)^n$ *zwei Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius. Falls* $f$ *und* $g$ *in einer Umgebung von* $x_0$ *dieselben Werte haben, so gilt* $a_n = b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

*Beweis.* Die Funktionen $f$ und $g$ sind in einer Umgebung von $x_0$ unendlich oft differenzierbar und es gilt $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Nach Korollar 6.24 gilt $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$, analog für $g$. Also erhalten wir bereits $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Der folgende Satz ist einer der wichtigsten Sätze der Vorlesung und beschreibt die Approximation einer Funktion mit Hilfe der sogenannten Taylorpolynome.

**6.26 Satz** (Satz von Taylor). *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ im Intervall $(n+1)$-mal differenzierbar im Intervall $(a,b)$, und seien $x, x_0 \in (a,b)$. Dann existiert ein $\xi$ zwischen $x$ und $x_0$ mit*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\,(x-x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}.$$

*Beweis.* O.E. sei $x > x_0$. Wir betrachten die Funktion $g\colon [x_0,x] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t)$ mit

$$g(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\,(x-t)^n - m\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dabei wird $m \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $g(x_0) = 0$ gilt. Da auch $g(x) = 0$ gilt und nach Voraussetzung die Funktion $g$ in $(x_0, x)$ differenzierbar ist, können wir den Satz von Rolle anwenden. Damit existiert ein $\xi \in (x, x_0)$ mit

$$0 = g'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + m\frac{(x-\xi)^n}{n!}.$$

(Man beachte beim Berechnen von $g'$, dass sich durch die Anwendung der Produktregel fast alle Terme wegheben.) Wir erhalten somit $m = f^{(n+1)}(\xi)$, und aus $g(x_0) = 0$ folgt

$$0 = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

**6.27 Bemerkung.** a) Das Polynom

$$(T_n f)(x) := \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\,(x-x_0)^j$$

heißt Taylorpolynom der Ordnung $n$ von $f$ an der Stelle $x_0$. Der Satz von Taylor kann damit geschrieben werden in der Form $f(x) = (T_n f)(x) + R_n(x_0, x, \xi)$, wobei $R_n(x_0,x,\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$ das Restglied ist. Eine andere typische Schreibweise ist mit $x = x_0 + h$ und $\xi = x_0 + \theta h$ mit $\theta \in (0,1)$ und $x$ statt $x_0$ die Darstellung

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j + R_n(x,h)$$

mit dem Restglied

$$R_n(x,h) := \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Die hier angegebenen Formen des Restglieds heißen auch Lagrange-Form des Restglieds.

b) Eine andere Darstellung des Restglieds ergibt sich als Integral (welches später behandelt wird) in Form von

$$R_n(x,h) = \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} (x+h-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

**6.28 Korollar.** *Die Funktion $f$ sei im Intervall $(a,b)$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. An einer Stelle $x_0 \in (a,b)$ gelte $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$ und $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Dann gilt:*

*(i) Falls $n$ ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ ist, so hat $f$ an der Stelle $x_0$ ein lokales Minimum.*

*(ii) Falls $n$ ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ist, so hat $f$ an der Stelle $x_0$ ein lokales Maximum.*

*(iii) Falls $n$ gerade ist, so hat $f$ an der Stelle $x_0$ kein lokales Extremum, aber einen Wendepunkt, d.h. $f'$ besitzt ein lokales Extremum in $x_0$.*

*Beweis.* Nach dem Satz von Taylor gilt $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$ für ein $\theta \in (0,1)$. Das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(x+\theta h)$ ist wegen der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ für kleine $h$ dasselbe wie an der Stelle $x_0$. Damit ergeben sich die Aussagen (i) und (ii). Für (iii) verwendet man dieselben Überlegungen für $f'$. □

**6.29 Definition.** Sei $f \in C^\infty((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j$$

die Taylorreihe von $f$ an der Stelle $x_0$. Eine Funktion $f \in C^\infty((a,b))$, für welche an jeder Stelle $x_0 \in (a,b)$ die Taylorreihe konvergiert mit Wert $f(x_0)$, heißt reell analytisch in $(a,b)$.

**6.30 Bemerkung.** a) Selbst wenn die Taylorreihe an der Stelle $x_0$ konvergiert, muss ihr Wert nicht notwendigerweise gleich $f(x_0)$ sein. Dies zeigt folgendes Beispiel: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(j)}(0) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$, d.h. die Taylorreihe hat Konvergenzradius $\infty$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ den Wert 0, stimmt also für kein $x \neq 0$ mit $f(x)$ überein.

Die Taylorreihe konvergiert genau dann gegen die Funktion $f$, wenn das Restglied $R_n(x, h)$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

b) Falls für die Funktion $f$ in einer Umgebung des Punktes $x_0$ die Darstellung $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$ gilt (wobei die Reihe in dieser Umgebung konvergiert), so ist $f$ in dieser Umgebung unendlich oft differenzierbar nach Korollar 6.24, und es gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Also ist diese Reihe die Taylorreihe von $f$.

**6.31 Lemma.** *Sei $f \in C^\infty((a, b))$ und $x_0 \in (a, b)$. Falls ein $c > 0$ und ein $\delta > 0$ existieren mit*

$$|f^{(n)}(x)| \le c^n \quad (x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\, n \in \mathbb{N}_0),$$

*so gilt $\sup_{\xi, x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]} |R_n(x_0, x, \xi)| \to 0$ für $n \to \infty$, und die Taylorreihe konvergiert in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ und ist dort gleich $f$.*

*Beweis.* Die Lagrange-Form des Restglieds liefert $|R_n(x_0, x, \xi)| \le \frac{c^{n+1}h^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ $(n \to \infty)$. □

**6.32 Beispiele.** Die Reihen

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

sind alles Taylorreihen um den Entwicklungspunkt 0, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen die Funktion konvergieren. Genauso ist

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n \quad (|x| < 1)$$

die Taylorreihe der Funktion $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Man beachte, dass sich an der Taylorreihe direkt die Ableitungen $f^{(n)}(x_0)$ ablesen lassen.

**6.33 Satz** (Logarithmus-Reihe)**.** *Für alle* $x \in (-1, 1)$ *gilt*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

*Beweis.* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ hat Konvergenzradius 1, ist in $(-1, 1)$ also unendlich oft differenzierbar mit Ableitung $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Wegen $(\ln(1-x))' = -\frac{1}{1-x}$ und $\ln(1-x)|_{x=0} = \ln 1 = 0$ haben die Funktionen $-\ln(1-x)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ also dieselbe Ableitung und denselben Wert an der Stelle 0 und sind damit gleich. Es gilt also

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (|x| < 1).$$

Ersetzt man $x$ durch $-x$, so erhält man die Behauptung. □

**6.34 Bemerkung.** Die Logarithmus-Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium auch noch an der Stelle $x = 1$. Der Abelsche Grenzwertsatz, der hier nicht behandelt wird, besagt, dass die Reihe an der Stelle 1 linksseitig stetig ist. Da $\ln(1+\cdot)$ ebenfalls stetig an der Stelle 1 ist, gilt

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

**6.35 Satz** (Arctan-Reihe)**.** *Für alle* $x \in [-1, 1]$ *gilt*

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \cdots.$$

*Speziell folgt*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 6.33 betrachtet man die Ableitung der Funktion $f(x) := \arctan x$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

Damit gilt $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n)!$ und $f^{(2n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nach Bemerkung 6.30, und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ist die Taylorreihe von arctan an der Stelle 0. Es gilt also

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_N(0, x, \xi)$$

mit

$$R_N(0,x,\xi) = f^{(2N+1)}(\xi)\frac{x^{2N+1}}{(2N+1)!}.$$

Man kann zeigen, dass für alle $\xi \in [-1,1]$ die Abschätzung $|f^{(2N+1)}(\xi)| \le (2N)!$ gilt. Damit erhält man für alle $|x| \le 1$ die Abschätzung

$$|R_N(0,x,\xi)| \le \frac{|x^{2N+1}|}{2N+1} \le \frac{1}{2N+1} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Dies zeigt sowohl die Konvergenz der Taylorreihe für $|x| \le 1$ als auch die Gleichheit mit $f(x)$. Für $x = 1$ erhält man wegen $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ die zweite Aussage. □

**6.36 Satz** (Binomialreihe)**.** *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man den (verallgemeinerten) Binomialkoeffizienten durch*

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}, \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

*Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in (-1,1)$*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n.$$

*Beweis.* Sei $f(x) := (1+x)^\alpha$. Dann ist $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}|_{x=0}$ und damit $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$, d.h. die obige Reihe ist die Taylorreihe von $f$ an der Stelle 0.

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ bricht die Reihe nach endlich vielen Schritten ab und die obige Formel gilt nach der binomischen Formel. Sei also $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Für die Glieder $a_n := \binom{\alpha}{n}x^n$ der Reihe gilt für $x \in (-1,1)$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| |x| \to |x| < 1 \quad (n\to\infty),$$

und nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe absolut. Damit ist der Konvergenzradius der Reihe (mindestens) gleich 1.

Für $\xi \in [0,1)$ gilt $(1+\xi)^{\alpha-n} \le (1+\xi)^\alpha \le C$ mit $C := \max_{\xi\in[0,1]}(1+x)^\alpha$. Damit

$$|f^{(n+1)}(\xi)| = \big|\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n}\big| \le C\big|\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n)\big| \quad (|\xi| \le 1).$$

Mit der Lagrange-Restgliedformel gilt

$$|R_n(0,x,\xi)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le C\left|\binom{\alpha}{n}\right| \left|x^{n+1}\right| = C|a_{n+1}| \to 0 \quad (n\to\infty),$$

wobei verwendet wurde, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge ist, da die Reihe konvergiert.

Also konvergiert das Restglied für alle $x, \xi \in [0, 1)$ gegen 0, und die Taylorreihe konvergiert und ist gleich $f$. Eine ähnliche Rechnung zeigt, dass dies auch für alle $x, \xi \in (-1, 0)$ gilt. $\square$

# 7. Iterationsverfahren und der Banachsche Fixpunktsatz

**Worum geht's?** In diesem kurzen Abschnitt wird der Banachsche Fixpunktsatz besprochen, welcher besagt, dass eine kontrahierende Abbildung stets genau einen Fixpunkt besitzt. Diese Aussage ist wichtig sowohl für die Theorie (z.B. für den Satz von Picard-Lindelöf in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen) als auch in der Numerik, in welcher Fixpunktiterationen häufig eingesetzt werden. Ein Standard-Verfahren als Fixpunktiteration ist das Newton-Verfahren zur Berechnung von Nullstellen.

**7.1 Satz** (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei $U$ ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$, $X \subset U$ abgeschlossen und $T\colon X \to X$ eine kontrahierende Abbildung, d.h. es existiere ein $k \in [0,1)$ mit*

$$\|T(x) - T(y)\| \le k\|x - y\| \quad (x, y \in X).$$

*Dann existiert genau ein $\hat{x} \in X$ mit $T(\hat{x}) = \hat{x}$ (Fixpunkt von $T$). Für ein beliebiges $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := T(x_{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$ gegen $x_0$. Es gilt $\|x_n - \hat{x}\| \le \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$.*

*Beweis.* Sei $x_0 \in X$ beliebig und $(x_n)_n$ wie oben definiert. Dann gilt für $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\|x_{n+m} - x_n\| &\le \|x_{n+m} - x_{n+m-1}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\le (k^{n+m-1} + \ldots + k^n)\|x_1 - x_0\| \\
&= k^n \sum_{j=0}^{n+m-1} k^j \|x_1 - x_0\| \le k^n \sum_{j=0}^{\infty} k^j \|x_1 - x_0\| \\
&= \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $X$, und da $U$ vollständig und $X$ abgeschlossen ist, existiert der Grenzwert $\hat{x} := \lim_{n\to\infty} x_n$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\hat{x} - T(\hat{x})\| &\le \|\hat{x} - x_n\| + \|T(\hat{x}) - x_n\| \\
&= \|\hat{x} - x_n\| + \|T(\hat{x}) - T(x_{n-1})\| \\
&\le \|\hat{x} - x_n\| + k\|\hat{x} - x_{n-1}\| \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Also gilt $\|\hat{x} - T(\hat{x})\| = 0$, d.h. $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

Der Fixpunkt ist eindeutig: Sei $y$ ein weiterer Fixpunkt von $T$. Dann gilt

$$\|\hat{x} - y\| = \|T(\hat{x}) - T(y)\| \le k\|\hat{x} - y\|,$$

und wegen $k < 1$ folgt $\|\hat{x} - y\| = 0$. □

**7.2 Beispiel.** Zur Berechnung von $\sqrt{2}$ betrachte man $X := [1,2]$ und

$$Tx := x + \frac{2-x^2}{3} \quad (x \in X).$$

Dann gilt $|T(x) - T(y)| = |x-y||1 - \frac{x+y}{3}| \le \frac{1}{3}|x-y|$, und die Iteration $x_0 := 1$, $x_n := T(x_{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert gegen einen Fixpunkt von $T$ und damit gegen $\sqrt{2}$. Die Iteration ergibt folgende Tabelle:

| $n$ | $x_n$ |
|---|---|
| 0 | 1.000000000000000 |
| 1 | 1.333333333333333 |
| 2 | 1.407407407407407 |
| 3 | 1.413808870598994 |
| 4 | 1.414190363070860 |
| 5 | 1.414212235403363 |
| 6 | 1.414213486481837 |
| 7 | 1.414213558032800 |
| 8 | 1.414213562124870 |
| 9 | 1.414213562358899 |

**7.3 Satz** (Newton-Verfahren). *Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, und sei $\hat{x} \in D$ eine Nullstelle von $f$ mit $f'(\hat{x}) \neq 0$. Für $x_0 \in D$ definiert man folgende Iteration:*

$$x_n := T(x_{n-1}) := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

*Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass die Abbildung $T$ eine Kontraktion in $X := [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$ ist und somit für alle $x_0 \in X$ gegen $\hat{x}$ konvergiert.*

*Beweis.* Wegen $f'(\hat{x}) = 0$ und der Stetigkeit von $f'$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass $f'(x) \neq 0$ $(|x - \hat{x}| \le \delta)$ gilt. Für die Funktion $T : [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta] \to \mathbb{R}$, $T(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ gilt $T(\hat{x}) = \hat{x}$, $T'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ und damit $T'(\hat{x}) = 0$. Wir verkleinern $\delta$ so, dass $|T'(x)| \le \frac{1}{2}$ für $x \in X := [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$ gilt. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$|T(x) - \hat{x}| = |x - \hat{x}|\,|T'(\xi)| \le \frac{1}{2}|x - \hat{x}|,$$

also gilt $T(X) \subset X$. Dieselbe Rechnung zeigt, dass $T$ eine Kontraktion ist, und die Behauptung folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz. □

**7.4 Beispiel.** Wir berechnen wieder $\sqrt{2}$, diesmal mit dem Newton-Verfahren. Sei also $f(x) = x^2 - 2$. Dann lautet das Newton-Verfahren

$$x_n := x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Für $x_0 := 1$ erhält man folgende Werte:

| $n$ | $x_n$ |
|---|---|
| 0 | 1.000000000000000 |
| 1 | 1.500000000000000 |
| 2 | 1.416666666666667 |
| 3 | 1.414215686274510 |
| 4 | 1.414213562374690 |
| 5 | 1.414213562373095 |
| 6 | 1.414213562373095 |
| 7 | 1.414213562373095 |

Man sieht, dass das Newton-Verfahren viel schneller konvergiert als die Iteration aus Beispiel 7.2. Tatsächlich kann man leicht zeigen, dass die Konvergenz lokal quadratisch ist, d.h. in der Nähe des Fixpunktes gilt $|x_n - \hat{x}| \le C|x_{n-1} - \hat{x}|^2$. In der Anwendung problematisch ist die Tatsache, dass der Startwert nahe bei der Nullstelle liegen muss; daher existieren Varianten des Newton-Verfahrens, welche dies berücksichtigen.

# A. Anmerkungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Hier werden ohne Beweis und ohne mathematische Exaktheit einige Begriffe und Konzepte aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen vorgestellt, welche im Teil III der Vorlesung vertieft werden.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung $k$ ist eine Gleichung der Form

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0 \quad (t \in I), \tag{1-1}$$

wobei $F$ eine gegebene Funktion ist und die Funktion $y\colon I \to \mathbb{C}$ gesucht ist. Die Menge $I$ ist dabei ein (endliches oder unendliches) Intervall in $\mathbb{R}$, und $y', \dots, y^{(k)}$ bezeichnen die Ableitungen von $y$. Ein einfaches Beispiel ist die Differentialgleichung

$$y'(t) = \lambda y(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{1-2}$$

mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$, welche von $y(t) = e^{\lambda t}$ gelöst wird. Die Differentialgleichung (1-1) heißt linear, falls die Funktion $F$ linear von $y, y', \dots, y^{(k)}$ abhängt. So ist z.B. die Gleichung (1-2) linear, aber auch die Gleichung $y''(t) + 2(\cos t)y(t) = 0$. Aus dem zentralen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf folgt, dass (unter geeigneten Voraussetzungen) die Menge $\mathscr{L}$ aller Lösungen einer skalaren Differentialgleichung der Ordnung $k$ einen $k$-dimensionalen Untervektorraum des Raums aller stetigen Funktionen darstellt. Genauer ist für jedes feste $t_0 \in I$ die Abbildung

$$\mathscr{L} \to \mathbb{C}^n,\ y \mapsto (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(k-1)}(t_0))^\top$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen. Damit sieht man, dass die Menge aller Lösungen von (1-2) gegeben ist durch $\mathscr{L} = \operatorname{span}\{t \mapsto e^{\lambda t}\} = \{t \mapsto ce^{\lambda t} \mid c \in \mathbb{C}\}$.

Um eine lineare Differentialgleichung der Ordnung $k$ zu lösen, genügt es also, eine Basis des Lösungsvektorraums anzugeben. Dafür reicht es wiederum $k$ linear unabhängige Lösungen zu finden. Die Differentialgleichung

$$y''(t) + y(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

besitzt die beiden linear unabhängigen Lösungen $y_1(t) = e^{it}$ und $y_2(t) = e^{-it}$. Die Menge aller Lösungen ist also gegeben durch $y(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Will man reelle Lösungen haben, kann man auch $\operatorname{Re} e^{it} = \cos t$ und $\operatorname{Im} e^{it} = \sin t$ als linear unabhängige Lösungen wählen.

Allgemein findet man Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$y^{(k)}(t) + a_{k-1} y^{(k-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

durch den Ansatz $y(t) = e^{\tau t}$ mit einem noch zu bestimmenden Parameter $\tau \in \mathbb{C}$. Einsetzen ergibt

$$\tau^k + a_{k-1}\tau^{k-1} + \dots + a_1 \tau + a_0 = 0.$$

Die Exponenten sind also durch die Nullstellen des entsprechenden Polynoms gegeben. Falls keine doppelten Nullstellen auftreten, erhält man $k$ linear unabhängige Lösungen und damit eine Basis des Lösungsraums.

Nichtlineare Gleichungen sind im Allgemeinen viel schwerer zu lösen. Es gibt jedoch einige einfache Tricks, um zumindest zu einer Lösung zu kommen: So wird z.B. bei der Separation der Variablen die Differentialgleichung

$$y'(t) = (\sin t)y(t)^2$$

formal in die Form

$$\frac{y'(t)}{y(t)^2} = \sin t$$

gebracht. Man sieht, dass die Funktion $H(y(t)) := -\frac{1}{y(t)}$ die Ableitung $(H(y(t))' = \frac{y'(t)}{y(t)^2}$ besitzt. Integriert man daher beide Seiten der obigen Differentialgleichung, so erhält man

$$-\frac{1}{y(t)} = -\cos t + C$$

mit einer Integrationskonstanten $C$ und damit die Lösung $y(t) = \frac{1}{\cos t - C}$. Diese Methode funktioniert bei allen Gleichungen der Form

$$y'(t) = g(t)h(y(t)).$$

Falls $G$ eine Stammfunktion von $g$ und $H$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ ist, so gilt für die Lösung die Gleichung

$$H(y(t)) = G(t) + C \quad (t \in I).$$

Symbolisch kann man die Trennung der Variablen mit der Schreibweise $y' = \frac{dy}{dt}$ folgendermaßen formulieren: $y'(t) = g(t)h(y(t))$ entspricht

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(t)dt \quad \text{und damit} \int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(t)dt + C.$$

# B. Koordinatentransformationen

Wir wollen hier anhand zweier Beispiele die Idee einer Koordinatentransformation vorstellen. Wir beginnen mit dem linearen Fall, den wir als Basiswechsel kennen.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzgl. der Standardbasis $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ des $\mathbb{R}^2$ beschrieben durch $f(x) = x_1 + 2x_2$. In Matrixschreibweise erhält man

$$f(x) = Ax = (1 \quad 2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}^2).$$

Wir betrachten nun eine neue Basis $\mathcal{B} := \{\binom{1}{-1}, \binom{1}{1}\}$. Die Koordinaten bzgl. der neuen Basis sollen $x'$ heißen. Dann gilt $x' = Sx$ mit der Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beim Wechsel von $x$ zu $x'$ spricht man von einer Koordinatentransformation. Wir definieren die zugehörige Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $\Phi(x') := Sx'(= x)$. Man beachte, dass $\Phi$ eine Bijektion ist. Die Funktion $f$ ist bzgl. der ursprünglichen Koordinaten gegeben durch $f(x) = x_1 + 2x_2$, bzgl. der neuen Koordinaten durch

$$\widetilde{f}(x') = f(\Phi(x')) = (1 \quad 2)Sx' = (1 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = (-1 \quad 3)\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix},$$

d.h. durch $\widetilde{f}(x') = -x_1' + 3x_2'$ und die entsprechende Matrix $A' = (-1, 3)$. Es gilt $A' = AS$.

Nun betrachten wir einen nichtlinearen Fall. Jetzt sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzgl. der Standardkoordinaten beschrieben durch $f(x) = x_1^2 + x_2^2$. Der Koordinatenwechsel wird jetzt wieder durch eine Funktion $\Phi$ beschrieben, die jetzt z.B. durch

$$\Phi\colon (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \; \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben sei (dies sind die Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$). Wieder ist $\Phi$ eine Bijektion. Für die neuen Koordinaten $x' := \binom{r}{\varphi}$ gilt wieder $x = \Phi(x')$. In Polarkoordinaten ist die obige Abbildung beschrieben durch die Funktion

$$\widetilde{f}(x') = f(\Phi(x')) = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2.$$

Die Idee der Ableitung ist es, eine Funktion durch eine lineare Funktion zu approximieren. In unserem Fall sind die Ableitungen der Funktion $f$ und der Funktion $\widetilde{f}$ gegeben durch

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right) = (2x_1, \; 2x_2),$$

$$D\widetilde{f}(x') = \left(\frac{\partial \widetilde{f}(r,\varphi)}{\partial r} \quad \frac{\partial \widetilde{f}(r,\varphi)}{\partial \varphi}\right) = (2r,\ 0).$$

Die Funktion $\Phi$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, damit ist die Ableitung (also die Linearisierung) eine $2 \times 2$-Matrix und gegeben durch

$$D\Phi(x') = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(r,\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1(r,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi_2(r,\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2(r,\varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

So wie vorher $A' = AS$ galt, gilt jetzt für die *Ableitungen*

$$D\widetilde{f}(x') = Df\big(\Phi(x')\big) \cdot D\Phi(x'),$$

eingesetzt

$$(2r,\ 0) = (2r\cos\varphi,\ 2r\sin\varphi) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

# Literatur

[1] Barner, F., Flohr, M.: Analysis 1. De Gruyter, 1987.

[2] Denk, R., Racke, R.: Kompendium der Analysis. Band 1: Differential- und Integralrechnung, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Vieweg+Teubner Verlag, 2011.

[3] Dreher, M.: Mathematik für Physiker I. Vorlesungsskript (Studienjahr 2011/12). Online verfügbar unter `http://www.math.uni-konstanz.de/~dreher/skripten/ma4ph1.pdf`.

[4] Fischer, B.: Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger. Vieweg+Teubner Verlag, 17. Auflage, 2010.

[5] Fischer, H., Kaul, H.: Mathematik für Physiker: Band 1: Grundkurs. Vieweg+Teubner Verlag, 7. Auflage, 2011.

[6] Forster, O.: Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. Vieweg+Teubner Verlag, 10. Auflage, 2011.

[7] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis. Teil 1. Vieweg+Teubner Verlag, 17. Auflage, 2009.

[8] Jänich, K.: Mathematik 1. Geschrieben für Physiker. Springer, 2. Auflage, 2005.

[9] Jänich, K.: Analysis für Physiker und Ingenieure: Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen. Springer, 4. Auflage, 2001.

[10] Jänich, K.: Lineare Algebra. Springer, 11. Auflage, 2010.

# Index


ähnlich, 48

Abbildung, 1
abelsch, 5
abgeschlossen, 52
Ableitung, 77
Abschluss, 52
Absolutbetrag, 8
Additionstheorem der exp-Funktion, 70
Additionstheoreme, 72
adjungierte Matrix, 36
allgemeine Lösung, 38
Anordnung, 5
antikommutativ, 12
Antisymmetrie, 5
Arctan-Reihe, 89
Arcus-Cosinus, 75
Arcus-Sinus, 75
Arcus-Tangens, 75
Argument, 76
Assoziativität, 4
aufgespannter Unterrraum, 15

Banachraum, 50
Banachscher Fixpunktsatz, 92
Basis, 16
Basisauswahlsatz, 18
Basisergänzungssatz, 18
Basissatz, 18
Basiswechsel, 47
Bernoullische Ungleichung, 4
beschränkt, 52, 63
Betrag, 6
bijektiv, 2
Bild, 29
bilinear, 12
Binomialkoeffizient, 69
Binomialreihe, 90
binomische Formel, 69
Bogenmaß, 72

Cauchyfolge, 49
Cauchyprodukt, 70
Cosinus, 72
Cotangens, 75

Definitionsbereich, 2
Delta-Symbol, 25
Differenzenquotient, 77
differenzierbar, 77
Dimension, 19
Dimensionsformel, 20, 30
Distributivgesetz, 5
divergent, 49
divergent (Reihe), 53
Dreiecksungleichung, 6
Durchschnitt, 1

Einheitsmatrix, 32
Einheitsvektoren, 14
Element, 1
Elementarmatrix, 41
Eliminationsmatrix, 41
endlich erzeugt, 15
Endomorphismus, 28
Entwicklungspunkt, 60
Erweiterter Mittelwertsatz, 84
Erzeugendensystem, 15
euklidische Norm, 23
Eulersche Formel, 72
Exponentialreihe, 55

Fakultät, 55, 69
Folge, 49
Funktion, 1
Funktionalgleichung der exp-Funktion, 70

ganze Zahlen, 1
Gauß-Jordan-Verfahren, 40
Gaußsches Eliminationsverfahren, 40
geometrische Reihe, 54
gleichmäßig konvergent, 67
gleichmäßig stetig, 68
gleichmäßige Cauchyfolge, 67

gleichmäßige Konvergenz, 60
Graph, 2
Gruppe, 5

Häufungspunkt, 52
harmonische Reihe, 53
Heaviside-Funktion, 63
Hilbertraum, 51
homogene Gleichung, 38
Homomorphismus, 28
hyperbolische Funktionen, 75

Identität von Lagrange, 12
Identitätssatz für Potenzreihen, 85
imaginäre Einheit, 7
Imaginärteil, 7
induzierte Norm, 23
Infimum, 56
inhomogene Gleichung, 38
injektiv, 2
innerer Punkt, 52
Inneres, 52
Intervallschachtelung, 58
inverses Element, 4
invertierbare Matrix, 36
isolierter Punkt, 52
isomorph, 28
Isomorphismus, 28
Iterationsverfahren, 93

Körper, 5
kartesische Produkt, 2
kartesisches Koordinatensystem, 10
Kern, 29
Kettenregel, 79
Koeffizienten einer Matrix, 32
Kommutativität, 4
kompakt, 58
Komplement, 1, 52
komplex konjugierte Zahl, 7
komplexe Ebene, 8
komplexe Zahlen, 6
Komponenten einer Matrix, 32
Komposition, 2
konstante Folge, 50
konvergent, 49
konvergent (Reihe), 53
konvergente Majorante, 54
Konvergenzkreis, 60
Konvergenzradius, 60
Koordinatenachsen, 9
Koordinatensystem, 9
Koordinatenvektor, 9
Kreuzprodukt, 11
Kroneckersches Delta-Symbol, 25

Lagrange-Form des Restglieds, 87
Leibniz-Kriterium, 59
Limes Inferior, 57
Limes Superior, 57
linear abhängig, 16
linear unabhängig, 16
lineare Abbildung, 28
lineare Funktion, 65
lineare Hülle, 15
linearer Operator, 28
lineares Funktional, 28
lineares Gleichungssystem, 43
Linearkombination, 14
Logarithmus, 71
Logarithmus-Reihe, 89
lokales Extremum, 81
lokales Maximum, 81
lokales Minimum, 81

Majorantenkriterium, 54
Matrix, 32
Maximum, 56
Maximumsnorm, 23, 66
Menge, 1
Minimum, 56
Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 82
monoton fallend, 62
monoton steigend, 62

nach oben beschränkt, 56
nach unten beschränkt, 56

natürliche Logarithmus, 71
natürliche Zahlen, 1
neutrales Element, 4
Newton-Verfahren, 93
Norm, 6, 23
normierter Vektorraum, 23
Nullfolge, 49
Nullmatrix, 32

obere Schranke, 56
offen, 52
Ordnungsrelation, 5
orthogonal, 25
orthogonales Komplement, 25
Orthogonalsystem, 25
Orthonormalbasis, 25
Orthonormalsystem, 25
Orthormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt, 26
Ortsvektor, 9

Parallelogrammgleichung, 24
Parallelogrammkonstruktion, 9
Partialsumme, 53
partikuläre Lösung, 38
Permutationsmatrix, 40
$\pi$, 73
Pivotelement, 43
Polarisationsformel, 24
Polarkoordinaten, 76
Polynome, 15
Polynomfunktion, 65
Potenzfunktionen, 71
Potenzreihe, 60
Produkt, 3
Produkt von Matrizen, 33
Produktregel, 79
punktweise konvergent, 67

Quantoren, 2
Quotientenkriterium, 55
Quotientenregel, 79

Rückwärtselimination, 45
Rand, 52
Randpunkt, 52
rationale Zahlen, 1
Realteil, 7
Rechtssystem, 13
reell analytisch, 87
reelle Intervalle, 6
reelle Zahlen, 1
Reflexivität, 5
Regel von L'Hospital, 84
reguläre Matrix, 36
Reihe, 53
Restglied, 86

Sandwichprinzip, 59
Satz von Bolzano-Weierstraß, 57
Satz von der lokalen Umkehrbarkeit, 80
Satz von Pythagoras, 24
Satz von Rolle, 82
Satz von Taylor, 86
senkrecht, 25
Sinus, 72
Skalarmultiplikation, 13
Skalarprodukt, 11, 21
Spaltenrang, 47
Spaltenvektor, 33
Span, 15
spezielle Lösung, 38
Standard-Skalarprodukt, 22
stetig, 63
stetig differenzierbar, 79
streng monoton steigend, 62
Summe, 3
Supremum, 56
Supremumsnorm, 66
surjektiv, 2

Tangens, 75
Taylorpolynom, 86
Taylorreihe, 83, 87
Teilmenge, 1
Transformationsmatrix, 47
transponierte Matrix, 35

umgekehrte Dreiecksungleichung, 23

Umkehrfunktion, 2
unendlich oft differenzierbar, 79
Ungleichung von Cauchy-Schwarz, 22
untere Schranke, 56
Unterraum, 15
Untervektorraum, 15

Vektorprodukt, 11
Vektorraum, 13
Vektorraum mit Skalarprodukt, 22
Vereinigung, 1
Verkettung, 2
Verknüpfung, 2
vollständig, 50
vollständige Induktion, 3
Vorwärtselimination, 45

Wertebereich, 2
Winkel, 72
Wurzelkriterium, 55

Zahlenfolge, 49
Zeilenrang, 47
Zeilenstufenform, 41
Zeilenumformung, 41
Zeilenvektor, 33
Zwischenwertsatz, 66