Skript zur Vorlesung

Fourieranalysis

Sommersemester 2023

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 04.04.2024

Inhaltsverzeichnis

1. Die Fourier-Transformation in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und in $L^p(\mathbb{R}^n)$

1.1 Worum geht's? Die Fourier-Transformation beschreibt mathematisch die Zerlegung einer Funktion oder eines akustischen oder elektromagnetischen Signals in Grundschwingungen. Innerhalb der Mathematik tritt die Fourier-Transformation insbesondere im Rahmen der partiellen Differentialgleichungen auf. Dies liegt daran, dass die Ableitung in der Fourier-Transformierten zur Multiplikation mit der Koordinatenfunktion wird. Die Fourier-Transformierte wird zunächst für L^2-Funktionen und dann für temperierte Distributionen betrachtet.

a) Die Fourier-Transformation im Schwartz-Raum

Wir betrachten zunächst die Fourier-Transformation als klassisches Integral, d.h. für integrierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

1.2 Definition. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt

$$(\mathscr{F}f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

die Fourier-Transformierte von f.

In der obigen Definition und im Folgenden wird $x \cdot \xi := \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ gesetzt. Die Normierungskonstante $(2\pi)^{-n/2}$ ist in der Literatur nicht einheitlich. Häufig wird diese Konstante auch bei der Definition von $\mathscr{F}f$ weggelassen. In der Physik wird oft k oder $\mathbf{k}$ oder ω statt ξ verwendet. Im folgenden Satz steht $C_0(\mathbb{R}^n)$ für den Raum aller stetigen Funktionen $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit $|g(\xi)| \to 0$ $(|\xi| \to \infty)$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Für zwei metrische Räume (oder allgemeiner topologische Vektorräume) X und Y steht im Folgenden die Bezeichnung $L(X, Y)$ für die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von X nach Y. Wie üblich, setzen wir $L(X) := L(X, X)$.

1.3 Satz. *Es gilt* $\mathscr{F} \in L(L^1(\mathbb{R}^n), C_0(\mathbb{R}^n))$.

Im Folgenden sei $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\}$ der Raum der Testfunktionen. Dabei ist $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ der Träger der Funktion f. Wir verwenden ohne Beweis, dass $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty)$ ist ([5], Satz 6.21).

Beweis von Satz 1.3. (i) Offensichtlich existiert für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ das Integral, und es gilt $|\mathscr{F} f(\xi)| \le (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Wir zeigen, dass $\mathscr{F} f$ stetig ist. Sei dazu $(\xi^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\xi^{(k)} \to \xi$. Dann gilt $e^{-ix\xi^{(k)}} \to e^{-ix\xi} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$ und

$$|\mathscr{F} f(\xi^{(k)}) - \mathscr{F} f(\xi)| \le (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot \underbrace{|e^{-ix\xi^{(k)}} - e^{-ix\xi}|}_{\le 2}\, dx \to 0$$

mit majorisierter Konvergenz.

Als stetige Funktion ist $\mathscr{F} f$ messbar. Damit folgt $\mathscr{F} \in L(L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ mit Norm nicht größer als $(2\pi)^{-n/2}$.

(ii) Wir zeigen $\mathscr{F} f(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$. Sei zunächst $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $R > 0$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| \ge R$. Wähle j mit $|\xi_j| \ge \frac{R}{\sqrt{n}}$. Dann gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} |\mathscr{F} f(\xi)| &= (2\pi)^{-n/2} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx \Big| \\ &= (2\pi)^{-n/2} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{-i\xi_j}\, e^{-ix\xi} \partial_{x_j} f(x)\, dx \Big| \\ &\le (2\pi)^{-n/2} \|\partial_{x_j} f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{R} \to 0 \quad (R \to \infty). \end{aligned}$$

Da $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht ist in $L^1(\mathbb{R}^n)$, existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Mit $\mathscr{F} \in L(L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ erhalten wir $\|\mathscr{F} f_n - \mathscr{F} f\|_\infty \to 0$ und (da $C_0(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist) $\mathscr{F} f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. □

1.4 Bemerkung. Die Aussage $(\mathscr{F} f)(\xi) \to 0$ $(|\xi| \to \infty)$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist bekannt unter dem Namen Riemann–Lebesgue-Lemma.

Um die Umkehrabbildung der Fourier-Transformation zu bestimmen, ist es nützlich, zunächst einen wesentlich kleineren Raum als $L^1(\mathbb{R}^n)$ zu betrachten. Im Folgenden verwenden wir die üblichen Multi-Index-Schreibweisen $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\partial^\alpha := (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \ldots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$ sowie $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

1.5 Definition. Der Schwartz-Raum (Raum der schnell fallenden Funktionen) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als die Menge aller $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$p_{\alpha,m}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)|\partial^\alpha \varphi(x)| < \infty \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ m \in \mathbb{N}_0).$$

Eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt konvergent gegen $\varphi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, falls

$p_{\alpha,m}(\varphi_k - \varphi_0) \to 0$ $(k \to \infty)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. In diesem Fall schreibt man $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi_0$ $(k \to \infty)$.

1.6 Bemerkung. Äquivalente Bedingungen für die Definition des Schwartz-Raums sind $p_{N,m}(\varphi) < \infty$ $(N, m \in \mathbb{N}_0)$ oder $p_N(\varphi) < \infty$ $(N \in \mathbb{N})$, wobei

$$\begin{aligned} p_{N,m}(\varphi) &:= \max_{|\alpha|\le N} p_{\alpha,m}(\varphi) \quad (N, m \in \mathbb{N}_0), \\ p_N(\varphi) &:= \max_{|\alpha|\le N} p_{\alpha,N}(\varphi) \quad (N \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Diese Familien von Seminormen können auch für die Konvergenz einer Folge verwendet werden.

1.7 Satz. *a) Durch*

$$d_{\mathscr{S}}(\varphi, \psi) := \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \frac{p_N(\varphi - \psi)}{1 + p_N(\varphi - \psi)} \quad (\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$$

wird eine Metrik auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert. Die Konvergenz in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stimmt mit der Konvergenz bezüglich der Metrik $d_{\mathscr{S}}$ überein.
b) Der metrische Raum $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), d_{\mathscr{S}})$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent.
c) Es gilt $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty]$.
d) Seien $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ein Polynom und $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist jede der Abbildungen $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi$, $\varphi \mapsto P \cdot \varphi$ und $\varphi \mapsto f \cdot \varphi$ eine stetige lineare Abbildung von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) Die Eigenschaften einer Metrik folgen durch direktes Nachrechnen. Aus der Definition von $d_{\mathscr{S}}$ folgt sofort: Es gilt $d(\varphi_k, \varphi_0) \to 0$ $(k \to \infty)$ genau dann, wenn $p_N(\varphi_k - \varphi_0) \to 0$ $(k \to \infty)$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Dies ist äquivalent zu $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi_0$ $(k \to \infty)$.

b) Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Cauchyfolge, d.h. es gilt $d(\varphi_k, \varphi_\ell) \to 0$ $(k, \ell \to \infty)$. Dann folgt $p_N(\varphi_k - \varphi_\ell) \to 0$ $(k, \ell \to \infty)$, insbesondere ist $(\partial^\alpha \varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bzgl. der Supremumsnorm für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Damit konvergiert $\partial^\alpha \varphi_k$ gleichmäßig gegen eine Funktion f_α, und es gilt $f_\alpha = \partial^\alpha f_0$. Es folgt $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Da auch $((1 + |\cdot|^m)\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm ist, folgt

$$p_{\alpha,m}(f_0) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)|\partial^\alpha f_0(x)| = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |\cdot|^m)|\partial^\alpha \varphi_k(x)| < \infty.$$

Dies zeigt $f_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Mit der gleichen Rechnung sieht man $p_{\alpha,m}(\varphi_k - f_0) \to 0$ $(k \to \infty)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt $\varphi_k \to f_0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) Für $p = \infty$ ist die Behauptung klar. Für $p \in [1, \infty)$ verwenden wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx \le p_{0,m}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^m)^p}\, dx < \infty \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)),$$

falls $mp > n$.

d) Dass $\partial^\alpha \varphi, P\varphi$ und $f\varphi$ wieder in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ liegen, folgt aus der Leibniz-Formel

$$\partial^\alpha (f\varphi) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} f)(\partial^\beta \varphi).$$

Als lineare Abbildung ist $\partial^\alpha \colon \varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ genau dann stetig, wenn sie stetig bei 0 ist. Somit ist zu zeigen: Falls $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $p_{N,m}(\varphi_k) \to 0$ $(k \to \infty)$ für alle $N, m \in \mathbb{N}_0$ gilt, so folgt auch $p_{N,m}(\partial^\alpha \varphi_k) \to 0$ $(k \to \infty)$ für alle $N, m \in \mathbb{N}_0$.

Dies sieht man sofort wegen $p_{N,m}(\partial^\alpha \varphi) \le p_{N+|\alpha|,m}(\varphi)$, es gilt also

$$\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi \in L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Unter Verwendung der Leibniz-Formel erhält man

$$\begin{aligned} p_{N,m}(P\varphi) &\le c_N \Big[\max_{|\beta|\le N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|\partial^\beta P(x)|}{1+|x|^{\deg P}} \Big]\, p_{N,m+\deg P}(\varphi), \\ p_{N,m}(f\varphi) &\le c_N \max_{|\beta|\le N} \|\partial^\beta f\|_\infty\, p_{N,m}(\varphi), \end{aligned}$$

wobei c_N von φ und P bzw. f unabhängige Konstanten sind. Damit folgt

$$\begin{aligned} \varphi &\mapsto P\varphi \in L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)), \\ \varphi &\mapsto f\varphi \in L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)). \end{aligned}$$

□

1.8 Bemerkung. a) Wir haben im obigen Beweis folgende nützliche Stetigkeitsaussage verwendet, die sofort aus der Definition der Metrik $d_{\mathscr{S}}$ folgt:

- Sei $F \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung, und es existieren $C > 0$ und $M \in \mathbb{N}$ mit $|F\varphi| \le C p_M(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$. Dann ist F stetig.
- Sei $F \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ eine lineare Abbildung, und zu jedem $N \in \mathbb{N}$ existieren $C > 0$ und $M \in \mathbb{N}$ mit $p_N(F\varphi) \le C p_M(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$. Dann ist F stetig.

b) Die Schwartz-Funktionen können als eine neue (größere) Klasse von Testfunktionen aufgefasst werden. Offensichtlich gilt $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, man kann leicht zeigen, dass $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ sogar dicht in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Die folgenden Schreibweisen sind im Rahmen der Fouriertransformation nützlich und üblich.

1.9 Definition. a) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definiert man

$$D^\alpha := (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha := (-i)^{|\alpha|}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n}.$$

b) Man setzt $đx := (2\pi)^{-n/2}dx$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)đx = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Im Folgenden verwenden wir die (nicht ganz korrekte) Kurzbezeichnung $x^\alpha f$ für die Funktion $x \mapsto x^\alpha f(x)$, analog $\xi^\alpha \mathscr{F} f$.

1.10 Satz. *a) Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:*

(i) *$\mathscr{F} f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $D^\alpha(\mathscr{F} f) = (-1)^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha f)$.*

(ii) *$\mathscr{F}(D^\alpha f) = \xi^\alpha \mathscr{F} f$, d.h. $\mathscr{F}(\partial^\alpha f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathscr{F} f$.*

b) Es gilt $\mathscr{F} \in L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$.

Beweis. a) (i) Unter Verwendung von $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und der majorisierten Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} D^\alpha(\mathscr{F} f)(\xi) &= (-i)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha}\, e^{-ix\xi}đx \\ &= (-i)^{2|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)x^\alpha e^{-ix\xi}đx = (-1)^{|\alpha|}\big(\mathscr{F}(x^\alpha f)\big)(\xi). \end{aligned}$$

(ii) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(D^\alpha f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}(D^\alpha f)(x)e^{-ix\xi}đx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)D_x^\alpha e^{-ix\xi}đx = \xi^\alpha \mathscr{F} f(\xi). \end{aligned}$$

b) Nach (i) gilt $\mathscr{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir betrachten das System von Halbnormen $p_{\alpha,m}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^m)|\partial^\alpha f(x)|$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$|(\mathscr{F}f)(\xi)| \le p_{0,n+1}(f) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^{n+1})^{-1} đx}_{=:C_n<\infty} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Für gerades m ist $Q(\xi) := (1+|\xi|^m)$ ein Polynom in x vom Grad m, und mit a) folgt

$$\begin{aligned} p_{\alpha,m}(\mathscr{F}f) &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \big|Q(\xi)D^\alpha(\mathscr{F}f)(\xi)\big| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \big|[\mathscr{F}(Q(D)x^\alpha f)](\xi)\big| \\ &\le C_n\, p_{0,n+1}(Q(D)x^\alpha f) \le C_n C_{\alpha,m} \sum_{|\beta|\le m} p_{\beta,|\alpha|+n+1}(f). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathscr{F}f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, und nach Bemerkung 1.8 a) ist $\mathscr{F} \in L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$. □

Die folgenden elementaren Eigenschaften der Fouriertransformation können leicht unter Verwendung des Transformationssatzes für das Lebesgue-Integral bewiesen werden.

1.11 Lemma (Eigenschaften der Fouriertransformation). *Seien $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.*

(i) *Für $g(x) := e^{iax}f(x)$ gilt $(\mathscr{F}g)(\xi) = (\mathscr{F}f)(\xi - a)$.*

(ii) *Für $g(x) := f(x-a)$ gilt $(\mathscr{F}g)(\xi) = (\mathscr{F}f)(\xi)e^{-ia\xi}$.*

(iii) *Für $g(x) := f(\frac{x}{s})$ gilt $(\mathscr{F}g)(\xi) = s^n(\mathscr{F}f)(s\xi)$.*

(iv) *Für $g(x) := \overline{f(-x)}$ gilt $(\mathscr{F}g)(\xi) = \overline{(\mathscr{F}f)(\xi)}$.*

1.12 Lemma. *Für $\gamma(x) := \exp(-\frac{|x|^2}{2})$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ gilt $\gamma \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{F}\gamma = \gamma$.*

Beweis. Aufgrund der Eigenschaften der Exponentialfunktion gilt offensichtlich $\gamma \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Aussage $\mathscr{F}\gamma = \gamma$ wird in zwei Schritten gezeigt.

(i) Sei $n = 1$. Die Funktion γ ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + xy = 0, \quad y(0) = 1. \tag{1-1}$$

Damit gilt

$$0 = \mathscr{F}(\gamma' + x\gamma) = i\xi(\mathscr{F}\gamma) + i(\mathscr{F}\gamma)'.$$

Wegen
$$(\mathscr{F}\gamma)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$
löst $\mathscr{F}\gamma$ ebenfalls das Anfangswertproblem (5-1). Also gilt $\gamma = \mathscr{F}\gamma$.

(ii) Für $n > 1$ schreiben wir
$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\gamma)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} \cdot \prod_{j=1}^n e^{-ix_j\xi_j}\Big) đx \\ &= \prod_{j=1}^n \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2/2} e^{-ix_j\xi_j}\, dx_j\Big) = \prod_{j=1}^n e^{-\xi_j^2/2} = \gamma(\xi).\end{aligned}$$
□

1.13 Lemma. *Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mathscr{F}^2 f(x) = f(-x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Sei $\gamma_a(x) := \gamma(ax)$ für $a > 0$ und γ wie in Lemma 1.12. Dann gilt nach Lemma 1.11
$$(\mathscr{F}\gamma_a)(\xi) = a^{-n}(\mathscr{F}\gamma)\Big(\frac{\xi}{a}\Big).$$
Sei $g(x) := e^{-ix\xi_0}\gamma(ax)$ für $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ fest und $a > 0$ fest. Dann ist $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, und mit Lemma 1.11 folgt
$$(\mathscr{F}g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi_0}\gamma(ax)e^{-ix\xi} đx = (\mathscr{F}\gamma_a)(\xi+\xi_0) = a^{-n}\gamma\Big(\frac{\xi+\xi_0}{a}\Big).$$
Die Funktion $(x,\xi) \mapsto f(\xi)g(x)e^{-ix\xi}$ ist in $L^1(\mathbb{R}^{2n})$, also können wir den Satz von Fubini anwenden. Wir erhalten
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)(x)g(x) đx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mathscr{F}g)(x) đx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)a^{-n}\gamma\Big(\frac{x+\xi_0}{a}\Big) đx = \int_{\mathbb{R}^n} f(au-\xi_0)\gamma(u) đu.\end{aligned} \tag{1-2}$$
Bei der letzten Gleichheit haben wir die Substitution $u = \frac{x+\xi_0}{a}$ verwendet.

Wir nehmen den Grenzwert $a \to 0$. Es gilt dann $\gamma(au) \to 1$ punktweise und $g(x) \to e^{-ix\xi_0}$ punktweise. Wegen $\mathscr{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ können wir majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten
$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}f)(x)g(x) đx \to (\mathscr{F}^2 f)(\xi_0).$$
Um den Grenzwert für die rechte Seite von (5-2) zu berechnen, verwenden wir $f(au-\xi_0) \to f(-\xi_0)$ punktweise. Da $\|f\|_\infty \cdot \gamma$ eine integrierbare Majorante ist, erhalten wir
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(au-\xi_0)\gamma(u) đu \to f(-\xi_0).$$
Also gilt $(\mathscr{F}^2 f)(\xi_0) = f(-\xi_0)$. □

1.14 Satz. *Die Fourier-Transformation $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus lokalkonvexer Räume (d.h. linear, stetig und bijektiv mit stetiger Inverser). Es gilt $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}$ und*

$$(\mathscr{F}^{-1}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{ix\xi}đ\xi = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{ix\xi}d\xi \quad (g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\, x \in \mathbb{R}^n).$$

Beweis. Nach Lemma 1.13 gilt $\mathscr{F}^2 f = f(-\,\cdot)$, d.h. $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}$. Damit gilt

$$(\mathscr{F}^{-1}g)(x) = (\mathscr{F}^3 g)(x) = (\mathscr{F}g)(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{ix\xi}đ\xi.$$

□

b) Die Fourier-Transformation in $L^p(\mathbb{R}^n)$

Wir wissen bereits, dass $\mathscr{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ein stetiger linearer Operator ist. Der folgende Satz zeigt, dass auch $\mathscr{F}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert, stetig und linear (und sogar bijektiv) ist.

1.15 Satz (Satz von Plancherel)**.** *Es gilt*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathscr{F}f, \mathscr{F}g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Somit ist $\mathscr{F}|_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}$ eine Isometrie bzgl. $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ und damit eindeutig zu einem isometrischen Isomorphismus $\mathscr{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzbar, der ebenfalls Fourier-Transformation genannt wird.

Beweis. Im Beweis von Lemma 1.13 sahen wir

$$\langle \mathscr{F}f, \overline{g}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, \overline{\mathscr{F}g}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Setze nun $h := \overline{\mathscr{F}g}$, d.h.

$$\overline{g} = \overline{\mathscr{F}^{-1}\overline{h}} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \overline{h(x)}e^{ix\xi}đx} = \mathscr{F}h.$$

Da $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht ist, ist $\mathscr{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert, isometrisch. Damit ist der Wertebereich $R(\mathscr{F}_2)$ abgeschlossen. Wegen $R(\mathscr{F}_2) \supset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathscr{F}_2$ surjektiv, also ein isometrischer Isomorphismus. □

Die obige Aussage besagt, dass $\mathscr{F}_2 \in L(L^2(\mathbb{R}^n))$ unitär ist, d.h. der adjungierte Operator ist der inverse Operator. Aus der Operatortheorie ist bekannt, dass das Spektrum unitärer Operatoren auf der Kreislinie $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = 1\}$ liegt.

Im Folgenden wollen wir die Fourier-Transformation auch für Funktionen in $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \in (1,2)$ betrachten. Die Grundidee dafür ist es, durch Interpolation von Banachräumen vom Fall $p = 1$ und $p = 2$ auf alle $p \in [1,2]$ schließen zu können. Zur Betrachtung von „Zwischenräumen“ seien $1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$ und $\theta \in (0,1)$. Man definiert p_θ durch die Bedingung

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}. \tag{1-3}$$

Man beachte, dass $\frac{1}{p_\theta}$ gerade die Konvex-Kombination von $\frac{1}{p_0}$ und $\frac{1}{p_1}$ ist, wobei natürlich $\frac{1}{\infty} = 0$ gesetzt wird. Zwischen den Räumen $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$ und $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ besteht keine Teilmengen-Beziehung, denn es gilt $L^p(\mathbb{R}^n) \not\subset L^q(\mathbb{R}^n)$ für alle $p, q \in [1,\infty]$, $p \ne q$, aber das folgende Lemma erläutert den Begriff eines Zwischenraums. Dabei wird die Summe von Banachräumen verwendet: Seien X und Y Banachräume, und sei Z ein Vektorraum mit $X, Y \subset Z$. Dann definiert man den Banachraum $X + Y$ durch $X + Y := \{f + g : f \in X,\ g \in Y\}$ mit Norm

$$\|u\|_{X+Y} := \inf\{\|f\|_X + \|g\|_Y : f \in X,\, g \in Y,\, f + g = u\}.$$

1.16 Lemma. *Seien $1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$ und $\theta \in (0,1)$, und sei p_θ wie in (1-3) definiert.*
a) Es gilt $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$. Genauer gilt die Lyapunovsche Ungleichung

$$\|f\|_{L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|^{1-\theta}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)} \|f\|^{\theta}_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \quad \big(f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\big).$$

b) Es gilt $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$. Genauer gilt

$$\|f\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)+L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \le 2\|f\|_{L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis. Wir schreiben im Beweis kurz $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Falls $p_\theta \in \{1,\infty\}$, folgt $p_0 = p_1 = p_\theta$, und es ist nichts zu zeigen. Es gelte also $1 \le p_0 < p_\theta < p_1 \le \infty$.

a) Sei $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$. Wir verwenden die Höldersche Ungleichung mit $p := \frac{p_0}{p_\theta(1-\theta)}$ und $p' := \frac{p_1}{p_\theta \theta}$ (man beachte, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = p_\theta(\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}) = 1$ gilt). Es folgt (mit Modifikation in der Schreibweise für $p_1 = \infty$)

$$\|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_\theta} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_\theta(1-\theta)} |f(x)|^{p_\theta \theta} dx$$

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{pp_\theta(1-\theta)}dx\Big)^{1/p}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p'p_\theta\theta}dx\Big)^{1/p'}$$
$$= \|f\|_{p_0}^{p_0/p}\|f\|_{p_1}^{p_1/p'} = \|f\|_{p_0}^{p_\theta(1-\theta)}\|f\|_{p_1}^{p_\theta\theta}.$$

b) Sei $f \in L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$, und sei $g(x) := \frac{f(x)}{\|f\|_{p_\theta}}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\|g\|_{p_\theta} = 1$. Wir zerlegen $g = g_0 + g_1$ mit $g_0 := g\mathbb{1}_{|g|\geq 1}$ und $g_1 := g - g_0 = g\mathbb{1}_{|g|<1}$. Dann gilt wegen $p_0 \leq p_\theta$

$$\|g_0\|_{p_0}^{p_0} = \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|g(x)|\geq 1\}} |g(x)|^{p_0}dx \leq \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|g(x)|\geq 1\}} |g(x)|^{p_\theta}dx \leq \|g\|_{p_\theta}^{p_\theta} = 1.$$

Analog folgt $\|g_1\|_{p_1} \leq 1$ (auch für $p_1 = \infty$). Damit ist $f = f_0+f_1 := \|f\|_{p_\theta}g_0+\|f\|_{p_\theta}g_1$ eine Zerlegung von f mit $\|f_0\|_{p_0}+\|f_1\|_{p_1} \leq 2\|f\|_{p_\theta}$, woraus nach Definition der Norm in $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ die Behauptung folgt. □

Der Beweis des Interpolationssatzes verwendet ein Ergebnis aus der Funktionentheorie. Dazu definieren wir den vertikalen Streifen

$$S := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (0, 1)\}.$$

1.17 Satz (Dreiliniensatz). *Sei $F\colon \overline{S} \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt und $F\colon S \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für alle $\theta \in [0, 1]$ und alle $t \in \mathbb{R}$*

$$|F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta},$$

wobei $M_j := \sup_{t\in\mathbb{R}} |F(j + it)|$, $j = 0, 1$.

Beweis. Für $\theta \in \{0, 1\}$ ist die Aussage trivial, sei also $\theta \in (0, 1)$. Seien $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren $F_{\varepsilon,\lambda}(z) := \exp(\varepsilon z^2 + \lambda z)F(z)$ für $z \in \overline{S}$. Dann gilt

$$|F_{\varepsilon,\lambda}(it)| \leq M_0, \quad |F_{\varepsilon,\lambda}(1 + it)| \leq e^{\varepsilon+\lambda}M_1 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Setze $M := \sup_{z\in\overline{S}} |F_{\varepsilon,\lambda}|$. Da F beschränkt ist, gilt $F_{\varepsilon,\lambda} \to 0$ für $|\operatorname{Im} z| \to \infty$. Daher existiert ein $K > 0$ mit $|F_{\varepsilon,\lambda}(z)| \leq \frac{M}{2}$ für $|\operatorname{Im} z| \geq K$, und $|F_{\varepsilon,\lambda}|$ nimmt das globale Maximum in $[0, 1]\times[-K, K]$ an. Nach dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen wird das Maximum auf dem Rand und nach Wahl von K sogar auf $\{0, 1\} \times [-K, K]$ angenommen. Also gilt

$$|F_{\varepsilon,\lambda}(z)| \leq \max\{M_0, e^{\varepsilon+\lambda}M_1\} \quad (z \in \overline{S}).$$

Nach Definition von $F_{\varepsilon,\lambda}$ folgt

$$|F(\theta + it)| \leq e^{-\varepsilon(\theta^2-t^2)} \max\{e^{-\theta\lambda}M_0, e^{\varepsilon+(1-\theta)\lambda}M_1\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ erhält man für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|F(\theta + it)| \le \max\{e^{-\theta\lambda} M_0, e^{(1-\theta)\lambda} M_1\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Falls $M_0 = 0$ oder $M_1 = 0$ gilt, erhält man mit $\lambda \to -\infty$ bzw. $\lambda \to \infty$ die gewünschte Aussage $F(\theta + it) = 0$. Seien also $M_0, M_1 > 0$. Da $\lambda \mapsto e^{-\theta\lambda} M_0$ streng monoton fallend und $\lambda \mapsto e^{(1-\theta)\lambda} M_1$ streng monoton steigend ist, wird die rechte Seite als Funktion von λ minimal, falls $e^{-\theta\lambda} M_0 = e^{(1-\theta)\lambda} M_1$, d.h. $e^\lambda = \frac{M_0}{M_1}$. Mit dieser Wahl folgt $e^{-\theta\lambda} M_0 = (\frac{M_1}{M_0})^\theta M_0$ und damit

$$|F(\theta + it)| \le M_0^{1-\theta} M_1^\theta \quad (t \in \mathbb{R}).$$

□

1.18 Bemerkung. Sei $F \ne 0$ wie im Satz 1.17, und sei $M_F(r) := \sup_{t\in\mathbb{R}} |F(r + it)|$ für $r \in [0, 1]$. Dann besagt der Satz, dass

$$M_F(\theta) \le (M_F(0))^{1-\theta} (M_F(1))^\theta.$$

Durch Anwendung des Dreiliniensatzes auf die Funktion $\widetilde{F}(z) := F(r_0 + z(r_1 - r_0))$ für $0 \le r_0 < r_1 \le 1$ erhält man folgende Verallgemeinerung:

$$M_F\big((1-\theta)r_0 + \theta r_1\big) \le (M_F(r_0))^{1-\theta} (M_F(r_1))^\theta.$$

Also ist die Funktion $r \mapsto M_F(r)$, $[0, 1] \to (0, \infty)$ logarithmisch konvex, d.h. $r \mapsto \log M_F(r)$ ist konvex. Die logarithmische Konvexität ist eine sehr starke Eigenschaft (beachte, dass der Logarithmus selbst konkav ist); eine andere logarithmisch konvexe Funktion ist die Gammafunktion.

Damit können wir den Hauptsatz über die Interpolation von L^p-Räumen formulieren.

1.19 Satz (Satz von Riesz-Thorin). *Seien $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$. Ferner sei $T\colon L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \to L^{q_0}(\mathbb{R}^n) + L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$ ein linearer Operator mit*

$$T \in L(L^{p_0}(\mathbb{R}^n), L^{q_0}(\mathbb{R}^n)) \cap L(L^{p_1}(\mathbb{R}^n), L^{q_1}(\mathbb{R}^n)).$$

Definiert man für $\theta \in (0, 1)$ die Parameter p_θ und q_θ durch

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \ \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

so gilt

$$T \in L(L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n), L^{q_\theta}(\mathbb{R}^n))$$

sowie

$$\|T\|_{L(L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n), L^{q_\theta}(\mathbb{R}^n))} \le \|T\|^{1-\theta}_{L(L^{p_0}(\mathbb{R}^n), L^{q_0}(\mathbb{R}^n))} \|T\|^\theta_{L(L^{p_1}(\mathbb{R}^n), L^{q_1}(\mathbb{R}^n))}.$$

Man beachte, dass der Operator T wegen $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ (Lemma 1.16) auf $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$ definiert ist. Im Beweis des Satzes verwenden wir folgende Aussagen über die L^p-Räume:

- Die Menge $L_s(\mathbb{R}^n)$ aller Stufenfunktionen ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1,\infty)$. Dabei heißt eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Stufenfunktion, falls $f = \sum_{j=1}^N c_j \mathbb{1}_{A_j}$ mit $N \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{C}$ und $A_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda(A_j) < \infty$ gilt, wobei $\lambda\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ das n-dimensionale Lebesguemaß bezeichet.
- Für $p \in [1,\infty)$ ist der Dualraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch $(L^p(\mathbb{R}^n))' = L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \in [1,\infty]$ gilt

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup\Big\{\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx\Big| : g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n),\ \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le 1\Big\}.$$

  Dabei kann man $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ durch eine dichte Teilmenge ersetzen (z.B. durch $L_s(\mathbb{R}^n)$, falls $p' < \infty$).

Beweis von Satz 1.19. Wir setzen $M_j := \|T\|_{L(L^{p_j}(\mathbb{R}^n),L^{q_j}(\mathbb{R}^n))}$ für $j = 0,1$. Zu zeigen ist, dass für alle $f \in L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\|Tf\|_{q_\theta} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p_\theta} \tag{1-4}$$

gilt, wobei wieder $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Dabei reicht es, diese Abschätzung für eine dichte Teilmenge in $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen.

(1) Wir zeigen zunächst für $p_\theta \in [1,\infty)$ und $q_\theta \in (1,\infty]$, dass

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x)g(x)dx\Big| \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \tag{1-5}$$

für alle Stufenfunktionen $f, g \in L_s$ mit $\|f\|_{p_\theta} = 1$ und $\|g\|_{q'_\theta} \le 1$ gilt.

(1a) Dazu sei $f = \sum_{j=1}^N c_j \mathbb{1}_{A_j} \in L_s$, $\|f\|_{p_\theta} = 1$, mit $c_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $A_j \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ disjunkt. Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$f_z(x) := |f(x)|^{p_\theta(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1})-1} f(x) = \sum_{j=1}^N |c_j|^{p_\theta(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1})-1} c_j \mathbb{1}_{A_j}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Nach Definition von p_θ gilt $f_\theta = f$. Für $\operatorname{Re} z = 0$ gilt

$$\Big||f(x)|^{p_\theta(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1})}\Big| = |f(x)|^{\operatorname{Re}(p_\theta(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}))} = |f(x)|^{\frac{p_\theta}{p_0}}$$

und damit

$$\|f_z\|_{p_0}^{p_0} = \int_{\mathbb{R}^n} \Big||f(x)|^{p_\theta(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1})}\Big|^{p_0} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_\theta} dx = \|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = 1 \quad (\operatorname{Re} z = 0).$$

Analog folgt für $\operatorname{Re} z = 1$ wegen $\operatorname{Re}(p_\theta(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1})) = \frac{p_\theta}{p_1}$ die Gleichheit

$$\|f_z\|_{p_1}^{p_1} = \|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = 1 \quad (\operatorname{Re} z = 1).$$

(1b) Analog definiert man zu $g = \sum_{k=1}^M d_k \mathbb{1}_{B_k} \in L_s$ mit $\|g\|_{q'_\theta} \le 1$ die Funktion

$$g_z(x) := |g(x)|^{q'_\theta(\frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}) - 1} g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n, z \in \overline{S})$$

und erhält $g_\theta = g$ sowie

$$\|g_z\|_{q'_0} = \|g\|_{q'_\theta} \le 1 \; (\operatorname{Re} z = 0) \text{ und } \|g_z\|_{q'_1} = \|g\|_{q'_\theta} \le 1 \; (\operatorname{Re} z = 1).$$

(1c) Wir definieren $F\colon \overline{S} \to \mathbb{C}$ für f und g wie in (1a) und (1b) durch

$$\begin{aligned} F(z) &:= \int_{\mathbb{R}^n} (Tf_z)(x) g_z(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M |c_j|^{p_\theta(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}) - 1} c_j |d_k|^{q'_\theta(\frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}) - 1} d_k \int_{\mathbb{R}^n} (T\mathbb{1}_{A_j})(x) \mathbb{1}_{B_k}(x) dx. \end{aligned}$$

Dabei gilt $T\mathbb{1}_{A_j} \in L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ und damit $(T\mathbb{1}_{A_j})|_{B_k} \in L^{q_0}(B_k)$. Wegen $\lambda(B_k) < \infty$ folgt $L^{q_0}(B_k) \subset L^1(B_k)$, und das Integral auf der rechten Seite existiert. Da die Funktion $z \mapsto a^z = \exp(z \ln a)$ für $a > 0$ in ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, ist auch F holomorph in ganz $\mathbb{C}$ und damit auch stetig in $\overline{S}$. Nach (1a) und (1b) gilt für $M_F(j) := \sup_{t\in\mathbb{R}} |F(j+it)|$, $j = 0, 1$, die Abschätzung

$$\begin{aligned} M_F(j) &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} (Tf_{j+it})(x) g_{j+it}(x) dx \Big| \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \|Tf_{j+it}\|_{q_j} \|g_{j+it}\|_{L^{q'_j}} \\ &\le M_j \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f_{j+it}\|_{p_j} \|g_{j+it}\|_{L^{q'_j}} \le M_j. \end{aligned}$$

Wir wenden den Dreiliniensatz auf F an und erhalten

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x) g(x) dx \Big| = |F(\theta)| \le \big(M_F(0)\big)^{1-\theta} \big(M_F(1)\big)^\theta \le M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

was (1-5) zeigt.

(2) Seien wieder $p_\theta \in [1, \infty)$ und $q_\theta \in (1, \infty]$. Dann gilt für alle $f \in L_s$ mit $\|f\|_{p_\theta} = 1$ wegen (1)

$$\|Tf\|_{q_\theta} = \sup_{g \in L_s,\, \|g\|_{q'_\theta} \le 1} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} (Tf)(x) g(x) dx \Big| \le M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

wobei die Dichtheit von L_s in $L^{q'_\theta}(\mathbb{R}^n)$ verwendet wurde (beachte $q'_\theta < \infty$). Damit folgt

$$\|T\|_{L(L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n), L^{q_\theta}(\mathbb{R}^n))} = \sup_{f \in L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n),\, \|f\|_{p_\theta} = 1} \|Tf\|_{q_\theta} = \sup_{f \in L_s,\, \|f\|_{p_\theta} = 1} \|Tf\|_{q_\theta} \le M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

Dabei wurde wieder die Dichtheit von L_s in $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$ verwendet. Dies zeigt die Behauptung des Satzes für $p_\theta \in [1,\infty)$, $q_\theta \in (1,\infty]$.

(3) Seien nun $p_\theta \in [1,\infty)$ und $q_\theta = 1$. Dann folgt $q_0 = q_1 = 1$ (und damit $q_0' = q_1' = \infty$), d.h. L_s liegt nicht mehr dicht in $L^{q_j'}(\mathbb{R}^n)$. Daher muss der obige Beweis modifiziert werden. Man definiert zu $f \in L_s$ und $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Funktion

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}^n} (Tf_z)(x) g(x) dx \quad (z \in \overline{S}),$$

wobei f_z wie in (1a) definiert sei. Dann gilt

$$|F(z)| \le \|(Tf_z)g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|Tf_z\|_1 \|g\|_\infty \le M_j \|f_z\|_{p_j} \|g\|_\infty \quad (\operatorname{Re} z = j,\, j \in \{0,1\}).$$

Wegen

$$\|Tf\|_1 = \|Tf_\theta\|_1 = \sup_{g \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\, \|g\|_\infty \le 1} |F(\theta)|$$

kann man dann genauso wie in (1)–(2) argumentieren.

(4) Es fehlt nur noch der Fall $p_\theta = \infty$. In diesem Fall ist $p_0 = p_1 = \infty$, und wir erhalten mit der Lyapunovschen Ungleichung (Lemma 1.16 a))

$$\|Tf\|_{q_\theta} \le \|Tf\|_{q_0}^{1-\theta} \|Tf\|_{q_1}^\theta \le M_0^{1-\theta} \|f\|_\infty^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_\infty^\theta = M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_\infty$$

und damit die Behauptung. □

Mit dem Satz von Riesz-Thorin können wir nun eine wichtige Aussage über die Fourier-Transformation beweisen.

1.20 Satz (Hausdorff-Young)**.** *Sei $p \in [1,2]$ und p' der zu p konjugierte Exponent, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt*

$$\mathscr{F} \in L(L^p(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n)) \;\; \textit{und} \;\; \|\mathscr{F}\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n))} \le (2\pi)^{-n(1/p-1/2)}.$$

Beweis. Die Fourier-Transformation ist stetig von $L^1(\mathbb{R}^n)$ nach $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Norm nicht größer als $(2\pi)^{-n/2}$ und eine Isometrie in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Daher können wir im Satz von Riesz-Thorin $p_0 = q_0 = 2$ und $p_1 = 1$, $q_1 = \infty$ wählen. Für $\theta \in (0,1)$ erhält man $p_\theta = \frac{2}{1+\theta}$ und $q_\theta = \frac{2}{1-\theta} = p_\theta'$. Wenn θ die Menge $(0,1)$ durchläuft, erhält man die Werte $p_\theta \in (1,2)$. Die Normabschätzung folgt ebenfalls direkt aus dem Satz von Riesz-Thorin. □

1.21 Bemerkung. a) Eine der interessanten Folgerungen aus dem Satz von Hausdorff-Young ist schon die Tatsache, dass die Fourier-Transformierte einer L^p-Funktion für $p \in [1, 2]$ selbst wieder eine Funktion ist. Da $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt, kann man den Satz auch so lesen, dass die Fourier-Transformation eine eindeutige stetige Fortsetzung von diesem Schnitt nach $L^p(\mathbb{R}^n)$ besitzt.

b) Der Beweis des Satzes von Riesz-Thorin kann auch etwas abstrakter betrachtet werden. Wir haben im Wesentlichen die holomorphe (Banachraum-wertige) Funktion $z \mapsto f_z$, $S \to L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ betrachtet. Dieses Konzept kann auf allgemeinen Banachräumen eingeführt werden und führt zum Begriff des komplexen Interpolationsfunktors, der Interpolationsräume für allgemeine Paare von Banachräumen liefert.

2. Die Fourier-Transformation im Raum der temperierten Distributionen

2.1 Worum geht's? Lokalkonvexe Räume sind topologische Vektorräume, deren Topologie nicht (wie bei normierten Räumen) von einer Norm erzeugt wird, sondern von einer Familie von (Semi-)Normen. Damit lassen sich wichtige Konvergenzbegriffe – etwa die punktweise Konvergenz oder die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta – in Form einer Topologie schreiben. Für die Fouriertransformation ist vor allem der Schwartzraum der schnell fallenden Funktionen und sein Dualraum (der Raum der temperierten Distributionen) von Bedeutung. Nach einem allgemeinen Abschnitt über lokalkonvexe Räume betrachten wir die Fourier-Transformation im Raum der temperierten Distributionen.

a) Eine kleine Einführung in die Theorie lokalkonvexer Räume

Wir hatten gesehen, dass der Schwartzraum definiert wird über die Familie $p_{\alpha,m}$ (siehe Definition 1.5). Nach Satz 1.7 kann die Konvergenz in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ durch eine Metrik beschrieben werden. Das Konzept einer Familie von Seminormen (Halbnormen), welches die Topologie bestimmt, ist aber allgemeiner und soll hier kurz vorgestellt werden.

Im Folgenden seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Statt von einer festen Norm wird bei einer lokalkonvexen Topologie von einer Familie von Seminormen ausgegangen.

2.2 Definition. Sei $\mathscr{P} = \{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von Seminormen auf X. Man definiert $B^{(\lambda)}(x,r) := \{y \in X : p_\lambda(x-y) < r\}$ für $x \in X$ und $r > 0$. Dann heißt die von $\mathscr{U}_0 := \{B^{(\lambda)}(x,r) : \lambda \in \Lambda,\, x \in X,\, r > 0\}$ erzeugte Topologie $\tau_{\mathscr{P}} := \tau(\mathscr{U}_0)$ die von $\mathscr{P}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie auf X.
Sei τ eine Topologie auf X. Dann heißt (X,τ) ein lokalkonvexer Raum, falls eine Familie $\mathscr{P}$ von Seminormen auf X existiert, so dass τ mit der oben beschriebenen Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$ übereinstimmt.

2.3 Bemerkung. a) Nach Definition ist $\mathscr{U}_0$ eine Subbasis der lokalkonvexen Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$. Man kann $\tau_{\mathscr{P}}$ explizit angeben: Für $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$ und $r > 0$ definiere

$$U_{\mathscr{F},r} := \{x \in X \,|\, \forall\, p \in \mathscr{F} : p(x) < r\} = \bigcap_{\lambda : p_\lambda \in \mathscr{F}} B^{(\lambda)}(0,r).$$

Sei $\tau_0 := \{U_{\mathscr{F},r} : \mathscr{F} \subset \mathscr{P} \text{ endlich}, r > 0\}$. Dann ist τ_0 eine offene Umgebungsbasis von 0, und es gilt

$$\tau_{\mathscr{P}} = \{U \subset X : \forall\, x \in U\, \exists\, U_0 \in \tau_0 : x + U_0 \subset U\} =: \tau'.$$

Dabei folgt "$\supset$" aus der Definition von τ_0 und der Gleichheit $x + B^{(\lambda)}(0,r) = B^{(\lambda)}(x,r)$, und "$\subset$" aus der Tatsache, dass τ' bereits eine Topologie ist. Dies sieht man folgendermaßen:

Offensichtlich sind $\emptyset, X \in \tau'$. Seien $U_1, U_2 \in \tau'$ und $x \in U := U_1 \cap U_2$. Dann existieren $U_{10}, U_{20} \in \tau_0$ mit $x + U_{i0} \subset U_i$. Sei $U_{i0} = U_{\mathscr{F}_i, r_i}$. Dann gilt für $U_0 := U_{\mathscr{F},r}$ mit $\mathscr{F} := \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ und $r := \min\{r_1, r_2\}$ die Inklusion $x + U_0 \subset U$, d.h. $U \in \tau'$.

Sei I eine Menge, $U_i \in \tau'\,(i \in I)$, und $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann existiert ein $i_0 \in I$ und $U_0 \in \tau_0$ mit $x + U_0 \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, d.h. $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau'$.

b) Sei $\mathscr{P}$ eine Familie von Seminormen auf X. Dann kann man zeigen, dass $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ ein topologischer Vektorraum ist, d.h. Addition und Skalarmultiplikation sind stetige Abbildungen.

2.4 Beispiele. a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\mathscr{P} := \{p_0\}$ mit $p_0(x) := \|x\|$. Dann stimmt die lokalkonvexe Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$ mit der Normtopologie überein.

b) Sei Ω eine Menge, $\mathcal{F}$ ein Vektorraum von Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$. Dann ist $p_x(f) := |f(x)|$ eine Seminorm, und $\mathscr{P} := \{p_x : x \in \Omega\}$ erzeugt die Topologie der punktweisen Konvergenz.

c) Sei Ω ein topologischer Raum und $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ ein Vektorraum. Dann ist für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ durch $p_K(f) := \sup_{x\in K} |f(x)|$ eine Seminorm gegeben. Die von $\mathscr{P} := \{p_K : K \subset \Omega,\ K \text{ kompakt}\}$ erzeugte Topologie heißt die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta.

d) Der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist mit der Familie $\{p_{\alpha,m} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ m \in \mathbb{N}_0\}$ ein lokalkonvexer Raum, wobei

$$p_{\alpha,m}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^m)|\partial^\alpha \varphi(x)| < \infty \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ m \in \mathbb{N}_0,\ \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Im Folgenden sei $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ ein lokalkonvexer Raum mit einer Familie $\mathscr{P}$ von Seminormen.

2.5 Lemma. *a) Für eine Seminorm $q : X \to [0,\infty)$ sind äquivalent:*

(i) *q ist stetig.*

(ii) *q ist stetig bei 0.*

(iii) *$\{x : q(x) \le 1\} = q^{-1}([0,1])$ ist eine Nullumgebung.*

b) Alle $p \in \mathscr{P}$ sind stetig.
c) Eine Seminorm q ist genau dann stetig, wenn $M \geq 0$ und $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$, $\mathscr{F}$ endlich, existieren mit $q(x) \leq M \max_{p \in \mathscr{F}} p(x)$.

Beweis. a) (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) ist trivial. (iii)$\Rightarrow$(i). Zu $x \in X$, $\varepsilon > 0$ sei $U := \varepsilon q^{-1}([0,1]) = q^{-1}([0,\varepsilon])$. Dann gilt für $y \in U$

$$|q(x+y) - q(x)| \leq q((x+y) - x) = q(y) \leq \varepsilon,$$

d.h. $q(x+U) \subset [q(x) - \varepsilon, q(x) + \varepsilon]$. Somit ist q stetig.

b) Nach Definition von $\tau_{\mathscr{P}}$ ist $\{x : p(x) \leq 1\}$ für alle $p \in \mathscr{P}$ eine Nullumgebung.

c) Nach a) ist q genau dann stetig, wenn gilt

$$\exists\, \varepsilon > 0, \mathscr{F} \subset \mathscr{P},\ \mathscr{F} \text{ endlich} : U_{\mathscr{F},\varepsilon} \subset q^{-1}([0,1]).$$

Da $U_{\mathscr{F},\varepsilon} = \{x : \max_{p \in \mathscr{F}} p(x) \leq \varepsilon\}$, ist dies äquivalent zu

$$\exists\, \varepsilon > 0, \mathscr{F} \subset \mathscr{P},\ \mathscr{F} \text{ endlich} : q(x) \leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{p \in \mathscr{F}} p(x).$$

□

2.6 Satz. *Seien $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ und $(Y, \tau_{\mathscr{Q}})$ lokalkonvex und $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) *T ist stetig.*

(ii) *T ist stetig bei 0.*

(iii) *Ist $q : Y \to [0,\infty)$ eine stetige Seminorm, so ist $q \circ T : X \to [0,\infty)$ eine stetige Seminorm.*

(iv) *Für jedes $q \in \mathscr{Q}$ existiert ein endliches $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}$ und $M \geq 0$ so dass $q(Tx) \leq M \max_{p \in \mathscr{F}} p(x) \quad (x \in X)$.*

Beweis. (i)$\Leftrightarrow$(ii) wie im normierten Fall.

(i)$\Rightarrow$(iii) klar als Komposition stetiger Funktionen.

(iii)$\Rightarrow$(iv) nach Lemma 2.5 b) und c).

(iv)$\Rightarrow$(ii). Sei $V = \{y : q_i(y) \leq \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n)\}$ eine Nullumgebung in Y. Wähle $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{P}$ und $M_i > 0$ zu q_i nach (iv) und setze $\mathscr{F} := \bigcup_{i=1}^n \mathscr{F}_i$, $M := \max_i M_i$. Dann ist $\max_{i=1,\ldots,n} q_i(Tx) \leq M \max_{p \in \mathscr{F}} p(x)$, d.h. $T(U_{\mathscr{F},\varepsilon/M}) \subset V$. Somit ist T stetig bei 0. □

2.7 Korollar. *Eine lineare Abbildung $\ell : X \to \mathbb{K}$ ist genau dann stetig, wenn es endlich viele $p_1, \dots, p_n \in \mathscr{P}$ und $M \geq 0$ gibt mit*

$$|\ell(x)| \leq M \max_{i=1,\dots,n} p_i(x) \quad (x \in X).$$

Beweis. Das ist Satz 2.6 mit $(Y, \tau_{\mathscr{Q}}) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$ (d.h. $\mathscr{Q} = \{|\cdot|\}$). □

2.8 Definition. Seien $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ und $(Y, \tau_{\mathscr{Q}})$ lokalkonvex. Definiere

$$L(X, Y) := \{T \colon X \to Y \,|\, T \text{ linear, stetig}\}.$$

Wir setzen $X' := L(X, \mathbb{K})$ und $L(X) := L(X, X)$. Eine kanonische Topologie auf X' ist gegeben durch die schwach-*-Topologie, welche als lokalkonvexe Topologie erzeugt wird von der Familie

$$\mathscr{P}' := \{p_x : x \in X\} \quad \text{mit } p_x(u) := |u(x)| \; (u \in X').$$

2.9 Satz. *Sei $(X, \tau_{\mathscr{P}})$ ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) *X ist metrisierbar (d.h. es existiert eine Metrik d auf $X \times X$, welche die Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$ erzeugt), wobei die Metrik translationsinvariant definiert werden kann.*

(ii) *0 besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.*

(iii) *$\tau_{\mathscr{P}}$ wird bereits durch abzählbar viele Seminormen erzeugt.*

In diesem Fall ist durch

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)} \quad (x, y \in X)$$

eine translationsinvariante Metrik gegeben, welche $\tau_{\mathscr{P}}$ erzeugt.

Dabei ist eine Metrik d translationsinvariant, falls gilt

$$d(x+z, y+z) = d(x, y) \quad (x, y, z \in X).$$

Beweis. (i)⇒(ii) In metrischen Räumen besitzt jedes Element eine abzählbare Umgebungsbasis, z.B. bestehend aus den offenen Kugeln mit Radius $\frac{1}{n}$.

(ii)⇒(iii). Sei $B = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis. Dann existieren $U_{\mathscr{F}_n,\varepsilon_n} \in \tau_0$ mit $U_{\mathscr{F}_n,\varepsilon_n} \subset U_n$, und $\{U_{\mathscr{F}_n,\varepsilon_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbare Umgebungsbasis. Dann erzeugt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}_n \subset \mathscr{P}$ bereits die Topologie $\tau_{\mathscr{P}}$.

(iii)⇒(i). Sei $\mathscr{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Definiere d wie im Satz. Dann gilt $0 \le d(x,y) \le 1$, und man rechnet direkt nach, dass d eine Metrik ist und $\tau_{\mathscr{P}}$ erzeugt. □

2.10 Definition. a) (Cauchyfolge) Sei (X,τ) ein topologischer Vektorraum und $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine Umgebungsbasis der 0. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt Cauchyfolge, falls für jedes $\alpha \in A$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n - x_m \in U_\alpha \quad (n,m \ge n_0)$.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt konvergent gegen $x \in X$, falls für jedes $\alpha \in A$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n - x \in U_\alpha$ $(n \ge n_0)$.
(X,τ) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.
b) Ein lokalkonvexer Raum $(X,\tau_{\mathscr{P}})$ heißt Fréchet-Raum, falls $\tau_{\mathscr{P}}$ durch eine translationsinvariante Metrik induziert wird und falls X vollständig ist.

2.11 Beispiel. Der Schwartzraum ist nach Satz 1.7 ein Fréchet-Raum. Mit Satz 2.6 und Korollar 2.7 sieht man, dass die Bedingung aus Bemerkung 1.8 a) äquivalent zur Stetigkeit ist. Somit gilt:

- Eine lineare Abbildung $F\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, wenn $C > 0$ und $M \in \mathbb{N}$ existieren mit $|F\varphi| \le Cp_M(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$.
- Eine lineare Abbildung $F\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann stetig, wenn zu jedem $N \in \mathbb{N}$ Konstanten $C > 0$ und $M \in \mathbb{N}$ existieren mit $p_N(F\varphi) \le Cp_M(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$.

2.12 Lemma. *a) Sei $(X,\tau_{\mathscr{P}})$ ein lokalkonvexer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert genau dann gegen $x \in X$, falls $p(x_n - x) \to 0\,(n \to \infty)$ für alle $p \in \mathscr{P}$ gilt.*
b) Seien $(X,\tau_{\mathscr{P}})$ und $(Y,\tau_{\mathscr{Q}})$ metrisierbare lokalkonvexe Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann ist f genau dann stetig, wenn gilt:

$$\big[\forall\, p \in \mathscr{P} : p(x_n - x) \to 0\,(n \to \infty)\big] \;\Rightarrow\; \big[\forall\, q \in \mathscr{Q} : q(f(x_n) - f(x)) \to 0\,(n \to \infty)\big].$$

Beweis. a) Sei $U_{\mathcal{F},\varepsilon} \in \tau_0$, $\mathcal{F} = \{p_1,\dots,p_N\}$. Falls $p(x_n - x) \to 0$ für alle $p \in \mathcal{P}$, so existiert zu jedem $j = 1,\dots,N$ ein $n_j \in \mathbb{N}$ mit $p_j(x - x_n) < \varepsilon$ $(n \ge n_j)$. Für $n_0 := \max\{n_1,\dots,n_N\}$ folgt $x_n - x \in U_{\mathcal{F},\varepsilon}$. Also gilt $x_n \to x$ bzgl. $\tau_{\mathscr{P}}$.

Es gelte nun $x_n \to x$ bzgl. $\tau_{\mathscr{P}}$. Sei $p \in \mathscr{P}$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n - x \in U_{\{p\},\varepsilon}$ $(n \ge n_0)$, d.h. es gilt $p(x_n - x) < \varepsilon$ für $n \ge n_0$. Somit folgt

$p(x_n - x) \to 0$ $(n \to \infty)$.

b) In metrischen Räumen ist die Stetigkeit äquivalent zur Folgenstetigkeit. □

b) Die Fouriertransformation in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

2.13 Definition. Der Raum der temperierten Distributionen wird definiert als $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) := (\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))' = L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$. Durch die Familie $p_\varphi(u) := |u(\varphi)|$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, wird $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ zu einem lokalkonvexen Vektorraum (d.h. wir versehen $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit der schwach-*-Topologie).

2.14 Beispiele. a) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, und es gelte $|f(x)| \le C(1+|x|^N)$ für ein $C > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ (polynomiales Wachstum). Dann wird durch

$$[f](\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$$

eine temperierte Distribution $[f]$ definiert. Dabei folgt die Stetigkeit von $[f]$ aus der Abschätzung $|[f](\varphi)| \le Cp_{0,m}(\varphi)$ für $m > N + n$. Eine Distribution $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt eine reguläre Distribution, wenn ein $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit polynomialem Wachstum existiert, so dass $u = [f]$.

b) Zu $y \in \mathbb{R}^n$ heißt $\delta_y\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \varphi(y)$ die Dirac-Distribution (am Punkt y). Man setzt $\delta := \delta_0$. Wegen $|\delta_y(\varphi)| \le p_{0,0}(\varphi)$ ist $\delta_y \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

c) Sei $\mu\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ ein endliches Maß. Dann wird durch

$$u_\mu(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)d\mu(x) \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$$

wegen $|u_\mu(\varphi)| \le p_{0,0}(\varphi)\mu(\mathbb{R}^n)$ eine temperierte Distribution definiert.

Die wesentliche Idee von Distributionen ist es, Abbildungen, welche für Testfunktionen definiert sind, mit Hilfe der Dualität (des adjungierten Operators) auf den Dualraum zu übertragen. Wir formulieren dazu ein allgemeines Lemma.

2.15 Lemma. *Seien X, Y lokalkonvexe Räume und $T \in L(X,Y)$. Die Dualräume X' und Y' seien mit der schwach-*-Topologie versehen. Für den adjungierten Operator $T'\colon Y' \to X'$, definiert durch $T'u := u \circ T$ $(u \in Y')$, gilt $T' \in L(Y', X')$. Falls $R(T) \subset Y$ dicht ist, so ist T' injektiv.*

Beweis. Für jedes $u \in Y'$ gilt $T'u = u \circ T \in X'$ als Komposition stetiger linearer Abbildungen. Die Gleichheit

$$p_\varphi(T'u) = |(T'u)(\varphi)| = |u(T\varphi)| = p_{T\varphi}(u)$$

zeigt die Stetigkeit von T'.

Sei nun $R(T) \subset Y$ dicht und $u \in \ker T'$. Dann gilt $u(T\varphi) = (T'u)(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in X$. Da $R(T)$ dicht ist, folgt $u(\psi) = 0$ für alle $\psi \in Y$, d.h. $u = 0$ in Y'. $\square$

2.16 Definition und Satz. *Seien $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und P ein Polynom. Man definiert die Abbildungen*

$$\begin{aligned}
&\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto \partial^\alpha u \quad \text{mit } (\partial^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi),\\
&\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto fu \quad \text{mit } (fu)(\varphi) := u(f\varphi),\\
&\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto Pu \quad \text{mit } (Pu)(\varphi) := u(P\varphi).
\end{aligned}$$

Dann sind diese Abbildungen wohldefiniert und stetige lineare Abbildungen in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Das folgt sofort aus Satz 1.7 und Lemma 2.15 mit $X = Y = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

2.17 Bemerkung. a) Der Faktor $(-1)^{|\alpha|}$ bei der Definition von $\partial^\alpha u$ wurde für die Kompatibilität mit der partiellen Integration bei regulären Distributionen eingeführt. Sei dazu $u = [f]$ mit $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$, wobei alle Ableitungen von f polynomiales Wachstum haben. Dann folgt für alle $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
(\partial^\alpha u)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}[f](\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\partial^\alpha \varphi)(x)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x)\varphi(x)dx = [\partial^\alpha f](\varphi),
\end{aligned}$$

d.h. es gilt $\partial^\alpha [f] = [\partial^\alpha f]$.

b) Versieht man auch $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit einer geeigneten lokalkonvexen Topologie, so sieht man, dass die Einbettung $j\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \varphi \mapsto \varphi$, stetig ist. Nach Lemma 2.15 liefert dies die stetige Einbettung

$$j'\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto u|_{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)}.$$

In diesem Sinn sind temperierte Distributionen auch (klassische) Distributionen.

2.18 Definition und Satz. *Für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Fourier-Transformierte von u durch*

$$(\mathscr{F}u)(\varphi) := u(\mathscr{F}\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Dann ist $\mathscr{F} \in L(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n))$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mathscr{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \mathscr{F}u$ als Gleichheit in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Das folgt unter Verwendung des adjungierten Operators (Lemma 2.15) sofort aus Satz 1.10. Die letzte Gleichheit folgt aus Satz 1.10 und den entsprechenden Definitionen für Distributionen. $\square$

2.19 Satz. *Die Fouriertransformation $\mathscr{F} \in L(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n))$ ist ein Isomorphismus, und es gilt $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)}$.*

Beweis. Nach Definition von $\mathscr{F}$ auf $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und nach Satz 1.14 gilt $(\mathscr{F}^4 u)(\varphi) = u(\mathscr{F}^4\varphi) = u(\varphi)$, d.h. $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)}$. Insbesondere ist $\mathscr{F}$ auf $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ bijektiv und die Inverse $\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^3$ ist wieder stetig. $\square$

2.20 Beispiele. a) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die Dirac-Distribution $\delta_a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$(\mathscr{F}\delta_a)(\varphi) = \delta_a(\mathscr{F}\varphi) = (\mathscr{F}\varphi)(a) = \int e^{-iax}\varphi(x)đx = (2\pi)^{-n/2}[e_a](\varphi)$$

mit $e_a := e^{-ia\cdot}$. Damit gilt in etwas laxer Schreibweise

$$\mathscr{F}\delta_a = (2\pi)^{-n/2}e^{-ia\cdot}.$$

Insbesondere gilt $\mathscr{F}\delta_0 = (2\pi)^{-n/2}\mathbb{1}$, wobei $\mathbb{1} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ die konstante Funktion 1 bezeichne. Damit folgt auch (wende $\mathscr{F}^3$ an)

$$\mathscr{F}\mathbb{1} = (2\pi)^{n/2}\delta_0.$$

b) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. $\mathbb{P}$ ein Maß auf $\mathscr{A}$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, d.h. eine messbare Funktion. Der Erwartungswert von X ist definiert als

$$\mathbb{E}X := \int_\Omega X\,d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\,d\,\mathbb{P}\circ X^{-1}$$

mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}\circ X^{-1} =: \nu$ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Für die zugehörige Distribution

$$u_\nu(\varphi) := \int \varphi d\nu \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}))$$

gilt $u_\nu \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ und (unter Verwendung des Satzes von Fubini)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}u_\nu(\varphi) = u_\nu(\mathscr{F}\varphi) &= \int (\mathscr{F}\varphi)(x)d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-ixt}dtd\nu(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-1/2}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}d\nu(x)}_{=:\psi_X(-t)}\varphi(t)dt = (2\pi)^{-1/2}[\psi_X(-\,\cdot\,)](\varphi)\end{aligned}$$

mit der *charakteristischen Funktion* von X

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}(e^{itX}) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2.21 Bemerkung. Wir haben damit folgende Abbildungseigenschaften der Fourier-Transformation $\mathscr{F}$:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}\colon\ \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) && \text{(Isomorphismus lokalkonvexer Räume)},\\
&\mathscr{F}\colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) && \text{(Isomorphismus lokalkonvexer Räume)},\\
&\mathscr{F}\colon\ L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) && \text{(isometrischer Isomorphismus)},\\
&\mathscr{F}\colon\ L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) && \text{(stetiger linearer Operator)},\\
&\mathscr{F}\colon\ L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n),\ p \in (1,2) && \text{(stetiger linearer Operator)}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ der größte Raum, der alle anderen Räume enthält. Man beachte, dass man die Bijektivität sogar in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ hat. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p > 2$ gilt natürlich $\mathscr{F}f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, aber im Allgemeinen ist $\mathscr{F}f$ keine reguläre Distribution mehr. In der obigen Liste kann man den Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ von Schwartz-Funktionen nicht durch die Testfunktionen $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ ersetzen. Lustigerweise gilt sogar: Falls $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathscr{F}\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, so gilt $\varphi = 0$.

c) Fourier-Transformation und Faltung

Die Fouriertransformierte verwandelt Faltung in punktweise Multiplikation, was für viele Anwendungen von Bedeutung ist. Genauer gilt folgende Aussage.

2.22 Lemma (Faltung und Fouriertransformation, Teil 1)**.** *Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist die Faltung $f * g$ definiert durch*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Dann gilt $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f * g) &= (2\pi)^{n/2}\mathscr{F}f \cdot \mathscr{F}g,\\
\mathscr{F}(fg) &= (2\pi)^{-n/2}\mathscr{F}f * \mathscr{F}g.
\end{aligned}$$

Die Abbildung $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $(f,g) \mapsto f * g$, ist stetig in jeder Variablen.

Beweis. Übung (Aufgabe 1.1). □

Wir wollen jetzt die Faltung von Funktion und Distribution betrachten.

2.23 Definition. Zu $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\varphi(x - \cdot\,)$ die Funktion $y \mapsto \varphi(x-y)$. Dann wird für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ die Faltung $u * \varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert durch $(u*\varphi)(x) := u(\varphi(x - \cdot\,))$.

2.24 Bemerkung. a) Man beachte, dass $u*\varphi$ eine Funktion ist und keine Distribution. Allerdings werden wir später sehen, dass $u*\varphi$ höchstens polynomial wächst und daher wieder als reguläre Distribution $u * \varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden kann.

b) Falls $u = [f]$ eine reguläre Distribution mit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, so gilt

$$([f]*\varphi)(x) = [f](\varphi(x - \cdot\,)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)dy = (f*\varphi)(x),$$

d.h. die obige Definition verallgemeinert den Faltungsbegriff von Funktionen auf Distributionen.

c) Für die Dirac-Distribution erhalten wir

$$(\delta * \varphi)(x) = \delta(\varphi(x - \cdot\,)) = \varphi(x-0) = \varphi(x) \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\, x \in \mathbb{R}^n).$$

Somit ist die Dirac-Distribution eine Einheit bezüglich der Faltung, d.h. $\delta * \varphi = \varphi$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Wir wollen nun einige wichtige Eigenschaften der Faltung zeigen. Dazu benötigen wir folgende Konvergenzaussage.

2.25 Lemma. *Seien $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $e_1 := (1,0,\dots,0)^\top \in \mathbb{R}^n$ der erste Einheitsvektor, und zu $h>0$ sei $\varphi_h(x) := \frac{1}{h}(\varphi(x+he_1) - \varphi(x))$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\varphi_h \to \partial_{x_1}\varphi$ $(h \to 0)$ in der Topologie von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Wir betrachten die Fouriertransformierten. Nach Satz 1.10 und Lemma 1.11 gilt $(\mathscr{F}\varphi_h)(\xi) = \frac{1}{h}(e^{ih\xi_1}-1)(\mathscr{F}\varphi)(\xi)$ und $(\mathscr{F}\partial_{x_1}\varphi)(\xi) = i\xi_1(\mathscr{F}\varphi)(\xi)$. Somit gilt $\mathscr{F}(\varphi_h - \partial_{x_1}\varphi)(\xi) = \psi_h(\xi)(\mathscr{F}\varphi)(\xi)$ mit $\psi_h(\xi) := \frac{1}{h}(e^{ih\xi_1}-1) - i\xi_1$. Man rechnet direkt nach, dass für $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$|\partial^\beta \psi_h(\xi)| \le \begin{cases} h\xi_1^2, & \text{falls } |\beta| = 0,\\ h|\xi_1|, & \text{falls } |\beta| = 1,\\ h^{|\beta|-1}, & \text{falls } |\beta| > 1. \end{cases}$$

Wir verwenden die Seminorm p_m (siehe Bemerkung 1.6) und erhalten

$$p_m(\psi_h \mathscr{F}\varphi) \le \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \Big[(1+|\xi|^m) \sum_{|\alpha| \le m} \sum_{\beta \le \alpha} c_{\alpha,\beta} |\partial^\beta \psi_h(\xi)|\, |\partial^{\alpha-\beta}\mathscr{F}\varphi(\xi)| \Big]$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_m h \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \Big[(1+|\xi|^m)(1+|\xi|^2) \sum_{|\alpha|\leq m} |\partial^\alpha \mathscr{F}\varphi(\xi)|\Big] \\
&\leq 4c_m h p_{m+2}(\mathscr{F}\varphi)
\end{aligned}$$

mit einer Konstante $c_m \geq 0$, welche nicht von φ oder h abhängt. Damit gilt $p_m(\psi_h \mathscr{F}\varphi) \to 0$ $(h \to 0)$ und daher $\mathscr{F}(\varphi_h - \partial_{x_1}\varphi) = \psi_h \mathscr{F}\varphi \to 0$ $(h \to 0)$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (Definition 1.5). Da $\mathscr{F}^{-1}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig ist, folgt $\varphi_h \to \partial_{x_n}\varphi$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. □

2.26 Satz. *Seien $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*
a) Dann gilt $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\partial^\alpha(u*\varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi).$$

b) Die Funktion $u*\varphi$ hat polynomiales Wachstum und kann daher als reguläre Distribution aufgefasst werden, $u * \varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) Es gilt $\partial^\alpha[y \mapsto \varphi(x-y)] = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha\varphi)(x-y)$ und damit

$$(u*(\partial^\alpha\varphi))(x) = u[(\partial^\alpha\varphi)(x-\,\cdot\,)] = (-1)^{|\alpha|}u[\partial^\alpha(y\mapsto\varphi(x-y))] = (\partial^\alpha u)(\varphi(x-\,\cdot\,)).$$

Dies zeigt das zweite Gleichheitszeichen in der Aussage des Satzes. Genauso sieht man für den Verschiebungsoperator $L_a\colon \varphi \mapsto \varphi(\,\cdot\, - a)$ für $a \in \mathbb{R}^n$, dass

$$L_a(u*\varphi) = u*(L_a\varphi) \quad (a\in\mathbb{R}^n,\, u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),\, \varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)) \tag{2-1}$$

gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{h}[(u*\varphi)(x+he_1) - (u*\varphi)(x)] &= \tfrac{1}{h}[(L_{-he_1} - L_0)(u*\varphi)](x) \\
&= \big(u*[\tfrac{1}{h}(L_{-he_1}-L_0)\varphi]\big)(x).
\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.25 gilt $\frac{1}{h}(L_{-he_1}-L_0)\varphi \to \partial_{x_1}\varphi$ $(h\to 0)$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, und da u stetig ist, folgt

$$\tfrac{1}{h}\big[(u*\varphi)(x+he_1) - (u*\varphi)(x)\big] \to (u*\partial_{x_1}\varphi)(x) = ((\partial_{x_1}u)*\varphi)(x).$$

Dies zeigt $\partial^\alpha(u*\varphi) = (\partial^\alpha u)*\varphi$ für $\alpha = (1,0,\ldots,0)$, der allgemeine Fall folgt durch Iteration.

b) Wir verwenden die elementare Abschätzung

$$1+|x-z|^m \leq 2^m(1+|x|^m)(1+|z|^m) \quad (x,z\in\mathbb{R}^n)$$

und erhalten für $m\in\mathbb{N}_0$

$$p_m(\varphi(x-\,\cdot\,)) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\max_{|\alpha|\leq m}(1+|y|^m)|(\partial^\alpha\varphi)(x-y)|$$

$$= \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \max_{|\alpha|\le m} (1+|x-z|^m)|(\partial^\alpha\varphi)(z)|$$
$$\le 2^m(1+|x|^m)p_m(\varphi).$$

Da u stetig ist, existiert ein $C \ge 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|u(\varphi)| \le Cp_N(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Damit folgt

$$|(u*\varphi)(x)| = |u(\varphi(x-\cdot))| \le Cp_N(\varphi(x-\cdot)) \le C2^N(1+|x|^N)p_N(\varphi),$$

d.h. $u*\varphi$ hat polynomiales Wachstum und kann daher als temperierte Distribution $u*\varphi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden. □

2.27 Satz (Faltung und Fouriertransformation, Teil 2). *Seien $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*
a) Es gilt $\mathscr{F}(u*\varphi) = (2\pi)^{n/2}(\mathscr{F}\varphi)\cdot(\mathscr{F}u)$.
b) Für alle $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $(u*\varphi)*\psi = u*(\varphi*\psi)$.
c) Es gilt $\mathscr{F}(\varphi\cdot u) = (2\pi)^{-n/2}(\mathscr{F}u)*(\mathscr{F}\varphi)$.

Beweis. a) Wir setzen die Definitionen ein und erhalten für alle $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
(\mathscr{F}(u*\varphi))(\mathscr{F}\psi) &= (u*\varphi)(\mathscr{F}^2\psi) = (u*\varphi)(\psi(-\cdot))\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (u*\varphi)(x)\psi(-x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(-x)u[\varphi(x-\cdot)]dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u[\psi(-x)\varphi(x-\cdot)]dx = u\Big[\int_{\mathbb{R}^n}\psi(-x)\varphi(x-\cdot)dx\Big]\\
&= u\Big[\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(-x-\cdot)dx\Big] = u[(\psi*\varphi)(-\cdot)]\\
&= u[\mathscr{F}^2(\psi*\varphi)] = \mathscr{F}u(\mathscr{F}(\psi*\varphi)) = (2\pi)^{n/2}\mathscr{F}u((\mathscr{F}\psi)(\mathscr{F}\varphi))\\
&= (2\pi)^{n/2}\big[(\mathscr{F}\varphi)(\mathscr{F}u)\big](\mathscr{F}\psi).
\end{aligned}$$

Da dies für alle $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt und die Fouriertransformation $\mathscr{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ surjektiv ist, liefert dies a).

b) Aus a) folgt

$$\begin{aligned}
(u*\varphi)(\psi(-\cdot)) &= (u*\varphi)(\mathscr{F}^2\psi) = (\mathscr{F}^2(u*\varphi))(\psi)\\
&= (2\pi)^{n/2}\big[\mathscr{F}\big((\mathscr{F}\varphi)(\mathscr{F}u)\big)\big](\psi)\\
&= (2\pi)^{n/2}\big[(\mathscr{F}\varphi)(\mathscr{F}u)\big](\mathscr{F}\psi)\\
&= (2\pi)^{n/2}u\big(\mathscr{F}((\mathscr{F}\varphi)(\mathscr{F}\psi))\big) = u(\mathscr{F}^2(\varphi*\psi)) = u((\varphi*\psi)(-\cdot)).
\end{aligned}$$

Wegen $(f*g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x)dx = [f](g(-\cdot))$ für eine polynomial wachsende Funktion f und $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ bedeutet die obige Gleichheit

$$((u*\varphi)*\psi)(0) = (u*(\varphi*\psi))(0).$$

Wir ersetzen ψ durch $L_{-x}\psi = \psi(\,\cdot\, + x)$ und erhalten mit (2-1)

$$\begin{aligned}((u * \varphi) * \psi)(x) &= \big[L_{-x}((u * \varphi) * \psi)\big](0) = [(u * \varphi) * (L_{-x}\psi)](0)\\ &= [u * (\varphi * L_{-x}\psi)](0) = \big[L_{-x}(u * (\varphi * \psi))\big](0) = (u * (\varphi * \psi))(x).\end{aligned}$$

c) Nach a) gilt $\mathscr{F}\big((\mathscr{F}u) * (\mathscr{F}\varphi)\big) = (2\pi)^{n/2}(\mathscr{F}^2\varphi) \cdot (\mathscr{F}^2 u) = (2\pi)^{n/2}\mathscr{F}^2(\varphi \cdot u)$. Wendet man nun $\mathscr{F}^{-1}$ an, so erhält man c). $\square$

3. Fourierreihen

3.1 Worum geht's? Für periodische Funktionen sind die Fourierreihen ein zentraler und nützlicher Begriff. Wir betrachten Funktionen auf dem n-dimensionalen Torus und diskutieren zunächst elementare Eigenschaften der Fourierreihe. Dabei wird die Faltung eine wichtige Rolle spielen.
Die Fourierreihe basiert auf der Idee, eine Funktion als Überlagerung von Schwingungen darzustellen, entweder in Form von Kosinus- und Sinus-Termen (reelle Fourierreihe) oder in Form von komplexen Exponentialfunktionen. Die zentrale Frage ist dabei, ob und in welcher Weise die Reihe gegen die Funktion konvergiert. Die wichtigsten Konvergenzarten sind dabei Konvergenz in L^1, Konvergenz in L^2 und punktweise Konvergenz. Ein gutes Konzept, um die Konvergenz zu untersuchen, sind Summationskerne.

a) Eigenschaften der Fourierreihe in $L^1(\mathbb{T}^n)$

Wir beginnen mit einigen Bezeichnungen und Definitionen.

3.2 Bezeichnung. a) Der eindimensionale Torus ist definiert als Quotientenraum $\mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, d.h. ein Element in $\mathbb{T}$ hat die Form $x = x_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dabei wird $\mathbb{T}$ mit der Quotiententopologie versehen, d.h. die offenen Mengen $U \subset \mathbb{T}$ sind alle Mengen der Form $\{p(x_0) : x_0 \in V\}$ mit einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}$. Hier ist $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ die kanonische Projektion $p(x_0) := x_0 + 2\pi\mathbb{Z}$. Konkret bedeutet dies, dass auf $\mathbb{T}$ die Metrik $d(x, y) := \inf\{|x - y + 2\pi k| : k \in \mathbb{Z}\}$ verwendet wird.

Man beachte, dass das Intervall $[0, 2\pi)$ häufig als Beschreibung von $\mathbb{T}$ verwendet wird, indem von jeder Äquivalenzklasse $x_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ der (eindeutig bestimmte) Repräsentant in $[0, 2\pi)$ ausgewählt wird. Dabei ist aber zu beachten, dass die Topologie auf $[0, 2\pi)$ (d.h. die Spurtopologie von $\mathbb{R}$) nicht mit der Topologie in $\mathbb{T}$ übereinstimmt. Ein topologisch korrektes Modell für $\mathbb{T}$ ist $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, wobei die Addition in $\mathbb{T}$ zur Multiplikation auf dem Einheitskreis wird.

Funktionen auf $\mathbb{T}$ können mit 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ identifiziert werden und umgekehrt. Genauer gilt: Falls $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion ist, so existiert genau eine Funktion $f_{\mathbb{T}}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ mit $f = f_{\mathbb{T}} \circ p$. Wir werden im Folgenden diese Identifizierung ohne weitere Erwähnung verwenden, z.B. bei Gleichheiten der Form $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx$.

Der n-dimensionale Torus $\mathbb{T}^n$ ist definiert als Produkt $\mathbb{T}^n := \mathbb{T} \times \ldots \times \mathbb{T}$.

b) Auf $\mathbb{T}^n$ werden die Räume $L^p(\mathbb{T}^n)$ mit dem Lebesgue-Maß auf $\mathbb{T}^n = [0, 2\pi)^n$ wie üblich definiert. Für $p \in [1,\infty]$ ist der Banachraum $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$ definiert als die Menge aller komplexwertigen Folgen $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$, für welche $\|a\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^n)}$ endlich ist, wobei

$$\|a\|_{\ell^p(\mathbb{Z}^n)} := \begin{cases} \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |a_k|^p\big)^{1/p}, & \text{falls } p \in [1,\infty), \\ \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} |a_k|, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

3.3 Definition. Sei $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$. Für $k \in \mathbb{Z}^n$ heißt

$$(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(k) := \hat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ik\cdot x} đx$$

der k-te Fourierkoeffizient von f. Dabei ist

$$đx := (2\pi)^{-n} dx$$

das normierte Lebesgue-Maß. Die formale Reihe

$$S[f](x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ik\cdot x} \quad (x \in \mathbb{T}^n)$$

heißt Fourierreihe von f. Die Abbildung $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ heißt auch diskrete Fouriertransformation.

3.4 Bemerkung. a) Für alle $a \in \mathbb{T}^n$ und $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ gilt $\int_{\mathbb{T}^n} f(x-a) đx = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) đx$, d.h. $đx$ ist invariant unter Translationen (Haar-Maß).

b) Speziell im Fall $n = 1$ ist auch eine alternative Darstellung der Fourierkoeffizienten und der Fourierreihe üblich: Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Dann definiert man $a_k := \hat{f}(k) + \hat{f}(-k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $b_k := i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k))$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

als Gleichheit zweier formaler Reihen. Der Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass bei reellwertigem $f \in L^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$ die Koeffizienten a_k, b_k ebenfalls reell sind. Denn in diesem Fall ist $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$.

Falls $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine gerade Funktion ist, d.h. falls $f(x) = f(-x)$ $(x \in \mathbb{T})$, so folgt $\hat{f}(-k) = \hat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und damit $b_k = 0$, d.h. die Fourierreihe von f wird hier zu einer Reihe mit reinen cos-Termen. Analog besteht die Fourierreihe einer ungeraden Funktion f (d.h. $f(x) = -f(-x)$ $(x \in \mathbb{T})$ nur aus sin-Termen. Man beachte auch, dass $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{T}} f(x) đx$.

3.5 Bemerkung. Sei $P(x) = \sum_{|\ell|\le N} a_\ell e^{i\ell\cdot x}$ ein trigonometrisches Polynom. Dann gilt für $k \in \mathbb{Z}^n$

$$\hat{P}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{|\ell|\le N} a_\ell e^{i\ell\cdot x} e^{-ik\cdot x} đx = \sum_{|\ell|\le N} a_\ell \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(\ell-k)\cdot x} đx = a_k$$

wegen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n} e^{i(\ell-k)\cdot x} đx &= \int_{[0,2\pi]^n} e^{i(\ell-k)\cdot x} đx = \prod_{j=1}^n (2\pi)^{-1} \int_{[0,2\pi]} e^{i(\ell_j-k_j)x_j} dx_j \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \ell = k, \\ 0, & \text{falls } \ell \neq k. \end{cases}\end{aligned}$$

3.6 Satz. *a) Die diskrete Fouriertransformation*

$$\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} \colon L^1(\mathbb{T}^n) \to \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$$

ist wohldefiniert, linear und stetig mit Norm $(2\pi)^{-n}$.
b) Seien $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ *und* $a \in \mathbb{T}^n$.

(i) *Für* $g(x) := \overline{f(x)}$ *gilt* $\hat{g}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$.

(ii) *Für* $g(x) := f(x-a)$ *gilt* $\hat{g}(k) = e^{-ia\cdot k}\hat{f}(k)$.

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

3.7 Definition. Für $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ definiert man die Faltung $f * g \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ durch

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{T}^n} f(x-y)g(y)dy \quad (x \in \mathbb{T}^n).$$

3.8 Satz. *Für* $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ *ist* $f * g \in L^1(\mathbb{T}^n)$*. Es gilt* $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$ *und*

$$(f*g)\hat{\ }(k) = (2\pi)^n \hat{f}(k)\hat{g}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

Beweis. Das folgt mit dem Satz von Fubini wie im Fall $\mathbb{R}^n$. □

Die Faltung ist damit eine Multiplikation auf dem Raum $L^1(\mathbb{T}^n)$. Der entsprechende abstrakte Begriff ist der einer Banachalgebra.

3.9 Definition. Eine Banachalgebra A ist ein $\mathbb{C}$-Banachraum, auf dem eine bilineare, assoziative Abbildung $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ definiert ist (die Multiplikation), wobei

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in A).$$

Die Banachalgebra A heißt kommutativ, falls $x \cdot y = y \cdot x \quad (x, y \in A)$. Ein Element $e \in A$ heißt Einheit (oder Eins) von A, falls $x \cdot e = e \cdot x = x \quad (x \in A)$ und $\|e\| = 1$.

3.10 Beispiele. a) Der Raum $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ ist mit der Norm $\|(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^\infty} := \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} |a_k|$ ein Banachraum. Definiert man die Multiplikation auf $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ durch $(a \cdot b)(k) := a_k b_k$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$ für $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ und $b = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$, so wird $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ zu einer kommutativen Banachalgebra mit Einselement $\mathbb{1} = (1)_{k\in\mathbb{Z}^n}$.

b) Weitere Beispiele für Banachalgebren sind die beschränkten linearen Operatoren auf einem Banachraum, die stetigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum und (als Verallgemeinerung von a)) der Raum $L^\infty(\mu)$ mit einem Maß μ.

Mit dieser Bezeichnung können wir die obigen Ergebnisse kurz zusammenfassen:

3.11 Satz. *a) Der Raum $L^1(\mathbb{T}^n; đx)$, versehen mit der skalierten Faltung*

$$(f \bullet g)(x) := \int_{\mathbb{T}^n} f(x - y) g(y) đy$$

als Multiplikation, wird zu einer kommutativen Banachalgebra.
b) Die diskrete Fouriertransformation $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} \colon L^1(\mathbb{T}^n) \to \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ ist ein Homomorphismus von Banachalgebren.

Beweis. Dies ist nur eine Umformulierung der Sätze 3.6 und 3.8; man beachte, dass durch die Verwendung des normierten Lebesgue-Maßes $đx = (2\pi)^{-n}dx$ aus Satz 3.8 die Gleichheit $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(f \bullet g) = (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f) \cdot (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} g)$ folgt. □

3.12 Lemma. *Seien $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ und $P(x) = \sum_{|k|\leq N} a_k e^{ik\cdot x}$ ein trigonometrisches Polynom. Dann gilt $(f * P)(x) = \sum_{|k|\leq N} a_k \hat{f}(k) e^{ik\cdot x}$.*

Beweis. Das zeigt man wie in Übungsaufgabe 1.2 (ii). □

3.13 Satz. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f \in W_1^m(\mathbb{T}^n)$, d.h. $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ für alle $|\alpha| \leq m$. Dann gilt*

$$(-i)^{|\alpha|}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\partial^\alpha f)(k) = k^\alpha(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(k) \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

Beweis. Wir integrieren α_j-mal partiell in Richtung x_j und erhalten

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\partial^\alpha f)(k) &= \int_{\mathbb{T}^n} (\partial^\alpha f)(x) e^{-ik\cdot x} đx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\partial^\alpha e^{-ik\cdot x} đx\\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)(-ik)^\alpha e^{-ik\cdot x} đx = (ik)^\alpha(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(k).\end{aligned}$$

□

3.14 Korollar. *Sei $f \in W_1^{n+1}(\mathbb{T}^n)$. Dann ist $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z}^n)$, d.h. $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)| < \infty$.*

Beweis. Sei $f \in W_1^{n+1}(\mathbb{T}^n)$ und $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Wähle $j \in \{1,\dots,n\}$ mit $|k_j| = \max\{|k_1|,\dots,|k_n|\}$. Dann ist $k_j \neq 0$ und $|k| \leq \sqrt{n}|k_j|$. Mit Satz 3.13 gilt

$$|\hat{f}(k)| = \frac{|(\partial_{x_j}^{n+1} f)\hat{\ }(k)|}{|k_j|^{n+1}} \leq \frac{C}{|k_j|^{n+1}} \leq \frac{Cn^{(n+1)/2}}{|k|^{n+1}},$$

wobei $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(\partial_{x_j}^{n+1} f) \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ verwendet wurde. Nun folgt die Behauptung aus der Tatsache, dass $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} |k|^{-n-1} < \infty$. □

b) Summationskerne

Wir werden nun Konvergenzeigenschaften der Fourierreihe in $L^p(\mathbb{T}^n)$ betrachten.

3.15 Definition. Ein Summationskern ist eine Folge $(K_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset C(\mathbb{T}^n)$ mit

(i) $\int_{\mathbb{T}^n} K_N(x)dx = 1$ für alle $N \in \mathbb{N}$,

(ii) es existiert eine Konstante $M \geq 0$ mit $\int_{\mathbb{T}^n} |K_N(x)|dx \leq M$ $(N \in \mathbb{N})$,

(iii) Für alle $\delta \in (0,\pi)$ gilt $\lim_{N\to\infty} \int_{\{x\in\mathbb{T}^n : |x|\geq\delta\}} |K_N(x)|dx = 0$.

Eine analoge Definition gibt es für den $\mathbb{R}^n$, man vergleiche dazu auch Übungsblatt 2.

3.16 Satz. *Sei $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ein Summationskern, und sei $p \in [1,\infty)$. Dann gilt für alle $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$*

$$\lim_{N\to\infty} (K_N * f) = f \qquad \textit{(Konvergenz in } L^p(\mathbb{T}^n)\textit{)}.$$

Beweis. Wir schreiben wieder $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}$.

(i) Sei zunächst $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Dann zeigt man genauso wie in Aufgabe 2.2 (ii), dass

$$\lim_{N\to\infty} (K_N * f)(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{T}^n).$$

Nach Aufgabe 2.1 (i) gilt $\|K_N * f\|_\infty \le \|K_N\|_1 \|f\|_\infty \le M\|f\|_\infty$ für alle $N \in \mathbb{N}$ mit der Konstanten M aus Definition 3.15 (ii). Also erhalten wir mit majorisierter Konvergenz

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} |(K_N * f)(x) - f(x)|^p dx \to 0 \quad (N \to \infty),$$

wobei $(M+1)^p \|f\|_\infty^p \mathbb{1}_{\mathbb{T}^n}$ eine integrierbare Majorante ist. Dies zeigt $\|K_N * f - f\|_p \to 0$ $(N \to \infty)$ und damit die Behauptung für $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

(ii) Sei nun $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ beliebig, und sei $\varepsilon > 0$. Da $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{T}^n)$ liegt, existiert ein $f_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ mit $\|f - f_0\|_p < \delta := \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$. Zu f_0 existiert nach (i) ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|(K_N * f_0 - f_0\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $N \ge N_0$. Für diese N erhalten wir unter Verwendung von Aufgabe 2.1 (i)

$$\begin{aligned}
\|K_N * f - f\|_p &\le \|K_N * (f - f_0)\|_p + \|K_N * f_0 - f_0\|_p + \|f - f_0\|_p \\
&\le \|K_N\|_1 \|f - f_0\|_p + \frac{\varepsilon}{2} + \|f - f_0\|_p \\
&\le (M+1)\delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies zeigt $K_N * f \to f$ $(N \to \infty)$ in $L^p(\mathbb{T}^n)$ und damit die Behauptung. □

Die obige Aussage gilt auch, wenn man $L^p(\mathbb{T}^n)$ durch $C(\mathbb{T}^n)$ mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty$ ersetzt:

3.17 Lemma. *Sei $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ein Summationskern. Dann gilt für alle $f \in C(\mathbb{T}^n)$*

$$\|K_N * f - f\|_\infty \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Beweis. Auch diese Aussage lässt sich wie in Aufgabe 2.2 zeigen. Dazu seien $f \in C(\mathbb{T}^n)$ und $\varepsilon > 0$. Da $\mathbb{T}^n$ kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig, und damit existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (x \in \mathbb{T}^n,\ |y| < \delta).$$

Dabei sei M wieder wie in Definition 3.15 (ii). Somit erhält man für alle $x \in \mathbb{T}^n$ die Abschätzung (unter Verwendung von Definition 3.15 (i))

$$\begin{aligned}
|(K_N * f)(x) - f(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y) f(x-y)dy - f(x) \Big| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y) \big(f(x-y) - f(x)\big) dy \Big| \\
&\le \int_{\mathbb{T}^n} |K_N(y)|\, |f(x-y) - f(x)| dy \\
&\le \|K_N\|_1 \sup_{|y|<\delta} |f(x-y) - f(x)| + 2\|f\|_\infty \int_{|y|\ge\delta} |K_N(y)| dy \\
&\le M \frac{\varepsilon}{2M} + 2\|f\|_\infty \int_{|y|\ge\delta} |K_N(y)| dy.
\end{aligned}$$

Nach Definition 3.15 (iii) existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $N \ge N_0$

$$\int_{|y|\ge\delta} |K_N(y)| dy \le \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$$

gilt. Für diese N erhalten wir $\|K_N * f - f\|_\infty \le \varepsilon$, was die Behauptung zeigt. □

3.18 Definition. a) Im Fall $n = 1$ ist der Fejér-Kern $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$F_N(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|k|}{N+1}\Big) e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{T}).$$

Für $N \in \mathbb{N}$ ist der Dirichlet-Kern D_N definiert durch

$$D_N(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{T}).$$

Wir schreiben $s_N f := D_N * f$ sowie $s_N(f,x) := (s_N f)(x)$.
b) Für $n \ge 2$ definiert man den Fejér-Kern $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ als (Tensor-)Produkt, d.h. als

$$F_N(x) := F_N^{(1)}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_N^{(1)}(x_n) \quad (x \in \mathbb{T}^n),$$

wobei $F_N^{(1)}$ der eindimensionale Fejér-Kern aus a) sei. Analog für den Dirichlet-Kern.
Man schreibt $\sigma_N f := F_N * f$ für $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ und $N \in \mathbb{N}$. Statt $(\sigma_N f)(x)$ wird häufig auch $\sigma_N(f,x)$ geschrieben. Für den Dirichlet-Kern verwendet man die Schreibweise $s_N f := D_N * f$ sowie $s_N(f,x) := (s_N f)(x)$.

3.19 Bemerkung. Man beachte, dass nach Definition

$$s_N(f,x) = (D_N * f)(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{|k|_\infty \le N} e^{ik\cdot(x-y)} f(y) đy = \sum_{|k|_\infty \le N} \hat{f}(k) e^{ik\cdot x}$$

gilt, siehe auch Lemma 3.12. Damit ist $s_N f$ ist gerade die Partialsumme zur Fourierreihe mit dem Summationsbereich $|k|_\infty := \max_{j=1,\dots,n} |k_j| \le N$.

Analog folgt für den Fejér-Kern

$$\sigma_N(f,x) = (F_N * f)(x) = \sum_{|k|_\infty \le N} \Big[\prod_{j=1}^n \Big(1 - \frac{|k_j|}{N+1}\Big)\Big] \hat{f}(k) e^{ik\cdot x} \quad (x \in \mathbb{T}^n).$$

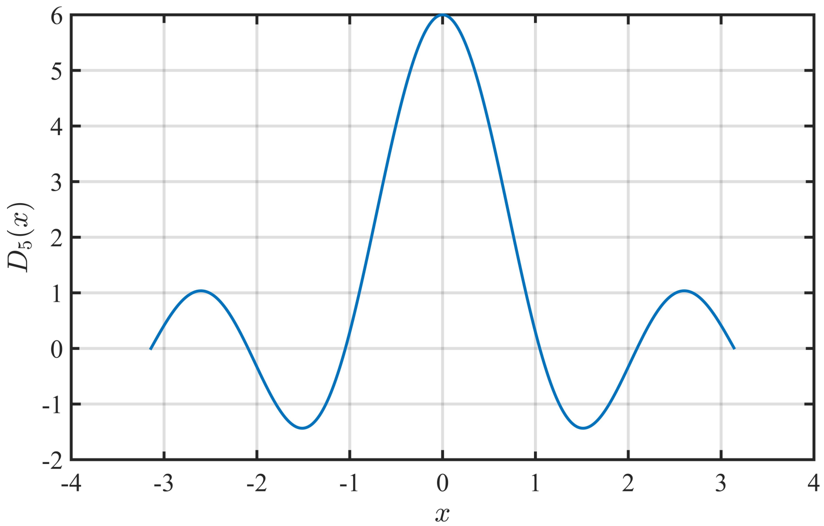

Abbildung 1: Der eindimensionale Dirichlet-Kern D_5

3.20 Lemma. *a) Es gilt*

$$F_N(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^n \Big(\frac{\sin(\frac{N+1}{2} x_j)}{\sin\frac{x_j}{2}}\Big)^2 \quad (x \in \mathbb{T}^n). \tag{3-1}$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(F_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset C(\mathbb{T}^n)$ ein Summationskern.

Beweis. Das ist der Inhalt von Aufgabe 2.3 und Aufgabe 1.3, übertragen von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{T}^n$. □

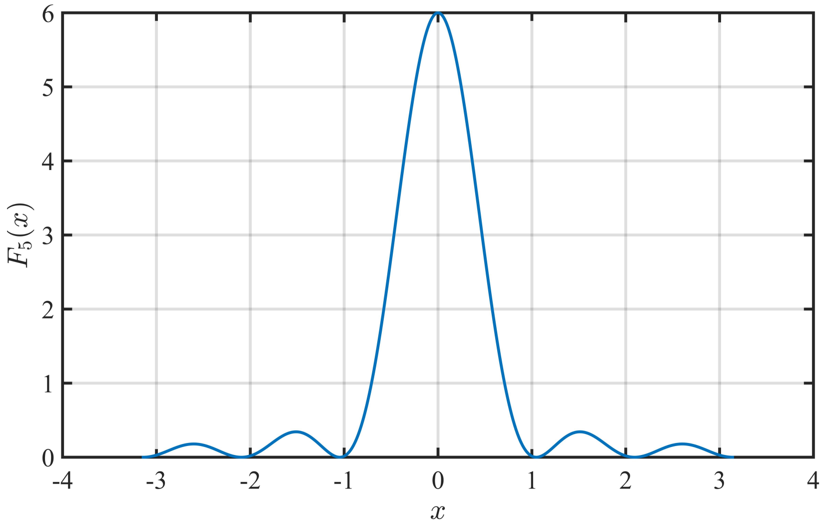

Abbildung 2: Der eindimensionale Fejér-Kern F_5

3.21 Korollar. *a) Sei $p \in [1, \infty)$. Dann gilt für alle $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$*

$$\sigma_N f = F_N * f \to f \quad (N \to \infty)$$

mit Konvergenz in $L^p(\mathbb{T}^n)$. Für $f \in C(\mathbb{T}^n)$ gilt $\|\sigma_N f - f\|_\infty \to 0$ $(N \to \infty)$.
b) Trigonometrische Polynome liegen dicht in $L^p(\mathbb{T}^n)$ und in $C(\mathbb{T}^n)$.

Beweis. a) Dies ist Satz 3.16 und Lemma 3.17 für den Fejér-Kern.

b) Nach Bemerkung 3.19 ist $\sigma_N f$ ein trigonometrisches Polynom, also folgt die Aussage aus a). □

Für die folgenden Aussagen beachte man $C(\mathbb{T}^n) \subset L^p(\mathbb{T}^n) \subset L^1(\mathbb{T}^n)$ für alle $p \in [1, \infty)$, daher werden die Sätze nur für $L^1(\mathbb{T}^n)$ formuliert.

3.22 Satz (Eindeutigkeitssatz)**.** *Sei $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ mit $\hat{f}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt $f = 0$ in $L^1(\mathbb{T}^n)$, d.h. $f = 0$ fast überall.*

Beweis. Sei $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ mit $\hat{f}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Nach Bemerkung 3.19 ist $\sigma_N f = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und damit (Korollar 3.21 a)) $f = 0$ in $L^1(\mathbb{T}^n)$. □

3.23 Satz (Riemann-Lebesgue-Lemma)**.** *Es gilt $\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0$ für alle $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$.*

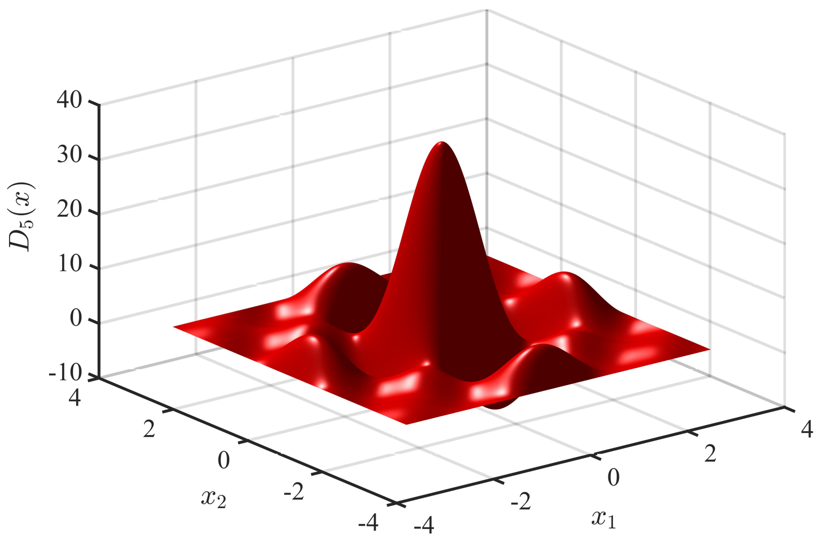

Abbildung 3: Der zweidimensionale Dirichlet-Kern D_5

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ existiert nach Korollar 3.21 b) ein trigonometrisches Polynom P mit $\|f - P\|_1 < \varepsilon$. Für $k \in \mathbb{Z}^n$ mit $|k| > \deg P$ folgt mit Bemerkung 3.5 und Satz 3.6

$$|\hat{f}(k)| = |\hat{f}(k) - \hat{P}(k)| \leq (2\pi)^{-n} \|f - P\|_1 < (2\pi)^{-n} \varepsilon.$$

□

Das Riemann-Lebesgue-Lemma besagt insbesondere, dass der Homomorphismus von Banachalgebren $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} \colon L^1(\mathbb{T}^n) \to \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$, $f \mapsto \hat{f}$ aus Satz 3.11 nicht surjektiv ist.

3.24 Bemerkung. Trotz des Namens ist der Dirichlet-Kern kein Summationskern! Daher lassen sich die obigen Aussagen nicht auf die Fourierreihe, d.h. auf $s_N f$, übertragen. Dennoch sind die obigen Sätze für den Dirichlet-Kern nützlich. Seien dazu $n = 1$ und $f \in C(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|k|}{N+1}\Big) \hat{f}(k) e^{ikx} = f(x)$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{T}$. Für die Partialsummen der Fourierreihe

$$s_N(f, x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{T})$$

(siehe Bemerkung 3.19) gilt

$$\sigma_N(f, x) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{N+1-|k|}{N+1} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} s_k(f, x).$$

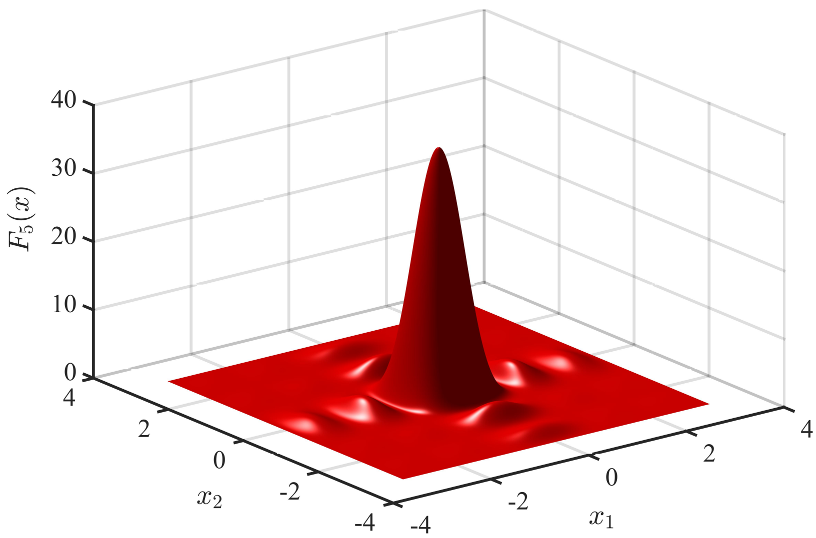

Abbildung 4: Der zweidimensionale Fejér-Kern F_5

Dies ist das Cesàro-Mittel der Fourierreihe. Allgemein wird zu einer Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ das Cesàro-Mittel $(\sigma_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch $\sigma_N := \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^N s_k$. Eine Reihe heißt Cesàro-summierbar, falls das Cesàro-Mittel der Partialsummen konvergent ist. Somit ist die Fourierreihe von f Cesàro-summierbar mit Grenzwert f.

3.25 Bemerkung. Die punktweise Konvergenz der Fourierreihe, d.h. von $s_N f$ gegen f, ist eine komplizierte Frage mit zum Teil überraschenden Antworten. Wir zitieren hier nur einige Resultate, wobei wir $n = 1$ betrachten. Für die Beweise verweisen wir auf [7], Abschnitte 3.3 und 3.4.

- Falls $f \in L^p(\mathbb{T})$ mit $p \in (1,\infty]$, so gilt $s_N(f,x) \to f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{T}$ (Satz von Carleson und Hunt). Insbesondere gilt dies, falls $f \in C(\mathbb{T})$.

- Falls $f \in L^1(\mathbb{T})$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{T}$ differenzierbar ist, gilt $s_N(f,x_0) \to f(x_0)$ $(N \to \infty)$ (Satz von Dirichlet).

- Falls $f \in C^\alpha(\mathbb{T})$ für ein $\alpha \in (0,1)$ (hölderstetig), so konvergiert $s_N f$ gleichmäßig gegen f.

- Es existiert ein $f \in L^1(\mathbb{T})$ so, dass $s_N(f,x)$ für fast jedes $x \in \mathbb{T}$ divergiert (Satz von Kolmogorov).

- Es existiert ein $f \in C(\mathbb{T})$ und ein $x_0 \in \mathbb{T}$ mit $|s_N(f,x_0)| \to \infty$ $(N \to \infty)$ (Satz von du Bois–Reymond). Es existiert sogar ein $f \in C(\mathbb{T})$, für welches $s_N f$ an überabzählbar vielen Stellen divergiert.

c) Fourierreihen in $L^2(\mathbb{T}^n)$

Der Raum $L^2(\mathbb{T}^n)$ ist ein Hilbertraum, und daher kann die Frage der Konvergenz der Fourierreihe in diesem Fall durch Hilbertraum-Methoden beantwortet werden. Im Folgenden sei für $k \in \mathbb{Z}^n$ die Funktion $e_k \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ definiert durch $e_k(x) := (2\pi)^{-n/2} e^{ik\cdot x}$ $(x \in \mathbb{T}^n)$. Wir betrachten nun Fourierreihen im Raum $L^2(\mathbb{T}^n)$.

3.26 Bemerkung. Es gilt $\langle e_k, e_\ell\rangle = \delta_{k,\ell}$, d.h. $\{e_k : k \in \mathbb{Z}^n\}$ ist ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{T}^n)$. Für $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ ist

$$\langle f, e_k\rangle = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ik\cdot x} dx = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}^n)$$

und damit $s_N(f,x) = \sum_{|k|_\infty \le N} \langle f, e_k\rangle e_k$.

Da die Konvergenz der Fourierreihen aus der allgemeinen Hilbertraumtheorie folgt, formulieren wir den folgenden Satz allgemein. Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. und $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum. Zu $S \subset X$ sei $S^\perp := \{x \in X : \langle x, s\rangle = 0\ (s \in S)\}$ das orthogonale Komplement. Wie üblich setzen wir $\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}$ $(x \in X)$. Ein Orthonormalsystem ist eine Menge $S \subset X$ mit $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $e_i, e_j \in S$.

3.27 Satz. *Sei $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:*

(i) *S ist maximal, d.h. falls $\widetilde{S} \supset S$ ein Orthonormalsystem ist, so gilt $S = \widetilde{S}$.*

(ii) *Es gilt $S^\perp = \{0\}$.*

(iii) *Für alle $x \in X$ gilt $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n$ (Konvergenz der Reihe in X).*

(iv) *Für alle $x, y \in X$ gilt $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}$ (Parsevalsche Gleichung), wobei die Reihe absolut konvergiert.*

(v) *Für alle $x \in X$ gilt $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2$.*

Die Reihe in (iii) heißt auch allgemeine Fourierreihe von x.

Beweis. Wir beginnen mit einigen Vorbemerkungen. Da

$$\Big\{e_1, \ldots, e_N, x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n\Big\}$$

eine Menge zueinander orthogonale Vektoren sind, folgt mit dem Satz von Pythagoras (durch Ausmultiplizieren)

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n\rangle|^2 + \Big\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n \Big\|^2 \ge \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

Für $N \to \infty$ erhält man $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2$ (Besselsche Ungleichung). Damit konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2$ absolut und wegen

$$\big|\langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle}\big| \le \tfrac{1}{2}\big(|\langle x, e_n\rangle|^2 + |\langle y, e_n\rangle|^2\big)$$

auch $\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle}$. Weiter gilt

$$\Big\|\sum_{n=N}^{M}\langle x, e_n\rangle e_n\Big\|^2 = \sum_{n=N}^{M}|\langle x, e_n\rangle|^2 \to 0 \quad (N, M \to \infty),$$

und da X vollständig ist, existiert der Limes $\widetilde{x} := \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle e_n \in X$.

(i)⇒(ii). Falls $S^\perp \neq \{0\}$, existiert ein $e_0 \in S^\perp$ mit $\|e_0\| = 1$. Dann ist aber $S \cup \{e_0\}$ ein Orthonormalsystem im Widerspruch zu (i).

(ii)⇒(iii). Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\langle \widetilde{x} - x, e_\ell\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, e_\ell\rangle - \langle x, e_\ell\rangle = \langle x, e_\ell\rangle - \langle x, e_\ell\rangle = 0,$$

d.h. $x - \widetilde{x} \in S^\perp = \{0\}$.

(iii)⇒(iv). Mit (ii) gilt

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \Big\langle \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle e_n, \sum_{\ell\in\mathbb{N}}\langle y, e_\ell\rangle e_\ell\Big\rangle\\ &= \sum_{n,\ell\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_\ell\rangle}\langle e_n, e_\ell\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle},\end{aligned}$$

wobei die absolute Konvergenz aus der Vorbemerkung folgt.

(iv)⇒(v). Setze $x = y$ in (iv).

(v)⇒(i). Sei $\widetilde{S} \supsetneq S$ ein Orthonormalsystem, und sei $e_0 \in \widetilde{S}\setminus S$. Dann gilt $\langle e_0, e_n\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und mit (v) folgt $\|e_0\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle e_0, e_n\rangle|^2 = 0$ im Widerspruch zu $\|e_0\| = 1$. □

3.28 Definition. Ein Orthonormalsystem, welches die äquivalenten Bedingungen von Satz 3.27 erfüllt, heißt ein vollständiges Orthonormalsystem (oder eine Orthonormalbasis von X oder eine Hilbertraumbasis von X).

3.29 Bemerkung. Im Beweis von Satz 3.27 haben wir gesehen: Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge mit $\sum_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|^2 < \infty$. Dann konvergiert $x := \sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n e_n \in X$, und es gilt $\langle x, e_n\rangle = \alpha_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Wir wenden nun die obigen Ergebnisse auf die Fourierreihe an, d.h. nun sei wieder $e_k := (2\pi)^{-n/2}e^{ik\cdot}$, $k \in \mathbb{Z}^n$.

3.30 Lemma. *Die komplexen Exponentialfunktionen $\{e_k : k \in \mathbb{Z}^n\}$ bilden eine Orthnormalbasis von $L^2(\mathbb{T}^n)$.*

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ mit $\langle f, e_k\rangle = \hat{f}(k) = 0$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$. Dann folgt nach dem Eindeutigkeitssatz 3.22 schon $f = 0$ fast überall, d.h. $f = 0$ in $L^2(\mathbb{T}^n)$. Somit ist Bedingung (ii) in Satz 3.27 erfüllt. □

Wir fassen die Aussagen von Satz 3.27 noch einmal für unseren Fall zusammen.

3.31 Satz. *a) Für alle $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ gilt $\int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^2 đx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)|^2$ sowie*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ik\cdot x}$$

mit Konvergenz der Reihe und Gleichheit in $L^2(\mathbb{T}^n)$.
b) Für alle $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ mit $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\alpha_k|^2 < \infty$ existiert ein $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ mit $\hat{f}(k) = \alpha_k$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$.
c) Für $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n)$ gilt $\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}$.
Somit ist $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} \colon L^2(\mathbb{T}^n) \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ ein isometrischer Isomorphismus von Hilberträumen.

4. Paley-Wiener-Sätze und der Shannonsche Abtastsatz

4.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt geht es um Funktionen und Distributionen, deren Fouriertransformierte kompakten Träger haben. In diesem Fall liefern die Sätze vom Paley-Wiener-Typ starke Aussagen, so sind selbst Distributionen mit dieser Eigenschaft nicht nur reguläre Distributionen, sondern sogar Einschränkungen von holomorphen Funktionen.

Ein Beispiel von derartigen Funktionen sind Mobilfunksignale, deren Fouriertransformierte nur in einem gewissen Frequenzband nicht verschwindet. Der berühmte Abtastsatz von Shannon besagt, dass derartige Signale durch ihre Abtastwerte rekonstruiert werden können, was die Grundlage der digitalen Mobilfunktechnik liefert.

a) Die Sätze von Paley und Wiener

4.2 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt f holomorph, falls die Abbildung $z_j \mapsto f(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n)$ holomorph ist für jedes $j = 1, \dots, n$. Wir schreiben in diesem Fall $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Eine Funktion $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$ heißt auch eine ganze Funktion.

4.3 Lemma. *Sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$ mit $f|_{\mathbb{R}^n} = 0$. Dann gilt $f = 0$.*

Beweis. Der Fall $n = 1$ ist aus der Funktionentheorie bekannt. Wir zeigen induktiv folgende Aussage:

$$\text{Falls } z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R} \text{ gilt, so ist } f(z) = 0. \tag{A_k}$$

Die Aussage (A_n), also $k = n$ gilt nach Voraussetzung.

Wir betrachten den Schritt von k nach $k-1$. Definiere

$$g_k(\lambda) := f(z_1, \dots, z_{k-1}, \lambda, z_{k+1}, \dots, z_n).$$

Für $(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ ist $g_k(z_k) = 0$ wegen (A_k). Also gilt $g_k = 0$ auf $\mathbb{R}$. Da g_k eine holomorphe Funktion einer Variablen ist, folgt $g_k(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Somit folgt $f(z) = 0$, falls $z_1, \dots, z_{k-1} \in \mathbb{R}$ gilt. Dies ist aber die Aussage (A_{k-1}).

Die Aussage (A_0) ist die Behauptung des Lemmas. □

Nun können wir bereits den ersten Satz von Paley und Wiener beweisen, der sich mit Funktionen beschäftigt. Wir bezeichnen mit $\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$ den Träger einer Funktion, und mit $B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ die Kugel um den Mittelpunkt a mit Radius r.

4.4 Satz (Satz von Paley-Wiener für Funktionen). *Zu $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert man die komplexe Fourier-Transformation*

$$f(z) := (\mathscr{F}\varphi)(z) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-iz\cdot x} đx \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

a) Sei $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B(0,R)}$. Dann ist $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, und zu jedem $N \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $\gamma_N > 0$ mit

$$|f(z)| \leq \gamma_N (1+|z|)^{-N} e^{R|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n). \tag{4-2}$$

b) Sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$ eine ganze Funktion, und zu jedem $N \in \mathbb{N}$ existiere ein γ_N mit (4-2). Dann gilt $f|_{\mathbb{R}^n} = \mathscr{F}\varphi$ für ein $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B(0,R)}$.

Beweis. a) Für $x \in \overline{B(0,R)}$ ist $|e^{-iz\cdot x}| \leq e^{R|\operatorname{Im} z|}$. Damit existiert das obige Integral, und Differentiation unter dem Integral zeigt, dass f holomorph ist. Es ist

$$z^\alpha f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) z^\alpha e^{-iz\cdot x} đx = (-i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \varphi(x) e^{-iz\cdot x} đx,$$

wobei partiell integriert wurde. Wir erhalten

$$|z^\alpha|\,|f(z)| \leq c \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\, e^{R|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Somit folgt

$$(1+|z|)^N |f(z)| \leq \gamma_N e^{R|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n),$$

d.h. (4-2) gilt.

b) Sei f eine ganze Funktion, welche die Abschätzung (4-2) erfüllt. Definiere

$$\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\xi\cdot x} đ\xi = \mathscr{F}^{-1}(f|_{\mathbb{R}^n})(x).$$

Wegen $\xi \mapsto (1+|\xi|^N) f(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle N folgt $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wie im Beweis von Satz 1.10 a).

(i) Für festes $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n$ und $z' := (z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ betrachten wir das eindimensionale Integral

$$I(\eta_1) := \int_{\mathbb{R}} f(\xi_1 + i\eta_1, z_2, \ldots, z_n) e^{i((\xi_1+i\eta_1)x_1 + z'\cdot x')} d\xi_1 \quad (\eta_1 \in \mathbb{R}).$$

Wir werden zeigen, dass $I(\eta_1) = I(0)$ für alle $\eta_1 \in \mathbb{R}$ gilt. Dazu betrachten wir den Integrationsweg $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, der ein Rechteck in $\mathbb{C}$ mit den Ecken $-K, K, K + i\eta_1, -K + i\eta_1$ einschließt (d.h. γ_1 ist der Weg von $-K$ bis K etc.). Wir setzen

$$g(z_1) := f(z_1, z_2, \dots, z_n)e^{i(z_1x_1+z'\cdot x')} \quad (z_1 = \xi_1 + i\eta_1 \in \mathbb{C}).$$

Da g eine ganze Funktion ist, folgt $\int_\Gamma g(z)dz = 0$. Wegen (4-2) gilt insbesondere

$$|g(\xi_1 + i\eta_1)| \le C(1 + |\xi_1|)^{-2} \cdot e^{R|\eta_1|},$$

und damit folgt

$$\int_{\gamma_2} g(z)dz \to 0 \;\text{ und }\; \int_{\gamma_4} g(z)dz \to 0 \quad \text{für } K \to \infty.$$

Damit erhalten wir

$$\int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_3} g(z)dz \to 0 \quad (K \to \infty).$$

Da das erste Integral gegen $I(0)$ und das zweite gegen $-I(\eta_1)$ konvergiert für $K \to \infty$, folgt $I(\eta_1) = I(0)$.

(ii) Eine Iteration unter Verwendung der Argumente in (i) liefert für alle $\eta \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi + i\eta)e^{ix(\xi+i\eta)}đ\xi \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(iii) Sei nun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für $\eta := \frac{\lambda x}{|x|}$ mit $\lambda > 0$ ist $x \cdot \eta = \lambda|x|$, $|\eta| = \lambda$ und

$$|f(\xi + i\eta)| \cdot |e^{i(\xi+i\eta)\cdot x}| \le \gamma_N(1 + |\xi|)^{-N}e^{(R-|x|)\lambda},$$

wobei (4-2) verwendet wurde. Nach (ii) erhalten wir für $N > n$

$$|\varphi(x)| \le \gamma_N\, e^{(R-|x|)\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{-N}đ\xi \le Ce^{(R-|x|)\lambda}.$$

Nehmen wir nun den Limes $\lambda \to \infty$, so erhalten wir $\varphi(x) = 0$ für alle $|x| > R$.

(iv) Nach Definition gilt $\varphi = \mathscr{F}^{-1}(f|_{\mathbb{R}^n})$, d.h. $f|_{\mathbb{R}^n} = \mathscr{F}\varphi$ als Gleichheit in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Somit gilt für alle $z \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{-iz\cdot x}đx.$$

Da beide Seiten ganze Funktionen sind, gilt die Gleichheit nach Lemma 4.3 für alle $z \in \mathbb{C}^n$. □

Wir wollen den Satz von Paley-Wiener auch für Distributionen formulieren. Dazu benötigen wir zunächst folgende Definition.

4.5 Definition. a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann verschwindet u auf der Menge U, falls $u(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset U$ gilt. Die Menge $\operatorname{supp} u := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\{U \subset \mathbb{R}^n : u \text{ verschwindet auf } U\}$ heißt der Träger von u.
b) Sei $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u$ kompakt, und sei $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi = 1$ auf einer offenen Obermenge von $\operatorname{supp} u$ und $\operatorname{supp}\psi \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann definiert man

$$u(\varphi) := u(\psi\varphi) \quad (\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

Dies definiert eine Fortsetzung $u\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ von $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

4.6 Bemerkung. a) Man beachte, dass $u(\varphi)$ in b) wohldefiniert ist, da einerseits $\psi\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt und andererseits für zwei derartige ψ_1, ψ_2 gilt $\operatorname{supp}(\psi_1 - \psi_2) \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} u$ und damit $u((\psi_1 - \psi_2)\varphi) = 0$.

b) Der Raum $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wird ebenfalls mit einer lokalkonvexen Topolgie versehen. So konvergiert eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ genau dann gegen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, falls für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt: $\sup_{x\in K} |\partial^\alpha f_k(x) - \partial^\alpha f(x)| \to 0$ $(k \to \infty)$. Damit kann man leicht zeigen, dass die in b) definierte Abbildung $u\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ sogar stetig ist. Typische Bezeichnungen sind $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (mit dieser Topologie) und damit $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.

c) Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, und sei $U := \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} f$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset U$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)đx = \int_{\operatorname{supp} f} f(x)\varphi(x)đx = 0,$$

d.h. für die zugehörige reguläre Distribution u_f gilt $\operatorname{supp} u_f \subset \operatorname{supp} f$. Man sieht leicht unter Verwendung der Stetigkeit von f, dass hier sogar Gleichheit gilt.

d) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Dirac-Distribution $\delta_a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ offensichtlich $\operatorname{supp}\delta_a = \{a\}$.

4.7 Lemma. *Sei $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} u \subset \overline{B(0,R)}$. Definiere $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ durch*

$$f(z) := u(x \mapsto e^{-iz\cdot x}) \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Dann ist f eine ganze Funktion, und es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ mit

$$|f(z)| \le C(1 + |z|)^N e^{R|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n). \tag{4-3}$$

Beweis. Wir schreiben in diesem Beweis $e_z(x) := e^{iz\cdot x}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, d.h. es ist $f(z) =$

$u(e_{-z})$.

(i) Um $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$ zu zeigen, genügt es o.E., die Holomorphie der Abbildung $z_1 \mapsto g(z_1) := f(-z_1, -z') = u(e_z)$ für alle $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ zu zeigen. Dazu verwenden wir den Satz von Morera, d.h. wir betrachten ein abgeschlossenes Dreieck $\Delta \subset \mathbb{C}$.

Nach Definition der Topologie auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist die Abbildung $z_1 \mapsto e_{z_1,z'}$, $\mathbb{C} \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für jedes feste $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ stetig, und das Integral

$$F := \int_{\partial\Delta} e_{z_1,z'} dz_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

ist wohldefiniert. Weiter ist die Auswertung $v \mapsto v(x)$, $C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, ebenfalls linear und stetig. Daher kann man Integral und Auswertung vertauschen und erhält

$$F(x) = \int_{\partial\Delta} e_{z_1,z'}(x) dz_1 = \int_{\partial\Delta} e^{iz_1 x} e^{iz'\cdot x'} dz_1 = 0,$$

da der Integrand eine holomorphe Funktion von z_1 ist. Die Stetigkeit von $u\colon C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ (Bemerkung 4.6 b)) erlaubt es nun auch, Integration und Anwendung von u zu vertauschen. Daher gilt wegen $F = 0$

$$0 = u(F) = u\Big(\int_{\partial\Delta} e_{z_1,z'} dz_1\Big) = \int_{\partial\Delta} u(e_{z_1,z'}) dz_1 = \int_{\partial\Delta} g(z_1) dz_1.$$

Nach dem Satz von Morera ist $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$.

(ii) Wir zeigen die Abschätzung (4-3). Sei dazu $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \le h \le 1$, $h(s) = 1$ für $s \le 1$ und $h(s) = 0$ für $s \ge 2$. Für $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ definiert man

$$\psi_z(x) := h\big((|x| - R)|z|\big) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Damit gilt $0 \le \psi_z \le 1$ sowie $\psi_z(x) = 1$ falls $|x| \le R + \frac{1}{|z|}$ und $\psi_z(x) = 0$ falls $|x| \ge R + \frac{2}{|z|}$. Nach Definition gilt also $u(e_z) = u(\psi_z e_{-z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Es gilt $|x| \le R + \frac{2}{|z|}$ $(x \in \operatorname{supp} \psi_z)$ und damit

$$|e^{-iz\cdot x}| = e^{\operatorname{Im} z\cdot x} \le e^2 e^{R|\operatorname{Im} z|} \quad (x \in \operatorname{supp} \psi_z).$$

Somit folgt für die Halbnorm p_0 (siehe Bemerkung 1.6)

$$p_0(\psi_z e_{-z}) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\psi_z(x) e^{-iz\cdot x}| \le e^2 e^{R|\operatorname{Im} z|}.$$

Mit Hilfe der Leibniz-Formel schätzt man die höheren Halbnormen p_m ab (man beachte, dass bei jeder Ableitung sowohl bei ψ_z als auch bei e_{-z} im Wesentlichen ein Faktor $|z|$ hinzukommt). Man erhält

$$p_m(\psi_z e_{-z}) \le C_m (1 + |z|)^m e^{R|\operatorname{Im} z|} \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Da $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, existiert nach Beispiel 2.11 (i) ein $N \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \geq 0$ mit $|u(\varphi)| \leq Cp_N(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$. Speziell für $\varphi = \psi_z e_{-z}$ erhalten wir

$$|f(z)| = |u(\psi_z e_{-z})| \leq Cp_N(\psi_z e_{-z}) \leq CC_N(1+|z|)^N e^{R|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

□

Das letzte Lemma ist im Wesentlichen eine Richtung des folgenden Satzes.

4.8 Satz (Satz von Paley-Wiener für Distributionen)**.**
a) Sei $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} u \subset \overline{B(0,R)}$*, und sei*

$$f(z) := u(x \mapsto e^{-iz\cdot x}) \quad (z \in \mathbb{C}^n). \tag{4-4}$$

Dann ist $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$, es gilt $\mathscr{F}u = f|_{\mathbb{R}^n}$ (wobei $f|_{\mathbb{R}^n}$ als reguläre Distribution aufgefasst wird). Ferner existiert ein $C \geq 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(z)| \leq C(1+|z|)^N e^{R|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n). \tag{4-5}$$

b) Sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$, für welche $C \geq 0$, $N \in \mathbb{N}$ und $R \geq 0$ existieren mit (4-5). Dann existiert ein $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset \overline{B(0,R)}$ *so, dass die Darstellung (4-4) gilt. Insbesondere ist dann $f|_{\mathbb{R}^n} = \mathscr{F}u$.*

Beweis. a) Die Aussage $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$ sowie die Abschätzung (4-5) wurden schon in Lemma 4.7 gezeigt. Wir zeigen noch $\hat{u} = f|_{\mathbb{R}^n}$. Dazu wählen wir $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \psi$ kompakt und $\psi = 1$ in $B(0, R+1)$. Dann gilt $u = \psi \cdot u$, und mit Satz 2.27 folgt $\hat{u} = \hat{u} * \hat{\psi}$. Damit ist $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Satz 2.26). Weiter folgt

$$\begin{aligned}
\hat{u}(x) &= (\hat{u} * \hat{\psi})(x) = \hat{u}[\hat{\psi}(x - \cdot)] = \hat{u}\big[\xi \mapsto \hat{\psi}(x-\xi)\big] \\
&= \hat{u}\big[\mathscr{F}^{-1}(y \mapsto e^{-ix\cdot y}\psi(y))\big] = u\big[y \mapsto e^{-ix\cdot y}\psi(y)\big] = (\psi \cdot u)[y \mapsto e^{-ix\cdot y}] \\
&= u[y \mapsto e^{-ix\cdot y}] = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

b) Sei nun $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$, und es gelte (4-5). Da $|f(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N$ gilt, definiert $f|_{\mathbb{R}^n}$ eine reguläre Distribution, d.h. es gilt $f|_{\mathbb{R}^n} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $u := \mathscr{F}^{-1}(f|_{\mathbb{R}^n})$.

Sei $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} h \subset \overline{B(0,1)}$ und $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx = 1$. Wir setzen $h_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} h(\frac{x}{\varepsilon})$ und

$$f_\varepsilon(z) := f(z)\hat{h}_\varepsilon(z) \quad (z \in \mathbb{C}^n),$$

wobei $\hat{h}_\varepsilon \in \mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$ nach dem Satz von Paley-Wiener für Funktionen (Satz 4.4) gilt. Für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $\gamma_N \geq 0$ so, dass

$$|f_\varepsilon(z)| \leq \gamma_N(1+|z|)^{-N} e^{(R+\varepsilon)|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Nach Satz 4.4 folgt $f_\varepsilon = \hat{g}_\varepsilon$ mit einer Funktion $g_\varepsilon \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} g_\varepsilon \subset \overline{B(0, R+\varepsilon)}$.

Sei nun $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \hat{\varphi} \cap \overline{B(0,R)} = \emptyset$. Dann gilt $\hat{\varphi} g_\varepsilon = 0$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Somit folgt

$$\begin{aligned} u(\hat{\varphi}) = \hat{u}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\varphi(\xi) đ\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(\xi)\varphi(\xi) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(x)\hat{\varphi}(x) đx = 0. \end{aligned}$$

Hier wurden $f_\varepsilon(\xi) \to f(\xi)$ $(\varepsilon \to 0)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ sowie majorisierte Konvergenz verwendet (beachte $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$). Wir erhalten damit $u(\hat{\varphi}) = 0$ für alle $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \hat{\varphi} \cap \overline{B(0,R)} = \emptyset$, d.h. $\operatorname{supp} u \subset \overline{B(0,R)}$. □

b) Der Shannonsche Abtastsatz

Der Shannonsche Abtastsatz ist eine der Grundlagen der mobilen Kommunikation und besagt, dass bandbegrenzte Signale ohne Informationsverlust durch ihre Werte auf einem zeitlichen Gitter rekonstruiert werden können. Unter einem Signal wird hier eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ verstanden. Dabei wird (für $n = 1$) $f(t)$ als der Wert des Signals zur Zeit t aufgefasst. Die Signaltheorie und ihre stochastische Erweiterung (in der ein Signal ein zeitkontinuierlicher stochastischer Prozess ist) haben fundamentale Bedeutung in den Anwendungen, z.B. für Fernseh- und Mobilfunksignale, drahtgebundene Kommunikation, Akustik, Bildverarbeitung.

4.9 Definition. Eine Distribution $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt bandbegrenzt mit Bandbreite $b > 0$ oder b-bandbegrenzt, falls

$$\operatorname{supp} \hat{u} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi|_\infty \le b\}.$$

4.10 Bemerkung. Nach dem Satz von Paley-Wiener ist eine bandbegrenzte temperierte Distribution eine C^∞-Funktion. Insbesondere nehmen wir für bandbegrenzte L^2-Funktionen im folgenden stets den C^∞-Repräsentanten. In diesem Sinn ist für eine bandbegrenzte Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ auch der Wert $f(x)$ an einer Stelle wohldefiniert.

4.11 Beispiel. Für die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{[-1,1]^n}$ gilt

$$\begin{aligned} (\mathscr{F}^{-1}\mathbb{1}_{[-1,1]^n})(x) &= \int_{[-1,1]^n} e^{ix\cdot\xi} đ\xi = (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^n \frac{e^{ix_j\xi_j}}{ix_j}\Big|_{\xi_j=-1}^1 \\ &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^n \frac{2(e^{ix_j} - e^{-ix_j})}{2ix_j} = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{n/2} \operatorname{sinc}(x) \end{aligned}$$

mit
$$\operatorname{sinc}(x) := \prod_{j=1}^n \frac{\sin x_j}{x_j}.$$
Damit ist sinc eine 1-bandbegrenzte Funktion. Definiert man $\operatorname{sinc}_a(x) := \operatorname{sinc}(ax)$ für $a > 0$, so gilt
$$(\mathscr{F} \operatorname{sinc}_a)(\xi) = a^{-n}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{n/2} \mathbb{1}_{[-a,a]^n}(\xi).$$
Für $n = 1$ heißt die sinc-Funktion auch der ideale Tiefpassfilter.

4.12 Lemma. *a) Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, und für $R > 0$ sei*
$$g_R(\xi) := \int_{|\xi|\le R} f(x)e^{-ix\cdot\xi} đx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$
Dann gilt $g_R \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ und $\|\hat f - g_R\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$ $(R \to \infty)$.
b) Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat f(\xi)e^{ix\cdot\xi} đ\xi. \tag{4-6}$$
Falls f stetig ist, gilt dies für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. a) Man beachte, dass $g_R(\xi)$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiert ist, da $f\mathbb{1}_{B(0,R)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt. Weiter folgt $g_R \in C(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 1.3. Wegen $g_R = \mathscr{F}(f\mathbb{1}_{B(0,R)})$ und $\|f - f\mathbb{1}_{B(0,R)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$ $(R \to \infty)$ folgt die Aussage nun aus dem Satz von Plancherel.

b) Wir wenden a) auf $\hat f$ an (mit $\mathscr{F}^{-1}$ statt $\mathscr{F}$) und erhalten
$$f = \lim_{R\to\infty} f_R \quad (R \to \infty) \quad \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n)$$
mit $f_R(x) := \int_{|\xi|\le R} \hat f(\xi)e^{ix\cdot\xi} đ\xi$. Damit konvergiert (für eine Teilfolge) f_R auch punktweise fast überall gegen f. Wegen $\hat f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert f_R punktweise gegen die rechte Seite von (4-6), was (4-6) zeigt. Falls f stetig ist, sind beide Seiten von (4-6) stetige Funktionen, und wir erhalten Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}^n$. □

4.13 Lemma. *Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ b-bandbegrenzt, und sei $h \le \frac{\pi}{b}$. Dann gilt*
$$(\mathscr{F} f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2}h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(kh)e^{-ihk\cdot\xi} \quad \big(\textit{Gleichheit in } L^2([-\tfrac{\pi}{h}, \tfrac{\pi}{h}]^n)\big).$$

Beweis. Die Funktionen $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ mit

$$\varphi_k(\xi) := (2\pi)^{-n/2} h^{n/2} e^{-ikh\cdot\xi}$$

bilden eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $H := L^2([-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n)$. Da $\operatorname{supp}\hat{f} \subset [-b,b]^n \subset [-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n$ gilt (beachte $b \le \frac{\pi}{h}$), gilt nach Satz 3.27 in H die Entwicklung

$$\hat{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle \hat{f}, \varphi_k\rangle_H \varphi_k.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\langle \hat{f}, \varphi_k\rangle &= h^{n/2} \int_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n} \hat{f}(\xi) e^{ikh\cdot\xi} đ\xi = h^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ikh\cdot\xi} đ\xi \\ &= h^{n/2} (\mathscr{F}^{-1}\hat{f})(hk) = h^{n/2} f(hk).\end{aligned}$$

Hier wurde $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und Lemma 4.12 verwendet. Also gilt

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(kh) e^{-ihk\cdot\xi} \quad \text{(Konvergenz in } H).$$

□

Der folgende Satz ist einer der berühmtesten Sätze der Signaltheorie.

4.14 Satz (Shannonscher Abtastsatz)**.** *Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ b-bandbegrenzt mit $h \le \frac{\pi}{b}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(x-kh)\Big).$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in $\mathbb{R}^n$.

Beweis. (i) Nach Lemma 4.13 gilt in $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ihk\cdot\xi} \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n}(\xi).$$

Da die Reihe in $L^2(\mathbb{R}^n)$ konvergiert und $\mathscr{F} \in L(L^2(\mathbb{R}^n))$ gilt, erhalten wir in $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} f(x) = (\mathscr{F}^{-1}\hat{f})(x) &= (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) \mathscr{F}^{-1}[e^{ihk\cdot\xi} \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n}](x) \\ &= (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) (\mathscr{F}^{-1}\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n})(x-hk) \\ &= (2\pi)^{-n/2} h^n \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{n/2} \Big(\frac{\pi}{h}\Big)^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk) \operatorname{sinc}_{\frac{\pi}{h}}(x-hk) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(hk)\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(x-kh)\Big).$$

Dabei wurde Beispiel 4.11 verwendet.

(ii) Sei wieder $H := L^2([-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n)$ und $\varphi_k(\xi) := (2\pi)^{-n/2}h^{n/2}e^{-ikh\cdot\xi}$ ($k\in\mathbb{Z}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$). Dann ist $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ eine Orthonormalbasis von H. Wir betrachten die $\frac{\pi}{h}$-bandbegrenzte Funktion $g = \mathrm{sinc}(\frac{\pi}{h}(x-\cdot))$ für festes x. Wie im Beweis von Lemma 4.13 gezeigt wurde, gilt $h^{n/2}g(hk) = \langle\hat g,\varphi_k\rangle$ ($k\in\mathbb{Z}^n$).

Um die punktweise Konvergenz der Reihe zu zeigen, verwenden wir die Gleichheit

$$h^n\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|g(hk)|^2 = \sum_k|\langle\hat g,\varphi_k\rangle_H|^2 = \|\hat g\|_H^2 = \|\hat g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \infty.$$

Dabei wurde die Besselsche Gleichung in H und der Satz von Plancherel in $L^2(\mathbb{R}^n)$ verwendet. Wegen $g = \mathrm{sinc}(\frac{\pi}{h}\cdot - \frac{\pi}{h}x)$ ist die Fourier-Transformierte gegeben durch

$$\hat g(\xi) = \Big(\frac{\pi}{h}\Big)^{-n}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{n/2}\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n}(\xi)e^{-i\frac{\pi}{h}x\cdot\xi}.$$

Damit gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big|\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(x-hk)\Big)\Big|^2 = c_1\cdot\|\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}]^n}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 =: c_2$$

mit einer von x unabhängigen Konstanten c_2, d.h. wir erhalten $(\mathrm{sinc}(\frac{\pi}{h}(x-hk)))_{k\in\mathbb{Z}^n}\in\ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Wegen $f(hk) = h^{-n/2}\langle f,\varphi_k\rangle$ ($k\in\mathbb{Z}^n$) gilt auch $(f(hk))_{k\in\mathbb{Z}^n}\in\ell^2(\mathbb{Z}^n)$.

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt

$$\begin{aligned}\sum_{|k|\ge N}&\Big|f(hk)\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(x-hk)\Big)\Big|\\ &\le\Big(\sum_{|k|\ge N}|f(hk)|^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{|k|\ge N}\Big|\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{h}(x-hk)\Big)\Big|^2\Big)^{1/2}\\ &\le\sqrt{c_2}\Big(\sum_{|k|\ge N}|f(hk)|^2\Big)^{1/2}\to 0\quad(N\to\infty).\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig in x. Insbesondere ist der Limes stetig in x.

Nach (i) ist f der L^2-Limes der Reihe im Abtastsatz. Nach (ii) konvergiert diese Reihe punktweise gegen eine stetige Funktion, und damit gilt punktweise Gleichheit zunächst fast überall und schließlich, da auch f stetig ist, für alle $x\in\mathbb{R}^n$. □

4.15 Korollar. *Die Funktion $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ sei bandbegrenzt und besitze kompakten Träger. Dann ist $f = 0$.*

Beweis. Da der Träger von f kompakt ist, reduziert sich die Reihe im Shannonschen Abtastsatz auf eine endliche Summe. Die Funktion f ist also eine endliche Linearkombination von sinc-Funktionen, d.h. $\hat{f}$ ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen. Andererseits ist $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, da f kompakten Träger besitzt. Dies ist nur möglich, falls $\hat{f} = 0$ und damit $f = 0$ gilt. □

4.16 Bemerkung. a) Es gibt eine graphische Veranschaulichung des Beweises des Abtastsatzes:

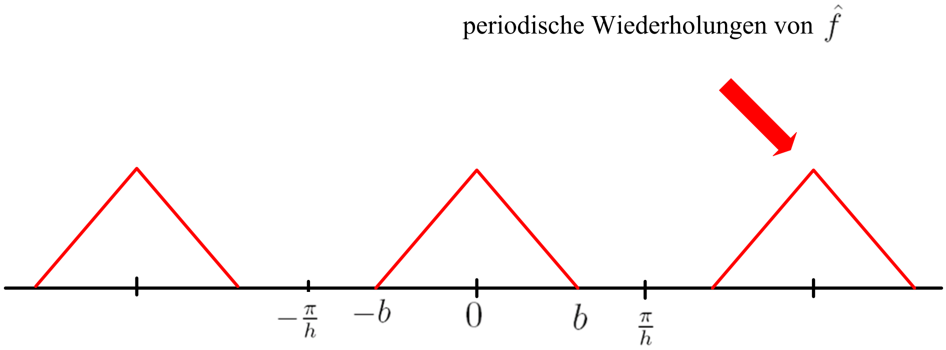

Abbildung 5: Der Shannonsche Abtastsatz

Nur für $\frac{\pi}{h} \geq b$, d.h. für $h \leq \frac{\pi}{b}$, gibt es keine Überlappungen, und die Funktion kann eindeutig rekonstruiert werden. Im Falle $h < \frac{\pi}{b}$ spricht man von Überabtastung (oversampling), im Falle $h > \frac{\pi}{b}$ von Unterabtastung (undersampling).

b) In Anwendungen heißt $h =: T_s$ das Abtast- oder Sampling-Intervall, und $f_s := \frac{1}{T_s}$ die Abtastrate oder Symbolrate. Der Spektralbereich (oder Spektrum) eines Signals $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird definiert als $\frac{1}{2\pi} \operatorname{supp} \hat{f}$. Bei einer b-bandbegrenzten Funktion ist das maximal auftretende Spektrum also $\frac{b}{2\pi} =: f_{\max}$. Die Abtastbedingung lautet damit $T_s \leq \frac{1}{2f_{\max}}$ oder $f_s \geq 2f_{\max}$.

c) Sei $h \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{h} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann wird durch $M_h f := \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}h \cdot \mathscr{F}f)$ ein stetiger linearer Operator $M_h : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert. Nach Satz 2.27 gilt $M_h f = h * f$. In den Anwendungen spricht man von einem Filter. Dabei heißt h die Impulsantwort, d.h. die Antwort auf den Dirac-Impuls δ_0 (wegen $\delta_0 * h = h$ für $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$), und $\mathscr{F}h$ das Frequenzbild des Filters. Korollar 4.15 zeigt, dass es keinen Filter gibt, der im Zeit- und im Frequenzbereich kompakten Träger hat.

4.17 Beispiel (Datenraten bei GSM). Bei reiner Gesprächsverbindung am Handy wird meistens das 2G-Verfahren GSM verwendet (bei Datenübertragung je nach Verfügbarkeit das 3G-Verfahren HSDPA oder das 4G-Verfahren LTE). Das Mobilfunksystem GSM (in der fullrate-Version) besitzt folgende Datenraten:

- Datenbitrate nach Digitalisierung der Sprache: 8.0 kbit/s,

- Datenbitrate nach Sprachkodierung: 13.0 kbit/s,
- Datenbitrate nach Kanalkodierung: 22.8 kbit/s,
- Bitrate nach Hinzufügen von Pilotsymbolen: 31.3 kbit/s,
- Bitrate pro Kanal (8 Benutzer, jeder 13. Frame ist Kontrollframe): $8 \cdot \frac{13}{12} \cdot 31.3$ kbit/s = 271 kbit/s,
- Symbolrate (1 Symbol = 1 bit): $f_s = 271$ kbit/s

In der heute verbreiteten halfrate-Version stehen pro Benutzer nach Kanalkodierung nur 11.4 kbit/s zur Verfügung, bei gleicher Symbolrate. Die mit dieser Symbolrate übertragenen Signale sind bandbegrenzt mit einer spektralen Bandbreite von $f_{\max} = \frac{f_s}{2}$. Zur Übertragung braucht man also (im Basisband) einen Kanal mit Frequenzen $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$. Dieses Signal wird durch Modulation zu einem hochfrequenten Signal (HF-Signal). Die Modulation besteht dabei aus der Multiplikation mit e^{if_0x} mit der Trägerfrequenz f_0. Typische Werte sind

- $f_0 \approx 1800$ MHz (für O_2, T-D1),
- $f_0 \approx 900$ MHz (für e-plus).

Ein Kanal in diesem Frequenzband müsste somit 271 kHz breit sein. In GSM sind die Kanäle nur 200 kHz breit, man hat also Überlappungen. Es gibt 375 Kanäle im oberen Frequenzband und 125 Kanäle im unteren Frequenzband.

5. Positiv definite Funktionen und der Satz von Bochner

5.1 Worum geht's? Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ heißt positiv definit, falls

$$\sum_{k,\ell=1}^{N} c_k c_\ell f(x_k - x_\ell) \geq 0$$

für alle $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und alle $x_1, \dots, x_N \in G$ gilt. Diese Eigenschaft tritt z.B. auf bei Zeitreihen, bei welchen die Kovarianz nur von der Zeitdifferenz abhängt. Damit kann man die Autokorrelationsfunktion der Zeitreihe definieren, welche positiv definit ist. Ein anderes Beispiel ist die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen, welche sehr nützlich ist, um Konvergenzaussagen zu beweisen, etwa den zentralen Grenzwertsatz. Der Satz von Bochner in seinen verschiedenen Varianten besagt, dass die positiv definiten Funktionen genau die Fouriertransformierten von (positiven) Maßen sind. Wir definieren daher zunächst die Fourier-(Stieltjes-)Transformierte von Maßen und untersuchen einige Eigenschaften, bevor der Satz von Bochner formuliert und bewiesen wird. Um die verschiedenen Fälle (diskrete Zeitreihen, kontinuiuerliche Signale) simultan behandeln zu können, betrachten wir abstrakt G und den Dualraum Γ und vereinheitlichen damit auch die ersten beiden Kapitel dieser Vorlesung.

a) Die Fourier-Stieltjes-Transformation

Wir haben bisher die beiden Fälle $\mathbb{T}^n$ und $\mathbb{Z}^n$ separat betrachtet. Die wesentlichen Eigenschaften und Beweise für die Fouriertransformation auf diesen beiden Räumen sind aber vollständig analog. Es existiert eine allgemeine Theorie der Fouriertransformation auf allgemeinen Räumen, genauer gesagt auf lokal-kompakten abelschen Gruppen, welche wir hier nicht im Detail behandeln wollen, da die Begriffe und Methoden zum großen Teil eine Wiederholung der Kapitel 1 und 2 darstellen. Dennoch werden wir im Folgenden den Torus, den Ganzraumfall sowie den Fall $\mathbb{Z}^n$ (in gewisser Weise der Dualraum von $\mathbb{T}^n$) simultan behandeln und daher folgende Bezeichnungen verwenden:

(i) Im Torusfall sei $G := \mathbb{T}^n$ und $\Gamma := \mathbb{Z}^n$. Als Maß betrachten wir das sogenannte Haarmaß λ_G, gegeben durch $d\lambda_G(x) = đx = (2\pi)^{-n}dx$. Auf Γ betrachten wir als Haarmaß das Zählmaß $\lambda_\Gamma \zeta\colon \mathscr{P}(\mathbb{Z}^n) \to [0,\infty]$, $\zeta(A) := |A| \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Wir schreiben wieder $đ\xi := d\zeta$. Man beachte, dass auf Γ die L^p-Räume Summenräume sind, d.h. etwa $L^1(\Gamma) = L^1(\lambda_\Gamma) = L^1(\zeta) = \ell^1(\mathbb{Z}^n)$. Die Fouriertransformation ist gegeben durch $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$.

(ii) Im Ganzraumfall setzen wir $G := \mathbb{R}^n$ und $\Gamma := \mathbb{R}^n$ mit den Maßen $d\lambda_G(x) := đx := (2\pi)^{-n/2}dx$ sowie $d\lambda_\Gamma(\xi) := đ\xi := (2\pi)^{-n/2}d\xi$. Hier ist die Fouriertransformation gegeben durch $\mathscr{F}$.

(iii) In Ergänzung der obigen beiden Fälle betrachten wir auch $G := \mathbb{Z}^n$ mit dem Haarmaß $d\lambda_G(x) := đx := d\zeta(x)$ und $\Gamma := \mathbb{T}^n$ mit dem Haarmaß $d\lambda_\Gamma(\xi) := đ\xi := (2\pi)^{-n}d\xi$. In diesem Fall ist die Fouriertransformation gegeben durch

$$(\mathscr{F}_{\mathbb{Z}^n} f)(\xi) := \int_{\mathbb{Z}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)đx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{-ik\cdot\xi} f(k) \quad (\xi \in \mathbb{T}^n).$$

Im Folgenden sei also stets $(G, \Gamma, \lambda_G, \lambda_\Gamma, \mathscr{F}_G)$ wie in einer der Fälle (i)-(iii) gegeben.

Die Faltung ist wieder definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_G f(y)g(x-y)đy \quad (x \in G).$$

Wie oben für die Fälle (i) und (ii) gezeigt, ist $\mathscr{F}_G \colon L^1(G) \to C(\Gamma)$ stetig und $\mathscr{F}_G \colon L^2(G) \to L^2(\Gamma)$ ein isometrischer Isomorphismus.

5.2 Definition. a) Sei X eine Menge und $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über X. Dann heißt eine Abbildung $\mu \colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Maß, falls $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ für alle paarweise disjunkten Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ gilt. Falls $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt wird, spricht man auch von einem signierten Maß. Man beachte, dass der Wert ∞ hier ausgeschlossen ist.
Falls X ein topologischer Raum ist, betrachten wir stets $\mathscr{A} := \mathscr{B}(X)$, die Borel-$\sigma$-Algebra von X.
b) Sei X ein topologischer Raum und $\mu \colon \mathscr{B}(X) \to \mathbb{C}$ ein komplexes Maß. Dann definiert man das Variationsmaß $|\mu| \colon \mathscr{B}(X) \to [0,\infty)$ durch

$$|\mu|(A) := \sup\Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n)| : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A,\ A_n \in \mathscr{A} \text{ paarweise disjunkt}\Big\}.$$

Die Totalvariation $\|\mu\|_{M(X)}$ wird definiert durch

$$\|\mu\|_{M(X)} := |\mu|(X).$$

Das Maß μ heißt regulär, falls

$$|\mu|(A) = \sup\big\{|\mu|(K) : K \subset\subset A\big\} = \inf\big\{|\mu|(U) : U \supset A,\ U \text{ offen}\big\}$$

für alle $A \in \mathscr{B}(X)$ gilt. Dabei schreiben wir $K \subset\subset A$, falls $K \subset A$ gilt und K kompakt ist. Die Menge aller regulären komplexen Maße wird mit $M(X)$ bezeichnet.
c) Falls $\mu \in M(X)$ mit $\mu(A) \geq 0$ $(A \in \mathscr{B}(X))$, so schreiben wir $\mu \in M_+(X)$. Man spricht auch von der Menge aller positiven Maße. (Man beachte, dass jedes $\mu \in M_+(X)$ wegen $\mu(X) = |\mu|(X) < \infty$ ein endliches Maß ist.)

5.3 Bemerkung. a) Man kann zeigen: Für $\mu \in M(X)$ ist $|\mu|$ ein positives Maß, und $\|\cdot\|_{M(X)}$ ist eine Norm auf $M(X)$, mit welcher $M(X)$ zu einem Banachraum wird.

b) Für jedes $\mu \in M(X)$ existiert die Jordan-Zerlegung

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4 \quad \text{mit } \mu_j \in M_+(X).$$

Unter geeigneten Zusatzbedingungen an μ_j ist diese Zerlegung eindeutig. Die Existenz der Jordanzerlegung wird hier nicht bewiesen.

5.4 Definition (Faltung von Maßen)**.** Für $\mu, \nu \in M(G)$ ist die Faltung $\mu * \nu \colon \mathscr{B}(G) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(\mu * \nu)(A) := (\mu \otimes \nu)\big(\{(x,y) \in G \times G : x + y \in A\}\big) \quad (A \in \mathscr{B}(G)).$$

Dabei ist $\mu \otimes \nu \colon \mathscr{B}(G \times G) \to \mathbb{C}$ das Produktmaß von μ und ν.

5.5 Satz. *a) Für $\mu, \nu \in M(G)$ ist $\mu * \nu \in M(G)$.*
b) Seien $\mu, \nu \in M(G)$. Dann gilt für jede beschränkte messbare Funktion $f \colon G \to \mathbb{C}$

$$\int_G f(x) d(\mu * \nu)(x) = \int_G \int_G f(x+y) d\mu(x) d\nu(y).$$

c) Die Faltung $* \colon M(G) \times M(G) \to M(G)$ ist kommutativ und assoziativ.

Beweis. Aufgrund der Jordan-Zerlegung genügt es, $\mu, \nu \in M_+(G)$ zu betrachten.

a) Da die Addition $a \colon G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto x + y$, stetig und damit messbar ist, ist $\mu * \nu = (\mu \otimes \nu) \circ a^{-1}$ ein Maß. Zu zeigen ist, dass $\mu * \nu$ regulär ist, wobei wir ohne Beweis verwenden, dass das Produktmaß regulär ist.

Sei $A \in \mathscr{B}(G)$. Wir definieren $\widetilde{A} := a^{-1}(A) \in \mathscr{B}(G \times G)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\mu \otimes \nu$ regulär ist, existiert ein $\widetilde{K} \subset\subset G \times G$ mit

$$(\mu \otimes \nu)(\widetilde{K}) > (\mu \otimes \nu)(\widetilde{A}) - \varepsilon.$$

Die Menge $K := a(\widetilde{K})$ ist kompakt mit $\widetilde{K} \subset a^{-1}(K)$, und damit folgt

$$(\mu * \nu)(K) = (\mu \otimes \nu)(a^{-1}(K)) \geq (\mu \otimes \nu)(\widetilde{K}) > (\mu \otimes \nu)(\widetilde{A}) - \varepsilon = (\mu * \nu)(A) - \varepsilon.$$

Dies zeigt die eine Hälfte der Regularität, die andere folgt durch Komplementbildung. Also gilt $\mu * \nu \in M(G)$.

b) Für $\mu, \nu \in M(G)$ und jede messbare Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int_G f(x)d(\mu * \nu)(x) &= \int_G f(x)d\big[(\mu \otimes \nu) \circ a^{-1}\big](x)\\ &= \int_{G\times G} f(a(x,y))d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_{G\times G} f(x+y)d(\mu\otimes\nu)(x,y)\\ &= \int_G\int_G f(x+y)d\mu(x)d\nu(y).\end{aligned}$$

c) Offensichtlich ist die Faltung kommutativ. Für den Nachweis der Assoziativität definieren wir zu $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in M(G)$ die gemeinsame Faltung durch

$$(\mu_1 * \mu_2 * \mu_3)(A) := (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3)(a_3^{-1}(A)) \quad (A \in \mathscr{B}(G)),$$

wobei $a_3\colon G\times G\times G \to G$, $(x_1,x_2,x_3) \mapsto x_1+x_2+x_3$ sei. Wie in Teil b) sieht man die Gleichheit

$$\begin{aligned}(\mu_1 * \mu_2 * \mu_3)(A) &= \int_{G^3} \mathbb{1}_A(x_1+x_2+x_3)d\big(\mu_1\otimes\mu_2\otimes\mu_3\big)(x_1,x_2,x_3)\\ &= \int_G \Big[\int_{G\times G} \mathbb{1}_A(x_1+x_2+x_3)d[\mu_1\otimes\mu_2](x_1,x_2)\Big]d\mu_3(x_3).\end{aligned}$$

Dies zeigt $\mu_1 * \mu_2 * \mu_3 = (\mu_1 * \mu_2) * \mu_3$. Da die Faltung kommutativ ist, folgt daraus die Assoziativität. □

Eine der wichtigsten Beweiszutaten für den Satz von Bochner ist ein Darstellungssatz von Riesz, welcher stetige lineare Funktionale auf dem Raum $C_0(G)$ mit Maßen identifiziert. Im Folgenden bezeichnen wir mit $C_c(G)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon G \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger und mit $C_0(G)$ die Menge aller $f \in C(G)$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \subset\subset G$ mit $|f(x)| < \varepsilon$ $(x \in G \setminus K)$.

5.6 Satz (Satz von Riesz)**.** *Zu $\mu \in M(G)$ sei die Abbildung $T_\mu\colon C_0(G) \to \mathbb{C}$ definiert durch*

$$T_\mu f := \int_G f(x)d\mu(x) \quad (f \in C_0(G)).$$

Dann gilt $T_\mu \in (C_0(G))'$, und die Abbildung $\mu \mapsto T_\mu$, $M(G) \to (C_0(G))'$ ist ein isometrischer Isomorphismus von Banachräumen. Insbesondere gilt

$$\|\mu\|_{M(G)} = \|T_\mu\|_{(C_0(G))'} = \sup_{\substack{f\in C_0(G)\\ \|f\|_\infty = 1}} \Big|\int_G f(x)d\mu(x)\Big| \quad (\mu \in M(G)),$$

und zu jedem $T \in (C_0(G))'$ existiert genau ein $\mu \in M(G)$ mit $T = T_\mu$. Dabei *ist $\mu \in M_+(G)$ genau dann, wenn T_μ ein positives Funktional ist, d.h. wenn $T_\mu f \geq 0$ für alle $f \geq 0$ gilt.*

Der Satz von Riesz wird hier nicht bewiesen.

5.7 Satz. *Der Raum $M(G)$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{M(G)}$ und der Multiplikation $*\colon M(G) \times M(G) \to M(G)$, ist eine kommutative Banachalgebra mit Einheit δ_0. Insbesondere gilt*

$$\|\mu * \nu\|_{M(G)} \leq \|\mu\|_{M(G)} \|\nu\|_{M(G)} \quad (\mu, \nu \in M(G)). \tag{5-1}$$

Beweis. Nach Bemerkung 5.3 ist $M(G)$ ein Banachraum, und nach Satz 5.5 ist die Faltung wohldefiniert, kommutativ und assoziativ. Wir müssen noch die Abschätzung (5-1) zeigen. Sei dazu $f \in C_0(G)$ mit $\|f\|_\infty = 1$. Dann gilt mit Satz 5.5 b) und dem Satz von Riesz

$$\begin{aligned}\Big| \int_G f(x) d(\mu * \nu)(x) \Big| &\leq \int_G \int_G |f(x+y)| d\mu(x) d\nu(y) \\ &\leq \int_G \|\mu\|_{M(G)} d\nu(y) \leq \|\mu\|_{M(G)} \|\nu\|_{M(G)}.\end{aligned}$$

Für das Dirac-Maß δ_0 gilt nach Satz 5.5 b) und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}(\mu * \delta_0)(A) &= \int_G \Big[\int_G \mathbb{1}_A(x+y) d\delta_0(y) \Big] d\mu(x) \\ &= \int_G \mathbb{1}_A(x+0) d\mu(x) = \mu(A) \quad (\mu \in M(G),\ A \in \mathscr{B}(G)).\end{aligned}$$

Damit besitzt $M(G)$ bezüglich der Faltung die Einheit δ_0. □

5.8 Bemerkung. Im Fall $G = \mathbb{R}^n$ ist jedes $\mu \in M(G)$ eine Linearkombination von endlichen Maßen (Jordan-Zerlegung), damit kann μ auch als Element von $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden. Die Definition der Fouriertransformation für Maße (siehe unten) stimmt mit der Faltung und der Fouriertransformation in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ überein, wie man sofort an den Definitionen sieht. Damit kann $M(\mathbb{R}^n)$ als Teilraum von $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ betrachtet werden, und es gilt etwa die Bijektivität der Fouriertransformation $\mathscr{F}\colon M(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{F}(M(\mathbb{R}^n))$. Die obige Definition der Faltung zweier Maße erlaubt es uns allerdings, $M(\mathbb{R}^n)$ als Unteralgebra von $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ zu betrachten.

Man kann auch für die anderen beiden Fälle $G = \mathbb{T}^n$ und $G = \mathbb{Z}^n$ entsprechend temperierte Distributionen definieren und erhält wieder $M(G) \subset \mathscr{S}'(G)$.

5.9 Definition. Für $\mu \in M(G)$ ist die Fourier-Stieltjes-Transformierte $\mathscr{F}_{M(G)}$ definiert durch

$$(\mathscr{F}_{M(G)}\mu)(\xi) := \hat{\mu}(\xi) := \int_G e^{-ix\cdot\xi} d\mu(x) \quad (\xi \in \Gamma).$$

5.10 Lemma. *a) Für $\mu \in M(G)$ ist $\hat{\mu}\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig und beschränkt mit $\|\hat{\mu}\|_\infty \le \|\mu\|_{M(G)}$.*
b) Für $\mu, \nu \in M(G)$ gilt

$$\mathscr{F}_{M(G)}(\mu * \nu) = (\mathscr{F}_{M(G)}\mu)(\mathscr{F}_{M(G)}\nu).$$

Für das Maß $\widetilde{\mu}\colon \mathscr{B}(G) \to \mathbb{C}$, definiert durch $\widetilde{\mu}(A) := \overline{\mu(\{x : -x \in A\})}$ $(A \in \mathscr{B}(G))$ gilt

$$(\mathscr{F}_{M(G)}\widetilde{\mu})(\xi) = \overline{(\mathscr{F}_{M(G)}\mu)(\xi)} \quad (\xi \in \Gamma).$$

Somit ist die Abbildung $\mathscr{F}_{M(G)}\colon M(G) \to C(\Gamma)$ ein stetiger Homomorphismus von Banachalgebren.

Beweis. a) Es gilt $|\hat{\mu}(\xi)| \le \|\mu\|_{M(G)}$ nach dem Satz von Riesz, damit ist $\hat{\mu}$ beschränkt. Da μ regulär ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \subset\subset G$ mit $|\mu|(G \setminus K) < \varepsilon$. Für $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma$ gilt

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(\xi_1) - \hat{\mu}(\xi_2)| &\le \int_G \left|1 - e^{-ix\cdot(\xi_1-\xi_2)}\right| d|\mu|(x) \\ &\le \sup_{x\in K} \left|1 - e^{-ix\cdot(\xi_1-\xi_2)}\right| |\mu|(G) + 2|\mu|(G \setminus K) \\ &\le \varepsilon \|\mu\|_{M(G)} + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

falls $|\xi_1 - \xi_2|$ hinreichend klein ist. (Man beachte, dass $\xi \mapsto ix \cdot \xi$ auf K gleichmäßig stetig ist.) Damit ist $\hat{\mu}$ gleichmäßig stetig.

b) folgt wie im Fall von Funktionen mit dem Satz von Fubini: Es gilt

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)\hat{}\,(\xi) &= \int_G e^{-ix\cdot\xi} d(\mu * \nu)(\xi) \\ &= \int_G \int_G e^{-i(x+y)\cdot\xi} d\mu(x) d\nu(y) = \hat{\mu}(\xi)\hat{\nu}(\xi) \quad (\xi \in \Gamma). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$(\widetilde{\mu})\hat{}\,(\xi) = \int_G e^{-ix\cdot\xi} d\widetilde{\mu}(x) = \overline{\int_G e^{ix\cdot\xi} d\mu(-x)} = \overline{\int_G e^{-ix\cdot\xi} d\mu(x)} = \overline{\hat{\mu}(\xi)}.$$

$\square$

5.11 Bemerkung. Falls $f \in L^1(G)$, so wird durch

$$\mu_f(A) := \int_A f(x) \bar{d}x \quad (A \in \mathscr{B}(G))$$

ein Maß $\mu_f \in M(G)$ definiert, welches absolutstetig zum Haarmaß $\bar{d}x$ ist. In diesem Fall gilt $\mathscr{F}_{M(G)}\mu_f = \mathscr{F}_G f$ sowie $\mu_f * \mu_g = \mu_{f*g}$ für alle $f, g \in L^1(G)$. Damit wird $L^1(G)$ zu einer Unteralgebra der Banachalgebra $M(G)$. Man kann zeigen, dass $L^1(G)$ sogar ein Ideal von $M(G)$ ist, im Allgemeinen aber nicht abgeschlossen.

b) Positiv definite Funktionen

5.12 Definition. Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ heißt positiv definit, falls für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und $x_1, \dots, x_N \in G$ gilt:

$$\sum_{k,\ell=1}^{N} c_k \overline{c_\ell} f(x_k - x_\ell) \geq 0. \tag{5-2}$$

5.13 Lemma. *Sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ positiv definit.*
a) Es gilt

(i) $f(-x) = \overline{f(x)}$ $(x \in G)$,

(ii) $|f(x)| \leq f(0)$ $(x \in G)$,

(iii) $|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(0) \operatorname{Re}\big(f(0) - f(x-y)\big)$ $(x, y \in G)$.

b) Falls f stetig an der Stelle 0 ist, so ist f gleichmäßig stetig in G.
c) Für alle $\varphi \in L^1(G)$ gilt

$$\int_G \int_G \varphi(x)\overline{\varphi(y)} f(x-y) \bar{d}x \bar{d}y \geq 0. \tag{5-3}$$

Beweis. Setzt man in (5-2) $N = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $c_1 = 1$, $c_2 = c \in \mathbb{C}$, so erhält man

$$(1 + |c|^2) f(0) + c f(x) + \overline{c} f(-x) \geq 0. \tag{5-4}$$

Mit $c := 1$ folgt nun $f(x) + f(-x) \in \mathbb{R}$, für $c := i$ erhält man $i(f(x) - f(-x)) \in \mathbb{R}$ und damit $f(-x) = \overline{f(x)}$. Wählt man in (5-4) c so, dass $cf(x) = -|f(x)|$ gilt, folgt $f(0) \geq 0$.

Wähle nun $N = 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (0, x, y)$ sowie $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{\lambda|f(x)-f(y)|}{f(x)-f(y)}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $c_3 := -c_2$. Dann erhält man aus (5-2)

$$f(0)(1+2\lambda^2) + 2\lambda|f(x) - f(y)| - 2\lambda^2 \operatorname{Re} f(x-y) \geq 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Also hat das quadratische Polynom in λ

$$2\big(f(0) - \operatorname{Re} f(x-y)\big)\lambda^2 + 2|f(x) - f(y)|\,\lambda + f(0)$$

keine zwei verschiedenen reellen Nullstellen, d.h. die Diskriminante

$$4|f(x) - f(y)|^2 - 8f(0)\big(f(0) - \operatorname{Re} f(x-y)\big)$$

ist nicht positiv, und es folgt $|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(0) \operatorname{Re}\big(f(0) - f(x-y)\big)$.

b) folgt sofort aus a) (iii).

c) Jedes $\varphi \in C_c(G)$ lässt sich als gleichmäßiger Grenzwert von Stufenfunktionen schreiben, d.h. es existieren Stufenfunktionen $\varphi_k \colon G \to \mathbb{C}$ mit $\|\varphi_k - \varphi\|_\infty \to 0$ ($k \to \infty$). Sei $\varphi_k = \sum_{\ell=1}^N c_\ell \mathbb{1}_{A_\ell}$. Dann gilt

$$\int_G \int_G \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)} f(x-y) đx đy = \sum_{j,\ell=1}^N c_j \overline{c_\ell} f(x_j - x_\ell) \lambda_G(A_j)\lambda_G(A_\ell) \geq 0.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir die Aussage für alle $\varphi \in C_c(G)$. Da $C_c(G)$ dicht in $L^1(G)$ liegt, folgt die Aussage für alle $\varphi \in L^1(G)$. □

5.14 Lemma. *Sei $g \in L^2(G)$, und sei $\widetilde{g} \in L^2(G)$ definiert durch $\widetilde{g}(x) := \overline{g(-x)}$ $(x \in G)$. Dann ist $f := g * \widetilde{g} \in L^1(G)$ stetig und positiv definit.*

Beweis. Es gilt

$$(g * \widetilde{g})(x) = \int_G g(x-y)\widetilde{g}(y) đy = \int g(x-y)\overline{g(-y)} đy.$$

Wegen $\|g * \widetilde{g}\|_{L^1(G)} \leq \|g\|_{L^2(G)} \|\widetilde{g}\|_{L^2(G)}$ (Höldersche Ungleichung) und

$$\begin{aligned} |(g * \widetilde{g})(x_1) - (g * \widetilde{g})(x_2)| &= \Big| \int_G \big(g(x_1 - y) - g(x_2 - y)\big)\overline{g(-y)} đy \Big| \\ &\leq \big\| g(x_1 - \cdot\,) - g(x_2 - \cdot\,) \big\|_{L^1(G)} \|\widetilde{g}\|_{L^1(G)} \end{aligned}$$

ist $g * \widetilde{g} \in L^1(G) \cap C(G)$.

Für $N \in \mathbb{N}$ und $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$, $x_1, \ldots, x_N \in G$ gilt

$$\sum_{j,\ell=1}^N c_j \overline{c_\ell} f(x_j - x_\ell) = \sum_{j,\ell=1}^N c_j \overline{c_\ell} \int_G g(x_j - x_\ell - y)\overline{g(-y)} đy$$

$$= \sum_{j,\ell=1}^N c_j\overline{c_\ell} \int_G g(x_j-y)\overline{g(x_\ell-y)}\,đy = \int_G \Big|\sum_{j=1}^N c_j g(x_j-y)\Big|^2 đy \geq 0.$$

□

5.15 Lemma. *Sei $\mu \in M_+(\Gamma)$, und sei $f\colon G\to\mathbb{C}$ definiert durch*

$$f(x) := (\mathscr{F}_\Gamma\mu)(-x) = \int_\Gamma e^{ix\cdot\xi}d\mu(\xi) \quad (x\in G).$$

Dann ist f stetig und positiv definit.

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus Lemma 5.10 (mit Γ anstelle von G). Für $N\in\mathbb{N}$ und $c_1,\dots,c_N\in\mathbb{C}$ und $\xi_1,\dots,\xi_N\in\Gamma$ gilt

$$\sum_{j,\ell=1}^N c_j\overline{c_\ell}f(x_j-x_\ell) = \int_\Gamma \sum_{j,\ell=1}^N c_j\overline{c_\ell}e^{i(x_j-x_\ell)\cdot\xi}d\mu(\xi) = \int_\Gamma \Big|\sum_{j=1}^N c_j e^{ix_j\cdot\xi}\Big|^2 d\mu(\xi)\geq 0.$$

□

Die Fourier-Stieltjes-Transformierte von positiven Maßen ist also positiv definit. Der berühmte Satz von Bochner besagt, dass auch die Umkehrung gilt. Als Vorbereitung beweisen wir eine (auch für sich interessante) Aussage über mehrfache Faltung einer Funktion.

5.16 Satz. *Sei $f\in L^1(G)$, und sei $f^{*k} := f*\dots*f$ (k-mal). Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty}\|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k} = \inf_{k\in\mathbb{N}}\|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k} = \|\hat f\|_\infty.$$

Beweis. Ein wesentlicher Teil des Beweises beruht auf Gelfand-Theorie und kann hier nur zitiert werden. Wir zeigen jedoch einige Teilaussagen.

(i) Wir zeigen folgende Aussage: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ mit $0\leq a_{k+\ell}\leq a_k a_\ell$ für alle $k,\ell\in\mathbb{N}$. Dann gilt $(a_k)^{1/k}\to a := \inf_k (a_k)^{1/k}\quad (k\to\infty)$.

Um dies zu zeigen, sei $\varepsilon>0$. Wähle $N\in\mathbb{N}$ mit $(a_N)^{1/N}<a+\varepsilon$ und setze $b(\varepsilon) := \max\{a_1,\dots,a_N\}$. Schreibe nun $k\in\mathbb{N}$ in der Form $k = kN+r$ mit $0\leq r<N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(a_k)^{1/k} &= (a_{kN+r})^{1/k} \leq (a_N^k a_r)^{1/k}\\ &\leq (a+\varepsilon)^{kN/k}b^{1/k} = (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^{-r/k}b^{1/k}\\ &= (a+\varepsilon)\Big(\frac{b}{(a+\varepsilon)^r}\Big)^{1/k}\end{aligned}$$

$$< a + 2\varepsilon,$$

falls k hinreichend groß ist. Dies zeigt die obige Aussage. Angewendet auf $a_k := \|f^{*k}\|_{L^1(G)}$, erhalten wir $\inf_{k\in\mathbb{N}} \|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k}$.

(ii) Wegen $(f^{*k})\hat{} = (\hat{f})^k$ folgt

$$\|\hat{f}\|_\infty^k = \|(\hat{f})^k\|_\infty = \|(f^{*k})\hat{}\|_\infty \le \|f^{*k}\|_{L^1(G)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und damit folgt $\inf_{k\in\mathbb{N}} \|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k} \ge \|\hat{f}\|_\infty$.

(iii) Die andere Ungleichung

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \|f^{*k}\|_{L^1(G)}^{1/k} \le \|\hat{f}\|_\infty$$

kann mit Hilfe der Gelfand-Theorie bewiesen werden. Dazu verwendet man, dass das Spektrum von f in der C^*-Algebra $L^1(G)$ mit dem Spektrum von $\hat{f}$ in der C^*-Algebra $C(\Gamma)$ übereinstimmt. Ein Beweis findet sich z.B. in [9], Chapter 11. □

5.17 Satz (Satz von Bochner). *Sei $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist f genau dann positiv definit, falls ein positives Maß $\mu \in M_+(\Gamma)$ existiert mit*

$$f(x) = \int_\Gamma e^{ix\cdot\xi} d\mu(\xi). \tag{5-5}$$

Beweis. Falls $\mu \in M_+(\Gamma)$ und f durch (5-5) definiert sind, so ist f stetig und positiv definit nach Lemma 5.15. Es ist also nur die Rückrichtung zu zeigen.

Sei also $f\colon G \to \mathbb{C}$ stetig und positiv definit. Nach Lemma 5.13 a) gilt $f(0) > 0$ (falls f nicht identisch Null ist), also sei o.E. $f(0) = 1$. Wir definieren die Abbildung $T_f\colon L^1(G) \to \mathbb{C}$ durch

$$T_f(\varphi) := \int_G f(x)\varphi(x) đx \quad (\varphi \in L^1(G)), \tag{5-6}$$

sowie $[\varphi,\psi] := T_f(\varphi * \widetilde{\psi})$ $(\varphi,\psi \in L^1(G))$, wobei wieder $\widetilde{\psi} := \overline{\psi(-\,\cdot)}$. Dann ist $[\cdot,\cdot]\colon L^1(G) \times L^1(G) \to \mathbb{C}$ sesquilinear, und es gilt

$$[\varphi,\varphi] = T_f(\varphi * \widetilde{\varphi}) = \int_G \int_G \varphi(x)\overline{\varphi(y)} f(x-y) đx đy \ge 0 \quad (\varphi \in L^1(G))$$

nach Lemma 5.13 c). Somit ist $[\cdot,\cdot]$ bis auf die Definitheit ein Skalarprodukt, und es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|[\varphi,\psi]|^2 \le [\varphi,\varphi]\,[\psi,\psi] \quad (\varphi,\psi \in L^1(G)). \tag{5-7}$$

Sei $V := \{x \in G : |x| < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\psi := \frac{1}{\lambda_G(V)} \mathbb{1}_V$ und erhalten

$$[\varphi, \psi] - T_f(\varphi) = \int_G \varphi(x) \frac{1}{\lambda_G(V)} \int_V [f(x-y) - f(x)] đy đx,$$
$$[\psi, \psi] - 1 = \frac{1}{(\lambda_G(V))^2} \int_V \int_V [f(x-y) - 1] đx đy.$$

Da f gleichmäßig stetig ist (Lemma 5.13)), konvergieren beide Differenzen gegen 0 für $\varepsilon \to 0$. In (5-7) eingesetzt, erhält man

$$|T_f(\varphi)|^2 \le [\varphi, \varphi] = T_f(\varphi * \widetilde{\varphi}) \quad (\varphi \in L^1(G)). \tag{5-8}$$

Wir setzen $h_\varphi := \varphi * \widetilde{\varphi}$. Dann gilt $h_\varphi \in L^1(G)$, und wegen

$$(\varphi * \widetilde{\varphi})(x) = \int_G \varphi(y) \overline{\varphi(y-x)} đy$$

ist $\widetilde{h}_\varphi = h_\varphi$. Wir wenden (5-8) iterativ an auf h, $h * h$, h^{*4}, h^{*8} etc. anstelle von φ und erhalten

$$|T_f(\varphi)|^2 \le T_f(h_\varphi) \le (T_f[\varphi * h_\varphi])^{1/2} \le \ldots \le \big(T_f[h^{*2^n}]\big)^{2^{-n}} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{5-9}$$

Da f positiv definit ist, gilt $\|f\|_\infty = f(0) = 1$ und somit $\|T_f\|_{(L^1(G))'} \le 1$. Mit (5-9) ergibt sich

$$|T_f(\varphi)|^2 \le \|(\varphi * \widetilde{\varphi})^{*2^n}\|_{L^1(G)}^{2^{-n}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Für $n \to \infty$ folgt mit Lemma 5.16

$$|T_f(\varphi)|^2 \le \|\mathscr{F}_G(\varphi * \widetilde{\varphi})\|_\infty = \sup_{\xi \in \Gamma} |\hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi)}| = \sup_{\xi \in \Gamma} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \quad (\varphi \in L^1(G)).$$

Damit folgt insbesondere $T_f(\varphi_1) = T_f(\varphi_2)$, falls $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$, d.h. die Abbildung $\Phi_f \colon A(\Gamma) \to \mathbb{C}$, $\hat{\varphi} \mapsto T_f(\varphi)$ ist wohldefiniert und stetig mit Norm nicht größer als 1. Hier ist $A(\Gamma) := \{\hat{f} : f \in L^1(G)\} \subset C_0(\Gamma)$.

Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung von Φ_f auf den Banachraum $C_0(\Gamma)$ mit gleicher Norm. Nach dem Satz von Riesz (Satz 5.7) existiert genau ein Maß $\mu \in M(\Gamma)$ mit

$$T_f(\varphi) = \int_\Gamma \hat{\varphi}(-\xi) d\mu(\xi) = \int_G \varphi(x) \Big[\int_\Gamma e^{ix\cdot\xi} d\mu(\xi) \Big] đx \quad (\varphi \in L^1(G)).$$

Der Vergleich mit (5-6) zeigt, dass

$$f(x) = \int_\Gamma e^{ix\cdot\xi} d\mu(\xi)$$

für fast alle $x \in G$ gilt. Da beide Seiten stetige Funktionen sind, gilt dies sogar für alle $x \in G$. Für $x = 0$ erhält man

$$1 = f(0) = \int_\Gamma 1 d\mu(\xi) = \mu(\Gamma) \le \|\mu\|_{M(\Gamma)} \le 1,$$

d.h. $\mu(\Gamma) = \|\mu\|_{M(\Gamma)}$ und damit $\mu \in M_+(\Gamma)$. □

5.18 Bemerkung. a) Wir schreiben die Aussage von Satz 5.17 noch einmal explizit für die beiden wichtigsten Fälle auf:

(i) Sei $G = \mathbb{Z}^n$. Eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$ ist nach Definition genau dann positiv definit, falls für alle $N \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{N} c_i\,\overline{c_j}\,a_{k_i-k_j} \geq 0.$$

Nach Satz 5.7 ist dies äquivalent zu

$$a_k = \int_{\mathbb{T}^n} e^{ik\cdot\xi} d\mu(\xi) \quad (k \in \mathbb{Z}^n)$$

für ein Maß $\mu \in M_+(\mathbb{T}^n)$. Dieser Fall von Satz 5.17 heißt auch Satz von Herglotz.

(ii) Sei $G = \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f \in C(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann positiv definit, falls für alle $N \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{N} c_i\,\overline{c_j}\,f(x_i - x_j) \geq 0.$$

Nach Satz 5.17 ist dies äquivalent zu

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} d\mu(\xi) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

für ein Maß $\mu \in M_+(\mathbb{R}^n)$.

b) Eine wichtige Anwendung des Satzes von Herglotz findet sich in der Zeitreihenanalyse: Sei $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von L^2-Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}\,X_k = 0$. Falls die Kovarianz $\operatorname{cov}(X_k, X_\ell)$ nur von der Differenz $k - \ell$ abhängt, so heißt X stationär im weiteren Sinne. In diesem Fall ist die Autokorrelationsfunktion $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definiert durch $g(k) := \operatorname{cov}(X_{\ell+k}, X_\ell)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Wegen $g(k-\ell) = \langle X_k, X_\ell\rangle_{L^2}$ ist g positiv definit. Nach dem Satz von Herglotz gilt

$$g(k) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\mu(x) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

mit einem Maß $\mu \in M_+(\mathbb{T})$, dem sogenannten Spektralmaß der Zeitreihe.

c) Positiv definite Funktionen treten in der Stochastik auch in folgender Form auf: Sei $X\colon (\Omega, \mathscr{F}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ eine Zufallsvariable und sei $\mu_X := P \circ X^{-1}$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. Dann heißt $\chi_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\chi_X(\xi) := \mathrm{E}\,(e^{i\xi X}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} d\mu_X(x) \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

die charakteristische Funktion von X. Der Satz von Bochner besagt, dass die charakteristischen Funktionen genau die positiv definiten stetigen Funktionen χ auf $\mathbb{R}$ mit $\chi(0) = 1$ sind.

A. Ergänzungen

In diesem Kapitel finden sich einige Ergänzungen zu den vorigen Kapiteln. Wir beginnen mit einem ausführlicheren Beweis von Satz **??**, dessen Aussage wir hier wiederholen:

A.1 Satz. *Sei $(K_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ein Summationskern. Dann gilt für alle $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$*

$$f = \lim_{N\to\infty} (K_N * f) \qquad (\textit{Konvergenz in } L^1(\mathbb{T}^n)).$$

Beweis. Direkt aus Lemma **??** und Lemma **??** mit $X := L^1(\mathbb{T}^n)$ und φ wie in Lemma **??** folgt

$$f = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y) L_y f đy$$

in $L^1(\mathbb{T}^n)$. Es bleibt zu zeigen, dass für fast alle $x \in \mathbb{T}^n$ die Gleichheit

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^n} K_N(y) L_y f đy\Big)(x) = \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y) f(x-y) đy = (K_N * f)(x) \tag{A-1}$$

gilt. Dazu definieren wir

$$g(x,y) := K_N(y)(L_y f)(x) = K_N(y) f(x-y) \quad (x,y \in \mathbb{T}^n),$$

d.h. es ist zu zeigen, dass

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^n} g(\cdot,y) đy\Big)(x) = \int_{\mathbb{T}^n} g(x,y) đy$$

für fast alle $x \in \mathbb{T}^n$ gilt. Man beachte, dass auf der linken Seite ein $L^1(\mathbb{T}^n)$-wertiges Integral steht, dass dann an der Stelle x ausgewertet wird, auf der rechten Seite ein skalares Integral.

Wir schreiben $\mathbb{T}^n = [0, 2\pi)^n$ und betrachten ein Gitter auf $\mathbb{T}^n$ mit Gitterbreite $h := \frac{2\pi}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$, d.h. wir betrachten die Menge aller Gitterpunkte

$$G_k := \{0, h, \dots, (k-1)h\}^n.$$

Zu jedem Gitterpunkt $z \in G_k$ ist der zugehörige Würfel $W(z)$ definiert durch

$$W(z) := [z_1, z_1 + h) \times [z_2, z_2 + h) \times \ldots \times [z_n, z_n + h).$$

Da die Funktion $y \mapsto g(\cdot, y)$, $\mathbb{T}^n \to L^1(\mathbb{T}^n)$ stetig und damit gleichmäßig stetig ist, können wir diese Funktion durch die Stufenfunktionen

$$g_k(x,y) := \sum_{z\in G_k} \chi_{W(z)}(y) K_N(z)(L_z f)(x) = \sum_{z\in G_k} \chi_{W(z)}(y) g(z,x)$$

approximieren. Genauer gilt

$$\sup_{y\in\mathbb{T}^n} \|g(\cdot,y) - g_k(\cdot,y)\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \to 0 \quad (k\to\infty). \tag{A-2}$$

Da für Stufenfunktionen das Integral als Summe definiert ist und die Auswertung einer Summe von Funktionen als Summe der entsprechenden Funktionswerte definiert ist, gilt die gewünschte Gleichheit für g_k, d.h. es gilt

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^n} g_k(\cdot,y)đy\Big)(x) = \int_{\mathbb{T}^n} g_k(x,y)đy \quad (x\in\mathbb{T}^n). \tag{A-3}$$

Wegen (A-2) folgt

$$\begin{aligned}\Big\| \int_{\mathbb{T}^n} g_k(\cdot,y)đy - \int_{\mathbb{T}^n} g(\cdot,y)đy\Big\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}&\\ &\le \int_{\mathbb{T}^n} \|g_k(\cdot,y)-g(\cdot,y)\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}đy\\ &\le \sup_{y\in\mathbb{T}^n}\|g_k(\cdot,y)-g(\cdot,y)\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \to 0 \quad (k\to\infty).\end{aligned} \tag{A-4}$$

Setzt man $G := \int_{\mathbb{T}^n} g(\cdot,y)đy$ und $G_k := \int_{\mathbb{T}^n} g_k(\cdot,y)đy$, so gilt also $G_k\to G$ in $L^1(\mathbb{T}^n)$. Da eine bzgl. $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}$ konvergente Folge eine fast überall konvergente Teilfolge besitzt, existiert eine Teilfolge $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$G_{k_m}(x)\to G(x) \quad \text{für fast alle } x\in\mathbb{T}^n.$$

Wir schreiben wieder g_k statt g_{k_m}.

Andererseits gilt für die skalaren Funktionen g_k und g mit dem Satz von Tonelli

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{\mathbb{T}^n} |g(x,y)-g_k(x,y)|đyđx = \int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{\mathbb{T}^n} |g(x,y)-g_k(x,y)|đxđy \to 0 \quad (k\to\infty),$$

wobei die Konvergenz der rechten Seite aus (A-4) folgt. Für das innere Integral

$$H_k(x) := \int_{\mathbb{T}^n} |g(x,y)-g_k(x,y)|đy$$

gilt also $\int_{\mathbb{T}^n} H_k(x)đx \to 0$ $(k\to\infty)$, d.h. $\|H_k\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}\to 0$ $(k\to\infty)$. Wie oben gilt nach Übergang zu einer Teilfolge, die nicht neu bezeichnet wird, $H_k(x)\to 0$ und damit

$$\int_{\mathbb{T}^n} g_k(x,y)đy \to \int_{\mathbb{T}^n} g(x,y)đy \quad \text{für fast alle } x\in\mathbb{T}^n.$$

Insgesamt erhält man mit (A-3)

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{T}^n} g(\cdot,y)đy\Big)(x) &= G(x) = \lim_{k\to\infty} G_k(x)\\ &= \lim_{k\to\infty}\Big(\int_{\mathbb{T}^n} g_k(\cdot,y)đy\Big)(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{T}^n} g_k(x,y)đy = \int_{\mathbb{T}^n} g(x,y)đy\end{aligned}$$

für fast alle $x\in\mathbb{T}^n$, was zu zeigen war. □

A.2 Bemerkung. Wir haben im Beweis gezeigt, dass das punktweise Einsetzen in ein $L^1(\mathbb{T}^n)$-wertiges Integral erlaubt ist, wobei der Beweis recht umständlich aufzuschreiben ist, aber keine wesentlichen neuen Ideen enthält. Dabei haben wir als Banachraum-wertigen Integralbegriff nur das Integral über sogenannte Regelfunktionen, d.h. gleichmäßige Grenzwerte von Stufenfunktionen, benutzt, welches ein Spezialfall sowohl des Riemann- als auch des Lebesgue-Integrals ist. Verwendet man die Lebesgue-Theorie (dann heißt das zugehörige Banachraum-wertige Integral auch Bochner-Integral), so sieht man, dass man die gleichmäßige Konvergenz in (A-2) durch Konvergenz in L^1 ersetzen kann, d.h. durch die Bedingung

$$\int_{\mathbb{T}^n} \|g_k(\cdot,y) - g(\cdot,y)\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Dies entspricht der Konvergenz im Raum $L^1(\mathbb{T}^n; L^1(\mathbb{T}^n))$. Die Theorie des Bochner-Integrals besagt, dass jede integrierbare Funktion $h\colon \mathbb{T}^n \to L^1(\mathbb{T}^n)$ in diesem Sinn durch Stufenfunktionen h_k approximiert werden kann, wobei zusätzlich die Norm von h_k nicht größer ist als $2\|f\|$. Dies erlaubt dann die Anwendung majorisierter Konvergenz. Im obigen Beweis konstruieren wir die entsprechenden Stufenfunktionen g_k explizit unter Verwendung der Stetigkeit.

Literatur

[1] H. Bauer. *Maß- und Integrationstheorie.* de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 1992.

[2] R. N. Bracewell. *The Fourier transform and its applications.* McGraw-Hill Series in Electrical Engineering. Circuits and Systems. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1986.

[3] P. L. Butzer and R. J. Nessel. *Fourier analysis and approximation.* Academic Press, New York-London, 1971. Volume 1: One-dimensional theory, Pure and Applied Mathematics, Vol. 40.

[4] K. Chandrasekharan. *Classical Fourier transforms.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[5] R. Denk. Analysis 3 (Maß- und Integrationstheorie). Vorlesungsskript, Universität Konstanz, Wintersemester 2021/22.

[6] R. Denk and R. Racke. *Kompendium der Analysis. Ein kompletter Bachelor-Kurs von reellen Zahlen zu partiellen Differentialgleichungen. Band 2: Maß- und Integrationstheorie, Funktionentheorie, Funktionalanalysis, Partielle Differentialgleichungen.* Wiesbaden: Springer Spektrum, 2012.

[7] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, second edition, 2008.

[8] W. Rudin. *Fourier analysis on groups.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 12. Interscience Publishers (a division of John Wiley and Sons), New York-London, 1962.

[9] W. Rudin. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991.

[10] M. Ruzhansky and V. Turunen. *Pseudo-differential operators and symmetries*, volume 2 of *Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2010. Background analysis and advanced topics.

[11] G. van Dijk. *Distribution theory.* De Gruyter Graduate Lectures. De Gruyter, Berlin, 2013. Convolution, Fourier transform, and Laplace transform.

Index