Skript zur Vorlesung

Parabolische Differentialgleichungen

Sommersemester 2021

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 19.07.2021

Inhaltsverzeichnis

1. Maximale Regularität und $\mathcal{R}$-sektorielle Operatoren

1.1 Worum geht's? Dieser Abschnitt dient der Motivation und untersucht, größtenteils ohne Beweise, den Zusammenhang zwischen maximaler Regularität und $\mathcal{R}$-sektoriellen Operatoren. Maximale Regularität hat sich in den letzten Jahren als wichtiges Hilfsmittel zur Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen erwiesen. Eine äquivalente Beschreibung maximaler Regularität verwendet den Begriff der $\mathcal{R}$-Beschränktheit, der später noch genauer diskutiert wird. Insgesamt wird damit die zeitlich lokale Lösbarkeit einer nichtlinearen Gleichung zurückgeführt auf das genaue Studium der Resolvente des zur linearisierten Gleichung gehörigen Operators.

a) Linearisierung und maximale Regularität

1.2 Beispiel. Die Gleichung des *mean curvature flow* (Gleichung des mittleren Krümmungsflusses) beschreibt das zeitliche Verhalten einer Oberfläche und ist in der graphischen Version gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n \Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2}\Big)\partial_i\partial_j u &= 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1-1}$$

Dies ist ein typisches Beispiel einer quasilinearen Gleichung: Hier hängen die Koeffizienten der höchsten auftretenden Ableitung (im Beispiel die zweiten Ableitungen) noch von der gesuchten Funktion u und ihren Ableitungen ab.

1.3 Bemerkung (Linearisierung)**.** Abstrakt kann man die obige Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u - F(u)u &= G(u), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

schreiben. Dabei ist $F(u)$ ein *linearer* Operator, der selbst noch von u abhängt, und $G(u)$ ist im allgemeinen ebenfalls eine nichtlineare Funktion von u. Die Linearisierung besteht nur darin, für festes v die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - F(v)u &= G(v), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

zu betrachten. Als Gleichung in u ist dies eine lineare Gleichung, und man kann diese Gleichung mit Methoden der linearen Operatortheorie und Halbgruppentheorie behandeln. In Beispiel 1.2 ist $F(v) = \Delta$ und $G(v) = \frac{\partial_i v \partial_j v}{1+|\nabla u|^2}\partial_i\partial_j v$.

Die Idee der maximalen Regularität besteht darin, für die linearisierte Gleichung eine „optimale“ Regularität nachzuweisen. Dies erlaubt es dann, durch eine Iteration die nichtlineare Gleichung zu lösen. Grob gesprochen, darf man beim Lösen der linearen Gleichung keine Glattheit verlieren, da die Lösung beim nächsten Iterationsschritt wieder eingesetzt werden muss. Dieser Zugang erlaubt es, recht allgemeine quasilineare und auch voll nichtlineare Gleichungen zu lösen, jedoch ist die Lösung im allgemeinen nur lokal in der Zeit, d.h. es ist mit diesen Methoden schwer, global existierende Lösungen zu finden.

Der Begriff der maximalen Regularität hängt ganz wesentlich von den Funktionenräumen ab, in welchen die Gleichung betrachtet wird. Es gibt zwei wichtige Klassen von geeigneten Lösungsräumen: Der Raum der Hölder-stetigen Funktionen, und die L^p-Sobolevräume. Wir werden uns in dieser Vorlesung ausschließlich mit den Sobolevräumen befassen.

Die linearisierte Gleichung hat die Form

$$\begin{aligned} \partial_t u - Au &= f \quad (t > 0), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1-2}$$

Wegen $A = F(v)$ hängt der lineare Operator A im Allgemeinen von der Zeit t ab, man hat also ein nicht-autonomes Problem. In Beispiel 1.2 hatten wir die Linearisierung an der Stelle 0 betrachtet, was zu einem autonomen Problem führt. Wir betrachten in diesem Abschnitt zunächst die autonome Version, in der der Operator A nicht von t abhängt.

Im Folgenden sei $T \in (0, \infty]$ und $J = (0, T)$. Falls man von $f \in L^p(J; X)$ für einen Banachraum X ausgeht, wird man an u die Bedingung

$$\partial_t u \in L^p(J; X) \text{ und } u \in L^p(J; D(A))$$

stellen. Aber was ist dann der richtige Raum für u_0? Es handelt sich hier um einen Spurraum, da der Wert von v an der Stelle $t = 0$ gebildet wird.

1.4 Definition und Satz (Spurraum)**.** *Sei $J = (0, T)$, $1 \le p \le \infty$ und $A\colon X \supset D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator im Banachraum X. Dann definiert man*

$$\gamma_t \mathbb{E} := \{x = u(0) : u \in \mathbb{E}\} \subset X,$$

wobei

$$\mathbb{E} := W_p^1(J; X) \cap L^p(J; D(A)).$$

Man beachte, dass nach dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$W_p^1(J; X) \subset C([0, T], X)$$

gilt und daher $u(0) \in X$ wohldefiniert ist. Man bezeichnet $\gamma_t u := u(0)$ als die Zeitspur von $u \in \mathbb{E}$. Der Raum $\gamma_t \mathbb{E}$ wird mit der kanonischen Norm

$$\|x\|_{\gamma_t \mathbb{E}} := \inf\{\|u\|_{\mathbb{E}} : \gamma_t u = x\}$$

ausgestattet. Dann ist $\gamma_t\mathbb{E}$ ein Banachraum, und es gilt

$$D(A) \hookrightarrow \gamma_t\mathbb{E} \hookrightarrow X.$$

Hier und im Folgenden bezeichnet die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ von zwei Banachräumen eine kanonische lineare, injektive und stetige Abbildung (in den meisten Fällen als Identität wählbar).

Beweis. Es gilt mit dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$\|x\| = \|u(0)\| \leq \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\| \leq C\|u\|_{\mathbb{E}},$$

und daher erhält man die Einbettung $\gamma_t\mathbb{E} \hookrightarrow X$. Ist $x \in D(A)$, betrachte $u(t) = e^{-t}x$. Dies zeigt

$$D(A) \hookrightarrow \gamma_t\mathbb{E}.$$

Da die Abbildung $\gamma_t\colon u \mapsto u(0)$ stetig als Abbildung von $C([0,T];X)$ nach X und damit auch als Abbildung von $\mathbb{E}$ nach X ist, ist $N := \{u \in \mathbb{E} : u(0) = 0\}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathbb{E}$, und als Quotientenraum ist $\gamma_t\mathbb{E} = \mathbb{E}/N$ ein Banachraum. □

1.5 Bemerkung. Falls A ein abgeschlossener linearer Operator ist, kann der Spurraum auch explizit beschrieben werden. Für $p > 1$ gilt

$$\gamma_t\mathbb{E} = (X, D(A))_{1-1/p,p}$$

wobei die Notation auf der rechten Seite den reellen Interpolationsraum mit Interpolations-Exponent $1 - 1/p$ und Integrabilitäts-Parameter p bezeichnet. Falls $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ und $D(A) = W_p^m(\mathbb{R}^n)$ ist (wie das bei Differentialoperatoren A im Ganzraum eine natürliche Wahl ist), so folgt

$$\gamma_t\mathbb{E} = B_{pp}^{m-m/p}(\mathbb{R}^n).$$

Hier bezeichnet $B_{pp}^s(\mathbb{R}^n)$ den Besovraum der Differenzierbarkeitsordnung s.

1.6 Definition. a) Seien $T \in (0,\infty]$, $J = (0,T)$, $1 \leq p \leq \infty$ und $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator. Dann hat A maximale (L^p-) Regularität (MR), falls für alle $f \in L^p(J;X) =: \mathbb{F}$ und alle $u_0 \in \gamma_t\mathbb{E}$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathbb{E}$ von (1-2) existiert. Dabei heißt u eine Lösung von (1-2), falls die erste Gleichung in (1-2) in $L^p(J;X)$ gilt (d.h. für fast alle $t \in J$) und die zweite Gleichung in X gilt. In diesem Fall schreiben wir $A \in \mathrm{MR}_p(J;X)$; man definiert noch $\mathrm{MR}_p(X) := \mathrm{MR}_p((0,\infty);X)$.

b) Wir schreiben $A \in {}_0\mathrm{MR}_p(J;X)$, falls für alle $f \in L^p(J;X) =: \mathbb{F}$ und alle $u_0 \in \gamma_t\mathbb{E}$ ein u existiert, das (1-2) fast überall löst, und falls ein $C = C(J) > 0$ existiert, so dass für alle $(f,u_0) \in \mathbb{F} \times \gamma_t\mathbb{E}$ die Ungleichung

$$\|\partial_t u\|_{L^p(J;X)} + \|Au\|_{L^p(J;X)} \leq C(\|f\|_{L^p(J;X)} + \|u_0\|_{\gamma_t\mathbb{E}}) \tag{1-3}$$

erfüllt ist.

1.7 Bemerkung. a) Nach Definition der Räume ist die Abbildung

$$\begin{pmatrix} \partial_t - A \\ \gamma_t \end{pmatrix} : W_p^1(J;X) \cap L^p(J;D(A)) \to L^p(J;X) \times \gamma_t\mathbb{E}$$

stetig. Falls $A \in \mathrm{MR}_p(J;X)$, so ist diese Abbildung bijektiv und daher nach dem Satz von der offenen Abbildung ein Isomorphismus von Banachräumen. Insbesondere folgt dann

$$\|u\|_{L^p(J;X)} + \|\partial_t u\|_{L^p(J;X)} + \|Au\|_{L^p(J;X)} \le C(\|f\|_{L^p(J;X)} + \|u_0\|_{\gamma_t\mathbb{E}}), \tag{1-4}$$

was noch stärker als (1-3) ist.

b) Falls $A \in \mathrm{MR}_p(J;X)$, so ist (1-2) insbesondere für alle $f \in \mathbb{F}$ und $u_0 := 0$ lösbar. Andererseits existiert zu $u_0 \in \gamma_t\mathbb{E}$ nach Definition des Spurraums ein $u_1 \in \mathbb{E}$ mit $\gamma_t u_1 = u_0$. Mit dem Ansatz $u = u_1 + u_2$ erhält man für u_2 die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u_2 - Au_2 &= \widetilde{f} \quad (t>0), \\ u_2(0) &= 0. \end{aligned} \tag{1-5}$$

Dabei ist $\widetilde{f} := f - \partial_t u_1 + Au_1 \in \mathbb{F}$. Also gilt $A \in \mathrm{MR}_p(J;X)$ bereits, wenn das Anfangswertproblem (1-5) für alle $f \in \mathbb{F}$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathbb{E}$ besitzt.

c) Sei $A \in {}_0\mathrm{MR}_p(J;X)$. Dann wird für die Lösung $\partial_t u \in L^p(J;X)$, aber nicht $u \in L^p(J;X)$ verlangt. Falls J endlich ist oder $0 \in \rho(A)$ gilt, so kann $\|\partial_t u\|_{L^p(J;X)}$ durch $\|u\|_{W_p^1(J;X)}$ ersetzt werden. In diesem Fall folgt also $A \in \mathrm{MR}_p(J;X)$.

1.8 Bemerkung. a) Jeder Operator $A \in \mathrm{MR}_p(X)$ erzeugt eine beschränkte, holomorphe C_0-Halbgruppe.

b) Falls $A \in \mathrm{MR}_p(X)$ für ein $p \in [1,\infty)$ gilt, so folgt bereits $A \in \mathrm{MR}_p(X)$ für alle $p \in (1,\infty)$. Deswegen schreiben wir ab jetzt $\mathrm{MR}(X)$ statt $\mathrm{MR}_p(X)$.

Die beiden Aussagen a) und b) werden hier nicht bewiesen.

Wir wollen jetzt noch mal kurz auf den Gedanken der Linearisierung quasilinearer Gleichungen zurückkommen. Die nichtlineare Gleichung lautete

$$\begin{aligned} \partial_t u - F(u)u &= G(u), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Die zugehörige Linearisierung ist gegeben durch

$$\partial_t u - F(v)u = G(v),$$

$$u(0) = u_0$$

Für festes v setzt man nun $A := F(v)$ und $f := G(v)$. In den meisten Fällen hängt der Spurraum $\gamma_t\mathbb{E}$ nicht von v ab, wovon wir hier ausgehen. Falls die linearisierte Gleichung maximale Regularität besitzt, so existiert ein Lösungsoperator

$$S_v\colon L^p(J;X) \times \gamma_t\mathbb{E} \to W_p^1(J;X) \cap L^p(J;D(A)), \quad (f, u_0) \mapsto u$$

der linearen Gleichung, der selbst noch von der (unbekannten) Lösung v abhängt.

Die nichtlineare Gleichung ist nun genau dann eindeutig lösbar, falls die Fixpunktgleichung

$$u = S_u(G(u), u_0)$$

eine Lösung besitzt. Wegen maximaler Regularität kennt man eine Abschätzung für den Lösungsoperator S_u. Falls auch für die rechte Seite $G(u)$ geeignete Abschätzungen gefunden werden können, so kann versucht werden, den Banachschen Fixpunktsatz anzuwenden. Dazu muss die rechte Seite $\Phi(u) := S_u(G(u), u_0)$ eine Kontraktion im geeigneten Lösungsraum $\mathbb{E}$ definieren. Um die Kontraktionseigenschaft zu erreichen, muss üblicherweise das Zeitintervall $J = (0, T)$ oder die Anfangsdaten u_0 klein gewählt werden. Bei beliebigen Anfangsdaten erhält man (in der Zeit) lokale Lösungen und damit eine maximale Lösung, d.h. eine Lösung auf dem maximalen Existenzintervall. Globale Lösungen können mit dieser Methode üblicherweise nicht bewiesen werden.

Die oben skizzierte Methode ist nur recht abstrakt als allgemeiner Satz formulierbar, funktioniert aber bei einer ganzen Reihe von nichtlinearen Randwertproblemen. Beispiele hierfür sind

- der oben genannte mean-curvature-flow,
- Stefan-Probleme, welche Phasenübergänge beschreiben (inklusive der Beschreibung des freien Randes zwischen den beiden Aggregatszuständen),
- Cahn-Hilliard-Gleichungen, welche etwa die Grenze zwischen zwei Legierungen in einem Metall beschreiben,
- die Navier-Stokes-Gleichung, welche das Strömungsverhalten von Flüssigkeiten beschreibt, und verwandte Gleichungen, die zur Modellierung z.B. der Erdatmosphäre verwendet werden.

b) $\mathcal{R}$-sektorielle Operatoren

Im Folgenden sei

$$\Sigma_\varphi := \Big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \varphi \Big\}.$$

Mit $\sigma(A)$ bzw. $\rho(A)$ bezeichnen wir das Spektrum bzw. die Resolventenmenge des Operators A.

1.9 Definition. Sei $A\colon D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\sup_{\lambda\in\Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty.$$

Falls A ein sektorieller Operator ist, so heißt

$$\varphi_A := \sup\{\varphi :\ \rho(A) \supset \Sigma_\varphi,\ \sup_{\lambda\in\Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty\}$$

der spektrale Winkel von A.

Sektorielle Operatoren erzeugen holomorphe Halbgruppen, wenn der Sektorwinkel groß genug ist. Der folgende Satz wird in Kapitel 2 bewiesen.

1.10 Satz. *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ linear. Äquivalent sind:*

(i) *A erzeugt eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe T auf X vom Winkel $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.*

(ii) *A ist sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.*

Nach Bemerkung 1.8 erzeugen Operatoren $A \in \mathrm{MR}(X)$ holomorphe Halbgruppen, sind also sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, d.h. nicht jeder sektorieller Operator besitzt maximale Regularität!

Vor einigen Jahren wurde eine Charakterisierung der Operatoren in $\mathrm{MR}(X)$ gefunden. Bevor wir dieses Resultat formulieren können, benötigen wir noch einige Begriffe. Dabei treten einige aus der Analysis bekannte Objekte Banachraumwertig auf, so z.B. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X)$, der Schwartz-Raum der schnell fallenden X-wertigen Funktionen, oder $\mathscr{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X)$, die Fouriertransformation auf diesem Raum. Definiert man den Raum der X-wertigen temperierten Distributionen durch

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; X) := L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}), X),$$

so kann die Fouriertransformation zu einem stetigen Isomorphismus $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; X) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; X)$ fortgesetzt werden. Die zugehörigen Beweise übertragen sich direkt aus dem skalaren Fall.

1.11 Definition. Sei X ein Banachraum.

a) Die Hilberttransformation $H\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}; X) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}; X)$ ist definiert durch

$$Hf := \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} f \quad \text{ mit } m(\xi) := \frac{i\xi}{|\xi|}.$$

b) Der Banachraum X ist von Klasse $\mathcal{HT}$, falls ein $p \in (1, \infty)$ existiert, so dass die Hilberttransformation H zu einem stetigen linearen Operator $H \in L(L^p(\mathbb{R}; X))$ fortgesetzt werden kann.

1.12 Bemerkung. a) Man kann zeigen, dass die Eigenschaft von Teil b) der obigen Definition nicht von der Wahl von p abhängt, d.h. falls die Bedingung aus b) für ein $p \in (1,\infty)$ erfüllt ist, dann auch für alle $p \in (1,\infty)$.

b) Falls X ein Hilbertraum ist, so ist X von Klasse $\mathcal{HT}$. Denn der Satz von Plancherel gilt für Hilberträume, und wegen $m \in L^\infty(\mathbb{R}; L(X))$ gilt somit

$$\mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} \in L(L^2(\mathbb{R}; X)) \quad \text{mit } \|\mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F}\|_{L(L^2(\mathbb{R};X))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R};L(X))} = 1.$$

c) Falls X von Klasse $\mathcal{HT}$ ist und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist, so ist auch $L^p(G;X)$ von Klasse $\mathcal{HT}$. Insbesondere ist die Hilberttransformation stetig in $L^p(G)$.

d) Es gibt andere Beschreibungen der Klasse $\mathcal{HT}$. Insbesondere ist X genau dann von Klasse $\mathcal{HT}$, falls die Eigenschaft „X ist UMD-Raum“ gilt, wobei UMD für *unconditional martingale differences* steht (siehe [HvNVW16], Section 4.2).

1.13 Definition. Eine Familie $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ heißt $\mathcal{R}$-beschränkt, falls eine Konstante $C > 0$ und ein $p \in [1,\infty)$ so existieren, dass für alle $N \in \mathbb{N}$, $T_j \in \mathcal{T}$, $x_j \in X$ und alle Folgen $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen, identisch verteilten $\{-1,1\}$-wertigen und symmetrischen Zufallsgrößen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ gilt

$$\Big\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j T_j x_j \Big\|_{L^p(\Omega,Y)} \le C \Big\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j x_j \Big\|_{L^p(\Omega,X)}. \tag{1-6}$$

In diesem Fall heißt $\mathcal{R}_p(\mathcal{T}) := \inf\{C > 0 : \text{(1-6) gilt}\}$ die $\mathcal{R}$-Schranke von $\mathcal{T}$.

1.14 Bemerkung. a) Die obige Formulierung bedeutet für die einzelnen Zufallsgrößen $P(\{\varepsilon_j = 1\}) = P(\{\varepsilon_j = -1\}) = \frac{1}{2}$. Da das Maß $P \circ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^{-1}$ diskret ist, kann die Unabhängigkeit durch folgende Bedingung angegeben werden:

$$P(\{\varepsilon_1 = z_1, \dots, \varepsilon_N = z_N\}) = 2^{-N} \quad \Big((z_1,\dots,z_N) \in \{-1,1\}^N,\ N \in \mathbb{N}\Big).$$

Eine nicht-stochastische Beschreibung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit ist somit gegeben durch die Ungleichung

$$\begin{gathered} \exists\, C > 0\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, T_j \in \mathcal{T}\ \forall\, x_j \in X \\ \Big(\sum_{z_1,\dots,z_N=\pm 1} \Big\| \sum_{j=1}^N z_j T_j x_j \Big\|_Y^p \Big)^{1/p} \le C \Big(\sum_{z_1,\dots,z_N=\pm 1} \Big\| \sum_{j=1}^N z_j x_j \Big\|_X^p \Big)^{1/p}. \end{gathered} \tag{1-7}$$

Die stochastische Beschreibung ist dennoch manchmal günstig; insbesondere kann man als Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$ wählen, wobei die ε_j dann durch die Rademacher-Funktionen gegeben sind (siehe unten). Es ist nicht klar, woher der Namenszusatz „$\mathcal{R}$“ stammt; möglich sind „Rademacher“, „randomisiert“.

Nach diesen Definitionen können wir die Charakterisierung maximaler Regularität angeben. Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen (siehe [DHP03], Theorem 4.4).

1.15 Satz (Weis 2001)**.** *Sei X ein Banachraum der Klasse $\mathcal{HT}$, $1 < p < \infty$, A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel $\varphi_A > \frac{\pi}{2}$. Es gilt genau dann $A \in \mathrm{MR}(X)$, falls die Menge*

$$\big\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\varphi\big\} \subset L(X)$$

für ein $\varphi > \frac{\pi}{2}$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist.

In Analogie zum Begriff eines sektoriellen Operators definiert man:

1.16 Definition. Sei $A\colon D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A $\mathcal{R}$-sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\mathcal{R}\big\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\varphi\big\} < \infty.$$

Der $\mathcal{R}$-Winkel von A ist in diesem Fall das Supremum aller Winkel, für die die obige $\mathcal{R}$-Schranke endlich ist.

2. Parabolische Gleichungen aus Sicht der Halbgruppentheorie

2.1 Worum geht's? Wie der Satz von Weis sagt, ist die $\mathcal{R}$-Sektorialität die entscheidende Bedingung für die maximale L^p-Regularität. Bevor wir Kriterien dafür diskutieren, gehen wir auf sektorielle Operatoren ein. Diese sind gerade die Generatoren von beschränkten holomorphen C_0-Halbgruppen. Diese Halbgruppen entsprechen linearen parabolischen Gleichungen und sind insbesondere glättend, d.h. für jeden Anfangswert ist die Halbgruppe für positive Zeiten unendlich oft differenzierbar, und der Wert der Halbgruppe liegt im Definitionsbereich von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Im Folgenden sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum.

a) Generatoren von C_0-Halbgruppen

In diesem Abschnitt werden wichtige Definitionen und Sätze im Bereich der C_0-Halbgruppen genannt, wobei auf Beweise zum größten Teil verzichtet wird. Wir beginnen mit dem zentralen Begriff einer C_0-Halbgruppe.

2.2 Definition. a) Eine Abbildung $T\colon [0,\infty) \to L(X)$ wird *C_0-Halbgruppe* oder *stark stetige Halbgruppe* genannt, falls

(i) $T(0) = I$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$,

(iii) T ist stark stetig, d.h. für alle $x \in X$ ist $[0,\infty) \to X,\ t \mapsto T(t)x$ stetig.

Häufig schreibt man Halbgruppen auch in der Form $(T(t))_{t\geq 0}$.

b) Sei $T\colon [0,\infty) \to L(X)$ eine C_0-Halbgruppe. Dann definiert man den *Generator* oder *Erzeuger* von T als den linearen Operator A, gegeben durch

$$D(A) := \Big\{ x \in X : \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existiert} \Big\},$$

$$Ax := \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad (x \in D(A)).$$

Falls A der Erzeuger der C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ ist, schreibt man auch $T(t) = e^{tA}$.

2.3 Lemma. *Sei T eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator $A : D(A) \to X$.*

a) Es gilt $T(t)x \in D(A)$ für alle $x \in D(A)$ und

$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \quad (t \geq 0).$$

Dabei ist im Falle $t = 0$ die rechtsseitige Ableitung gemeint.

b) Es gilt $\int\limits_0^t T(s)x ds \in D(A)$ *für alle* $x \in X$, *und*

$$T(t)x - x = A \int_0^t T(s)x\, ds \quad (x \in X) \tag{2-1}$$

c) Ein Element $x \in X$ *ist genau dann in* $D(A)$, *falls ein* $y \in X$ *existiert mit*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\, ds, \tag{2-2}$$

und dann ist $Ax = y$.

2.4 Bemerkung und Definition. Sei T eine C_0-Halbgruppe auf X. Dann existieren $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M \exp(\omega t) \quad (t \geq 0). \tag{2-3}$$

a) Die Zahl

$$\omega(T) := \inf\Big\{\omega \in \mathbb{R} : \text{ Es existiert ein } M = M_\omega \geq 1 \text{ so, dass (2-3) gilt}\Big\}$$

heißt die Wachstumsschranke von T.

b) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega = 0$ gilt, so heißt T beschränkt.

c) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega = 0$ und $M = 1$ gilt, so heißt T eine Kontraktionshalbgruppe.

d) Falls die Abschätzung (2-3) mit $\omega < 0$ gilt, so heißt T exponentiell stabil.

Die folgenden Aussagen fassen wichtige Eigenschaften von C_0-Halbgruppen zusammen und werden hier aus Zeitgründen nicht bewiesen.

2.5 Satz. *a) Sei* $T = (T(t))_{t\geq 0}$ *eine* C_0*-Halbgruppe. Dann ist ihr Generator* A *ein abgeschlossener und dicht definierter Operator. Für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Re}\lambda > \omega(T)$ *gilt* $\lambda \in \rho(A)$ *sowie*

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)\, ds. \tag{2-4}$$

b) Das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u - Au &= 0, \\ u(0) &= x \end{aligned} \tag{2-5}$$

ist genau dann klassisch wohlgestellt, falls A *der Generator einer* C_0*-Halbgruppe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *ist. Dabei heißt (2-5) klassisch wohlgestellt, falls für alle* $x \in D(A)$ *genau* *eine Lösung $u \in C^1([0,\infty); X)$ von (2-5) existiert mit $u(t) \in D(A)$ $(t \geq 0)$, und zu $T > 0$ eine Konstante $C_T \geq 0$ existiert mit $\|u(t)\| \leq C_T\|x\|$ $(t \in (0,T))$. Die Lösung ist in diesem Fall gegeben durch $u(t) = T(t)x$ $(t \geq 0)$.*

Die Generatoren von C_0-Halbgruppen können in folgender Form charakterisiert werden:

2.6 Satz (Satz von Hille-Yosida)**.** *Seien $A : X \supset D(A) \to X$ linear, $\omega \in \mathcal{R}$ und $M \geq 1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist Generator einer C_0-Halbgruppe T mit $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M\exp(\omega t)$ $(t \geq 0)$.*

(ii) *Es gilt $\overline{D(A)} = X$, $(\omega,\infty) \subset \rho(A)$ und*

$$\|(\lambda-\omega)^k(\lambda-A)^{-k}\|_{L(X)} \leq M \quad (\lambda > \omega, k \in \mathbb{N}).$$

2.7 Beispiele. a) Der Schrödinger-Operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch $D(A) := H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ und $Au := i\Delta u$. Das Resolventenproblem lautet

$$(\lambda - i\Delta)u(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{2-6}$$

wobei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Da die Fourier-Transformation ein Isomorphismus im Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen ist, ist die obige Gleichung äquivalent zur Gleichung

$$\big(\lambda + i|\xi|^2\big)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\ f \in L^2(\mathbb{R}^n)). \tag{2-7}$$

Die eindeutige Lösung u ist gegeben durch

$$u = \mathscr{F}^{-1}\frac{1}{\lambda + i|\cdot|^2}\mathscr{F}f.$$

Mit dem Satz von Plancherel sowie den Abschätzungen

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\xi^\alpha}{\lambda + i|\xi|^2}\Big| &\leq C_\lambda \quad (|\alpha| \leq 2),\\ \Big|\frac{\lambda}{\lambda + i|\xi|^2}\Big| &\leq 1 \end{aligned}$$

für $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda > 0$ folgt $u \in H^2(\mathbb{R}^n) = D(A)$ sowie $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq 1$. Nach dem Satz von Hille-Yosida erzeugt A eine C_0-Kontraktionshalbgruppe in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

b) Für den Laplace-Operator $A = \Delta$ mit $D(A) := H^2(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ erhält man analog das Resolventenproblem

$$(\lambda - \Delta)u = f \quad \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n)$$

mit der Lösung $u = \mathscr{F}^{-1}\frac{1}{\lambda+|\cdot|^2}\mathscr{F}f$. Wegen

$$\Big|\frac{\lambda}{\lambda+|\xi|^2}\Big| \le 1 \quad (\lambda > 0,\, \xi \in \mathbb{R}^n)$$

erzeugt Δ ebenfalls eine C_0-Kontraktionshalbgruppe in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

b) Holomorphe Halbgruppen

Parabolische Gleichungen besitzen typischerweise eine Glättungseigenschaft, welche auch in der Sprache der Halbgruppentheorie ausgedrückt werden kann. Die zentralen Begriffe hierzu sind holomorphe C_0-Halbgruppen und sektorielle Operatoren.

2.8 Definition. Eine C_0-Halbgruppe T auf dem Banachraum X heißt *beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe auf X vom Winkel $\vartheta \in (0,\pi/2]$*, falls $T\colon [0,\infty) \to L(X)$ eine holomorphe Fortsetzung auf den Sektor $\Sigma_\vartheta = \big\{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |\arg(z)| < \vartheta\big\}$ besitzt mit $T(z_1+z_2) = T(z_1)T(z_2)$ $(z_1, z_2 \in \Sigma_\varphi)$, so dass für alle $\widetilde{\vartheta} \in (0,\vartheta)$ ein $M_{\widetilde{\vartheta}}$ existiert mit

$$\|T(z)\|_{L(X)} \le M_{\widetilde{\vartheta}} \quad (z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}).$$

2.9 Bemerkung. Sei T eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe vom Winkel ϑ. Für alle $\widetilde{\vartheta} \in (0,\vartheta)$ gilt dann

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_{\widetilde{\vartheta}}}} T(z)x = x \quad (x \in X),$$

und $D(A)$ ist die Menge aller $x \in X$, für welche

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_{\widetilde{\vartheta}}}} \frac{T(z)x - x}{z}$$

in X existiert (dieser Limes ist dann Ax).

Das folgende Lemma wird hier nicht bewiesen. Der Beweis verwendet unter anderem die Cauchysche Integralformel und eine zweite Kurve für den Nachweis der Funktionalgleichung.

2.10 Lemma. *Sei A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel $\varphi_A \in (\frac{\pi}{2},\pi]$, und sei $\vartheta \in (0,\varphi_A - \frac{\pi}{2})$. Betrachte für $\psi \in (\vartheta+\frac{\pi}{2},\varphi_A)$ und $\delta > 0$ die Kurve*

$$\gamma_{\psi,\delta} := (\infty,\delta]e^{-i\psi} \cup \delta e^{i[-\psi,\psi]} \cup [\delta,\infty)e^{i\psi}$$

(„Schlüssellochweg“, siehe Abbildung 1). Dann ist für $z \in \Sigma_\vartheta$ der Operator

$$\exp(zA) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{z\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \in L(X)$$

wohldefiniert. Es gilt

$$\exp(z_1 A) \exp(z_2 A) = \exp((z_1 + z_2)A) \quad (z_1, z_2 \in \Sigma_\vartheta).$$

Die Abbildung $z \mapsto \exp(zA)$, $\Sigma_\vartheta \to L(X)$ ist holomorph.

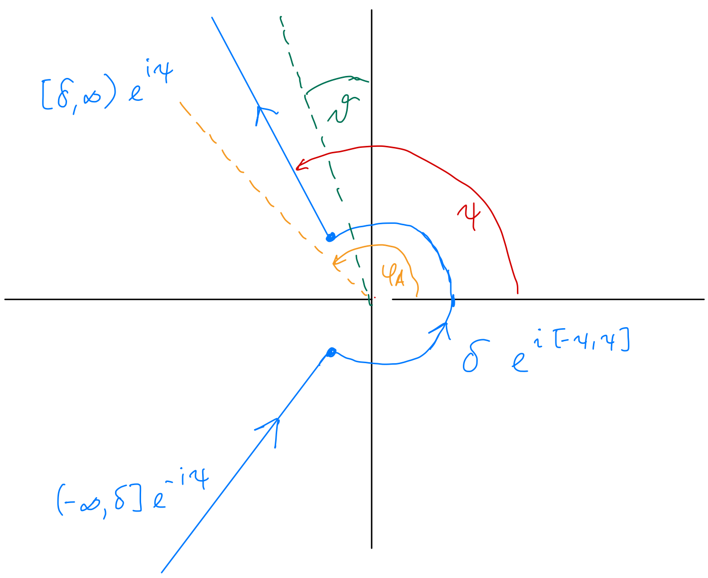

Abbildung 1: Der Schlüssellochweg aus Lemma 2.10

Wir wollen jetzt Satz 1.10 beweisen, den wir hier nochmal wiederholen:

2.11 Satz. *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ linear. Äquivalent sind:*

(i) *A erzeugt eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe T auf X vom Winkel $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.*

(ii) *A ist sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.*

Beweis. **(i)$\Longrightarrow$(ii).** Sei $\widetilde{\vartheta} \in (0, \vartheta)$. Für $\alpha \in (-\widetilde{\vartheta}, \widetilde{\vartheta})$ definiere $S(t) := T\big(e^{i\alpha}t\big)$ $(t \geq 0)$. Nach Bemerkung 4.16 ist S eine C_0-Halbgruppe. Sei B ihr Erzeuger, dann gilt

$x \in D(B)$ genau dann, wenn $\lim_{t\to 0} \frac{S(t)x-x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{T(e^{i\alpha}t)x-x}{t}$ existiert. Nach Bemerkung 4.16 gilt dies für alle $x \in D(A)$, und es folgt $B \subset e^{i\alpha}A$. Nach dem Satz von Hille-Yosida ist $\rho(B) \cap \rho(e^{i\alpha}A) \neq \emptyset$, und damit folgt $B = e^{i\alpha}A$.

Aus Theorem 2.6 folgt $\mathbb{C}_+ := \Sigma_{\pi/2} \subset \rho\big(e^{i\alpha}A\big)$ und

$$(\lambda - e^{i\alpha}A)^{-1} = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) T(e^{i\alpha}t)dt \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0). \tag{2-8}$$

Nach Voraussetzung existiert eine Konstante $M = M(\widetilde{\vartheta})$ mit

$$\|T(z)\|_{L(X)} \leq M \quad (z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}).$$

Damit folgt

$$\|(\lambda - e^{ia}A)^{-1}\| \leq \int_0^\infty |\exp(-\lambda t)|\, \|T(e^{i\alpha}t)\| dt \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda} \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0). \tag{2-9}$$

Insgesamt haben wir $e^{-i\alpha}\lambda \in \rho(A)$ für alle $|\alpha| < \widetilde{\vartheta}$ und alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$, d.h. $\Sigma_{\widetilde{\vartheta}+\pi/2} \supset \rho(A)$.

Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\widetilde{\vartheta} + \varepsilon < \vartheta$. Für $z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}+\pi/2}$ existiert ein $\lambda \in \Sigma_{\pi/2-\varepsilon}$ und ein α mit $|\alpha| < \widetilde{\vartheta} + \varepsilon$ und $z = e^{-i\alpha}\lambda$. Aus (2-9) folgt

$$\begin{aligned}\|(z-A)^{-1}\| &= \|(e^{-i\alpha}\lambda - A)^{-1}\| = \|(\lambda - e^{i\alpha}A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda} \leq \frac{M}{C_\varepsilon|\lambda|} \\ &= \frac{M}{C_\varepsilon|z|} \quad (z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}+\pi/2}),\end{aligned}$$

wobei wir die Abschätzung $\operatorname{Re}\lambda \geq C_\varepsilon|\lambda|$ $(\lambda \in \Sigma_{\pi/2-\varepsilon})$ verwendet haben. Da $\widetilde{\vartheta} < \vartheta$ beliebig war, ist A sektoriell mit Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Sei $\widetilde{\vartheta} \in (0, \vartheta)$ und $z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}$. Wähle $\delta := \frac{1}{|z|}$ und φ, ψ mit $\frac{\pi}{2} + \widetilde{\vartheta} < \varphi < \psi < \varphi_A$ und definiere

$$T(z) := \exp(zA) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Nach Lemma 2.10 ist $T\colon \Sigma_\vartheta \to L(X)$ holomorph und erfüllt die Funktionalgleichung.

Um zu zeigen, dass T beschränkt ist, verwendet man $|\arg(\lambda z)| \geq \psi - |\arg z| \geq \varphi - \widetilde{\vartheta} > \frac{\pi}{2}$ für $|\arg\lambda| = \psi$ und damit

$$|e^{\lambda z}| \leq e^{-C_1|\lambda|\,|z|} \quad (|\arg\lambda| = \psi,\ z \in \Sigma_{\widetilde{\vartheta}}) \tag{2-10}$$

mit einer Konstanten $C_1 = C_1(\psi, \widetilde{\vartheta}) > 0$. Wir schreiben $\gamma_{\psi,\delta} = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ mit folgenden Parametrisierungen:

$$\gamma_1(r) := re^{-i\psi} \quad (r \in (-\infty, \delta]),$$

$$\begin{aligned}\gamma_2(\alpha) &:= \delta e^{i\alpha} \quad (\alpha \in [-\psi, \psi]),\\ \gamma_3(r) &:= re^{i\psi} \quad (r \in [\delta, \infty)).\end{aligned}$$

Auf γ_3 verwenden wir (2-10) und $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \frac{M}{|\lambda|}$ und erhalten

$$\Big\| \int_{\gamma_3} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \Big\| \le M \int_{|z|^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-C_1 r|z|}}{r}\, dr = M \int_1^\infty \frac{e^{-C_1 s}}{s}\, ds =: C_2 < \infty,$$

wobei wir $s = r|z|$ substituiert haben. Dieselbe Abschätzung gilt für γ_1, und auf γ_2 verwenden wir

$$\Big\| \int_{\gamma_2} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1} d\lambda \Big\| \le \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(\delta e^{i\alpha} z)|\, \|(\delta e^{i\alpha} - A)^{-1}\|\, |\delta e^{i\alpha}| d\alpha \le 2M\psi e.$$

Somit sind alle Integrale durch eine von z unabhängige Konstante beschränkt, und es folgt

$$\sup\{\|T(z)\| : z \in \Sigma_{\tilde{\vartheta}}\} < \infty.$$

Wir zeigen nun, dass T stark stetig ist. Seien $x \in D(A)$ und $z > 0$. Es gilt $\lambda(\lambda - A)^{-1}x = x + (\lambda - A)^{-1}Ax$, also

$$\begin{aligned} T(z)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda - 0} x d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \\ &= x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda. \end{aligned}$$

Wir schätzen das letzte Integral auf jeder Wegstrecke ab, wobei wir wieder $\delta := \frac{1}{z}$ und die obigen Parametrisierungen wählen.

$$\Big\| \int_{\gamma_3} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \Big\| \le \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{|\exp(rze^{i\psi})|}{r}\, \|(re^{i\psi} - A)^{-1}Ax\| dr.$$

Mit (2-10) folgt $|\exp(rze^{i\psi})| \le e^{-C_1 r}$, und wir erhalten unter Verwendung von $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le M|\lambda|^{-1}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{|\exp(rze^{i\psi})|}{r}\, \|(re^{i\psi} - A)^{-1}Ax\| dr &\le \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-C_1 zr}}{r}\, \|(re^{i\psi} - A)^{-1}Ax\| dr \\ &\le M \int_{z^{-1}}^{\infty} \frac{e^{-C_1 zr}}{r^2}\, \|Ax\| dr \\ &= Mz \int_1^\infty \frac{e^{-C_1 s}}{s^2}\, ds\, \|Ax\| \to 0 \quad (z \to 0). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \to 0 \quad (z \to 0).$$

Für γ_2 gilt

$$\begin{aligned}\Big\| \int_{\gamma_2} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}(\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda \Big\| &\le \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(z^{-1}e^{i\alpha} z)| \, \|(z^{-1}e^{i\alpha} - A)^{-1} Ax\| d\alpha \\ &\le Mz \int_{-\psi}^{\psi} |\exp(e^{i\alpha})| d\alpha \, \|Ax\| \to 0 \quad (z \to 0).\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $T(z)x - x \to 0$ $(z \to 0)$ für alle $x \in D(A)$. Da $D(A)$ dicht in X ist, ist T stark stetig.

Nach dem bisher Bewiesenen ist T eine C_0-Halbgruppe. Es bleibt noch zu zeigen, dass T von A erzeugt wird. Mit majorisierter Konvergenz erhalten wir für $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}T(z)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z} \lambda (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z} x d\lambda}_{=0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} e^{\lambda z} (\lambda - A)^{-1} Ax d\lambda = T(z)Ax\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{d}{dz}T(z)x = T(z)Ax \stackrel{|z|\to 0}{\longrightarrow} Ax.$$

Sei B der Generator von T. Dann folgt $D(A) \subset D(B)$ und $Ax = Bx$ für alle $x \in D(A)$. Wegen $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$ ist deshalb $A = B$. □

Holomorphe Halbgruppen sind insbesondere differenzierbar. Dies bewirkt bereits, dass die Halbgruppe glättet, d.h. dass $T(\cdot)x$ unendlich oft differenzierbar ist:

2.12 Lemma. *Sei T eine differenzierbare Halbgruppe, d.h. die Abbildung $(0, \infty) \to X$, $t \mapsto T(t)x$ sei differenzierbar für alle $x \in X$. Sei A der Generator von T. Dann gilt $T(t)x \in D(A^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $t \mapsto T(t)x \in C^\infty((0, \infty), X)$ mit*

$$T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x \quad (t > 0,\ x \in X).$$

Es gilt weiter $A^n T(t) \in L(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit Induktion über n.

(i) $n = 1$: Sei $x \in X$. Da $t \mapsto T(t)x$ differenzierbar ist, folgt $T(t)x \in D(A)$ für alle $t > 0$, denn für $y := T(t)x$ existiert

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)y - y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{T(t + h)x - T(t)x}{h} = T'(t)x.$$

Hieran sieht man auch $T'(t)x = AT(t)x$. Da A abgeschlossen ist und $T(t) \in L(X)$, ist auch $AT(t)$ abgeschlossen mit Definitionsbereich X. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen gilt $AT(t) \in L(X)$.

(ii) $n \to n+1$: Sei $s > 0$. Dann ist

$$(s,\infty) \to X,\, t \mapsto T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x = T(t-s)A^n T(s)x$$

nach Schritt (i) (mit $n = 1$ und angewendet auf $A^n T(s)x$ anstelle von x) differenzierbar mit Ableitung

$$T^{(n+1)}(t)x = \frac{d}{dt} T(t-s)A^n T(s)x = AT(t-s)A^n T(s)x = A^{n+1}T(t)x.$$

Wegen $A^n T(t) \in L(X)$ nach (i) folgt wie oben $A^{n+1}T(t) = A(A^n T(t)) \in L(X)$. □

2.13 Beispiele. a) Für Laplaceoperator in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\sigma(\Delta) = (-\infty, 0]$ und nach Beispiel 5.2

$$(\lambda - \Delta)^{-1} = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda + |\xi|^2}\right]\mathscr{F}.$$

Für Winkel $\varphi \in (0,\pi)$ können wir abschätzen

$$\frac{1}{|\lambda + |\xi|^2|} = \frac{1}{\sqrt{\big(\operatorname{Re}\lambda + |\xi|^2\big)^2 + \big(\operatorname{Im}\lambda\big)^2}} \le \frac{C_\varphi}{|\lambda|} \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Aus dem Satz von Plancherel folgt

$$\|\lambda(\lambda - \Delta)^{-1}\|_{L(X)} \le C_\varphi \quad (\lambda \in \Sigma_\varphi),$$

also ist Δ der Generator einer beschränkten holomorphen C_0-Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ vom Winkel $\frac{\pi}{2}$. Aus Lemma 2.12 folgt insbesondere $t \mapsto T(t)x \in C^\infty((0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n))$ als auch $T(t)x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} W_p^k(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $t > 0$ und $x \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \quad \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad \text{ in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

ist also für jedes $t > 0$ und $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ unendlich oft differenzierbar in x.

b) Der Schrödingeroperator $i\Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ besitzt das Spekrum $\sigma(i\Delta) = i(-\infty, 0]$. Somit existiert kein Sektor Σ_φ mit $\varphi > \frac{\pi}{2}$ mit $\Sigma_\varphi \supset \rho(i\Delta)$, und der Schrödingeroperator erzeugt keine holomorphe C_0-Halbgruppe in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.14 Bemerkung. Das Beispiel des Laplace-Operators zeigt die typisch parabolische Glättungseigenschaft: Hier ist die Lösung sowohl in t als auch in x unendlich oft differenzierbar. Dies gilt z.B. nicht für die Lösung der Wellengleichung, welche nicht glatter ist als die Anfangswerte. Die Glättungseigenschaft kann recht gut mit Hilfe der Halbgruppentheorie untersucht werden.

Eine andere Eigenschaft der Wärmeleitungsgleichung, die unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (ebenfalls im Gegensatz zur Wellengleichung) kann man nicht so einfach systematisch erhalten.

3. $\mathcal{R}$-Beschränktheit und Fourier-Multiplikatoren

3.1 Worum geht's? Während man für die Erzeugung einer holomorphen Halbgruppe sektorielle Operatoren benötigt, braucht man für die maximale L^p-Regularität noch eine etwas stärkere Eigenschaft, die $\mathcal{R}$-Sektorialität. In diesem Abschnitt soll es um Eigenschaften der $\mathcal{R}$-Beschränktheit gehen sowie um die Möglichkeit, diese nachzurechnen.

a) Eigenschaften $\mathcal{R}$-beschränkter Operatorfamilien

3.2 Definition (Rademacher-Funktionen)**.** Die Rademacher-Funktionen $r_n\colon [0,1] \to \{-1,1\}$ sind definiert durch

$$r_n(t) := \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t) \quad (t \in [0,1]).$$

Laut Definition ist

$$r_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \frac{1}{2}), \\ -1, & t \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Die Funktion r_2 nimmt den Wert 1 auf den Teilintervallen $(0, \frac{1}{4})$ und $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ an. Man rechnet sofort nach, dass

$$\int_0^1 r_n(t) r_m(t) dt = \delta_{nm} \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

gilt. Außerdem ist

$$\lambda(\{t \in [0,1] : r_{n_1}(t) = z_1, \dots, r_{n_M}(t) = z_M\}) = \frac{1}{2^M} = \prod_{j=1}^M \lambda(\{t \in [0,1] : r_{n_j}(t) = z_j\}).$$

Somit bildet $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger gleichverteilter Zufallsgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$ wie in Definition 1.13. Man kann sich die Folge $(\varepsilon_j)_j$ in dieser Definition stets als Rademacher-Funktionen vorstellen, da die Aussage dieser Definition nur die Wahrschenlichkeitsverteilung der Zufallsgrößen verwendet. Umgekehrt gelten Aussagen über die Rademacher-Funktionen analog für beliebige Folgen von Zufallsgrößen wie in Definition 1.13.

3.3 Definition. Sei X ein Banachraum und $1 \le p < \infty$. Dann ist $\operatorname{Rad}_p(X)$ definiert als der Banachraum aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, für welche die Reihe $\sum_{n=1}^\infty r_n x_n$ in $L^p([0,1];X)$ konvergiert. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Rad}_p(X)$ definiert man

$$\|(x_n)_n\| := \Big\| \sum_{n=1}^\infty r_n x_n \Big\|_{L^p([0,1];X)}.$$

3.4 Bemerkung. Da die Rademacher-Funktionen unabhängig sind, kann man eine Folge $(x_n)_n$ mit ihrer Summe $\sum_n r_n x_n \in L^p([0,1];X)$ identifizieren. Denn falls $\sum_n r_n x_n = 0$ in $L^p([0,1];X)$ gilt, so folgt $\sum_n r_n f(x_n) = 0$ in $L^p([0,1])$ für alle $f \in X'$. Man multipliziert dies nun mit r_{n_0} für ein festes n_0 und integriert, d.h. man betrachtet die duale Paarung zwischen $L^p([0,1])$ und $L^{p'}([0,1])$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ (beachte $r_{n_0} \in L^q([0,1])$ für alle $q \in [1,\infty]$) und erhält aufgrund der Orthogonalität der Rademacher-Funktionen $f(x_{n_0}) = 0$ für alle $f \in X'$ und damit $x_{n_0} = 0$. Die Abbildung $\operatorname{Rad}_p(X) \to L^p([0,1];X)$, $(x_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^\infty r_n x_n$ ist somit injektiv, und $\operatorname{Rad}_p(X)$ kann als Teilraum von $L^p([0,1];X)$ aufgefasst werden.

3.5 Satz (Ungleichung von Kahane–Khintchine)**.** *Die Räume* $\operatorname{Rad}_p(X)$ *sind isomorph für* $1 \le p < \infty$*, d.h. es existieren Konstanten* $C_p > 0$ *mit*

$$\frac{1}{C_p}\Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^2([0,1];X)} \le \Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^p([0,1];X)} \le C_p\Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^2([0,1];X)}.$$

Der Beweis dieser Ungleichung ist im skalaren Fall $X = \mathbb{C}$ elementar, für beliebige Banachräume X jedoch recht kompliziert und wird hier weggelassen. Im skalaren Fall spricht man von der Ungleichung von Khintchine, im vektorwertigen Fall von der Ungleichung von Kahane. Ein Beweis findet sich z.B. in [HvNVW16], Theorem 3.02.23.

3.6 Lemma (Kontraktionsprinzip von Kahane)**.** *Sei* $1 \le p < \infty$*. Dann gilt für alle* $N \in \mathbb{N}$*, für alle* $x_j \in X$ *und alle* $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ *mit* $|a_j| \le |b_j|$*,* $j = 1,\dots,N$

$$\Big\|\sum_{j=1}^N a_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} \le 2\Big\|\sum_{j=1}^N b_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)}. \tag{3-1}$$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $b_j = 1$ und $|a_j| \le 1$ für alle $j = 1,\dots,N$ annehmen. Dies liegt daran, dass mit x_j auch $b_j x_j$ im Banachraum X liegt und somit nach dem Übergang von x_j zu $b_j x_j$ der zu betrachtende Fall vorliegt. Betrachtet man weiter $\operatorname{Re} a_j$ und $\operatorname{Im} a_j$ getrennt, so bleibt also noch für $a_j \in \mathbb{R}$ mit $|a_j| \le 1$ die Ungleichung

$$\Big\|\sum_{j=1}^N a_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} \le \Big\|\sum_{j=1}^N r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} \tag{3-2}$$

zu zeigen. Dazu sei $\{e^{(k)}\}_{k=1,\dots,2^N}$ eine Durchnummerierung der Ecken des Würfels $[-1,1]^N$. Wegen $a := (a_1,\dots,a_N)^T \in [-1,1]^N$ lässt sich a als Konvexkombination der $e^{(k)}$ darstellen, d.h. es existieren $\lambda_k \in [0,1]$ mit

$$\sum_{k=1}^{2^N} \lambda_k = 1 \quad \text{und} \quad a = \sum_{k=1}^{2^N} \lambda_k e^{(k)}.$$

Damit gilt für $e^{(k)} = (e_1^{(k)}, \dots, e_N^{(k)})^T$

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j=1}^N a_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} &\le \sum_{k=1}^{2^N} \lambda_k \Big\|\sum_{j=1}^N r_j e_j^{(k)} x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)}\\ &\le \max_{1\le k\le 2^N} \Big\|\sum_{j=1}^N r_j e_j^{(k)} x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} = \Big\|\sum_{j=1}^N r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)}.\end{aligned}$$

Dabei wird für die letzte Gleichheit verwendet, dass $\{r_j : j = 1, ..., N\}$ und $\{r_j e_j^{(k)} : j = 1, ..., N\}$ die gleiche gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen. □

3.7 Lemma. *a) Falls die Bedingung (1-6) in der Definition 1.13 für ein $p \in [1,\infty)$ gilt, so für alle $p \in [1,\infty)$. Für die zugehörigen $\mathcal{R}$-Schranken $\mathcal{R}_p(\mathcal{T})$ gilt*

$$\frac{1}{C_p^2}\mathcal{R}_2(\mathcal{T}) \le \mathcal{R}_p(\mathcal{T}) \le C_p^2 \mathcal{R}_2(\mathcal{T})$$

mit den Konstanten C_p aus Satz 3.5.

b) Eine Menge $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ ist genau dann $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}_2(\mathcal{T}) \le C$, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $T_1, \dots, T_N \in \mathcal{T}$ durch

$$\mathbf{T}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y_n := \begin{cases} T_n x_n, & n \le N,\\ 0, & n > N\end{cases}$$

ein beschränkter Operator $\mathbf{T} \in L(\mathrm{Rad}_2(X))$ mit Norm $\|\mathbf{T}\| \le C$ definiert wird.

Beweis. Teil a) folgt direkt aus der Ungleichung von Kahane, Teil b) ist eine Umformulierung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit und eine Anwendung der p-Unabhängigkeit aus Teil a). □

3.8 Bemerkung. a) Falls $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist, so ist $\mathcal{T}$ gleichmäßig beschränkt mit $\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| \le \mathcal{R}_p(\mathcal{T})$ für alle $p \in [1,\infty)$. Dies folgt direkt aus der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit mit $N = 1$, beachte, dass $\|r_n\|_{L^p([0,1])} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1,\infty)$ gilt.

b) Falls X und Y Hilberträume sind, so ist $\mathcal{R}$-Beschränktheit äquivalent zur gleichmäßigen Beschränktheit. Denn in diesem Fall sind auch $L^2([0,1];X)$ bzw. $L^2([0,1];Y)$ Hilberträume, und $(r_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2([0,1];X)$ und $(r_n T_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2([0,1];Y)$ sind orthogonale Folgen. Falls $\|T\| \le C_{\mathcal{T}}$ für alle $T \in \mathcal{T} \subset L(X,Y)$ gilt, so folgt

$$\Big\|\sum_{n=1}^N r_n T_n x_n\Big\|^2_{L^2[0,1];Y)} = \sum_{n=1}^N \|r_n T_n x_n\|^2_{L^2([0,1];Y)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N \|T_n x_n\|_Y^2 \le C_{\mathcal{T}}^2 \sum_{n=1}^N \|x_n\|_X^2 \\
&= C_{\mathcal{T}}^2 \Big\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \Big\|_{L^2([0,1];X)}^2 .
\end{aligned}
$$

3.9 Bemerkung. Seien X, Y, Z Banachräume und $\mathcal{T}, \mathcal{S} \subset L(X,Y)$ und $\mathcal{U} \subset L(Y,Z)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Dann sind auch

$$\mathcal{T} + \mathcal{S} := \{T + S : T \in \mathcal{T},\, S \in \mathcal{S}\}$$

und

$$\mathcal{U}\mathcal{T} := \{UT : U \in \mathcal{U},\, T \in \mathcal{T}\}$$

$\mathcal{R}$-beschränkt mit

$$\mathcal{R}\{\mathcal{T} + \mathcal{S}\} \le \mathcal{R}(\mathcal{T}) + \mathcal{R}(\mathcal{S}),\; \mathcal{R}(\mathcal{U}\mathcal{T}) \le \mathcal{R}(\mathcal{U})\mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

Denn seien $S_n \in \mathcal{S}$, $T_n \in \mathcal{T}$ und $U_n \in \mathcal{U}$ für $n = 1, \dots, N$. Dann folgt die Behauptung aus

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n (T_n + S_n) x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)} \le \Big\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)} + \Big\| \sum_{n=1}^N r_n S_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)}$$

und

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n U_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Z)} \le \mathcal{R}(\mathcal{U}) \Big\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)} .$$

3.10 Lemma (Square function estimate)**.** *Sei $(G, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $X = L^q(G)$, und sei $1 \le q < \infty$. Dann ist $\mathcal{T} \subset L(X)$ genau dann $\mathcal{R}$-beschränkt, falls ein $M > 0$ existiert mit*

$$\Big\| \Big(\sum_{n=1}^N |T_n f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(G)} \le M \Big\| \Big(\sum_{n=1}^N |f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(G)}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$, $T_n \in \mathcal{T}$ und $f_n \in L^q(G)$.

Beweis. Wir schreiben $f \approx g$, falls es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt mit $C_1|f| \le |g| \le C_2|f|$. Um die $\mathcal{R}$-Beschränktheit nachzurechnen, können wir nach der Ungleichung von Kahane die $\mathcal{R}$-Schranke $\mathcal{R}_q$ betrachten. Man berechnet

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n f_n \Big\|_{L^q([0,1];L^q(G))}^q = \int_0^1 \Big\| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\cdot) \Big\|_{L^q(G)}^q dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_G \Big| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega) \Big|^q d\mu(\omega)\, dt \\
&= \int_G \int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega) \Big|^q dt d\mu(\omega) \\
&\approx \int_G \Big(\int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega) \Big|^2 dt \Big)^{q/2} d\mu(\omega) \\
&= \int_G \Big(\sum_{n=1}^N |f_n(\omega)|^2 \Big)^{q/2} d\mu(\omega) \\
&= \Big\| \Big(\sum_{n=1}^N |f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(G)}^q .
\end{aligned}
$$

Dabei wurden der Satz von Fubini und die Khinchine-Ungleichung verwendet. Auf beide Seiten der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit angewendet, erhalten wir die Behauptung. □

3.11 Beispiel. Die Familie $\{T_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subset L(L^p(\mathbb{R}))$, $T_n f(\cdot) := f(\cdot - n)$ von Translationen ist für $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$ nicht $\mathcal{R}$-beschränkt. Denn für $f_n = \chi_{[0,1]}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\Big\| \Big(\sum_{n=0}^{N-1} |T_n f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|\chi_{[0,N]}\|_{L^p(\mathbb{R})} = N^{1/p}, \\
\Big\| \Big(\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} &= N^{1/2} \|\chi_{[0,1]}\|_{L^p(\mathbb{R})} = N^{1/2},
\end{aligned}
$$

und für $1 \le p < 2$ gilt $\frac{N^{1/p}}{N^{1/2}} \to \infty$ für $N \to \infty$. Ähnlich geht der Beweis für $p > 2$.

3.12 Satz. *Sei $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Dann sind auch die konvexe Hülle*

$$
\operatorname{co} \mathcal{T} := \Big\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k T_k : n \in \mathbb{N},\, T_k \in \mathcal{T},\, \lambda_k \in [0,1],\, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \Big\}
$$

und die absolutkonvexe Hülle

$$
\operatorname{aco} \mathcal{T} := \Big\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k T_k : n \in \mathbb{N},\, T_k \in \mathcal{T},\, \lambda_k \in \mathbb{C},\, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| = 1 \Big\}
$$

und der Abschluss von $\operatorname{co} \mathcal{T}$ und $\operatorname{aco} \mathcal{T}$ in der starken Operatortopologie $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}(\overline{\operatorname{co} \mathcal{T}}^s) \le \mathcal{R}(\mathcal{T})$ und $\mathcal{R}(\overline{\operatorname{aco} \mathcal{R}}^s) \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$.

Beweis. a) Seien $T_1, \dots, T_N \in \operatorname{co}(\mathcal{T})$. Dann existieren $m_k \in \mathbb{N}$, $\lambda_{k,j} \in [0,1]$ und $T_{k,j} \in \mathcal{T}$ mit $\sum_{j=1}^{m_k} \lambda_{k,j} = 1$ und $T_k = \sum_{j=1}^{m_k} \lambda_{k,j} T_{k,j}$.

Setze $\lambda_{k,j} := 0$ und $T_{k,j} := 0$ für $j \in \mathbb{N}$ mit $j > m_k$ und $k = 1, \dots, N$. Für $\ell \in \mathbb{N}^N$ definiert man $\lambda_\ell := \prod_{k=1}^N \lambda_{k,\ell_k}$ und $T_{k,\ell} := T_{k,\ell_k}$ für $k = 1, \dots, N$. Dann gilt $\lambda_\ell \in [0,1]$ sowie

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}^n} \lambda_\ell = \sum_{\ell_1 \in \mathbb{N}} \cdots \sum_{\ell_N \in \mathbb{N}} \lambda_{1,\ell_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{N,\ell_N} = \prod_{j=1}^N \Big(\sum_{\ell_j \in \mathbb{N}} \lambda_{j,\ell_j} \Big) = 1.$$

Weiter gilt für alle $k = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in \mathbb{N}^N} \lambda_\ell T_{k,\ell} &= \sum_{\ell \in \mathbb{N}^N} \lambda_\ell T_{k,\ell_k} = \Big(\sum_{\ell_k \in \mathbb{N}} \lambda_{k,\ell_k} T_{k,\ell_k} \Big) \prod_{j \neq k} \Big(\sum_{\ell_j \in \mathbb{N}} \lambda_{j,\ell_j} \Big) \\ &= \sum_{\ell_k \in \mathbb{N}} \lambda_{k,\ell_k} T_{k,\ell_k} = T_k. \end{aligned}$$

Beachte, dass es sich hierbei um endliche Summen handelt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{k=1}^N r_k T_k x_k \Big\|_{L^p([0,1];Y)} &= \Big\| \sum_{k=1}^N \sum_{\ell \in \mathbb{N}^N} r_k \lambda_\ell T_{k,\ell} x_k \Big\|_{L^p([0,1];Y)} \\ &\le \sum_{\ell \in \mathbb{N}^N} \lambda_\ell \Big\| \sum_{k=1}^N r_k T_{k,\ell} x_k \Big\|_{L^p([0,1];Y)} \\ &\le \mathcal{R}(\mathcal{T}) \sum_{\ell \in \mathbb{N}^n} \lambda_\ell \Big\| \sum_{k=1}^N r_k x_k \Big\|_{L^p([0,1];X)} \\ &= \mathcal{R}(\mathcal{T}) \Big\| \sum_{k=1}^N r_k x_k \Big\|_{L^p([0,1];X)}. \end{aligned}$$

Also gilt $\mathcal{R}(\operatorname{co}\mathcal{T}) \le \mathcal{R}(\mathcal{T})$.

b) Nach dem Kontraktionsprinzip gilt $\mathcal{R}(\mathcal{T}_0) \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$ für

$$\mathcal{T}_0 := \{\lambda T : T \in \mathcal{T},\, \lambda \in \mathbb{C},\, |\lambda| \le 1\}.$$

Wegen $\operatorname{co}\mathcal{T}_0 = \operatorname{aco}\mathcal{T}$ folgt $\mathcal{R}(\operatorname{aco}\mathcal{T}) \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$ nach a).

c) Direkt aus der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit folgt die Absgeschlossenheit unter der starken Operatortopologie. □

In der folgenden Aussage beachte man, dass eine Funktion $N\colon G \to L(X,Y)$ stark messbar heißt, falls eine μ-Nullmenge $A \in \mathscr{A}$ existiert, so dass $N|_{G\setminus A}$ messbar ist und $N(G \setminus A)$ separabel ist.

3.13 Korollar. *Sei $(G, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Sei*

$$\mathcal{N} := \{N \colon G \to L(X,Y) \,|\, N \text{ stark messbar mit } N(G) \subset \mathcal{T}\}.$$

Zu $h \in L^1(G,\mu)$ und $N \in \mathcal{N}$ definiere

$$T_{N,h}x := \int_G h(\omega)N(\omega)x d\mu(\omega) \quad (x \in X).$$

Dann ist

$$\mathcal{R}\Big(\{T_{N,h} : \|h\|_{L^1(G,\mu)} \le 1,\ N \in \mathcal{N}\}\Big) \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Zu $x_1, \dots, x_N \in X$, $h \in L^1(G,\mu)$ und $N \in \mathcal{N}$ definiere die messbare Abbildung

$$M \colon G \to Y^N,\ M(\omega) := \big(N(\omega)x_j\big)_{j=1,\dots,N}.$$

Dann ist $M \in L^\infty(G; Y^N)$ stark messbar, und daher existieren eine messbare Partition $G = \bigcup_{j=1}^\infty G_j$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ für $i \ne j$, und $\omega_j \in G_j$ mit

$$\|N(\omega)x_k - N(\omega_j)x_k\|_Y < \varepsilon \qquad \text{für fast alle } \omega \in G_j \text{ und alle } k = 1, \dots, N.$$

Setze

$$S := \sum_{j=1}^\infty \Big(\int_{G_j} h(\omega)d\mu(\omega)\Big)N(\omega_j).$$

Dann gilt $\|T_{N,h}x_k - Sx_k\|_Y < \varepsilon$ für alle $k = 1, \dots, N$. Somit liegt $T_{N,h}$ in der durch $x_1, \dots, x_N$ und ε gegebenen Umgebung von S bezüglich der starken Operatortopologie. Wegen $S \in \overline{\operatorname{aco}\mathcal{T}}^s$ folgt $T_{N,h} \in \overline{\operatorname{aco}\mathcal{T}}^s$, und die Behauptung ergibt sich aus Satz 3.12. □

3.14 Korollar. *Sei $N \colon \Sigma_{\theta'} \to L(X,Y)$ holomorph und beschränkt, und sei $N(\partial\Sigma_\theta \setminus \{0\})$ $\mathcal{R}$-beschränkt für ein $\theta < \theta'$. Dann ist $N(\Sigma_\theta)$ $\mathcal{R}$-beschränkt, und für jedes $\theta_1 < \theta$ ist $\{\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}N(\lambda) : \lambda \in \Sigma_{\theta_1}\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Beweis. Durch Betrachten von $M(\lambda) := N(\lambda^{2\theta/\pi})$ können wir $\theta = \frac{\pi}{2}$ annehmen. Nach der Poissonschen Formel gilt

$$N(\alpha + i\beta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2 + (s-\beta)^2}N(is)ds \quad (\alpha > 0).$$

Wegen $\|\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+(\cdot-\beta)^2}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ folgt die erste Behauptung aus Korollar 3.13.

Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} N(\lambda) = \int_{\partial \Sigma_\theta} h_\lambda(\mu) N(\mu) d\mu \quad (\lambda \in \Sigma_{\theta_1})$$

für $h(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)^2}$. Wegen $\sup_{\lambda \in \Sigma_{\theta_1}} \|h_\lambda\|_{L^1(\partial \Sigma_\theta)} < \infty$ folgt die zweiten Behauptung ebenfalls aus Korollar 3.13. □

3.15 Lemma. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset G$ kompakt und $H\colon G \to L(X,Y)$ holomorph. Dann ist $H(K)$ $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Beweis. Sei $z_0 \in K$. Dann existiert ein $r > 0$ mit

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} H^{(k)}(z_0) \frac{(z-z_0)^k}{k!} \quad (|z - z_0| \leq r),$$

wobei die Reihe in $L(X,Y)$ konvergiert und

$$\rho_0 := \sum_{k=0}^{\infty} \|H^{(k)}(z_0)\|_{L(X,Y)} \frac{r^k}{k!} < \infty.$$

Als Menge mit einem Element ist $\{H^{(k)}(z_0)\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit zugehöriger $\mathcal{R}_2$-Schranke $\|H^{(k)}(z_0)\|_{L(X,Y)}$. Nach dem Kontraktionsprinzip von Kahane ist auch die Menge $\{H^{(k)}(z_0)\frac{(z-z_0)^k}{k!} : z \in B(z_0, r)\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit Schranke nicht größer als $2\frac{r^k}{k!}\|H^{(k)}(z_0)\|_{L(X,Y)}$. Damit erhält man für alle endlichen Partialsummen die $\mathcal{R}$-Schranke $2\rho_0$, und durch Abschluss in der Operatornorm gilt dies auch für die unendliche Reihe. Durch Überdeckung von K durch endlich viele Kugeln erhält man die Behauptung. □

Wir wissen nach dem Satz von Weis, dass ein sektorieller Operator A genau dann maximale Regularität besitzt, falls er $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}$-Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$ ist. Die obigen Aussagen über $\mathcal{R}$-Beschränktheit erlauben es eine Reihe dazu äquivalenter Aussagen zu formulieren.

3.16 Satz. *Sei A der Erzeuger einer beschränkten holomorphen Halbgruppe T. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es existiert ein $\delta > 0$ so, dass A $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}$-Winkel $\varphi_{\mathcal{R}} = \frac{\pi}{2} + \delta$ ist.*
(ii) *Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\{t^n(it - A)^{-n} : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist.*
(iii) *Es existiert ein $\delta > 0$ so, dass die Familie $\{T(z) : z \in \Sigma_\delta\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist.*
(iv) *Die Familie $\{T(t), tAT(t) : t > 0\}$ ist $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Zum Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii) ist klar.

(ii)$\Longrightarrow$(i). Schreibe

$$(it-A)^{-n+1} = (n-1)i \int_t^\infty (is-A)^{-n} ds$$

und damit

$$(it)^{n-1}(it-A)^{-n+1} = \int_0^\infty h_t(s)\big[(is)^n(is-A)^{-n}\big]ds$$

für die Funktion $h_t(s) := (n-1)t^{n-1}s^{-n}\chi_{[t,\infty)}$. Es gilt $\int_0^\infty h_t(s)ds = 1$, und nach Korollar 3.13 folgt die Aussage (ii) für $n-1$ anstelle von n. Iterativ erhält man, dass (ii) für $n=1$ gilt. Verwende nun Korollar 3.14, um die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\{\lambda(\lambda-A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_{\pi/2}\}$ zu zeigen. Durch Reihenentwicklung (ähnlich wie beim Beweis der Analyzität einer Halbgruppe) kann man zeigen, dass $\lambda(\lambda-A)^{-1}$ sogar auf einem größeren Sektor $\mathcal{R}$-beschränkt ist.

(iii)$\Longrightarrow$(i). Dies folgt ebenfalls aus Korollar 3.13 und der Darstellung

$$(\lambda-A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt.$$

(i)$\Longrightarrow$(iii) folgt analog aus

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_t} e^{\lambda z}(\lambda-A)^{-1}d\lambda.$$

(iii)$\Longleftrightarrow$(iv) kann man unter Verwendung von Korollar 3.14 zeigen. □

b) Fouriermultiplikatoren und der Satz von Michlin

Im folgenden sei stets $D := -i(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n})$. Mit C, C_1, C_2 bezeichnen wir generische Konstanten, d.h. Konstanten, welche bei jedem Auftreten einen anderen Wert besitzen können, aber nicht von den in der Gleichung auftretenden Größen abhängt.

3.17 Bemerkung. Wir betrachten den Laplace-Operator im $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit maximalem Definitionsbereich $D(\Delta) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. Offensichtlich ist $D(\Delta) \supset W_p^2(\mathbb{R}^n)$. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich Gleichheit gilt. Sei dazu $u \in D(\Delta)$ und $f := u - \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sei $|\alpha| \le 2$. Dann gilt

$$D^\alpha u = \mathscr{F}^{-1}\xi^\alpha \mathscr{F} u = -\mathscr{F}^{-1}\frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}\mathscr{F} f$$

als Gleichheit in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Um $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen, muss also $\mathscr{F}^{-1}m_\alpha(\xi)\mathscr{F}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gelten, wobei $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$. Die Frage lautet also: Wird durch

$$f \mapsto \mathscr{F}^{-1}m_\alpha(\xi)\mathscr{F}f$$

ein stetiger linearer Operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ definiert? Die (positive) Antwort liefert der Satz von Michlin, der eine Aussage über Fourier-Multiplikatoren trifft.

3.18 Definition (Fourier-Multiplikator). Seien X, Y Banachräume, $1 \le p \le \infty$ und sei $m\colon \mathbb{R}^n \to L(X,Y)$ eine beschränkte stark messbare Funktion. Wegen $\mathscr{F}^{-1} \in L(L^1(\mathbb{R}^n;Y), L^\infty(\mathbb{R}^n;Y))$ induziert m eine Abbildung $T_m\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;X) \to L^\infty(\mathbb{R}^n;Y)$ durch

$$T_m f := \mathscr{F}^{-1}m\mathscr{F}f \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;X)).$$

Die Funktion m heißt Fourier-Multiplikator, falls

$$\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;Y)} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X)} \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;X)),$$

d.h. falls T_m eindeutig zu einem stetigen Operator $T_m \in L(L^p(\mathbb{R}^n;X), L^p(\mathbb{R}^n;Y))$ fortgesetzt werden kann. Die Funktion m heißt in diesem Fall das Symbol des Operators T_m. Wir schreiben $\operatorname{op}[m] := \mathscr{F}m\mathscr{F}^{-1} := T_m$ und $\operatorname{symb}[T_m] := m$.

Wir betrachten zunächst den skalaren Fall $X = Y = \mathbb{C}$.

3.19 Bemerkung. Für $p = 2$ gilt nach dem Satz von Plancherel genau dann $\operatorname{op}[m] \in L(L^2(\mathbb{R}^n))$, falls der Multiplikationsoperator $g \mapsto mg$ stetig in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt. Denn falls $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so folgt $\|mg\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Falls andererseits $m \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so existiert eine Folge messbarer Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $0 \le c_k \to \infty$, mit $0 < \lambda(A_k) < \infty$ und $|m| \ge c_k$ auf A_n. Für $g_k := \chi_{A_k}$ gilt dann $g_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|mg_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int |m(\xi)g_k(\xi)|^2 d\xi \ge c_k^2\lambda(A_k) = c_k^2\|g_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $\operatorname{op}[m]$ ist kein beschränkter Operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Der folgende Satz ist fundamental für die L^p-Theorie von Differentialoperatoren. Der Beweis ist für diese Vorlesung zu aufwändig. Hier bezeichnet $[\frac{n}{2}]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich $\frac{n}{2}$. Wir geben den Satz in zwei Varianten an.

3.20 Satz (Michlin). *Sei $1 < p < \infty$ und $m\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Falls eine der beiden Bedingungen*

(i) $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *und*

$$|\xi|^{|\beta|}|D^\beta m(\xi)| \le C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ |\beta| \le [\tfrac{n}{2}] + 1),$$

(ii) *$m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und*

$$\left|\xi^\beta D^\beta m(\xi)\right| \le C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, \beta \in \{0,1\}^n)$$

mit einer Konstanten $C_M > 0$ gilt, so ist m ein L^p-Fouriermultiplikator mit

$$\|\operatorname{op}[m]\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le c(n,p) C_M,$$

wobei die Konstante $c(n,p)$ nur von n und p abhängt.

3.21 Bemerkung. a) Die Bedingung (i) in obigem Satz wird häufig als die Michlin-Bedingung (aus dem Jahr 1957) bezeichnet, während Bedingung (ii) auf Lizorkin (1963) zurückgeht.

b) Sei die Funktion $m\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ homogen in ξ vom Grad $d \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$m(\rho\xi) = \rho^d m(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, \rho > 0).$$

Falls $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, so ist $D^\beta m(\xi)$ homogen in ξ vom Grad $d - |\beta|$ für alle $|\beta| \le k$. Denn $D^\beta[m(\rho\xi)] = \rho^{|\beta|}(D^\beta m)(\rho\xi)$, aber auch $D^\beta[\rho^d m(\xi)] = \rho^d (D^\beta m)(\xi)$.

c) Sei $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogen vom Grad 0. Dann erfüllt m die Michlin-Bedingung. Denn für $|\beta| \le [\frac{n}{2}] + 1$ ist $m_\beta(\xi) := |\xi|^{|\beta|} D_\beta m(\xi)$ homogen vom Grad 0 nach Teil a). Damit folgt

$$|m_\beta(\xi)| = \left| m_\beta\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)\right| \le \max_{|\eta|=1} |m_\beta(\eta)| < \infty \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Als erste Anwendung des Satzes von Michlin wird die Frage aus Bemerkung 3.17 beantwortet.

3.22 Korollar. *Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt $\{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} = W_p^2(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Betrachte wie in Bemerkung 3.17 die Funktion $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$ für $|\alpha| \le 2$. Sei $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Für $|\xi| \le 1$ ist $D^\beta m_\alpha$ als stetige Funktion beschränkt, für $|\xi| \ge 1$ können wir bei Berechnung von $D^\beta m_\alpha$ den Nenner $1 + |\xi|^2$ durch $|\xi|^2$ abschätzen und erhalten eine homogene Funktion vom Grad $-|\beta|$, welche auf $|\xi| \ge 1$ ebenfalls beschränkt ist. Somit erfüllt m_α die Michlin-Bedingung. □

Während der Satz von Michlin für den skalaren Fall hinreichende Kriterien für Fourier-Multiplikatoren angibt, ist für allgemeine Banachräume X, Y keines der beiden Kriterien hinreichend. Falls X und Y von Klasse $\mathcal{HT}$ sind, so gilt jedoch das Analogon des Michlinschen Satzes, wenn man die Normbeschränktheit durch die $\mathcal{R}$-Beschränktheit ersetzt, wie der folgende Satz zeigt. Die Aussage dieses Satzes mit $n = 1$ ist auch die wesentliche Beweiszutat des Satzes von Weis über maximale Regularität.

3.23 Satz. *Seien X, Y Banachräume von Klasse $\mathcal{HT}$, und sei $1 < p < \infty$. Sei $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; L(X,Y))$ mit*

$$\mathcal{R}\Big(\big\{|\xi|^{|\beta|} D^\beta m(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \beta \in \{0,1\}^n\big\}\Big) =: \kappa < \infty.$$

Dann ist m ein vektorwertiger Fourier-Multiplikator mit

$$\|\operatorname{op}[m]\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n;X), L^p(\mathbb{R}^n;Y))} \leq C\kappa,$$

wobei die Konstante C nur von n, p, X und Y abhängt.

Der Beweis dieses Satzes findet sich etwa in [KW04], Theorem 4.6 oder [HvNVW16], Theorem 5.3.18.

Man beachte, dass in diesem Satz die $\mathcal{R}$-Beschränktheit gefordert wird, um die Norm-Beschränktheit der zugehörigen Fourier-Multiplikatoren zu erhalten. Um sogar $\mathcal{R}$-Beschränktheit zu erhalten (und damit eine Art Iteration möglich zu machen), braucht man noch eine weitere Eigenschaft der Banachräume X und Y.

3.24 Definition. Ein Banachraum X hat die Eigenschaft (α) (englisch: „property (α)“), falls eine Konstante $C > 0$ so existiert, dass für alle $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, $|\alpha_{ij}| \leq 1$ und alle $x_{ij} \in X$ gilt:

$$\int_0^1 \int_0^1 \Big\| \sum_{i,j=1}^N r_i(u) r_j(u) \alpha_{ij} x_{ij} \Big\|_X du dv \leq C \int_0^1 \int_0^1 \Big\| \sum_{i,j=1}^N r_i(u) r_j(v) x_{ij} \Big\|_X du dv.$$

D.h. das Kontraktionsprinzip gilt sogar für Doppelsequenzen $(r_i r_j)_{i,j=1}^N$. Hierbei sind r_i wieder die Rademacher-Funktionen.

3.25 Bemerkung. a) Die Eigenschaft (α) ist unabhängig von der Eigenschaft, dass X von Klasse $\mathcal{HT}$ ist.

b) Falls $X = L^p(G,\mu)$ mit einem σ-finiten Maß μ und $p \in [1,\infty)$, so hat X die Eigenschaft (α), wie man leicht mit Hilfe des Satzes von Fubini und der Ungleichung von Kahane sieht. Falls X ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(G,\mu)$ ist, gilt Eigenschaft (α) ebenfalls. Somit haben insbesondere Sobolev- und Besovräume die Eigenschaft (α).

c) Falls X die Eigenschaft (α) hat und $Y = L^p(G,\mu;X)$ für ein σ-finites Maß μ ist, so hat auch Y die Eigenschaft (α). Auch dies folgt schnell mit dem Satz von Fubini.

Für Räume mit Eigenschaft (α) von Klasse $\mathcal{HT}$ gilt folgende Verschärfung des vektorwertigen Satzes von Michlin.

3.26 Satz. *Seien X, Y Banachräume von Klasse $\mathcal{HT}$ mit Eigenschaft (α). Sei $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Betrachte die Menge*

$$M := \Big\{ m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; L(X,Y)) : \xi^\beta D^\beta m(\xi) \in \mathcal{T} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \beta \in \{0,1\}^n \Big\}.$$

Dann ist $\{\mathrm{op}[m] : m \in M\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n;X), L^p(\mathbb{R}^n;Y))$ *$\mathcal{R}$-beschränkt mit* $\mathcal{R}_p(\{\mathrm{op}[m] : m \in M\}) \le C\mathcal{R}_p(\mathcal{T})$*, wobei die Konstante* C *nur von* p, n, X *und* Y *abhängt.*

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in [GW03], Theorem 3.2.

3.27 Korollar. *Sei* $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *eine Familie von matrizenwertigen Funktionen* $m_\lambda \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N\times N})$ *mit*

$$|\xi^\beta D^\beta m_\lambda(\xi)|_{\mathbb{C}^{N\times N}} \le C_0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, \beta \in \{0,1\}^n,\, \lambda \in \Lambda).$$

Dann ist $\{\mathrm{op}[m_\lambda] : \lambda \in \Lambda\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))$ *$\mathcal{R}$-beschränkt mit Schranke* $C \cdot C_0$*, wobei* C *nur von* p*,* n *und* N *abhängt.*

Beweis. Der Raum $X = \mathbb{C}^N$ ist von Klasse $\mathcal{HT}$ und besitzt die Eigenschaft (α). Nach Voraussetzung ist

$$\big\{\xi^\beta D_\xi^\beta m_\lambda(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, \beta \in \{0,1\}^n,\, \lambda \in \Lambda\big\} \subset L(X)$$

normbeschränkt und damit, da X Hilbertraum ist, auch $\mathcal{R}$-beschränkt. Man wählt in Satz 3.26 $\mathcal{T} := \{A \in \mathbb{C}^{N\times N} : |A| \le C_0\}$ und erhält die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\{\mathrm{op}[m_\lambda] : \lambda \in \Lambda\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))$. $\square$

4. Wohlgestelltheit für nichtlineare parabolische Differentialgleichungen

4.1 Worum geht's? Als Anwendung der bisherigen Abschnitte werden hier parabolische Differentialgleichungen betrachtet. Es wird für die linearen Gleichungen gezeigt, dass unter geeigneten Glattheitsannahmen die zugehörige L^p-Realisierung maximale Regularität besitzt. Dies lässt sich dann auf nichtlineare Gleichungen anwenden, um die Lösbarkeit in entsprechenden Sobolevräumen zu zeigen.

a) Maximale Regularität linearer parabolischer Gleichungen

Im Folgenden sei $1 < p < \infty$ und $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} = \Sigma_{\pi/2}$. Gegeben sei ein Differentialoperator $A = A(x, D)$ der Form

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

mit $m \in \mathbb{N}$ und $a_\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Dabei ist $D := -i(\partial_1, \ldots, \partial_n)$.

Zum (formalen) Differentialoperator $A = A(x, D)$ definiert man das Symbol

$$a(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

und das Hauptsymbol

$$a_0(x, \xi) := \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Beide Symbole sind Abbildungen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{C}$. Die L^p-Realisierung A_p von $A(x, D)$ ist definiert als unbeschränkter linearer Operator $A_p \colon L^p(\mathbb{R}^n) \supset D(A_p) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

$$D(A_p) := W_p^{2m}(\mathbb{R}^n), \; A_p u := A(x, D)u \quad (u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)).$$

4.2 Definition. Der Operator $\partial_t - A(x, D)$ heißt parabolisch, falls

$$|\lambda - a_0(x, \xi)| \ge C_P\big(|\lambda| + |\xi|^{2m}\big) \quad \big(x \in \mathbb{R}^n, \, (\xi, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus \{(0, 0)\}\big). \tag{P}$$

4.3 Bemerkung. a) Für jedes feste $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $(\xi, \lambda) \mapsto p(x, \xi, \lambda) := \lambda - a_0(x, \xi)$ quasihomogen im Sinn

$$p(x, r\xi, r^{2m}\lambda) = r^{2m} p(x, \xi, \lambda) \quad \big((\xi, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus \{(0, 0)\}\big).$$

Damit kann man sich auf die kompakte Menge $\{(\xi,\lambda) : |\lambda|+|\xi|^{2m} = 1\}$ beschränken. Der Operator $A(x,D)$ ist genau dann parabolisch, falls

$$\inf\big\{|\lambda - a_0(x,\xi)| : x \in \mathbb{R}^n,\, (\xi,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{C}}_+ \text{ mit } |\lambda| + |\xi|^{2m} = 1\big\} > 0.$$

b) Falls $a_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| < 2m$, so können die Terme niederer Ordnung des Symbols gleichmäßig in x abgeschätzt werden, und $A(x,D)$ ist genau dann parabolisch, falls Konstanten $C, R > 0$ existieren mit

$$|\lambda - a(x,\xi)| \geq C(|\lambda| + |\xi|^{2m}) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\, |\xi| \geq R).$$

Dies entspricht der Definition der Parabolizität bei Pseudodifferentialoperatoren, bei welchen im allgemeinen kein Hauptsymbol existiert. (Ein homogenes Hauptsymbol ist nur bei klassischen Pseudodifferentialoperatoren definiert.)

4.4 Bemerkung. Falls $\partial_t - A(x,D)$ parabolisch ist, so ist $A(x,D)$ parameterelliptisch in einem größeren Sektor $\overline{\Sigma}_\theta$ mit $\theta > \frac{\pi}{2}$, d.h. die Bedingung (P) gilt noch für alle λ in diesem Sektor. Denn man sieht leicht, dass die Menge der Winkel der Halbstrahlen, in welchen Bedingung (P) gilt, offen ist.

Nach einem Standardschema in elliptischer Theorie betrachten wir zunächst das zugehörige Modellproblem.

4.5 Satz. *Sei $A(D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$ mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad(|\alpha| = 2m)$. Falls $\partial_t - A(D)$ parabolisch mit Konstante C_P ist, so existiert ein $\theta > \frac{\pi}{2}$ so, dass $\rho(A_p) \supset \Sigma_\theta$, und die Menge*

$$\big\{\lambda(\lambda - A_p)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\big\}$$

ist $\mathcal{R}$-beschränkt. Die $\mathcal{R}$-Schranke hängt dabei nur von p, n, m, C_P und von $M := \sum_{|\alpha|=2m} |a_\alpha|$ ab. Insbesondere ist A_p $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}$-Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$, und A_p besitzt maximale L^q-Regularität für alle $q \in (1,\infty)$.

Beweis. Nach Bemerkung 4.4 existiert ein $\theta > \frac{\pi}{2}$ so, dass die Abschätzung (P) für $\lambda \in \Sigma_\theta$ gilt. Wir zeigen, dass die Familie $\{m_\lambda : \lambda \in \Sigma_\theta\}$ mit $m_\lambda(\xi) := \lambda(\lambda - a_0(\xi))^{-1}$ die Voraussetzung von Korollar 3.27 erfüllt.

Da für $r > 0$ gilt $r^{2m}\lambda - a_0(r\xi) = r^{2m}(\lambda - a_0(\xi))$, ist die Abbildung $(\xi,\lambda) \mapsto \frac{1}{\lambda}(\lambda - a_0(\xi))$ quasihomogen in (ξ,λ) vom Grad 0. Damit gilt dasselbe für die Abbildung $(\xi,\lambda) \mapsto \lambda(\lambda - a_0(\xi))^{-1}$. Da quasihomogene und glatte Funktionen die Michlin-Bedingung erfüllen (siehe Bemerkung 3.21), folgt nach Korollar 3.27 die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\{T_{m_\lambda} : \lambda \in \Sigma_\theta\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n))$. Wegen $\frac{1}{\lambda}T_{m_\lambda}(\lambda - A_p) = \mathrm{id}_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)}$ und $\frac{1}{\lambda}(\lambda - A_p)T_{m_\lambda} = \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ ist $T_{m_\lambda} = \lambda(\lambda - A_p)^{-1}$. Daher ist A_p $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$, und nach Satz 1.15 besitzt A_p maximale L^q-Regularität für alle $q \in (1,\infty)$. Dies zeigt alle Behauptungen des Satzes bis auf die Abhängigkeit der

$\mathcal{R}$-Schranke. Um diese nachzuweisen, müssen wir die Michlin-Konstante quantifizieren.

Nach Voraussetzung (P) gilt

$$|\lambda(\lambda - a_0(\xi))^{-1}| \le \frac{|\lambda|}{C_P(|\xi|^{2m} + |\lambda|)} \le \frac{1}{C_P}.$$

Für die Ableitung berechnet man

$$\Big|\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\lambda}{\lambda - a_0(\xi)}\Big| = \left|\frac{\xi_k \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi_k} \xi^\alpha}{(\lambda - a_0(\xi))^2}\right| \le \frac{(\sum_{|\alpha|=2m} |a_\alpha|)|\lambda|\,|\xi|^{2m}}{C_P^2(|\lambda| + |\xi|^{2m})^2} \le \frac{M}{C_P^2}.$$

Iterativ folgt

$$\Big|\xi^\alpha D_\xi^\alpha \frac{\lambda}{\lambda - a_0(\xi)}\Big| \le C(m,n,M,C_P),$$

für alle $\alpha \in \{0,1\}^n$, $\lambda \in \Sigma_\theta$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Nach Korollar 3.27 hängt die $\mathcal{R}$-Schranke von $\{\lambda(\lambda - A_p)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}$ nur von m, n, M, C_P und p ab. □

Wie der letzte Satz zeigt, erhalten wir für das Modellproblem maximale Regularität. Man kann nun im Wesentlichen durch Störungsargumente zeigen, dass unter entsprechender Glattheit an die Koeffizienten die maximale Regularität auch für Gleichungen mit variablen Koeffizienten gilt. Der folgende Satz wird später bewiesen.

4.6 Satz ($\mathcal{R}$-Sektorialität parabolischer Differentialgleichungen)**.** *Sei* $A(x,D) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ *mit*

$$\begin{aligned} a_\alpha &\in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \quad (|\alpha| = 2m),\\ a_\alpha &\in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \quad (|\alpha| < 2m). \end{aligned}$$

Sei $1 < p < \infty$*. Falls* $\partial_t - A(x,D)$ *parabolisch ist, so existieren* $\theta > \frac{\pi}{2}$ *und* $\mu > 0$ *so, dass* $A_p - \mu$ $\mathcal{R}$*-sektoriell mit Winkel* θ *ist. Insbesondere besitzt* $A_p - \mu$ *maximale* L^q*-Regularität für alle* $1 < q < \infty$*, d.h. es gilt* $A_p - \mu \in \mathrm{MR}_q((0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n))$*.*

4.7 Bemerkung. In der Situation von Satz 4.6 folgt $A_p \in \mathrm{MR}_q((0,T); L^p(\mathbb{R}^n))$ für alle $T \in (0,\infty)$, d.h. bei endlichen Intervallen kann man auf den Shift μ verzichten. Um dies zu zeigen, betrachten wir

$$\begin{aligned} \partial_t u - A_p u &= f \quad \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^n,\\ u(0,\cdot) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{4-1}$$

für $f \in L^q((0,T); L^p(\mathbb{R}^n))$. Man definiert $\widetilde{f}(t,\cdot) := e^{-\mu t} f(t,\cdot)$ mit μ aus Satz 4.6. Dann besitzt nach Satz 4.6 das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{u} - (A_p - \mu)\widetilde{u} &= \widetilde{f} \quad \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^n,\\ \widetilde{u}(0) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{4-2}$$

eine eindeutige Lösung in $\mathbb{E} := W_q^1((0,T); L^p(\mathbb{R}^n)) \cap L^q((0,T); W_p^{2m}(\mathbb{R}^n))$. Definiert man u durch $\widetilde{u}(t,\cdot) = e^{-\mu t} u(t,\cdot)$, so folgt $u \in \mathbb{E}$ sowie

$$(\partial_t - (A_p - \mu))\widetilde{u} = e^{-\mu t}\Big(\partial_t u - \mu u - A_p u + \mu u\Big) = e^{-\mu t}(\partial_t u - A_p u),$$

und wegen (4-2) ist u eine Lösung von (4-1). Der entscheidende Punkt ist hierbei, dass die Skalierung $u \mapsto e^{-\mu \cdot} u$ für endliche Zeitintervalle ein Isomorphismus der entsprechenden Räume ist.

b) Die Lösung quasilinearer Gleichungen

Wir wollen nun mit der Methode der maximalen Regularität quasilineare Evolutionsgleichungen behandeln. Seien X_0 und X_1 Banachräume mit $X_1 \subset X_0$, $p \in (1,\infty)$, und sei $T_0 \in (0,\infty)$. Der Raum X_1 wird der Definitionsbereich der auftretenden Operatoren sein, daher definieren wir analog zu Kapitel 1 den Lösungsraum

$$\mathbb{E} := \mathbb{E}_T := W_p^1((0,T); X_0) \cap L^p((0,T); X_1).$$

Dabei werden wir $T \le T_0$ später hinreichend klein wählen. Der zugehörige Spurraum $\gamma_t\mathbb{E}$ ist wie in Definition 1.4 definiert. (Beachte, dass $\gamma_t\mathbb{E}$ nach Bemerkung 1.5 nicht von T abhängt.) Weiter sei $\mathbb{F} := \mathbb{F}_T := L^p((0,T); X_0)$.

Wir verwenden folgendes Resultat aus der Theorie der Interpolationsräume, welches Satz 1.4 verschärft.

4.8 Lemma. *Es gilt die stetige Inklusion $\mathbb{E}_T \subset \mathrm{BUC}([0,T]; \gamma_t\mathbb{E})$. Dabei hängt die Norm der Einbettung von T ab, sie wird im Allgemeinen größer für kleinere Zeitintervalle. Auf dem Teilraum ${}_0\mathbb{E}_T := \{u \in \mathbb{E}_T : \gamma_t u = 0\}$ kann diese Norm jedoch unabhängig von $T > 0$ abgeschätzt werden, d.h. es existiert eine von $T > 0$ unabhängige Konstante C_1 mit*

$$\|u\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})} \le C_1 \|u\|_{\mathbb{E}_T} \quad (u \in {}_0\mathbb{E}_T).$$

Für jedes $t \in [0,T_0]$ und $u \in \mathbb{E}_{T_0}$ sei

$$A(t,u(t)) \colon X_0 \supset D(A(t,u(t))) \to X_0$$

ein abgeschlossener linearer Operator, wobei $D(A(t,u(t))) = X_1$ gelte. In diesem Fall kann man $A(t,u(t))$ als Operator in $L(X_1,X_0)$ auffassen.

Wir betrachten Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(t,u(t))u(t) &= F(t,u(t)) \quad (t \in (0,T_0)), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{4-3}$$

für $u_0 \in \gamma_t\mathbb{E}$. An die Nichtlinearitäten A und F wird Folgendes vorausgesetzt:

(A1) Es gilt $A \in C([0,T_0] \times \gamma_t\mathbb{E}, L(X_1, X_0))$, und für alle $R > 0$ existiert eine Lipschitz-Konstante $L(R) > 0$ mit

$$\|A(t,u_1)v - A(t,u_2)v\|_{X_0} \le L(R)\|u_1 - u_2\|_{\gamma_t\mathbb{E}}\|v\|_{X_1}$$

für alle $t \in [0,T_0]$, $v \in X_1$ und alle $u_1, u_2 \in \gamma_t\mathbb{E}$ mit $\|u_1\|_{\gamma_t\mathbb{E}} \le R$ und $\|u_2\|_{\gamma_t\mathbb{E}} \le R$.

(A2) Für die Abbildung $F\colon [0,T_0] \times \gamma_t\mathbb{E} \to X_0$ gilt:

(i) $F(\cdot, u_1)$ ist messbar für jedes $u_1 \in \gamma_t\mathbb{E}$,

(ii) $F(t,\cdot) \in C(\gamma_t\mathbb{E}, X_0)$ für fast jedes $t \in [0,T_0]$,

(iii) $f(\cdot) := F(\cdot, 0) \in L^p((0,T_0); X_0)$,

(iv) für jedes $R > 0$ existiert ein $\varphi_R \in L^p((0,T_0))$ mit

$$\|F(t,u_1) - F(t,u_2)\|_{X_0} \le \varphi_R(t)\|u_1 - u_2\|_{\gamma_t\mathbb{E}}$$

für fast alle $t \in [0,T_0]$ und alle $u_1, u_2 \in \gamma_t\mathbb{E}$ mit $\|u_1\|_{\gamma_t\mathbb{E}} \le R$, $\|u_2\|_{\gamma_t\mathbb{E}} \le R$.

Bis auf kanonische Messbarkeits- und Stetigkeitsbedingungen, die die Wohldefiniertheit der Terme in der Gleichung sicherstellen, bedeuten diese Bedingungen im Wesentlichen, dass die Funktionen $A(t,\cdot)$ und $F(t,\cdot)$ auf beschränkten Teilmengen von $\gamma_t\mathbb{E}$ Lipschitz-stetig sind.

4.9 Satz. *Es gelte* (A1) und (A2) sowie $A_0 := A(0,u_0) \in \mathrm{MR}((0,T_0); X_0)$. Dann existiert ein $T \in (0,T_0]$ so, dass (4-3) im Intervall $(0,T)$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathbb{E}_T$ besitzt.

Beweis. **(i)** Im Zeitintervall $(0,T)$ mit $T \le T_0$ verwenden wir die maximale Regularität von $A_0 := A(0,u_0)$, um Lösungen der linearisierten Gleichung abzuschätzen. Dabei betrachten wir zum einen die Gleichung mit Anfangswert 0,

$$\begin{aligned} \partial_t w(t) - A_0 w(t) &= g(t) \quad (t \in (0,T)),\\ w(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4-4}$$

Wir setzen $\mathbb{E} := \mathbb{E}_T$ und $\mathbb{F} := \mathbb{F}_T$. Da $A_0 \in \mathrm{MR}((0,T); X_0)$, existiert zu jedem $g \in \mathbb{F}$ genau eine Lösung $w \in \mathbb{E}$, und es existiert ein von T und w unabhängiges $C_0 > 0$ mit

$$\|w\|_{\mathbb{E}} \le C_0\|g\|_{\mathbb{F}}.$$

Nach Lemma 4.8 existiert eine ebenfalls von $T > 0$ und w unabhängige Konstante $C_1 > 0$ mit

$$\|w\|_{C([0,T],\gamma_t\mathbb{E})} \le C_1\|w\|_{\mathbb{E}}$$

(beachte, dass $w(0) = 0$ gilt).

Zum anderen definiert man die Referenzlösung $u^* \in \mathbb{E}$ als eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t w(t) - A_0 w(t) &= f(t) \quad (t \in (0,T)), \\ w(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{4-5}$$

Dabei ist $f := F(\cdot, 0) \in \mathbb{F}$ nach Bedingung (A2) (iii).

(ii) Zu $r \in (0,1]$ setze

$$B_r := \{v \in \mathbb{E} : v - u^* \in {}_0\mathbb{E},\ \|v - u^*\|_{\mathbb{E}} \le r\}.$$

Zu $v \in B_r$ sei $\Phi(v) := u$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A_0 u(t) &= F(t, v(t)) - \big(A(0,u_0) - A(t,v(t))\big)v(t) \quad (t \in (0,T)), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{4-6}$$

Wir werden zeigen, dass $\Phi(B_r) \subset B_r$ gilt und Φ in B_r eine Kontraktion ist, falls sowohl T als auch r hinreichend klein sind.

(iii) Wir zeigen $\Phi(B_r) \subset B_r$ für hinreichend kleines T und r. Dazu schreiben wir

$$\|\Phi(v) - u^*\|_{\mathbb{E}} = \|u - u^*\|_{\mathbb{E}} \le C_0\Big(\|F(\cdot, v) - f(\cdot)\|_{\mathbb{F}} + \|(A(0,u_0) - A(\cdot, v))v\|_{\mathbb{F}}\Big). \tag{4-7}$$

Wir setzen $\gamma_T := \sup_{t\in[0,T]} \|A(0,u_0) - A(t,u_0)\|_{L(X_1,X_0)}$ und erhalten mit Voraussetzung (A1) für festes $R := C_1 + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_t\mathbb{E})}$

$$\begin{aligned} \|A(0,u_0)v - A(\cdot,v)v\|_{\mathbb{F}} &= \|A(0,u_0)v - A(\cdot,v)v\|_{L^p((0,T);X_0)} \\ &\le \|A(0,u_0) - A(\cdot,v)\|_{C([0,T];L(X_1,X_0))}\|v\|_{L^p((0,T);X_1)} \\ &\le \Big(\|A(0,u_0) - A(\cdot,u_0)\|_{C([0,T];L(X_1,X_0))} \\ &\qquad + \|A(\cdot,u_0) - A(\cdot,v(\cdot))\|_{C([0,T];L(X_1,X_0))}\Big)\|v\|_{\mathbb{E}} \\ &\le \Big(\gamma_T + L(R)\|v(\cdot) - u_0\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})}\Big)\|v\|_{\mathbb{E}}. \end{aligned}$$

Wir verwenden die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|v(\cdot) - u_0\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})} &\le \|v - u^*\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})} + \|u^*(\cdot) - u_0\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})} \\ &\le C_1\|v - u^*\|_{\mathbb{E}} + \|u^*(\cdot) - u_0\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})} \\ &\le C_1 r + \|u^*(\cdot) - u_0\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})} \end{aligned}$$

mit C_1 aus Lemma 4.8 und

$$\|v\|_{\mathbb{E}} \le \|v - u^*\|_{\mathbb{E}} + \|u^*\|_{\mathbb{E}} \le r + \|u^*\|_{\mathbb{E}}.$$

Damit erhält man

$$\|A(0,u_0)v - A(\cdot,v)v\|_{\mathbb{F}} \le \Big(\gamma_T + L(R)(C_1 r + \|u^*(\cdot) - u_0\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})})\Big)(r + \|u^*\|_{\mathbb{E}}).$$

Ähnlich folgt mit (A2)

$$\begin{aligned}\|F(\cdot,v)-f\|_{\mathbb{F}} &\le \|F(\cdot,v)-F(\cdot,u^*)\|_{\mathbb{F}} + \|F(\cdot,u^*)-F(\cdot,0)\|_{\mathbb{F}} \\ &\le \|\varphi_R\|_{L^p((0,T))}\Big(\|v-u^*\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})} + \|u^*\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})}\Big) \\ &\le \|\varphi_R\|_{L^p((0,T))}\Big(C_1\|v-u^*\|_{\mathbb{E}} + \|u^*\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})}\Big) \\ &\le \|\varphi_R\|_{L^p((0,T))}\big(C_1 r + \|u^*\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})}\big).\end{aligned}$$

Eingesetzt in (4-7) erhält man für $r \le 1$

$$\begin{aligned}\|\Phi(v)-u^*\|_{\mathbb{E}} &\le C_0\Big[\|\varphi_R\|_{L^p((0,T))}\big(C_1 r + \|u^*\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})}\big) \\ &\qquad + \big(\gamma_T + L(R)(C_1 r + \|u^*-u_0\|_{\mathbb{E}})\big)(r+\|u^*\|_{\mathbb{E}})\Big] \\ &\le C_0(C_1+\|u^*\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})})\|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} \\ &\qquad + C_0(r+\|u^*\|_{\mathbb{E}})\big(\gamma_T + L(R)C_1 r + L(R)\|u^*(\cdot)-u_0\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})}\big).\end{aligned} \tag{4-8}$$

Für $T \to 0$ gilt

- $\gamma_T \to 0$, da $A(\cdot,u_0)$ stetig ist,
- $\|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} \to 0$, da $\varphi_R \in L^p((0,T_0))$,
- $\|u^*(\cdot)-u_0\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})} \to 0$, da u^* stetig ist mit $u^*(0)=u_0$,
- $\|u^*\|_{\mathbb{E}} \to 0$, da $u^* \in \mathbb{E}_{T_0}$.

Man wählt zunächst $r>0$ so klein, dass

$$C_0 L(R) C_1 r \le \tfrac{1}{8}$$

gilt. Danach wählt man $T>0$ so klein, dass die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned}\|u^*\|_{\mathbb{E}} &\le r \\ C_0(C_1+\|u^*\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})})\|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} &\le \tfrac{r}{2}, \\ C_0\big(\gamma_T + L(R)\|u^*(\cdot)-u_0\|_{C([0,T];\gamma_t\mathbb{E})}\big) &\le \tfrac{1}{8}.\end{aligned}$$

Dies in (4-8) eingesetzt, ergibt

$$\|\Phi(v)-u^*\|_{\mathbb{E}} \le \tfrac{r}{2} + (r+r)(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}) = r,$$

d.h. $\Phi(B_r) \subset B_r$.

(iv) Genauso wie in (iii) zeigt man, dass für hinreichend kleines $r>0$ und $T>0$ die Abschätzung

$$\|\Phi(v)-\Phi(\overline{v})\|_{\mathbb{E}} \le \tfrac{1}{2}\|v-\overline{v}\|_{\mathbb{E}}$$

für alle $v, \overline{v} \in B_r$ gilt. Damit ist $\Phi\colon B_r \to B_r$ eine Kontraktion, und nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau ein Fixpunkt u von Φ. Nach Definition von Φ sind die Fixpunkte von Φ genau die Lösungen der nichtlinearen Gleichung (4-3), woraus die Behauptung folgt. □

4.10 Satz. *Es gelte* (A1) und (A2), und es sei $A(t, v) \in \mathrm{MR}((0, T_0); X_0)$ für alle $t \in [0, T_0)$ und alle $v \in \gamma_t\mathbb{E}$. Dann existiert zu jedem $u_0 \in \gamma_t\mathbb{E}$ genau eine maximale Lösung von (4-3) mit dem maximalen Existenzintervall $[0, T^+(u_0)) \subset [0, T_0)$. Falls $T^+(u_0) < T_0$, d.h. falls keine globale Lösung existiert, so ist $T^+(u_0)$ charakterisiert durch eine der beiden äquivalenten Bedingungen

(i) $\lim_{t \nearrow T^+(u_0)} u(t)$ existiert nicht in $\gamma_t\mathbb{E}$,

(ii) $\int_0^{T^+(u_0)} \big(\|u(t)\|_{X_1}^p + \|\partial_t u(t)\|_{X_0}^p\big)\, dt = \infty$.

Beweis. Falls $u \in \mathbb{E}_T$ eine lokale Lösung auf dem Intervall $(0, T)$ ist, so gilt $u \in \mathrm{BUC}([0, T]; \gamma_t\mathbb{E})$ nach Lemma 4.8. Daher kann man Satz 4.9 anwenden im Intervall (T, T_0) mit der Anfangsbedingung $u_1 = u(T) \in \gamma_t\mathbb{E}$. Dies zeigt die Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösung.

Falls $\lim_{t \nearrow T^+(u_0)} u(t) \in \gamma_t\mathbb{E}$ existiert, kann man dies als Anfangswert nehmen und wie oben u für ein kleines Zeitintervall $(T^+(u_0), T^+(u_0) + \varepsilon)$ fortsetzen, was der Maximalität von $T^+(u_0)$ widerspricht. Also ist $T^+(u_0)$ durch die Bedingung (i) charakterisiert.

Für $T < T^+(u_0)$ gilt nach Definition einer Lösung $\int_0^T (\|u(t)\|_{X_1}^p + \|\partial_t u(t)\|_{X_0}^p) dt < \infty$. Falls dies auch noch für $T = T^+(u_0)$ gelten würde, wäre wieder $u \in \mathbb{E}_{T^+(u_0)} \subset \mathrm{BUC}([0, T^+(u_0)]; \gamma_t\mathbb{E})$, d.h. $\lim_{t \nearrow T^+(u_0)} u(t)$ existiert in $\gamma_t\mathbb{E}$ im Widerspruch zu (i). □

Als Anwendung der obigen Sätze erhalten wir ein Resultat über Störungen niedrigerer Ordnung (die Abbildung B im nachfolgenden Lemma).

4.11 Lemma. *Sei $A \in C([0, T], L(X_1, X_0))$ mit $A(t) \in \mathrm{MR}((0, T); X_0)$ $(t \in [0, T])$, und sei $B \in L^p((0, T); L(\gamma_t\mathbb{E}, X_0))$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(t)u(t) &= B(t)u(t) + f(t) \quad (t \in (0, T)),\\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

für jedes $f \in \mathbb{F}$ und $u_0 \in \gamma_t\mathbb{E}$ genau eine Lösung $u \in \mathbb{E}$.

Beweis. Hier ist $A(t, u(t)) = A(t)$ und $F(t, u(t)) = B(t)u(t) + f(t)$. Offensichtlich sind die Bedingungen (A1), (A2) erfüllt mit $\varphi_R(t) := \|B(t)\|_{L(\gamma_t\mathbb{E}, X_0)}$. Der Beweis von Satz 4.9 zeigt, dass die Länge des Existenzintervalls nur von u_0 und den Konstanten $L(R)$, C_0, C_1 und γ_T abhängt. Da $A \in C([0,T], L(X_1, X_0))$ und $A \mapsto \|(\partial_t + A)^{-1}\|_{L(\mathbb{F},\mathbb{E})} = C_0(A)$ stetig ist, können alle Konstanten global im Intervall $[0,T]$ gewählt werden, d.h. die Lösung existiert global. $\square$

c) Höhere Regularität

Wir betrachten dieselbe Situation wie im letzten Abschnitt und untersuchen die autonome quasilineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - A(u(t))u(t) &= F(u(t)) \quad (t \in (0,T)), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{4-9}$$

Dabei sei $T \in (0,\infty)$, $u_0 \in \gamma_t\mathbb{E}$, $A\colon \gamma_t\mathbb{E} \to L(X_1, X_0)$ sowie $F\colon \gamma_t\mathbb{E} \to \mathbb{F}$.

Parabolische Gleichungen sind „glättend“, wobei in vielen Anwendungen auch reell analytische Funktionen auftreten. Dazu zunächst eine Definition.

4.12 Definition. Seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ offen und $T\colon U \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt T (reell) analytisch, falls für alle $u_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert mit $B(u_0, r) \subset U$ und

$$T(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k T(u_0)}{k!} \underbrace{(u-u_0, \ldots, u-u_0)}_{k-\text{mal}} \quad (u \in B(u_0, r)).$$

Dabei ist $D^k T(u_0) \in L(X \times \ldots \times X, F)$ die k-fache Fréchetableitung von T an der Stelle u_0. In diesem Fall schreibt man $T \in C^\omega(U, Y)$.

Eine wesentliche Zutat im Beweis der Glättungseigenschaft ist der Satz über implizite Funktionen, der analog zum endlich-dimensionalen Fall bewiesen werden kann.

4.13 Satz (Satz über implizite Funktionen)**.** *Seien X, Y, Z Banachräume, $U \subset X \times Y$ offen und $T \in C^1(U, Z)$. Sei ferner $(x_0, y_0) \in U$ mit $T(x_0, y_0) = 0$ und $D_y T((x_0, y_0)) \in L_{\text{Isom}}(Y, Z)$, wobei $D_y T$ die Fréchet-Ableitung nach der zweiten Komponente bezeichnet. Dann existieren Umgebungen U_X von x_0 und U_Y von y_0 mit $U_X \times U_Y \subset U$ und eine eindeutige Abbildung $\psi \in C^1(U_X, U_Y)$ so, dass*

$$T(x, \psi(x)) = 0 \quad (x \in U_X)$$

und $\psi(x_0) = y_0$ gilt. Somit ist die Gleichung $T(x,y) = 0$ lokal nach y auflösbar. Dabei hat die Funktion ψ die gleiche Regularität wie T, d.h. gilt $T \in C^k(U, Z)$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, so gilt auch $\psi \in C^k(U_X, U_Y)$.

Damit können wir folgende Glättungseigenschaft bezüglich der Zeit beweisen:

4.14 Satz. *Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, und seien $A \in C^k(\gamma_t\mathbb{E}; L(X_1, X_0))$ und $F \in C^k(\gamma_t\mathbb{E}, X_0)$. Sei $u \in \mathbb{E}_T$ eine Lösung von (4-9), und es gelte $A(u(t)) \in \mathrm{MR}((0,T); X_0)$ für alle $t \in [0,T]$. Dann gilt*

$$t \mapsto t^j \partial_t^j u(t) \in W_p^1(J; X_0) \cap L^p(J; X_1)$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \le k$. Insbesondere folgt

$$u \in W_p^{k+1}((\varepsilon, T); X_0) \cap W_p^k((\varepsilon, T); X_1)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ sowie

$$u \in C^k((0,T); \gamma_t\mathbb{E}) \cap C^{k+1-1/p}((0,T); X_0) \cap C^{k-1/p}((0,T); X_1).$$

Hier bezeichnet $C^{k+1-1/p}$ und $C^{k-1/p}$ den entsprechenden Hölderraum. Falls $k = \infty$, so ist $u \in C^\infty((0,T); X_1)$, und falls $k = \omega$, so ist $u \in C^\omega((0,T); X_1)$.

Beweis. Wir fixieren $\varepsilon \in (0,1)$ und setzen $T(\varepsilon) := \frac{T}{1+\varepsilon}$. Zu $\lambda \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ betrachten wir die Funktion $u_\lambda \colon [0, T(\varepsilon)] \to \gamma_t\mathbb{E}$, definiert durch $u_\lambda(t) := u(\lambda t)$ ($t \in [0, T(\varepsilon)]$). Dann gilt $\partial_t u_\lambda(t) = \lambda(\partial_t u)(\lambda t)$ und damit

$$\begin{aligned} \partial_t u_\lambda(t) - \lambda A(u_\lambda(t)) u_\lambda(t) &= \lambda F(u_\lambda(t)) \quad (t \in (0, T(\varepsilon))), \\ u_\lambda(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Man definiert sich die Abbildung

$$H \colon (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times \mathbb{E}_{T(\varepsilon)} \to \mathbb{F}_{T(\varepsilon)} \times \gamma_t\mathbb{E}$$

durch

$$H(\lambda, w)(t) := \begin{pmatrix} \partial_t w(t) - \lambda A(w(t)) w(t) - \lambda F(w(t)) \\ w(0) - u_0 \end{pmatrix} \quad (t \in (0, T(\varepsilon)))$$

für $\lambda \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ und $w \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}$. Da A und F von Klasse C^k sind, gilt dies auch für H. Weiter gilt $H(1, u) = 0$ und

$$\begin{aligned} D_\lambda H(\lambda, w) &= \begin{pmatrix} -A(w)w - F(w) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ D_w H(\lambda, w) h &= \begin{pmatrix} \partial_t h - \lambda A(w) h - \lambda A'(w) h w - \lambda F'(w) h \\ h(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $h \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}$. Dabei ist $A'(u)$ die Fréchet-Ableitung von A an der Stelle u. Insbesondere erhalten wir für $\lambda = 1$ und $w = u$

$$D_w H(1, u) h = \begin{pmatrix} \partial_t h + A(u) h + A'(u) h u - F'(u) h \\ h(0) \end{pmatrix}.$$

Für $t \in [0, T(\varepsilon)]$ und $v \in \gamma_t\mathbb{E}$ definieren wir $B(t)v := -A'(u(t))vu(t) - F'(u(t))v$. Da $A \in C^1(\gamma_t\mathbb{E}, L(X_1, X_0))$ und $F \in C^1(\gamma_t\mathbb{E}, X_0)$, folgt $B \in L^p((0,T); L(\gamma_t\mathbb{E}, X_0))$. Wir sind daher in der Situation von Lemma 4.11 (wobei hier $A(t)$ durch $A(u(t))$ zu ersetzen ist). Man beachte, dass $t \mapsto A(u(t)) \in C([0,T], L(X_1, X_0))$ gilt, da $t \mapsto u(t) \in C([0, T(\varepsilon)]; \gamma_t\mathbb{E})$. Nach Voraussetzung gilt $A(u(t)) \in \mathrm{MR}((0,T); X_0)$ für jedes $t \in [0,T]$. Wir wenden Lemma 4.11 an und erhalten

$$D_w H(1,u) \in L_{\mathrm{Isom}}(\mathbb{E}_{T(\varepsilon)}, \mathbb{F}_{T(\varepsilon)} \times \gamma_t\mathbb{E}).$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen, Satz 4.13, existiert ein $\delta > 0$ und eine C^k-Abbildung $\psi\colon (1-\delta, 1+\delta) \to \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1, X_0)$ mit $H(\lambda, \psi(\lambda)) = 0$ ($\lambda \in (1-\delta, 1+\delta)$) und $\psi(1) = u$.

Nach Definition von H und wegen der Eindeutigkeit der Lösung gilt $\psi(\lambda) = u_\lambda$, d.h. $\lambda \mapsto u_\lambda \in C^k((1-\delta, 1+\delta), \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}$. Wegen $\mathbb{E}_{T(\varepsilon)} \subset C([0, T(\varepsilon)], \gamma_t\mathbb{E})$ ist $\lambda \mapsto u_\lambda(t) = u(\lambda t) \in C^k((1-\delta, 1+\delta), \gamma_t\mathbb{E})$. Dies heißt aber $u \in C^k((0, T(\varepsilon)), \gamma_t\mathbb{E})$.

Wir verwenden nun $\frac{\partial}{\partial\lambda} u_\lambda(t)|_{\lambda=1} = t\partial_t u(t)$ ($t \in (0, T(\varepsilon))$. Wegen $\psi \in C^k((1-\delta, 1+\delta), \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}$ ist $t \mapsto t\partial_t u(t) \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}$. Iterativ sieht man $t \mapsto t^k \partial_t^k u(t) \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}$ und damit

$$u \in W_p^{k+1}((\delta, T(\varepsilon)); X_0) \cap W_p^k((\delta, T(\varepsilon)); X_1)$$

für jedes $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$. Unter Verwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes $W_p^k((\delta, T(\varepsilon)) \subset C^{k-1/p}([\delta, T(\varepsilon)])$ erhält man, da $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ beliebig sind,

$$u \in C^{k+1-1/p}((0,T); X_0) \cap C^{k-1/p}((0,T); X_1).$$

Im Fall $k = \infty$ erhält man $u \in C^\infty((0,T); X_1)$. Falls $k = \omega$, ist die Funktion ψ reell analytisch. Da die oben genannten Einbettungen als lineare Abbildungen ebenfalls reell analytisch sind, ist auch $u \in C^\omega((0,T), X_1)$. □

4.15 Bemerkung. Diese Beweismethode ist als „Parametertrick" oder auch „Methode von Angenent" bekannt. Man beachte die beiden wesentlichen Zutaten dieses Beweises, der in ähnlicher Form bei vielen nichtlinearen Differentialgleichungen verwendet werden kann: Zum einen der Satz über implizite Funktionen in Banachräumen, zum anderen (um diesen Satz anwenden zu können) die Tatsache, dass $D_w H(1,u)$ ein Isomorphismus ist. Dies ist aber gerade die maximale Regularität dieser Linearisierung.

Als Beispiel betrachten wir die quasilineare autonome Gleichung zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) - \operatorname{tr}\Big(a\big(u(t,x), \nabla u(t,x)\big)\nabla^2 u(t,x)\Big) &= f(u(t,x), \nabla u(t,x)) \\ &\qquad ((t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n), \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{4-10}$$

Für die Behandlung des nichtlinearen Problems betrachten wir zunächst die lineare Version:

4.16 Lemma. *Sei* $b \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}})$ *mit* $b(x) \geq cI_n$ *für eine Konstante* $c > 0$. *Definiere den Operator* B *durch* $D(B) := W^2_p(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$(Bu)(x) := \operatorname{tr}\big(b(x)\nabla^2 u(x)\big) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\, u \in D(B)).$$

Dann gilt $B \in \mathrm{MR}((0,T); L^p(\mathbb{R}^n))$ *für jedes* $T \in (0,\infty)$.

Beweis. Der Operator B erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 4.6, d.h. es existiert ein $\mu > 0$ so, dass $B - \mu \in \mathrm{MR}((0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n))$ gilt. Nach Bemerkung 4.7 kann man auf endlichen Zeitintervallen auf den Shift μ verzichten. □

4.17 Satz. *Seien* $p \in (n+2,\infty)$ *und* $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty,\omega\}$. *Es gelte* $a \in C^k(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}})$, $f \in C^k(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$ *mit* $f(0) = 0$. *Für alle* $(r,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *sei die Matrix* $a(r,p)$ *positiv definit. Dann besitzt die Gleichung* (4-10) *für alle* $u_0 \in B^{2-2/p}_{pp}(\mathbb{R}^n)$ *eine eindeutige maximale Lösung* u *im Intervall* $(0, T^+(u_0))$. *Für* $T < T^+(u_0)$ *gilt* $u \in L^p((0,T); W^2_p(\mathbb{R}^n_+)) \cap W^1_p((0,T); L^p(\mathbb{R}^n))$ *sowie*

$$u \in C^k((0,T); B^{2-2/p}_{pp}(\mathbb{R}^n)) \cap C^{k+1-1/p}((0,T); L^p(\mathbb{R}^n)) \cap C^{k-1/p}((0,T); W^2_p(\mathbb{R}^n)).$$

Beweis. Für $X_0 := L^p(\mathbb{R}^n)$ und $X_1 := W^2_p(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\gamma_t\mathbb{E} = (X_0, X_1)_{1-1/p,p} = B^{2-2/p}_{pp}(\mathbb{R}^n).$$

Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz gilt für $p > n+2$ die Einbettung

$$\gamma_t\mathbb{E} = B^{2-2/p}_{pp}(\mathbb{R}^n) \subset C^1_b(\mathbb{R}^n),$$

wobei $C^1_b(\mathbb{R}^n)$ den Raum aller $C^1(\mathbb{R}^n)$-Funktionen bezeichne, für die alle Ableitungen bis zur Ordnung 1 beschränkt sind. Man beachte dazu, dass die Einbettung $B^s_{pp}(\mathbb{R}^n) \subset C_b(\mathbb{R}^n)$ für $sp > n$ gilt (siehe [Tri78], Theorem 2.8.1, vergleiche auch [AF03], Theorem 4.12). Für $p > n+2$ folgt $B^{1-2/p}_{pp}(\mathbb{R}^n) \subset C_b(\mathbb{R}^n)$.

Wir definieren die Abbildungen $A\colon \gamma_t\mathbb{E} \to L(X_0, X_1)$ und $F\colon \gamma_t\mathbb{E} \to X_0$ durch

$$\begin{aligned}(A(v)w)(x) &:= \operatorname{tr}\big(a(v(x), \nabla v(x))\nabla^2 w(x)\big),\\ (F(v))(x) &:= f(v(x), \nabla v(x))\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \gamma_t\mathbb{E}$, $w \in W^2_p(\mathbb{R}^n)$.

Sei $v \in \gamma_t\mathbb{E}$. Wegen $v \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge $\{(v(x), \nabla v(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ beschränkt. Da a nach Voraussetzung stetig ist, ist

$$b_v := a(v(\cdot), \nabla v(\cdot)) \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n)$$

sowie $b_v(x) \geq c_v I_n$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ mit $c_v > 0$. Nach Lemma 4.16 folgt $A(v) \in \mathrm{MR}((0,T); X_0)$ für alle $v \in \gamma_t\mathbb{E}$.

Um die Voraussetzungen (A1) und (A2) nachzuweisen, verwenden wir, dass a als C^1-Funktion auf beschränkten Mengen Lipschitz ist. Wir erhalten für $v, \overline{v} \in \gamma_t\mathbb{E}$ und $w \in X_1$ mit $\|v\|_{\gamma_t\mathbb{E}} \leq R$, $\|\overline{v}\|_{\gamma_t\mathbb{E}} \leq R$

$$\begin{aligned}
\|A(v)w - A(\overline{v})w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \big\| \operatorname{tr}\big(a(v, \nabla v)w - a(\overline{v}, \nabla\overline{v})w\big)\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C\big\|a(v, \nabla v) - a(\overline{v}, \nabla\overline{v})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n})}\|\nabla^2 w\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n})} \\
&\leq CL(R)\|v - \overline{v}\|_{C^1(\mathbb{R}^n)}\|w\|_{X_1} \\
&\leq CL(R)\|v - \overline{v}\|_{\gamma_t\mathbb{E}}\|w\|_{X_1}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt Voraussetzung (A1), insbesondere auch die Stetigkeit von $A\colon \gamma_t\mathbb{E} \to L(X_0, X_1)$.

Um (A2) zu zeigen, muss man zunächst die Wohlgestelltheit des Operators $F\colon \gamma_t\mathbb{E} \to X_0$ zeigen, d.h. die Wohlgestelltheit von

$$F\colon B_{pp}^{2-2/p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n),\ F(v) := f(v(\cdot), \nabla v(\cdot)) \quad (v \in B_{pp}^{2-2/p}(\mathbb{R}^n)).$$

Dies ist ein Beispiel eines sogenannten Nemytskii–Operators, siehe [AE99], Abschnitt VII.6. Wieder ist f als C^1-Funktion auf beschränkten Mengen Lipschitz. Für $v, \overline{v} \in \gamma_t\mathbb{E}$ mit $\|v\|_{\gamma_t\mathbb{E}} \leq R$, $\|\overline{v}\|_{\gamma_t\mathbb{E}} \leq R$ erhalten wir mit einer Lipschitz-Konstanten $L(R) > 0$

$$\begin{aligned}
\|f(v, \nabla v) - f(\overline{v}, \nabla\overline{v})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(v(x), \nabla v(x)) - f(\overline{v}(x), \nabla\overline{v}(x))|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} L(R)^p \Big(|v(x) - \overline{v}(x)| + |\nabla v(x) - \nabla\overline{v}(x)|\Big)^p dx \\
&\leq CL(R)^p\|v - \overline{v}\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n)}^p \leq CL(R)^p\|v - \overline{v}\|_{B_{pp}^{2-2/p}(\mathbb{R}^n)}^p.
\end{aligned}$$

Setzt man hier $\overline{v} := 0$, erhält man wegen $f(0) = 0$ insbesondere $F(v) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, d.h. die Wohlgestelltheit des Nemytskii-Operators. Die Rechnung zeigt auch, dass F lokal Lipschitz-stetig ist.

Falls die Voraussetzung des Satzes für $k > 1$ gilt, kann man durch ähnliche Betrachtung des Nemytskii-Operators zeigen, dass $A \in C^k(\gamma_t\mathbb{E}, L(X_1, X_0))$ und $F \in C^k(\gamma_t\mathbb{E}, X_0)$ gilt (vergleiche dazu auch [AE99], Abschnitt VII.6). Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.14 erfüllt, und wir erhalten die höhere Regularität der Lösung u. □

4.18 Beispiel. Wir betrachten nochmal den graphischen mittleren Krümmungsfluss (siehe Beispiel 1.2)

$$\begin{aligned}\partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2}\Big)\partial_i\partial_j u = 0,\\ u(0) = u_0.\end{aligned} \tag{4-11}$$

Hier ist $a_{ij}(v) = \delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2}$, d.h. die Matrix $a(r,p)$ ist gegeben durch

$$a(r,p) = \Big(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{1+|p|^2}\Big)_{i,j=1,\dots,n} = I_n - \frac{pp^\top}{1+|p|^2}\,.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind offensichtlich $1 - \frac{|p|^2}{1+|p|^2} = \frac{1}{1+|p|^2}$ mit Eigenvektor p (einfach) und 1 mit Eigenvektoren $v \perp p$ ($(n-1)$-fach), also ist $a(r,p)$ positiv definit. Da $a \in C^\omega(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}})$, können wir Satz 4.17 mit $k = \omega$ anwenden und erhalten zu jedem $u_0 \in B_{pp}^{2-2/p}(\mathbb{R}^n)$ eine eindeutige Lösung $u \in C^\omega((0,T); W_p^2(\mathbb{R}^n))$ von (4-11) für hinreichend kleines $T > 0$.

5. Der Beweis von Satz 4.6

Für den Beweis von Satz 4.6 benötigen wir noch Störungsresultate für $\mathcal{R}$-Beschränktheit. Dazu definieren wir für einen $\mathcal{R}$-sektoriellen Operator A mit Winkel φ und für $\theta < \varphi$ die Größen

$$\begin{aligned} M_\theta(A) &:= \sup\big(\{\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big), \\ \widetilde{M}_\theta(A) &:= \sup\big(\{\|A(\lambda - A)^{-1}\| : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big), \\ R_\theta(A) &:= \mathcal{R}\big(\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big), \\ \widetilde{R}_\theta(A) &:= \mathcal{R}\big(\{A(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}\big). \end{aligned}$$

Man beachte, dass auch $\widetilde{M}_\theta(A)$ endlich ist wegen $A(\lambda - A)^{-1} = \lambda(\lambda - A)^{-1} - 1$. Analog für $\widetilde{R}_\theta(A)$.

5.1 Satz (Störungssatz, erster Teil). *Sei X ein Banachraum und A ein $\mathcal{R}$-sektorieller Operator in X mit Winkel $\varphi_{\mathcal{R}}(A) > 0$, und sei $\theta \in (0, \varphi_{\mathcal{R}}(A))$. Sei B ein linearer Operator in X mit $D(B) \supset D(A)$ und*

$$\|Bx\| \le a\|Ax\| \quad (x \in D(A)).$$

Falls $a < \frac{1}{\widetilde{R}_\theta(A)}$, so ist $A + B$ wieder $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel größer gleich θ und

$$R_\theta(A+B) \le \frac{R_\theta(A)}{1 - a\widetilde{R}_\theta(A)}.$$

Beweis. Für $\lambda \in \overline{\Sigma_\theta} \setminus \{0\}$ gilt

$$\|B(\lambda - A)^{-1}x\| \le a\|A(\lambda - A)^{-1}x\| \le a\widetilde{M}_\theta(A)\|x\| \quad (x \in X).$$

Wegen $a < \frac{1}{\widetilde{R}_\theta(A)}$ ist also $1 + B(\lambda - A)^{-1}$ invertierbar, und wir erhalten

$$\begin{aligned} (\lambda - (A+B))^{-1} &= (\lambda - A)^{-1}\big[1 + B(\lambda - A)^{-1}\big]^{-1} \\ &= (\lambda - A)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-B(\lambda - A)^{-1})^n. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\rho(A+B) \supset \Sigma_\theta$. Nach Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit und nach Voraussetzung folgt

$$\mathcal{R}(\{B(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}) \le a\mathcal{R}(\{A(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\theta\}) = a\widetilde{R}_\theta(A).$$

Setzt man dies in die Reihe ein, erhält man

$$R_\theta(A+B) \le \frac{R_\theta(A)}{1 - a\widetilde{R}_\theta(A)}.$$

Dies zeigt auch, dass $A + B$ $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\ge \theta$ ist. □

Das nächste Störungsresultat lässt noch einen zusätzlichen Term $\|x\|$ auf der rechten Seite zu. Allerdings erkauft man sich hier die $\mathcal{R}$-Sektorialität mit einer Verschiebung des Operators.

5.2 Satz (Störungssatz, zweiter Teil)**.** *Sei A $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\varphi_{\mathcal{R}}(A) > 0$, und sei $\theta < \varphi_{\mathcal{R}}(A)$. Sei B ein linearer Operator mit $D(B) \supset D(A)$ und*

$$\|Bx\| \le a\|Ax\| + b\|x\| \quad (x \in D(A))$$

mit zwei Konstanten $b \ge 0$ und $0 \le a < \big[\widetilde{M}_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)\big]^{-1}$. Dann ist $A + B - \mu$ $\mathcal{R}$-sektoriell für

$$\mu > \frac{bM_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}{1 - a\widetilde{M}_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}$$

mit Winkel $\varphi_{\mathcal{R}}(A + B - \mu) \ge \theta$.

Beweis. Für $\mu > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\|B(A-\mu)^{-1}x\| &\le a\|A(A-\mu)^{-1}x\| + b\|(A-\mu)^{-1}x\| \\ &\le \big(a\widetilde{M}_\theta(A) + \frac{b}{\mu}M_\theta(A)\big)\|x\| \quad (x \in X).\end{aligned}$$

Damit erfüllt B die Voraussetzung von Satz 5.1 mit $A - \mu$ anstelle von A. Dabei war die Bedingung an die Konstante in Satz 5.1 gegeben durch $c(\mu)\widetilde{R}_\theta(A) < 1$ für $c := a\widetilde{M}_\theta(A) + \frac{b}{\mu}M_\theta(A)$. Wegen $a\widetilde{M}_\theta(A) < 1$ ist dies der Fall für

$$\mu > \frac{bM_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}{1 - a\widetilde{M}_\theta(A)\widetilde{R}_\theta(A)}.$$

□

5.3 Lemma (Kleine Störung im Hauptteil)**.** *Sei $A(x,D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$ parabolisch mit Konstante C_P. Dann existiert ein $\theta > \frac{\pi}{2}$ so, dass $A(x,D)$ parameterelliptisch in $\overline{\Sigma}_\theta$ ist, und es existieren $\varepsilon > 0$ und $K > 0$ so, dass für alle Operatoren $B(x,D) = \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha(x)D^\alpha$ mit $b_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N\times N})$ und*

$$\sum_{|\alpha|=2m} \|b_\alpha\|_\infty < \varepsilon$$

die Abschätzung

$$\mathcal{R}\Big(\big\{\lambda(\lambda - (A_p + B_p))^{-1} : \lambda \in \overline{\Sigma}_\theta \setminus \{0\}\big\}\Big) \le K$$

gilt. Dabei hängen ε und K nur von n, p, m, N, C_P ab.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $f \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$. Dann gilt

$$\|Bf\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)} \le \sum_{|\alpha|=2m} \|b_\alpha\|_\infty \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)} \le \varepsilon \max_{|\alpha|=2m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)},$$

falls B die obige Bedingung erfüllt. Schreibe nun

$$D^\alpha f = (\mathscr{F}^{-1} m_\alpha \mathscr{F}) A(D) f$$

mit

$$m_\alpha(\xi) := \xi^\alpha \Big(\sum_{|\beta|=2m} a_\beta \xi^\beta \Big)^{-1}.$$

Es gilt $m_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\};\mathbb{C}^{N\times N})$, und m_α ist homogen vom Grad 0 und erfüllt daher die Michlin-Bedingung. Somit existiert ein $C_1 > 0$ so, dass für die zugehörigen Operatoren T_{m_α} gilt

$$\|T_{m_\alpha}\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))} \le C_1 \quad (|\alpha| = 2m).$$

Wähle nun $\varepsilon < \big[C_1(\widetilde{R}_\theta(A)+1)\big]^{-1}$. Dann gilt

$$\|Bf\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)} \le \varepsilon C_1 \|Af\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)} \le a \|Af\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}$$

mit $a = \frac{1}{\widetilde{R}_\theta(A)+1}$. Nach Satz 5.1 ist $A_p + B_p$ $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\ge \theta$ und

$$R_\theta(A+B) \le \frac{R_\theta(A)}{1 - a\widetilde{R}_\theta(A)} =: K.$$

□

Die letzte Aussage betrachtete eine kleine Störung im Hauptteil. Falls der Operator A im Hauptteil gleichmäßig stetige Koeffizienten besitzt, kann man durch Lokalisieren auf diesen Fall kommen. Dabei ist das Gebiet hier nicht beschränkt, und man benötigt eine unendliche Partition. Dies wird im folgenden Lemma behandelt.

5.4 Lemma. *Zu $r > 0$ existiert ein $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $\operatorname{supp}\varphi \subset (-r,r)^n$ und*

$$\sum_{\ell \in r\mathbb{Z}^n} \varphi_\ell^2(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

wobei $\varphi_\ell(x) := \varphi(x-\ell)$.

Beweis. a) Wir betrachten zunächst den Fall $r = 1$ und $n = 1$. Wähle ein $\varphi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ mit $\varphi_1 > 0$ in $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, $\operatorname{supp}\varphi_1 = [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$ und $\varphi_1(x) = \varphi_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Setze

$$\varphi(x) := \sqrt{\frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x) + \varphi_1^2(1-x)}} \quad (x \ge 0)$$

und $\varphi(x) := \varphi(-x)$ für $x < 0$. Dann ist $\operatorname{supp}\varphi \subset (-1,1)$, und für $x \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \varphi_\ell^2(x) &= \varphi^2(x) + \varphi^2(x-1) = \varphi^2(x) + \varphi^2(1-x)\\ &= \frac{\varphi_1^2(x)}{\varphi_1^2(x)+\varphi_1^2(1-x)} + \frac{\varphi_1^2(1-x)}{\varphi_1^2(1-x)+\varphi_1^2(x)} = 1.\end{aligned}$$

Da $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\varphi_\ell^2$ periodisch mit Periode 1 ist, folgt $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\varphi_\ell^2 = 1$ in $\mathbb{R}$.

b) Im allgemeinen Fall setze $\varphi^{(n)}(x) := \prod_{j=1}^n \varphi(\frac{x_j}{r})$ mit φ aus Teil a). Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in r\mathbb{Z}^n} \varphi^2(x-\ell) &= \sum_{\ell\in r\mathbb{Z}^n}\prod_{j=1}^n \varphi^2\Big(\frac{x_j-\ell_j}{r}\Big) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n}\prod_{j=1}^n \varphi^2(y_j-\ell_j)\\ &= \prod_{j=1}^n\sum_{\ell_j\in\mathbb{Z}} \varphi^2(y_j-\ell_j) = 1\end{aligned}$$

für $y := \frac{x}{r}$. □

Damit können wir Satz 4.6 beweisen, den wir hier noch einmal wiederholen:

5.5 Satz ($\mathcal{R}$-Sektorialität parabolischer Systeme)**.** *Sei $A(x,D) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$ mit*

$$\begin{aligned}&a_\alpha \in \operatorname{BUC}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^{N\times N}) \quad (|\alpha| = 2m),\\ &a_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^{N\times N}) \quad (|\alpha| < 2m).\end{aligned}$$

Sei $1 < p < \infty$. Falls $A(x,D)$ parabolisch ist, so existieren $\theta > \frac{\pi}{2}$ und $\mu > 0$ so, dass $A_p - \mu$ $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel θ ist. Inbesondere besitzt $A_p - \mu$ maximale L^q-Regularität für alle $1 < q < \infty$.

Beweis. Da $A(x,D)$ parabolisch ist, existiert ein $\theta > \frac{\pi}{2}$ so, dass $A(x,D)$ parameter-elliptisch in $\overline{\Sigma}_\theta$ ist. Der Beweis des Satzes erfolgt in mehreren Schritten durch Lokalisierung.

Grob gesprochen handelt es sich um folgende Schritte:

(1) Man friert die Koeffizienten an der Stelle $\ell \in \Gamma$ ein, wobei das Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ so gewählt wird, dass innerhalb eines Würfels des Gitters der (lokalisierte) Operator A^ℓ nur eine kleine Störung des zugehörigen Operators des Modellproblems ist. Dabei wird Lemma 5.3 benutzt um zu zeigen, dass A^ℓ $\mathcal{R}$-sektoriell ist.

(2) Man betrachtet die Folge $A := (A^\ell)_{\ell\in\Gamma}$ aller in (1) erhaltenen Operatoren und zeigt, dass diese Folge in einem geeigneten Folgenraum X_0 wieder $\mathcal{R}$-sektoriell ist.

(3) Die L^p-Realisierung A_p und der Operator A besitzen im wesentlichen dieselben Eigenschaften bis auf Operatoren niedrigerer Ordnung. Genauer gilt $JA_p = AJ$ und $A_pP = PA$ bis auf Operatoren niedrigerer Ordnung, wobei J bzw. P der Lokalisierungsoperator bzw. der Operator des Zusammensetzens ist.

(4) Unter Verwendung der Interpolationsungleichung für Sobolevräume lassen sich die Operatoren niedrigerer Ordnung aus (3) als kleine Störung auffassen, und man erhält aus der $\mathcal{R}$-Sektorialität von A die $\mathcal{R}$-Sektorialität für A_p.

Im einzelnen können diese Schritte folgendermaßen ausgeführt werden.

(1) Wähle $\varepsilon = \varepsilon(n, p, m, N, C_p)$ wie in Lemma 5.3 für den Operator $\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(\ell)D^\alpha$ mit $\ell \in \mathbb{Z}^n$. Da $a_\alpha \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^{N\times N})$, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\sum_{|\alpha|=2m} |a_\alpha(x) - a_\alpha(y)| < \varepsilon \quad (|x-y| \le \delta,\ |\alpha| = 2m).$$

Wähle $r \in (0, \delta)$ und $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ wie in Lemma 5.4. Wir schreiben $Q := (-r, r)^n$ und $Q_\ell := Q + \ell$ für $\ell \in r\mathbb{Z}^n =: \Gamma$. Wähle weiter $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subset Q$, $0 \le \psi \le 1$, $\psi = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi$, und setze $\psi_\ell(x) := \psi(x - \ell) \quad (\ell \in \mathbb{Z})$. Definiere die Koeffizienten

$$a_\alpha^\ell(x) := \begin{cases} a_\alpha(x), & x \in Q_\ell, \\ a_\alpha(\ell), & x \notin Q_\ell \end{cases} \quad (\ell \in \Gamma,\ |\alpha| = 2m)$$

und $A^\ell(x, D) := \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha^\ell(x)D^\alpha$. Dann gilt für den Hauptteil $A_0(x, D) = A^\ell(x, D)$ $(x \in Q_\ell)$ und damit $A_0(x, D)u = A^\ell(x, D)u$ für alle $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N)$ mit $\operatorname{supp} u \subset Q_\ell$.

(2) Wir definieren $X_k := \ell_p(\Gamma; W_p^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N))$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und den Operator $A\colon X_0 \supset D(A) \to X_0$ durch $D(A) := X_{2m}$ und

$$A(u_\ell)_{\ell\in\Gamma} := (A^\ell u_\ell)_{\ell\in\Gamma}.$$

Nach Lemma 5.3 ist A^ℓ $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}_\theta(A^\ell) \le K$, wobei K nicht von ℓ abhängt. Wir zeigen, dass dies auch für A gilt. Sei dazu $T_j = \lambda_j(A - \lambda_j)^{-1}$ für $j = 1, \dots, J$ und $x_j = (f_\ell^{(j)})_{\ell\in\Gamma}$. Dann folgt für $\lambda_j \in \Sigma_\theta$

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{j=1}^J r_j T_j x_j \Big\|_{L^p([0,1];X_0)} = \\
&= \Big(\int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^J r_j(t) T_j x_j \Big\|_{X_0}^p dt \Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_0^1 \sum_{\ell\in\Gamma} \Big\| \sum_{j=1}^J r_j(t)\lambda_j(A^\ell - \lambda_j)^{-1} f_\ell^{(j)} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}^p dt \Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\sum_{\ell\in\Gamma} \int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^J r_j(t)\lambda_j(A^\ell-\lambda_j)^{-1} f_\ell^{(j)} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}^p dt \Big)^{1/p} \\
&= \Big(\sum_{\ell\in\Gamma} \Big\| \sum_{j=1}^J r_j\lambda_j(A^\ell-\lambda_j)^{-1} f_\ell^{(j)} \Big\|_{L^p([0,1];L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))} \Big)^{1/p} \\
&\le \Big(\sum_{\ell\in\Gamma} \big[R_\theta(A^\ell)\big]^p \Big\| \sum_{j=1}^J r_j f_\ell^{(j)} \Big\|_{L^p([0,1];L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))}^p \Big)^{1/p} \\
&\le K \Big\| \sum_{j=1}^J r_j x_j \Big\|_{L^p([0,1];X_0)},
\end{aligned}
$$

d.h. $R_\theta(A) \le K$.

Definiere den Lokalisierungsoperator $J\colon L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N) \to X_0,\ f \mapsto (\varphi_\ell f)_\ell$. Es gilt

$$
\sum_{\ell\in\Gamma} \|\varphi_\ell f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}^p \le \sum_{\ell\in\Gamma} \|\chi_{Q_\ell} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}^p = 2^N \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}^p,
$$

d.h. J ist stetig. Genauso sieht man $J \in L(W_p^{2m}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N), X_{2m})$.

Der Operator des Zusammensetzens ist analog definiert durch

$$
P\colon X_0 \to L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N),\ (f_\ell)_{\ell\in\Gamma} \mapsto \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell f_\ell.
$$

Beachte, dass die Summe lokal-endlich ist. Es gilt $P \in L(X_0, L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))$ und $PJ = \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)}$ wegen $PJf = \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell^2 f = f$.

(3) Sei nun A_p die L^p-Realisierung von $A(x,D)$, $A_{p,0}$ die L^p-Realisierung von $A_0(x,D)$ in (2). Dann gilt für $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$ und $\ell \in \Gamma$ die Gleichheit

$$
\begin{aligned}
\varphi_\ell A_p u &= A_p(\varphi_\ell u) + (\varphi_\ell A_p - A_p \varphi_\ell) u \\
&= A^\ell(\varphi_\ell u) + (A_p - A_{p,0})\psi_\ell \varphi_\ell u + \sum_{k: Q_k\cap Q_\ell \ne\emptyset} (\varphi_\ell A_p - A_p\varphi_\ell)\varphi_k^2 u.
\end{aligned}
$$

Somit ist $JA_p = AJ + BJ$ mit

$$
B\big((u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\big) := \Big((A_p - A_{p,0})\psi_\ell u_\ell + \sum_{k: Q_k\cap Q_\ell\ne\emptyset} (\varphi_\ell A_p - A_p\varphi_\ell)\varphi_k u_k \Big)_{\ell\in\Gamma}.
$$

Schreibt man $B((u_\ell)_\ell) = (\sum_{k\in\Gamma} B_{k\ell} u_\ell)_{k\in\Gamma}$, so ist $B_{k\ell}$ ein Differentialoperator der Ordnung $\le 2m-1$, und die Anzahl der Elemente in jeder Zeile der unendlichen Matrix $(B_{k\ell})_{k,\ell}$ ist beschränkt. Wegen $a_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$ ist somit $B \in L(X_{2m-1}, X_0)$.

Analog gilt für $(u_\ell)_{\ell\in\Gamma} \in X_{2m}$ die Gleichheit

$$
(A_pP - PA)(u_\ell)_{\ell\in\Gamma} = A_p\Big(\sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell u_\ell\Big) - \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell A^\ell u_\ell
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell (A_p - A_{p,0}) u_\ell + \sum_{k\in\Gamma} (A_p\varphi_k - \varphi_k A_p) u_k \\
&= \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell (A_p - A_{p,0}) u_\ell + \sum_{k\in\Gamma} \sum_{\ell : Q_k\cap Q_\ell\neq\emptyset} \varphi_\ell^2 (A_p\varphi_k - \varphi_k A_p) u_k \\
&= \sum_{\ell\in\Gamma} \varphi_\ell \Big[(A_p - A_{p,0}) u_\ell + \sum_{k : Q_k\cap Q_\ell\neq\emptyset} \varphi_\ell (A_p\varphi_k - \varphi_k A_p) u_k \Big] \\
&= PD(u_\ell)_{\ell\in\Gamma}
\end{aligned}$$

mit

$$D(u_\ell)_{\ell\in\Gamma} := \Big((A_p - A_{p,0}) u_\ell + \sum_{k : Q_k\cap Q_\ell\neq\emptyset} (A_p\varphi_k - \varphi_k A_p) u_k \Big)_{\ell\in\Gamma}.$$

Wie oben folgt $D \in L(X_{2m-1}, X_0)$.

(4) Nach der Interpolationsungleichung für Sobolevräume gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|B(u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\|_{X_0} + \|D(u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\|_{X_0} &\le C \|(u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\|_{X_{2m-1}} \\
&\le \varepsilon \|(u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\|_{X_{2m}} + C_\varepsilon \|(u_\ell)_{\ell\in\Gamma}\|_{X_0} \quad (u \in X_{2m}).
\end{aligned}$$

Nach Satz 5.2 existiert ein $\mu > 0$ so, dass $A+B-\mu$ und $A+D-\mu$ beide $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\ge \theta$ sind.

Sei $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$ und $f := (\lambda + \mu - A_p)u \in L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$. Dann gilt

$$Jf = J(\lambda+\mu - A_p)u = (\lambda + \mu - (A+B))Ju$$

und damit

$$u = PJu = P(\lambda+\mu-(A+B))^{-1}Jf.$$

Somit ist $\lambda+\mu - A_p$ injektiv.

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N)$ gilt andererseits

$$\begin{aligned}
f = PJf &= P(\lambda+\mu-(A+D))(\lambda+\mu-(A+D))^{-1}Jf \\
&= (\lambda+\mu-A_p)P(\lambda+\mu-(A+D))^{-1}Jf \in R(\lambda+\mu-A_p),
\end{aligned}$$

d.h. $\lambda+\mu-A_p$ ist auch surjektiv. Somit ist $\lambda+\mu \in \rho(A_p)$ und

$$(\lambda+\mu-A_p)^{-1} = P(\lambda+\mu-(A+D))^{-1}J.$$

Wegen $P \in L(X_0, L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N))$, $J \in L(L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N), X_{2m})$ und $R_\theta(A+D-\mu) < \infty$ folgt $R_\theta(A_p - \mu) < \infty$, d.h. $A_p - \mu$ ist $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel $\ge \theta$. $\square$

A. Das Bochner-Integral

Im Folgenden sei X ein komplexer Banachraum, versehen mit der Borel-σ-Algebra, und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein (o.E. vollständiger) Maßraum.

A.1 Definition. Eine Stufenfunktion (Treppenfunktion) ist eine Funktion $s\colon \Omega \to X$ der Form $s = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} a_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}$, und $a_i \in X \quad (i = 1, \dots, n)$. Falls $\mu(A_i) < \infty$ $(i = 1, \dots, n)$ gilt, heißt s integrierbare Stufenfunktion. In diesem Fall ist das Bochner-Integral von s definiert durch

$$\int_\Omega s d\mu := \sum_{i=1}^n \mu(A_i) a_i \in X.$$

Ein metrischer Raum heißt separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Man kann folgende Äquivalenzen zeigen:

A.2 Satz. *Für eine Abbildung $f\colon \Omega \to X$ sind äquivalent:*

(i) *Es existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen $f_n\colon \Omega \to X$ mit $f_n(z) \to f(z)$ (in X) für alle $z \in \Omega$.*

(ii) *f ist messbar und $f(\Omega)$ ist separabel.*

A.3 Satz. *Sei $f\colon \Omega \to X$ messbar und $f(\Omega)$ separabel. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren Stufenfunktionen $f_n\colon \Omega \to X$ mit $f_n(z) \to f(z) \quad (z \in \Omega)$ und*

$$\int \|f_n - f\| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(ii) $\int \|f\| d\mu < \infty$.

Bei stetigen Funktionen ist die Bedingung der Separabilität automatisch erfüllt, wie das folgende Lemma zeigt.

A.4 Lemma. *Sei Ω ein separabler topologischer Raum und sei $f\colon \Omega \to X$ stetig. Dann ist $f(\Omega)$ separabel.*

Beweis. Sei $\Omega_0 \subset \Omega$ abzählbar und dicht. Dann ist $X_0 := f(\Omega_0)$ abzählbar, und es gilt

$$A := f^{-1}(\overline{X_0}) \supset f^{-1}(X_0) \supset \Omega_0.$$

Da f stetig ist, ist A abgeschlossen, und es folgt $\Omega = \overline{\Omega_0} \subset \overline{A} = A$, also

$$f(\Omega) = f(A) = f(f^{-1}(\overline{X_0})) \subset \overline{X_0}.$$

Also ist $f(\Omega)$ separabel. □

A.5 Definition. a) Eine Funktion $f\colon \Omega \to X$ heißt stark messbar (oder μ-messbar), falls eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ existiert so, dass $f|_{\Omega\setminus N}$ messbar ist und $f(\Omega \setminus N)$ separabel ist.

b) Eine stark messbare Funktion $f\colon \Omega \to X$ heißt (μ-)integrierbar, falls $\int \|f\| d\mu < \infty$. In diesem Fall wähle eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren Treppenfunktionen mit $f_n \to f$ μ-fast überall und $\int \|f_n - f\| d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$ und definiert das Bochner-Integral von f über Ω bzgl. μ durch

$$\int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Wie üblich sei

$$\int_A f d\mu := \int (\chi_A \cdot f) d\mu \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Man setzt $\mathscr{L}^1(\mu, X) := \{f\colon \Omega \to X \mid f \text{ ist integrierbar}\}$ und $\mathscr{L}^1(\mu) := \mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{K})$.

Die vektorwertigen L^p-Räume $L^p(\mu; X)$ werden wie üblich definiert als Quotientenraum $L^p(\mu; X) := \mathscr{L}^p(\mu; X)/N$. Hierbei ist $\mathscr{L}^p(\mu; X)$ die Menge aller stark messbaren f, für welche $\|f\|_{L^p(\mu;X)} := (\int \|f\|^p d\mu)^{1/p}$ endlich ist, und N die Menge aller $f \in \mathscr{L}^1(\mu; X)$ mit $\|f\|_{L^1(\mu;X)} = 0$. Für $p = \infty$ hat man die üblichen Modifikationen.

Falls $\Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und μ das Lebesgue-Maß ist, so schreibt man üblicherweise $L^1(\Omega; X) := L^1(\mu; X)$.

Für Bochner-Integrale gelten die aus der skalaren Lebesgue-Theorie bekannten Konvergenzsätze.

A.6 Satz. a) **(Satz von der majorisierten Konvergenz).** *Seien $f_n\colon \Omega \to X$ stark messbar mit $f_n \to f$ μ-fast überall. Sei $g\colon \Omega \to [0,\infty]$ messbar mit $\int g d\mu < \infty$ und $\|f_n(z)\| \le g(z)$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\|f(z)\| \le g(z)$ μ-fast überall.*

Dann ist $f_n \in L^1(\mu; X)$, $f \in L^1(\mu; X)$ und

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \text{ in } X \quad (n \to \infty).$$

b) Sei $f_n\colon \Omega \to X$ stark messbar mit $\sum_{n=1}^\infty \int \|f_n\| d\mu < \infty$. Dann ist $f_n \in L^1(\mu; X)$ und $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ konvergiert in X für μ-fast alle $z \in \Omega$.

Die Funktion

$$z \mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty f_n(z), & \text{falls } \sum_n f_n(z) \text{ konvergiert,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \int f_n d\mu = \int \sum_{n=1}^\infty f_n d\mu.$$

c) Sei $f \in L^1(\mu; X)$ *und* $A = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *(d.h. disjunkte Vereinigung) mit* $A_n \in \mathcal{A}$*. Dann ist*

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

d) Für $f \in L^1(\mu; X)$ *gilt* $\| \int f d\mu \|_X \leq \int \|f\|_X d\mu$.

Literatur

[ABHN11] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander, *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, second ed., Monographs in Mathematics, vol. 96, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[AE99] H. Amann and J. Escher, *Analysis. II*, Grundstudium Mathematik., Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[AF03] R. A. Adams and J. J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, second ed., Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), vol. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[Ama95] H. Amann, *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I*, Monographs in Mathematics, vol. 89, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995, Abstract linear theory.

[Dav80] E. B. Davies, *One-parameter semigroups*, London Mathematical Society Monographs, vol. 15, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1980.

[Den21] R. Denk, *An introduction to maximal regularity for parabolic evolution equations*, Preprint arXiv:2003.04554 (2021), 57 pp., https://arxiv.org/abs/2003.04554v1.

[DHP03] R. Denk, M. Hieber, and J. Prüss, *$\mathcal{R}$-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type*, Mem. Amer. Math. Soc. **166** (2003), no. 788, viii+114.

[DHP07] ______, *Optimal L^p-L^q-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data*, Math. Z. **257** (2007), no. 1, 193–224.

[EN00] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 194, Springer-Verlag, New York, 2000.

[GGK90] I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of linear operators. Vol. I*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 49, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[GW03] M. Girardi and L. Weis, *Criteria for R-boundedness of operator families*, Evolution equations, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 234, Dekker, New York, 2003, pp. 203–221.

[HvNVW16] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, and L. Weis, *Analysis in Banach spaces. Vol. I. Martingales and Littlewood-Paley theory*, vol. 63, Springer, Cham, 2016.

[HvNVW17] ———, *Analysis in Banach spaces. Vol. II*, vol. 67, Springer, Cham, 2017, Probabilistic methods and operator theory.

[KW04] P. C. Kunstmann and L. Weis, *Maximal L_p-regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞-functional calculus*, Functional analytic methods for evolution equations, Lecture Notes in Math., vol. 1855, Springer, Berlin, 2004, pp. 65–311.

[Tri78] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Mathematical Library, vol. 18, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[Wlo87] J. Wloka, *Partial differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, Translated from the German by C. B. Thomas and M. J. Thomas.

Index