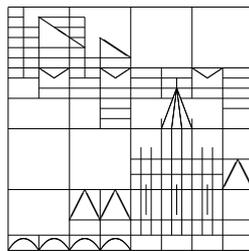


Skript zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2021

Robert Denk



Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 26.08.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Die Topologie des \mathbb{R}^n	1
	a) \mathbb{R}^n als normierter Vektorraum	1
	b) Stetigkeit und Kompaktheit	5
2	Differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher	10
	a) Der Begriff der Ableitung	10
	b) Der Mittelwertsatz	19
	c) Höhere Ableitungen	21
	d) Extrema unter Nebenbedingungen	29
3	Kurven und Flächen	35
	a) Weglängen	35
	b) Kurven in der Ebene und im Raum	40
	c) m -dimensionale Flächen im \mathbb{R}^n	43
4	Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie	49
	a) Maße und messbare Funktionen	49
	b) Das Lebesgue-Integral	57
	c) Iterierte Integrale	64
	d) Der Transformationssatz	68
5	Kurvenintegrale und Flächenintegrale, der Satz von Gauß	72
	a) Kurvenintegrale und 1-Formen	72
	b) Die Integralsätze von Gauß und Stokes	84
6	Lokale Umkehrbarkeit und implizite Funktionen	95
A	Zusammenfassung und Veranschaulichung	100
	a) Anschauliche Interpretation der Integralformeln	100
	b) Zusammenfassung: Fragen und Antworten	104
	Abbildungsverzeichnis	107
	Literatur	107
	Index	108

1. Die Topologie des \mathbb{R}^n

Die roten Einträge auf dem Rand zeigen an, in welchem Video und an welcher Stelle der entsprechende Punkt zu finden ist. Dabei sind die Vorlesungsvideos mit 01,02,... durchnummeriert. Unter dem Rahmen ist noch das Datum des Videos zu sehen. So beginnt z.B. der Punkt „1.1 Worum geht’s“ im Video Nummer 01 vom 12.04.21 nach 06 Minuten und 15 Sekunden.

1.1 Worum geht’s? Wir werden in diesem Semester vor allem Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m betrachten. Dafür müssen die aus dem ersten Semester bekannten Begriffe wie etwa Stetigkeit, Konvergenz und Normen vom \mathbb{R}^1 auf den \mathbb{R}^n übertragen werden. In diesem ersten kurzen Abschnitt werden einige topologische Begriffe und Ergebnisse zusammengefasst, welche zum Teil auch allgemein in normierten oder metrischen Räumen gelten.

01/06:15
(12.04.21)

a) \mathbb{R}^n als normierter Vektorraum

Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1.2 Definition. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt ein Skalarprodukt, falls gilt:

01/10:40
(12.04.21)

- (i) Es gilt $\langle f, f \rangle \geq 0$ ($f \in V$) und $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$,
- (ii) Die Abbildung $f \mapsto \langle f, g \rangle$, $V \rightarrow \mathbb{K}$, ist \mathbb{K} -linear, d.h. es gilt

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \alpha_1 \langle f_1, g \rangle + \alpha_2 \langle f_2, g \rangle \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, f_1, f_2, g \in V).$$

- (iii) Es gilt $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ ($f, g \in V$).

In diesem Fall heißt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt oder Prähilbertraum. Falls V mit der induzierten Norm $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ vollständig (d.h. ein Banachraum) ist, so heißt V ein \mathbb{K} -Hilbertraum.

Falls V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist, gilt für die induzierte Norm $\|\cdot\|$ die **Cauchy¹-Schwarz²-Ungleichung**

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad (f, g \in V),$$

die leicht aus den Axiomen eines Skalarprodukts zu folgern ist.

¹Augustin-Louis Cauchy, 21.8.1789 – 23.5.1857

²Hermann Amandus Schwarz, 25.1.1843 – 30.11.1921

Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir schreiben Vektoren des \mathbb{R}^n in der Form

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(Spaltenvektor), der transponierte Vektor ist definiert durch $x^\top := (x_1, \dots, x_n)$ (Zeilenvektor). Das Standard-Skalarprodukt ist $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$, die zugehörige Norm ist die euklidische Norm $|x| := \langle x, x \rangle^{1/2}$. Damit wird \mathbb{R}^n zu einem Hilbertraum.

Auf dem \mathbb{R}^n existieren noch weitere wichtige Normen, welche im folgenden Beispiel angegeben werden. Der Nachweis der Norm-Eigenschaften ist hier einfach bis auf den Beweis der Dreiecksungleichung, der im nachfolgenden Satz durchgeführt wird.

01/21:10

(12.04.21)

1.3 Beispiele. a) Für $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und $1 \leq p \leq \infty$ definiert man

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, & \text{falls } p \in [1, \infty), \\ \max_{i=1, \dots, n} |x_i|, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Damit wird $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum.

b) Man definiert die Folgenräume ℓ^p für $1 \leq p \leq \infty$ durch $\ell^p := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p < \infty\}$, wobei für $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Norm $\|x\|_p$ definiert wird durch

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, & \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Damit wird $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ zu einem normierten Raum.

c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Für $f \in C([a, b]) := \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ stetig}\}$ und $1 \leq p \leq \infty$ definiert man

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & \text{falls } p \in [1, \infty), \\ \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Damit wird $(C([a, b]), \|\cdot\|_p)$ zu einem normierten Raum.

01/36:40

(12.04.21)

1.4 Satz. Zu $1 \leq p \leq \infty$ sei der konjugierte Exponent q definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (d.h. $q = \frac{p}{p-1}$ falls $p > 1$ und $q = \infty$ falls $p = 1$).

a) (*Youngsche Ungleichung*)³ Falls $p \in (1, \infty)$, so gilt für alle $a, b \geq 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

³William Henry Young, 20.10.1862 – 7.7.1942

Dabei gilt die Gleichheit nur, wenn $a^p = b^q$.

b) (Höldersche Ungleichung)⁴ Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad (x \in \ell^p, y \in \ell^q),$$

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (f, g \in C([a, b])).$$

c) (Minkowskische Ungleichung)⁵ Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad (x, y \in \ell^p),$$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (f, g \in C([a, b])).$$

Beweis. a) Wir betrachten im positiven Quadranten der (x, y) -Ebene die durch die Gleichung $x^p = y^q$ gegebene Kurve (d.h. $y = x^{p-1}$ bzw. $x = y^{q-1}$). Dann ist die Fläche zwischen der x -Achse (mit $x \in [0, a]$) und dieser Kurve gegeben durch

$$A_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{x^p}{p} \Big|_{x=0}^a = \frac{a^p}{p}.$$

Die Fläche zwischen der y -Achse (mit $y \in [0, b]$) und der Kurve ist analog gegeben durch $A_2 = \frac{b^q}{q}$ (siehe Abbildung 1). Wie die Abbildung zeigt, ist die Summe der beiden Flächen mindestens so groß wie die Fläche des durch die Punkte $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$ und (a, b) gegebenen Rechtecks. Diese ist ab . Damit erhalten wir

$$A_1 + A_2 = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Wie die Abbildung ebenfalls zeigt, gilt Gleichheit nur für $a^p = b^q$.

b) Für $p = 1$ oder $p = \infty$ oder $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Behauptung klar. Seien also $p \in (1, \infty)$ und $x \neq 0 \neq y$. Zu $i \in \mathbb{N}$ wenden wir die Youngsche Ungleichung an mit $a := \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$ und $b := \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$. Wir erhalten

$$\frac{|x_i| \cdot |y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{|x_i|^p}{p \|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q \|y\|_q^q}.$$

Summation über i und Multiplikation mit $\|x\|_p \cdot \|y\|_q$ liefert die erste Behauptung in b). Die zweite Behauptung wird analog gezeigt, wobei man jetzt

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{und} \quad b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

⁴Otto Hölder, 22.12.1859 – 29.8.1937

⁵Hermann Minkowski, 22.6.1864 – 12.1.1909

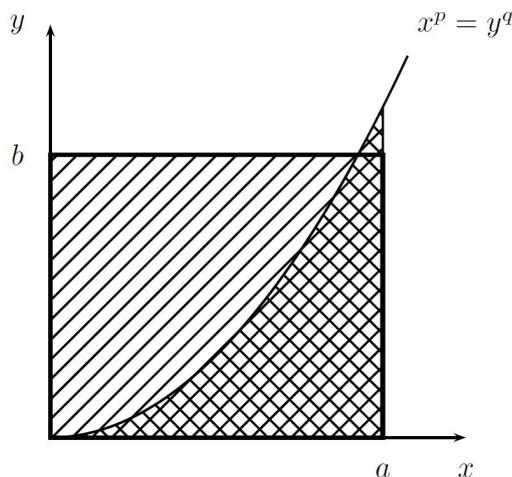


Abbildung 1: Zum Beweis der Young'schen Ungleichung

wählt. Die Young'sche Ungleichung ergibt

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}.$$

Integration über x und Multiplikation mit $\|f\|_p\|g\|_q$ liefert nun die Behauptung.

c) Die Aussage ist wiederum klar für $p = 1$ oder $p = \infty$. Sei also $p \in (1, \infty)$. Dann erhält man unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{p-1} |y_i| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} (\|x\|_p + \|y\|_p) \\ &= \|x + y\|_p^{p/q} (\|x\|_p + \|y\|_p). \end{aligned}$$

Da $p - \frac{p}{q} = p - (p-1) = 1$ ist, folgt hieraus die erste Behauptung in c). Analog beweist man die zweite Behauptung. \square

Man beachte, dass die obigen Ungleichungen insbesondere für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gelten (man setzt alle Komponenten ab $n+1$ gleich 0). Aus der Hölder-Ungleichung für $p = 2$ (und damit $q = 2$) folgt sofort die Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 = |x| |y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

b) Stetigkeit und Kompaktheit

1.5 Satz (von Bolzano-Weierstraß). Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$.

01/1:21:00
(12.04.21)

Beweis. Im Beweis verwenden wir die Bezeichnung $P_j x := x_j$ für Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, d.h. $P_j x$ ist die j -te Komponente des Vektors x .

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $|x_k| = \|x_k\|_2 \leq M$. Dann gilt $|P_j x_k| \leq M$ für $j = 1, \dots, n, k \in \mathbb{N}$. Da $(P_1 x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist, existiert $\limsup_{k \rightarrow \infty} P_1 x_k$ und damit eine Teilfolge $(x_\ell^{(1)})_{\ell \in \mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, für die $(P_1 x_\ell^{(1)})_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergiert.

Davon existiert wieder eine Teilfolge $(x_\ell^{(2)})_{\ell \in \mathbb{N}}$, für welche $(P_2 x_\ell^{(2)})_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergiert, usw. Insgesamt erhalten wir eine Teilfolge $(x_\ell^{(n)})_{\ell \in \mathbb{N}}$, für die alle Komponenten $(P_j x_\ell^{(j)})_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, konvergent sind, d.h. $(x_\ell^{(n)})_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert. \square

Wie im eindimensionalen Fall kann man die folgende Äquivalenz zeigen:

1.6 Satz. Für $K \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- (i) K ist kompakt,
- (ii) K ist abgeschlossen und beschränkt,
- (iii) jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $x := \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} \in K$.

02/09:45
(15.04.21)

1.7 Korollar (Intervallschachtelung). Seien $A_k \subset \mathbb{R}^n$, $A_k \neq \emptyset$, A_k abgeschlossen, mit $A_k \supset A_{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$). Falls ein A_k beschränkt ist, so ist $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$.

02/14:20
(15.04.21)

Beweis. O.E. sei A_1 beschränkt und damit kompakt. Angenommen $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$. Dann ist $A_1 \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}^n \setminus A_k) = \mathbb{R}^n$ eine offene Überdeckung. Da A_1 kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $A_1 \subset \bigcup_{k=1}^K (\mathbb{R}^n \setminus A_k) = \mathbb{R}^n \setminus A_K$, d.h. $A_K = A_1 \cap A_K = \emptyset$. \square

1.8 Bemerkung. a) In diesem Semester werden wir Abbildungen

$$f: X \supset D(f) \rightarrow Y$$

02/25:00
(15.04.21)

behandeln. Dabei sind $D(f)$ der Definitionsbereich von f und (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume. Insbesondere interessieren die Fälle $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$. Man beachte, dass durch die Einschränkung der Metrik d_X bzw. d_Y auch $D(f)$ bzw. $R(f)$ wieder metrische Räume sind.

Wir wiederholen einige aus dem ersten Semester bekannte Aussagen für stetige Funktionen. Seien X und Y metrische Räume. Dann sind für eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) f ist stetig.
- (ii) Für alle offenen Teilmengen $V \subset Y$, V ist $f^{-1}(V) \subset X$ offen.
- (iii) Für alle abgeschlossenen Teilmengen $V \subset Y$ ist $f^{-1}(V) \subset X$ abgeschlossen.
- (iv) Für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $x_k \rightarrow x \in X$ gilt $f(x_k) \rightarrow f(x)$.

Falls $K \subset X$ kompakt ist und $f: K \rightarrow Y$ stetig ist, so ist der Wertebereich $f(K)$ ebenfalls kompakt und f ist auf K gleichmäßig stetig.

b) Speziell erhalten wir für $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt (und damit beschränkt und abgeschlossen), und die Extremwerte von $|f|$ werden angenommen, d.h. $\max_{x \in K} |f(x)|$ und $\min_{x \in K} |f(x)|$ existieren.

02/36:35
(15.04.21)

1.9 Beispiel. Seien $X = \mathbb{R}^2$ und $Y = \mathbb{R}$; beide Räume seien mit der euklidischen Metrik versehen. Definiere $f: X \rightarrow Y$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{für } x = y = 0, \end{cases}$$

siehe Abbildung 2. Die Funktion f ist in $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ stetig. In $(0, 0)$ ist sie partiell stetig, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0,$$

aber sie ist nicht stetig, da für $a \neq 0$

$$f(x, ax) = \begin{cases} \frac{a}{1+a^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist; die Funktion springt also längs der Geraden $x \mapsto ax$.

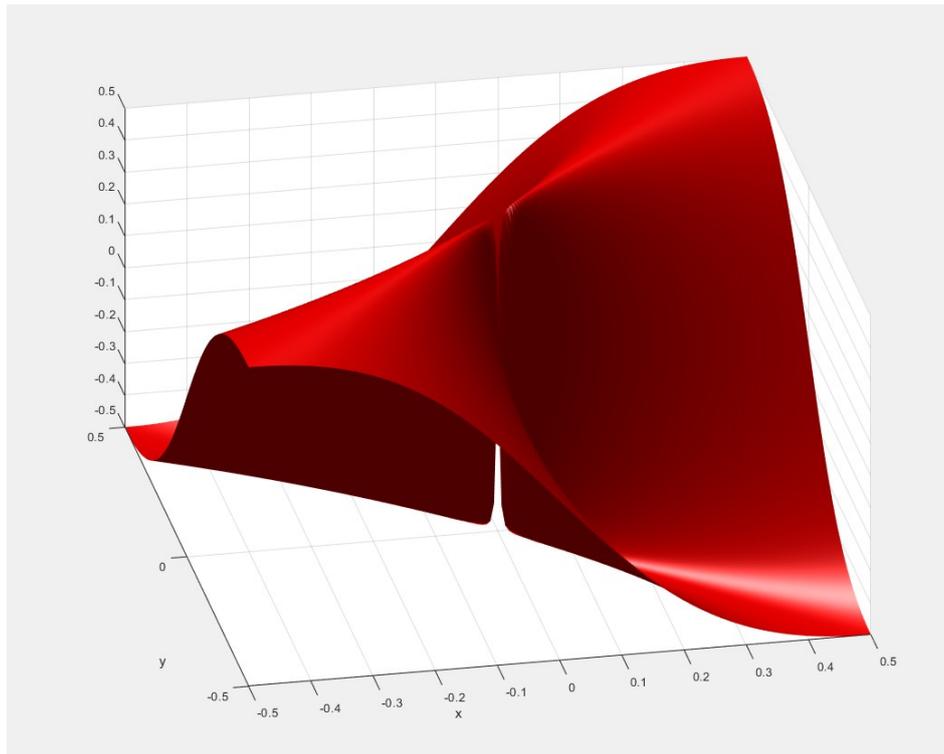
Es soll nun ein Ausblick auf ein Analogon zum Zwischenwertsatz gegeben werden. Dazu benötigen wir den Begriff des Zusammenhangs.

02/45:45
(15.04.21)

1.10 Definition. Ein metrischer Raum X heißt zusammenhängend, falls keine Teilmenge $A \subset X$ existiert mit $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$, welche offen und abgeschlossen ist.

02/52:00
(15.04.21)

1.11 Bemerkung. Nach Definition ist ein metrischer Raum X genau dann nicht zusammenhängend, wenn zwei nichtleere offene Teilmengen A und B existieren mit $A \cap B = \emptyset$ (d.h. A und B sind disjunkt) und $A \cup B = X$. (Hier kann "offen" durch "abgeschlossen" ersetzt werden.)

Abbildung 2: Die Funktion f aus Beispiel 1.9

1.12 Satz (Zwischenwertsatz). Seien X ein zusammenhängender metrischer Raum, Y ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist der Wertebereich $R(f)$ zusammenhängend.

02/54:50
(15.04.21)

Beweis. Angenommen, $R(f)$ ist nicht zusammenhängend. Dann existieren zwei nichtleere offene Mengen A und B mit $R(f) = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. (Hier ist die Offenheit im metrischen Raum $R(f)$ zu verstehen.)

Da f stetig ist, sind auch $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ offen (und nichtleer und disjunkt). Wegen $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(R(f)) = X$, ist X nichtzusammenhängend, Widerspruch. \square

1.13 Beispiele. (i) Der mit der diskreten Metrik versehende Raum $X = \{0, 1\}$ ist nichtzusammenhängend. Wähle $A = \{0\} = B(0, 1/2)$.

02/1:05:15
(15.04.21)

(ii) Der mit der euklidischen Metrik versehende Raum $X = \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend.

Eine anschaulichere Definition (die aber nicht äquivalent ist) ist der Wegzusammenhang:

02/1:11:30
(15.04.21)

1.14 Definition. Sei X ein metrischer Raum, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann heißt eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ ein Weg (in X).

Der Raum X heißt wegzusammenhängend, falls je zwei Elemente $x, y \in X$ durch einen Weg in X stetig verbunden werden können, d.h. falls ein Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ existiert mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen.

02/1:17:30
(15.04.21)

1.15 Satz. *Wegzusammenhängende Mengen sind zusammenhängend.*

Die Umkehrung dieses Satzes gilt i.a. nicht. Die Menge

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = \sin \frac{1}{x}\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\},$$

die mit der euklidischen Metrik des \mathbb{R}^2 zu einem metrischen Raum wird, ist ein Beispiel für einen zusammenhängenden, aber nicht wegzusammenhängenden Raum, siehe Abbildung 3.

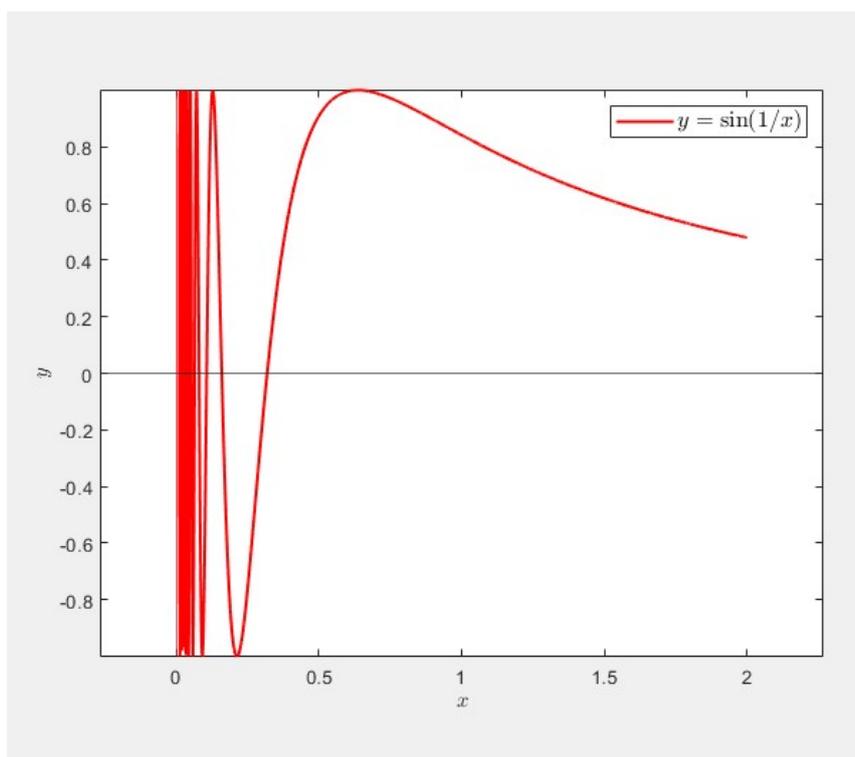


Abbildung 3: Eine nicht wegzusammenhängende Menge

Wie auch im ersten Semester, verwenden wir folgende Schreibweise: Seien X und Y normierte \mathbb{K} -Vektorräume, und sei $A: X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Dann

schreiben wir $Ax := A(x)$. Falls $Y = \mathbb{K}$, heißt eine lineare Abbildung auch ein lineares Funktional.

Eine lineare Abbildung $A: X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist, d.h. falls ein $c > 0$ existiert mit

$$\forall x \in X : \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

1.16 Definition. Seien X und Y normierte Räume. Dann definiert man $L(X, Y) := \{A: X \rightarrow Y \mid A \text{ stetig und linear}\}$, den Raum der stetigen linearen Operatoren. Man sieht sofort, dass eine lineare Abbildung $A: X \rightarrow Y$ genau dann stetig ist, wenn sie beschränkt ist, d.h. falls ein $C \geq 0$ existiert mit

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X \quad (x \in X).$$

Man definiert für $A \in L(X, Y)$ (falls $X \neq \{0\}$) die Operatornorm durch

$$\|A\| := \|A\|_{L(X, Y)} := \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y.$$

Für $X = \{0\}$ ist $L(X, Y) = \{0\}$, und man setzt in diesem Fall $\|A\| := 0$ für den Nulloperator $A = 0$.

02/1:26:00
(15.04.21)

2. Differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher

03/01:20
(19.04.21)

2.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher diskutiert; der zentrale Begriff ist hierbei der der Differenzierbarkeit. Viele Aussagen aus dem eindimensionalen Fall lassen sich übertragen. Allerdings ist der Begriff der Ableitung selbst jetzt komplizierter. So kann die Ableitung einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ als Matrix interpretiert werden. Behandelt werden hier unter anderem der Mittelwertsatz, die Taylor-Reihe und die Existenz von Extrema.

a) Der Begriff der Ableitung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und definieren

$$B(U; \mathbb{R}^m) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \sup_{x \in U} |f(x)| < \infty\}.$$

$B(U; \mathbb{R}^m)$ wird mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x \in U} |f(x)|$ zu einem normierten Raum. Genau wie im \mathbb{R}^1 definieren wir

03/11:20
(19.04.21)

2.2 Definition. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $f_n: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ Funktionen für $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ ist.

Komponentenweise zeigt man:

03/13:45
(19.04.21)

2.3 Satz. Ist $(f_n)_n \subset C(U; \mathbb{R}^m)$ gleichmäßig konvergent gegen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, so ist $f \in C(U; \mathbb{R}^m)$.

Speziell ergibt sich (wie auch in \mathbb{R}^1) die Vollständigkeit der Räume $B(U; \mathbb{R}^m)$ und $BC(U; \mathbb{R}^m) := C(U; \mathbb{R}^m) \cap B(U; \mathbb{R}^m)$ und $C(K; \mathbb{R}^m)$ für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, d.h. diese Räume sind jeweils Banachräume.

Wir werden in diesem Abschnitt die Differentiation von Funktionen

$$f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad U \text{ offen}$$

definieren und diskutieren. Eine direkte Übertragung der Definition für in $U \subset \mathbb{R}^1$ erklärte Funktionen ist nicht möglich, da der Differenzenquotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für $h \in \mathbb{R}^n$ und $n \geq 2$ nicht erklärt ist.

Einen Hinweis auf eine mögliche Übertragung gibt jedoch die Taylorsche Formel (für $n = m = 1$):

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + r(x,h)|h|$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} r(x,h) = 0$.

2.4 Definition. a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V_x := \{h \in \mathbb{R}^n \mid x+h \in U\}$ für $x \in U$. Dann heißt $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ an der Stelle $x \in U$ differenzierbar, wenn gilt:

03/25:10
(19.04.21)

Es gibt $A(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und eine im Nullpunkt stetige Abbildung $r(x, \cdot) : V_x \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $r(x,0) = 0$ so, dass gilt:

$$f(x+h) = f(x) + A(x)h + r(x,h)|h| \quad \text{für } h \in V_x.$$

b) Die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt in U differenzierbar, falls f in allen $x \in U$ differenzierbar ist.

c) Falls $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ an der Stelle $x \in U$ differenzierbar ist, heißt $f'(x) := A(x)$ (erste) Ableitung von f an der Stelle x .

Im Falle einer differenzierbaren Funktion heißt die Abbildung

$$f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad x \mapsto f'(x)$$

die erste Ableitung von f . Andere Schreibweise ist $Df := f'$.

2.5 Bemerkung. Die Ableitung $f'(x) = A(x)$ einer Funktion ist nur dann wohldefiniert, wenn sie eindeutig definiert ist. Wir weisen nach, dass das der Fall ist: Es mögen $A_1(x)$ und $A_2(x)$ die Eigenschaften von $A(x)$ aus der Definition 2.4 (i) haben. Dann ist

03/36:30
(19.04.21)

$$(A_1(x) - A_2(x))h + (r_1(x,h) - r_2(x,h))|h| = 0.$$

Hieraus folgt für $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, und $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \left| (A_1(x) - A_2(x)) \frac{y}{|y|} \right| &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|(A_1(x) - A_2(x))ty|}{|ty|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} |r_1(x,ty) - r_2(x,ty)| = 0. \end{aligned}$$

Also ist $A_1(x) = A_2(x)$.

Aus der Definition der Ableitung folgt sofort:

2.6 Satz. Ist f an der Stelle x differenzierbar, so ist f an der Stelle x stetig.

03/45:25
(19.04.21)

Wir hatten schon bei der Definition der Stetigkeit bemerkt, dass es wesentlich für die Definition ist, dass die Stetigkeit in allen Richtungen gemeint ist. Für die Stetigkeit in nur einer Richtung hatten wir den Begriff partielle Stetigkeit gebraucht.

Ebenso kann man von partieller Differenzierbarkeit sprechen. Besonders häufig benutzen wir partielle Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen. Wir werden den Zusammenhang zwischen partieller Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit erläutern.

03/51:30
(19.04.21)

2.7 Definition. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x \in U$. Bezeichne e_i den i -ten Einheitsvektor für $i = 1, \dots, n$. Falls der Grenzwert

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \lim_{\mathbb{R} \ni h_i \rightarrow 0} \frac{f(x + h_i e_i) - f(x)}{h_i}$$

existiert, so heißt f an der Stelle x in Richtung des i -ten Einheitsvektors partiell differenzierbar, und $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ heißt die partielle Ableitung in Richtung e_i (oder die partielle Ableitung nach x_i). Andere Schreibweisen sind $\partial_{x_i} f(x) := \partial_i f(x) := \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

Ist f für $x \in U$ in Richtung aller Einheitsvektoren partiell differenzierbar, so heißt f an der Stelle x partiell differenzierbar. In diesem Fall heißt

$$\text{grad} f(x) := \nabla f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

der Gradient von f an der Stelle x . Das Symbol „ ∇ “ heißt „Nabla“ (von lat. „nablium“, was ein antikes Saiteninstrument bezeichnet).

03/1:02:40
(19.04.21)

2.8 Bemerkung. a) Die partielle Ableitung der Funktion f in Richtung des i -ten Einheitsvektors e_i an der Stelle $x \in U$ entspricht der bereits im ersten Semester behandelten eindimensionalen Ableitung der Funktion

$$g: \mathbb{R} \supset \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

an der Stelle $t = x_i$. Hierbei ist \tilde{U} das Bild der Projektion der Menge U auf die i -te Komponente. Also ist

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} g(t) \Big|_{t=x_i}.$$

b) Für in x differenzierbares $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Damit existiert ein Zeilenvektor $g = (g_1(x), \dots, g_n(x)) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ mit $f'(x)h = g \cdot h = \sum_{i=1}^n g_i(x) \cdot h_i$. Setzen wir $h = e_i$, so erhalten wir insbesondere

$$f'(x)e_i = g_i(x).$$

Andererseits ist

$$f'(x)e_i = \frac{f(x + h_i e_i) - f(x)}{h_i} - r(x, h_i e_i) \frac{|h_i e_i|}{h_i} \xrightarrow{h_i \rightarrow 0} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Hieraus folgt $g_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ und damit

$$f'(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle = (\nabla f(x))^\top h.$$

Mit der üblichen Identifizierung von Abbildungen und zugehörigen Matrizen (in diesem Fall ist die Matrix ein Zeilenvektor) erhalten wir also

$$f'(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)) = (\nabla f(x))^\top.$$

Für Funktionen, die in den \mathbb{R}^m abbilden, definiert man analog:

2.9 Definition. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

$$f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

eine Funktion und $x \in U$. Dann heißt f an der Stelle x partiell differenzierbar, falls alle Komponenten $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x partiell differenzierbar sind. In diesem Fall heißt die Matrix

$$J_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \dots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix⁶ von f an der Stelle x .

2.10 Bemerkung. Sei f an der Stelle x differenzierbar. Dann gilt nach Definition $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, d.h. $f'(x)$ kann als Matrix (bzgl. der Standardbasis) dargestellt werden. Wie in Bemerkung 2.8 b) sieht man, dass diese Matrix durch die Jacobi-Matrix gegeben ist. Es gilt also der Zusammenhang

$$\forall h \in \mathbb{R}^n : f'(x)h = J_f(x)h,$$

wobei auf der linken Seite der Wert der Abbildung $f'(x)$ an der Stelle h steht, auf der rechten Seite das Produkt der Jacobi-Matrix

$$J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

mit dem Vektor h . Üblicherweise werden die Abbildung und die entsprechende Matrix identifiziert. Manchmal schreibt man auch $Df(x) := \nabla f(x) := J_f(x)$.

⁶Carl Gustav Jacob Jacobi, 10.12.1804 - 18.2.1851

03/1:26:00
(19.04.21)

04/00:20
(22.04.21)

04/08:45

(22.04.21)

2.11 Beispiele. (i) Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto f(x) := \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Wenn f differenzierbar ist, so ist nach obiger Bemerkung

$$f' : \mathbb{R}^2 \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad x \mapsto f'(x) := \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Es bleibt nachzuweisen, dass diese lineare Abbildung die Eigenschaften der Abbildung $A(x)$ aus Definition 2.4 (ii) erfüllt, was hier aber nicht vorgeführt wird.

(ii) Sei nun

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

siehe Abbildung 4. Für $x \neq 0$ kann man zeigen: f ist in x differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = J_f(x) = \frac{1}{|x|^4} (x_2^2(-x_1^2 + x_2^2), 2x_1^3 x_2).$$

Im Nullpunkt ist f jedoch nicht differenzierbar, denn für die partiellen Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen erhält man $\partial_1 f(0) = \partial_2 f(0) = 0$, d.h. es müsste $f'(0) = 0$ sein, aber die Ableitung in Richtung des Vektors $(1, 1)$ ergibt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t(e_1 + e_2))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t)}{t} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Es gibt noch eine weitere mögliche Interpretation der Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion. Für

$$f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x)$$

hatten wir bisher gesagt:

$$f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad x \mapsto f'(x).$$

Ebenso kann man sagen:

$$f' : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, h) \mapsto f'(x, h) := f'(x)h,$$

wobei f' linear in der zweiten Komponente ist.Die Menge der differenzierbaren Abbildungen bildet einen Vektorraum. Mit $C^1(U; \mathbb{R}^m)$ bezeichnen wir den Raum der differenzierbaren Abbildungen $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, deren Ableitung f' wieder stetig ist.

Es gelten die folgenden Rechenregeln

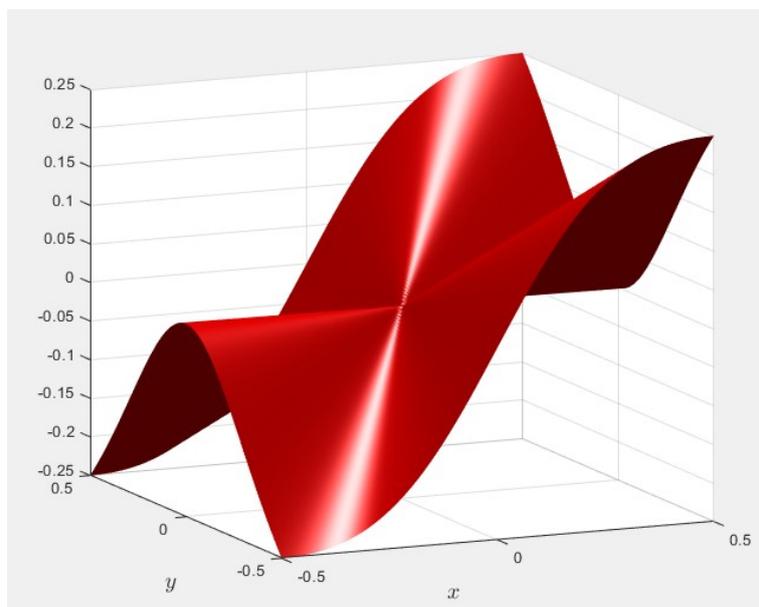


Abbildung 4: Die Funktion aus Beispiel 2.11 (ii)

2.12 Lemma. a) (Produktregel) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

04/28:30
(22.04.21)

Dann ist auch $f \cdot g : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und es gilt die Produktregel

$$\forall x \in U : (f \cdot g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

b) (Kettenregel) Seien $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^m \supset V \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbare Funktionen mit $f(U) \subset V$. Dann ist auch die Verkettung $g \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine differenzierbare Funktion, und es gilt die Kettenregel

$$\forall x \in U : (g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p).$$

Beweis. Beide Behauptungen werden wie im eindimensionalen Fall mit Hilfe der Definition der Ableitung bewiesen. \square

Wir wollen nun eine anschauliche Interpretation des Gradienten geben. Hierzu benötigen wir den Begriff der Richtungsableitung.

2.13 Definition. Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $x_0, h_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|h_0| = 1$ und

04/35:15
(22.04.21)

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t) := f(x_0 + th_0).$$

Dann ist F eine differenzierbare Funktion und

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial h_0} := F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th_0) - f(x_0)}{t} = f'(x_0) \cdot h_0 = \langle \nabla f(x_0), h_0 \rangle$$

heißt Richtungsableitung von f in Richtung h_0 an der Stelle x_0 .

In einem Punkt x_0 ist die Richtungsableitung betragsmäßig maximal, falls $\nabla f(x_0)$ in Richtung von h_0 zeigt. Das bedeutet, dass die Richtung des Gradienten die Richtung der stärksten Änderung der Funktion f angibt. Der Betrag der Richtungsableitung in Richtung des Gradienten entspricht dem Betrag des Gradienten.

Wir betrachten nun speziell Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$. In diesem Fall kann man sich den Graphen von f als Fläche im dreidimensionalen Raum vorstellen. Die Mengen der Punkte im \mathbb{R}^2 , in denen f einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$ annimmt,

$$N_f(c) := \{x \in U : f(x) = c\}$$

heißen Höhenlinien. Nun definiere für $c \in \mathbb{R}$ eine Abbildung

$$x: \mathbb{R} \rightarrow N_f(c), \quad t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t)).$$

Da $f(x(t)) = \text{konstant}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(x(t)) = \partial_1 f(x(t)) x_1'(t) + \partial_2 f(x(t)) x_2'(t) \\ &= \langle \nabla f(x(t)), x'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass entweder $\nabla f(x(t)) = 0$ oder $x'(t) = 0$ sind, oder aber, dass die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Abbildungen

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \beta(t)$$

heißen Falllinien, wenn gilt: $\frac{d}{dt} \beta(t) = \nabla f(\beta(t))$. Wir haben gerade gezeigt, dass Höhenlinien und Falllinien senkrecht aufeinander stehen.

04/1:05:10

2.14 Beispiel. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := |x|^2 = x_1^2 + x_2^2$, siehe Abbildung 5.

(22.04.21)

Die Funktion f ist differenzierbar, und es gilt für $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \neq 0$:

$$\nabla f(x_0) = 2x_0 = 2|x_0| \cdot \tilde{x}_0 \quad \text{mit } \tilde{x}_0 = \frac{x_0}{|x_0|}.$$

f ändert sich somit in radialer Richtung am meisten; die Falllinien sind Ursprungsgeraden, die Höhenlinien konzentrische Kreise.

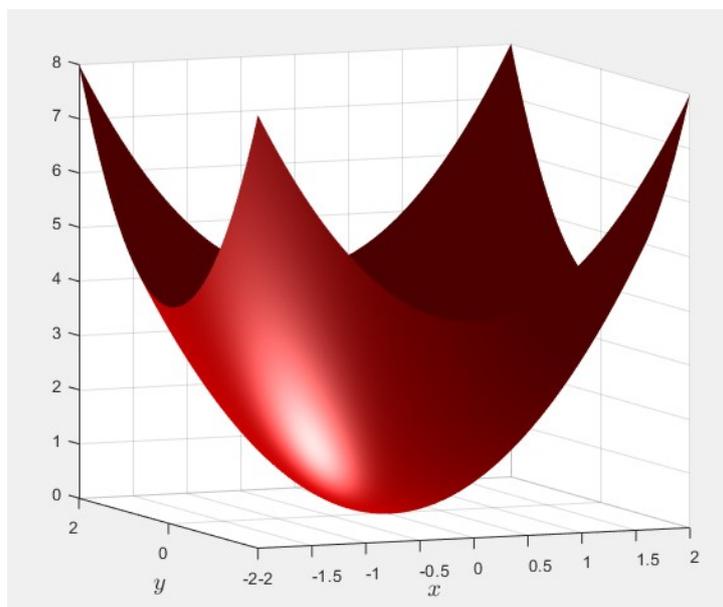
Einige Ableitungen haben aufgrund ihrer Bedeutung eine besondere Bezeichnung erhalten.

04/1:09:30

2.15 Definition. (i) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion. Dann heißt die Abbildung

(22.04.21)

$$\operatorname{div} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{div} f(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i f_i(x)$$

Abbildung 5: Die Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^2$, siehe Beispiel 2.14.

Divergenz von f .

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Funktion. Dann heißt die Abbildung

$$\operatorname{rot} f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \operatorname{rot} f(x) := \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(x) - \partial_3 f_2(x) \\ \partial_3 f_1(x) - \partial_1 f_3(x) \\ \partial_1 f_2(x) - \partial_2 f_1(x) \end{pmatrix}$$

Rotation von f .

(iii) Der Operator

$$\begin{aligned} \Delta : C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) &\rightarrow C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \\ f &\mapsto \Delta f := \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f, \end{aligned}$$

also $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$, heißt Laplace-Operator⁷. Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ definiert man

$$\begin{aligned} \Delta : C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) &\rightarrow C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ f = (f_1, \dots, f_m)^\top &\mapsto (\Delta f_1, \dots, \Delta f_m)^\top. \end{aligned}$$

2.16 Beispiel. Seien $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto f(x) := \frac{x}{|x|^3}$ und $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) := -\frac{1}{|x|}$. Dann rechnet man direkt nach, dass $\nabla g = f$, $\Delta g = \operatorname{div} f = 0$ und $\operatorname{rot} f = \operatorname{rot} \nabla g = 0$ gilt.

04/1:17:50
(22.04.21)

⁷Pierre Simon Laplace, 28.3.1749 – 5.3.1827

Wie im eindimensionalen Fall sind bijektive differenzierbare Funktionen besonders interessant. Man definiert dazu:

04/1:22:00
(22.04.21)

2.17 Definition. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f: U \rightarrow V$ eine Funktion. Dann heißt f ein Diffeomorphismus von U auf V , falls $f: U \rightarrow V$ bijektiv ist und sowohl f als auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig differenzierbar sind. Falls f und f^{-1} m -fach stetig differenzierbar sind mit $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, heißt f auch ein C^m -Diffeomorphismus.

Der folgende Satz wird später bewiesen.

05/01:25
(26.04.21)

2.18 Satz (Satz über lokale Umkehrbarkeit). Seien $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U_0, \mathbb{R}^n)$, $a \in U_0$ und $\det f'(a) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset U_0$ von a mit:

- (i) $f|_U$ ist injektiv.
- (ii) $f(U)$ ist offen.
- (iii) $g := (f|_U)^{-1}$ ist stetig differenzierbar.

Somit ist $f|_U: U \rightarrow f(U)$ ein Diffeomorphismus. Weiter gilt für alle $x \in U$

$$g'(f(x)) = (f'(x))^{-1}.$$

Eine wichtige Anwendung obigen Satzes sind Koordinatentransformationen.

05/09:30
(26.04.21)

2.19 Beispiel (Polarkoordinaten). Definiere die Koordinatentransformation

$$f: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung f ist injektiv und für die Umkehrabbildung $f^{-1} = g$ erhalten wir

$$g: \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$$

mit $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi := \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{für } x > 0, y > 0 \\ \pi/2 & \text{für } x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{für } x < 0 \\ 3\pi/2 & \text{für } x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctan(y/x) & \text{für } x > 0, y < 0. \end{cases}$

Nun ist f im ganzen Definitionsbereich differenzierbar mit

$$\det f'(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r > 0 \quad ((r, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)).$$

Auch g ist überall differenzierbar, und wir erhalten:

$$g'(f(r, \varphi)) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{x=r \cos \varphi \\ y=r \sin \varphi}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix} = (f'(r, \varphi))^{-1}.$$

b) Der Mittelwertsatz

Die Übertragung des Mittelwertsatzes vom eindimensionalen Fall auf reellwertige Funktionen im \mathbb{R}^n ist möglich, wenn die lineare Verbindung der beiden betrachteten Punkte a und b , also die Menge

$$\Gamma_{ab} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in (0, 1) : x = \gamma_{ab}(t) := a + t(b - a)\},$$

in der Definitionsmenge liegt.

2.20 Satz (Mittelwertsatz). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $a, b \in U$ und $\Gamma_{ab} \subset U$ (Γ_{ab} wie oben definiert).

05/29:15
(26.04.21)

Dann gibt es ein $c \in \Gamma_{ab}$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a).$$

Beweis. Definiere $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t) := f(\gamma_{ab}(t))$. Nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz existiert ein $\theta \in (0, 1)$ mit $F(1) = F(0) + F'(\theta)$. Mit der Kettenregel erhält man $F'(\theta) = f'(\gamma_{ab}(\theta)) \cdot \gamma'_{ab}(\theta) = f'(\gamma_{ab}(\theta))(b - a)$, woraus mit $c := \gamma_{ab}(\theta)$ die Behauptung folgt. \square

2.21 Bemerkungen. a) Wie der Beweis zeigt, kann die lineare Verbindung der Punkte durch einen beliebigen differenzierbaren in U verlaufenden Weg ersetzt werden, d.h. durch eine differenzierbare Abbildung

05/37:10
(26.04.21)

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow U \text{ mit } \gamma(0) = a \text{ und } \gamma(1) = b.$$

Dann gilt: $f(b) = f(a) + f'(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)$ mit einem $\theta \in (0, 1)$.

b) Eine andere Formulierung des Satzes lautet: Für $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h|$ so klein, dass $x + th \in U$ für $t \in [0, 1]$ ist, gilt:

$$\exists \theta \in (0, 1) : f(x + h) = f(x) + f'(x + \theta h)h.$$

c) Für vektorwertige Funktionen $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kann der Mittelwertsatz komponentenweise angewandt werden; dann erhält man aber in jeder Komponente einen anderen „Mittelwert“ θ_j . Dies gilt auch schon für Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, denn hier ist $m = n = 2$.

Wie schon für in \mathbb{R} erklärte Funktionen gilt:

2.22 Satz. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

05/48:15
(26.04.21)

$$f' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = \text{const.}$$

Beweis. Zu zeigen ist nur „ \Rightarrow “. Seien $a, b \in U$; da U wegzusammenhängend und offen ist, gibt es $k \in \mathbb{N}$ und $k + 1$ Punkte $a_j \in U$, $a_0 = a$, $a_k = b$, so, dass für $j \in \{0, \dots, k-1\}$ die lineare Verbindung von a_j und a_{j+1} in U liegt. Der Mittelwertsatz zwischen a_j und a_{j+1} liefert: $f(a_j) = f(a_{j+1})$. Also ist $f(a) = f(b)$. \square

Wir haben bereits an einem Beispiel gesehen, dass die Existenz der partiellen Ableitungen allein noch nicht die Differenzierbarkeit impliziert. Es gilt jedoch:

05/1:01:00
(26.04.21)

2.23 Satz. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wenn die partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ in einer Umgebung $U(a)$ von a existieren und in a stetig sind, dann ist die Funktion f in a differenzierbar.

Beweis. Der Beweis kann komponentenweise geführt werden, daher können wir o.E. $m = 1$ annehmen.

Seien $a, h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $a \in U$ und $|h|$ so klein, dass die „Zwischenpunkte“:

$$\begin{aligned} a_0 &:= a \\ a_1 &:= a_0 + h_1 \cdot e_1 \\ a_2 &:= a_1 + h_2 \cdot e_2 \\ &\vdots \\ a_n &:= a_{n-1} + h_n \cdot e_n = a + h \end{aligned}$$

und deren lineare Verbindungen in U liegen; hierbei bezeichnet e_i den i -ten kanonischen Einheitsvektor.

Dann erhalten wir mit dem Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= (f(a_n) - f(a_{n-1})) + (f(a_{n-1}) - f(a_{n-2})) + \dots + (f(a_1) - f(a_0)) \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j f(c_j) \cdot h_j \quad \text{mit } c_j \in B(a, |h|). \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\left| f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^n (\partial_j f)(a) h_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n (\partial_j f(c_j) - \partial_j f(a)) h_j \right| \leq |h| \cdot \sum_{j=1}^n |\partial_j f(c_j) - \partial_j f(a)|; \end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0$ gilt: $c_j \rightarrow a$, also: $\sum_{j=1}^n |\partial_j f(c_j) - \partial_j f(a)| \rightarrow 0$. Somit existiert $f'(a)$, und es gilt

$$f'(a)h = \sum_{j=1}^n (\partial_j f)(a) h_j. \quad \square$$

2.24 Bemerkung. Aus obigem Beweis folgt insbesondere: Sind die partiellen Ableitungen $\partial_j f$ in einer Umgebung $U(a)$ von a stetig, so existiert f' in $U(a)$ und ist dort stetig.

05/1:22:30
(26.04.21)

c) Höhere Ableitungen

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung. Dann gibt es zwei Interpretationsmöglichkeiten der Ableitung von f :

$$f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad x \mapsto f'(x), \text{ oder}$$

$$f' : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, h) \mapsto f'(x, h) := f'(x)h$$

und f' ist linear in der zweiten Variablen.

Der $(n \cdot m)$ -dimensionale Vektorraum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ entspricht, bezogen auf Standardbasen, dem Raum der $(n \times m)$ -Matrizen und ist isomorph zum $\mathbb{R}^{n \cdot m}$.

Wir können nun analog der obigen Interpretationen höhere Ableitungen definieren (sei $f'' := (f')'$):

$$f'' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)),$$

$$f''' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))$$

usw., oder eben

$$f'' : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, h, k) \mapsto f''(x, h, k) = (f''(x)k)h,$$

wobei die Abbildung linear in den letzten beiden Variablen ist, usw.

Für die p -ten Ableitungen $f^{(p)}$ (einer p -mal differenzierbaren Funktion f) ergibt sich analog:

$$f^{(p)} : U \times (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, h^1, \dots, h^p) \mapsto f^{(p)}(x, h^1, \dots, h^p),$$

und diese Abbildung ist linear in den letzten p Variablen.

Für die erste Ableitung einer Funktion f hatten wir in Bezug auf die Standardbasis gezeigt:

$$f'(x, h) = \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(x) h_i = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x) =: (h^\top \nabla) f(x).$$

Dabei ist $\partial_i f(x) := (\partial_i f_1(x), \dots, \partial_i f_m(x))^\top$. Für die zweite Ableitung erhalten wir entsprechend:

$$\begin{aligned} f''(x, h, k) &= \sum_{j=1}^n \partial_j f'(x, h) k_j = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(x) h_i k_j \\ &= (k^\top \nabla) (h^\top \nabla) f(x). \end{aligned}$$

Induktiv ergibt sich (für $h = (h^1, \dots, h^p) \in (\mathbb{R}^n)^p$):

$$f^{(p)}(x, h) = ((h^1)^\top \nabla) \cdots ((h^p)^\top \nabla) f(x).$$

Mit der zweiten Ableitung f'' existieren also auch die zweiten partiellen Ableitungen, die definiert sind durch

$$\partial_j \partial_i f(x) = f''(x, e_i, e_j)$$

(e_i bezeichne den i -ten Einheitsvektor der Standardbasis).

06/21:30
(29.04.21)

2.25 Satz (Satz von Schwarz⁸). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ zweimal differenzierbar. Dann gilt für alle $x \in U$:

$$a) \forall h, k \in \mathbb{R}^n : f''(x, h, k) = f''(x, k, h).$$

$$b) \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x).$$

Beweis. Es genügt, die erste Behauptung zu beweisen; die zweite Aussage folgt mit $h := e_i$ und $k := e_j$ sofort aus dieser.

Wir zeigen:

$$(*) \lim_{s \searrow 0} \frac{1}{s^2} \{f(x + sh + sk) - f(x + sh) - f(x + sk) + f(x)\} = f''(x, h, k).$$

Die linke Seite der Gleichung (*) ist in h und k symmetrisch, so dass die Aussage a) sofort aus (*) folgt.

Beweis von (*):

Sei o.B.d.A. $m = 1$ (es genügt, die Gleichung komponentenweise zu beweisen).

Definiere

$$F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t) := f(x + th + k) - f(x + th).$$

F ist in $(0, 1)$ differenzierbar mit

$$F'(t) = f'(x + th + k, h) - f'(x + th, h).$$

Für

$$A(x, h, k) := F(1) - F(0) = f(x + h + k) - f(x + h) - f(x + k) + f(x)$$

ergibt sich mit dem Mittelwertsatz:

$$\exists \theta \in (0, 1) : A(x, h, k) = F'(\theta), \quad \text{also}$$

$$A(x, h, k)$$

$$= (f'(x + \theta h + k, h) - f'(x, h)) - (f'(x + \theta h, h) - f'(x, h))$$

$$= f''(x, h, \theta h + k) + R(x, h, \theta h + k)|\theta h + k| - f''(x, h, \theta h) - R(x, h, \theta h)|\theta h|$$

⁸Hermann Amandus Schwarz, 1843 - 1921

$$= f''(x, h, k) + R(x, h, \theta h + k) \cdot |\theta h + k| - R(x, h, \theta h)|\theta h|.$$

Ersetze nun für $s > 0$ h bzw. k durch $s \cdot h$ bzw. $s \cdot k$.

Dann folgt (wiederum aus der Linearität der 2. Ableitung in den letzten beiden Argumenten):

$$A(x, sh, sk) = s^2 \{ f''(x, h, k) + R(x, h, s(\theta h + k)) \cdot |\theta h + k| - R(x, h, s\theta h)|\theta h| \}.$$

(*) folgt nun aus

$$\lim_{s \searrow 0} \frac{A(x, sh, sk)}{s^2} = f''(x, h, k).$$

□

2.26 Bemerkungen. (i) Die Symmetrie von $f''(x, \cdot, \cdot)$ an einer festen Stelle $x \in U$ in den beiden letzten Argumenten gilt auch dann, wenn f in einer Umgebung von x einmal differenzierbar ist und die zweite Ableitung nur an der Stelle x existiert; dies folgt sofort aus dem Beweis des Satzes.

06/50:45
(29.04.21)

(ii) Wiederum (vgl. Bemerkung 2.24) folgt aus der Stetigkeit aller zweiten partiellen Ableitungen die Existenz von f'' , und f'' ist wieder stetig in x , falls die partiellen Ableitungen in einer Umgebung von x existieren und stetig sind.

Wie schon im \mathbb{R}^1 gilt auch für $U \subset \mathbb{R}^n$ die Taylorsche Formel:

2.27 Satz (von Taylor). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U, h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h|$ so klein, dass die Verbindungsstrecke von x nach $x + h$ in U liegt, und $f \in C^p(U, \mathbb{R})$, wobei $f^{(p)}$ differenzierbar sei.

06/55:40
(29.04.21)

Dann gilt:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x, h) + \cdots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(x, \underbrace{h, \dots, h}_{p\text{-mal}}) + R_p(x, h)$$

$$\text{mit } R_p(x, h) = \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x + \theta h, \underbrace{h, \dots, h}_{(p+1)\text{-mal}}) \quad \text{für ein } \theta \in (0, 1).$$

Beweis. Wir definieren die Strecke $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t) := x + th$ sowie

$$F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t) := f(\gamma(t)).$$

Dann existiert nach dem eindimensionalen Satz von Taylor ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \cdots + \frac{1}{p!} F^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!} F^{(p+1)}(\theta).$$

Mit Hilfe der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(\gamma(t), \gamma'(t)) = f'(\gamma(t), h), \\ F''(t) &= f''(\gamma(t), h, \gamma'(t)) = f''(\gamma(t), h, h), \\ &\vdots \\ F^{(p)}(t) &= f^{(p)}(\gamma(t), \underbrace{h, \dots, h}_{p\text{-mal}}) \quad \text{und} \\ F(1) &= f(x+h) \quad \text{und} \quad F(0) = f(x). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

06/1:10:00
(29.04.21)

2.28 Bemerkung. a) Für stetiges $f^{(p+1)}$ erhalten wir (mit demselben Argument) für das Restglied die Darstellung

$$R_p(x, h) = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p F^{(p+1)}(t) dt = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(x+th, \underbrace{h, \dots, h}_{(p+1)\text{-mal}}) dt.$$

b) Vektorwertige Funktionen f können wir komponentenweise mit der Taylor-Entwicklung darstellen; die Zwischenstelle in der Restglieddarstellung ist dann jedoch von Komponente zu Komponente verschieden ($\theta = \theta_j$, $j = 1, \dots, m$).

c) Der Begriff der Taylorreihe überträgt sich für beliebig oft differenzierbare Funktionen analog.

Wir führen nun noch eine bequeme Schreibweise für die Ableitung ein. Man beachte dazu, dass

$$f^{(k)}(x, \underbrace{h, \dots, h}_{k\text{-mal}}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f(x) h_{i_1} \dots h_{i_k}$$

gilt, wobei man wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen die n^k Summanden zum Teil zusammengefasst werden können. Dies ermöglicht eine Multiindex-Schreibweise:

06/1:17:00
(29.04.21)

2.29 Definition. Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$ definiert man

$$\begin{aligned} \partial^\alpha &:= \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \\ h^\alpha &:= h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}, \\ \alpha! &:= (\alpha_1!) \dots (\alpha_n!) \quad \text{und} \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Bei vorgegebenem α , $k := |\alpha|$, gibt es insgesamt $\frac{k!}{(\alpha_1!) \cdots (\alpha_n!)} = \frac{k!}{\alpha!}$ Summanden, die den Faktor

$$\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f(x) h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} = \partial^\alpha f(x) h^\alpha$$

enthalten. In dieser Schreibweise ist also

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(x, \underbrace{h, \dots, h}_{k\text{-mal}}) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha,$$

und die Taylorformel wird zu

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{k=0}^p \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R_p(x, h) \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^p \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R_p(x, h). \end{aligned}$$

Das Polynom

$$h \mapsto \sum_{k=0}^p \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha$$

heißt auch Taylor-Polynom von f an der Stelle x vom Grad p . Wie im Falle einer Veränderlichen lassen sich nun Kriterien für die Existenz lokaler Extrema angeben.

2.30 Definition. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann heißt $a \in U$ kritische Stelle von f , wenn $f'(a, h) = 0$ ($h \in \mathbb{R}^n$) gilt (d.h. wenn $\nabla f(a) = 0$).

07/00:55

(03.05.21)

2.31 Satz. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $a \in U$ eine lokale Extremalstelle von f . Dann gilt $\nabla f(a) = 0$, d.h. a ist eine kritische Stelle von f .

07/02:55

(03.05.21)

Beweis. Sei o.B.d.A. a eine lokale Maximalstelle, d.h.: $\forall x \in V : f(x) \leq f(a)$, wobei $V = V(a)$ eine Umgebung des Punktes a bezeichnet. Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B(a, \varepsilon) \subset V$. Für $h \in B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ definiere

$$F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t) := f(a + th).$$

Dann ist für alle $t \in [-1, 1] : F(t) \leq f(a) = F(0)$, also $0 = F'(0) = f'(a, h)$. Aus der Linearität der Ableitung in der zweiten Komponente folgt hieraus die Behauptung. \square

Im Folgenden wollen wir die Entscheidung, ob ein Extremum vorliegt, mit Hilfe der zweiten Ableitungen treffen. Dazu folgende Definition:

07/11:39
(03.05.21)

2.32 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann heißt

$$\text{Hess}_f(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j=1,\dots,n}$$

die Hessematrix⁹ von f an der Stelle $x \in U$.

Nach dem Satz von Schwarz 2.25 ist diese Matrix symmetrisch. Für eine skalarwertige Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir damit folgende Darstellung der Taylorformel:

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Hess}_f(x)h, h \rangle + R_3(x, h).$$

Die Analyse von Extremalstellen verwendet die Definitheit der Hessematrix. Wir fassen einige Ergebnisse aus der linearen Algebra zusammen. Sei $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von Q reell, und es existiert eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n aus Eigenvektoren von Q . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die Matrix Q ist positiv definit, d.h. es gilt $\langle Qh, h \rangle > 0$ ($h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).
- (ii) Es existiert ein $p > 0$ mit $\langle Qh, h \rangle \geq p|h|^2$ ($h \in \mathbb{R}^n$).
- (iii) Alle Eigenwerte von Q sind positiv.

Die analoge Aussage gilt für negativ definite Matrizen. Für positiv semidefinite Matrizen, d.h. es gilt nur $\langle Qh, h \rangle \geq 0$ ($h \in \mathbb{R}^n$), muss $p > 0$ in (ii) durch $p \geq 0$ ersetzt werden und „positiv“ in (iii) durch nicht-negativ. Wieder gilt die analoge Aussage für negativ semidefinite Matrizen. Die Matrix Q heißt indefinit, falls sie sowohl negative als auch positive Eigenwerte besitzt.

07/27:55
(03.05.21)

2.33 Satz. Seien $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $a \in U$.

- a) Falls f an der Stelle a ein lokales Maximum [Minimum] besitzt, so gilt $\nabla f(a) = 0$, und die Hessematrix $\text{Hess}_f(a)$ ist negativ [positiv] semidefinit.
- b) Es gelte $\nabla f(a) = 0$. Falls $\text{Hess}_f(a)$ negativ [positiv] definit ist, so ist a Maximalstelle [Minimalstelle] von f . Falls $\text{Hess}_f(a)$ indefinit ist, ist a keine Extremalstelle von f .

Beweis. a) Nach dem Satz von Taylor existiert zu $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h|$ hinreichend klein ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Hess}_f(a+\theta h)h, h \rangle \\ &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Hess}_f(a)h, h \rangle + r(a, h, \theta), \end{aligned} \quad (2-1)$$

wobei $r(a, h, \theta) := \frac{1}{2} \langle (\text{Hess}_f(a+\theta h) - \text{Hess}_f(a))h, h \rangle$.

⁹Ludwig Otto Hesse, 22.4.1811 – 4.8.1874

Sei nun a eine lokale Maximalstelle von f . Dann gilt $\nabla f(a) = 0$ nach Satz 2.31. Wir nehmen an, dass $\text{Hess}_f(a)$ einen positiven Eigenwert $\lambda > 0$ besitzt. Sei v ein zugehöriger Eigenvektor mit $|v| = 1$. Wählt man $h := \alpha v$ mit $\alpha > 0$ hinreichend klein, so erhält man $\langle \text{Hess}_f(a)h, h \rangle = \alpha^2 \langle \text{Hess}_f(a)v, v \rangle = \lambda \alpha^2 |v|^2 = \lambda |h|^2$.

Da $x \mapsto \text{Hess}_f(x)$ stetig ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|\text{Hess}_f(a + \theta h) - \text{Hess}_f(a)\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq \frac{\lambda}{2} \quad (|h| < \varepsilon, \theta \in (0, 1)).$$

Insbesondere folgt für $h = \alpha v$ mit $|\alpha| < \varepsilon$

$$|r(a, h, \theta)| \leq \frac{1}{2} \|\text{Hess}_f(a + \theta h) - \text{Hess}_f(a)\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} |h|^2 \leq \frac{\lambda}{4} |h|^2$$

und damit

$$f(a + h) \geq f(a) + \frac{\lambda}{2} |h|^2 - \frac{\lambda}{4} |h|^2 > f(a),$$

im Widerspruch zur Maximalität von $f(a)$. Also besitzt $\text{Hess}_f(a)$ keinen positiven Eigenwert und ist damit negativ semidefinit. Für Minimalstellen zeigt man die Aussage analog (oder betrachtet $-f$).

b) Es gelte $\nabla f(a) = 0$, und $\text{Hess}_f(a)$ sei negativ definit. Dann existiert ein $p > 0$ mit $\langle \text{Hess}_f(a)h, h \rangle \leq -p|h|^2$. Wie in a) wählt man $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $|h| < \varepsilon$ und $\theta \in (0, 1)$ die Abschätzung $|r(x, h, \theta)| \leq \frac{p}{4}|h|^2$ gilt. Damit erhält man aus (2-1)

$$f(a + h) \leq f(a) - \frac{p}{2} |h|^2 + \frac{p}{4} |h|^2 < f(a) \quad (h \in \mathbb{R}^n, |h| < \varepsilon).$$

Also besitzt f an der Stelle a ein (isoliertes) lokales Maximum. Wieder zeigt man die Aussage für ein Minimum analog.

Falls $\text{Hess}_f(a)$ indefinit ist, sieht man ähnlich die Existenz von $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$ (die man als Vielfache von entsprechenden Eigenvektoren wählen kann) mit $f(a + h_1) < f(a)$ und $f(a + h_2) > f(a)$, d.h. a ist keine Extremalstelle. \square

Falls $\text{Hess}_f(a)$ indefinit ist, heißt a auch ein Sattelpunkt der Funktion f .

2.34 Beispiel. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$, siehe Abbildung 6. Dann gilt

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3y - 3x^2 \\ 3x - 3y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}.$$

Die kritischen Stellen von f sind die Lösungen des Gleichungssystems $3y - 3x^2 = 0$, $3x - 3y^2 = 0$, also die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Die Eigenwerte von $\text{Hess}_f(0, 0)$ sind 3 und -3 , also liegt hier ein Sattelpunkt vor. Die Eigenwerte von $\text{Hess}_f(1, 1)$ sind -9 und -3 , also ist $(1, 1)$ eine lokale Maximalstelle.

07/1:09:10
(03.05.21)

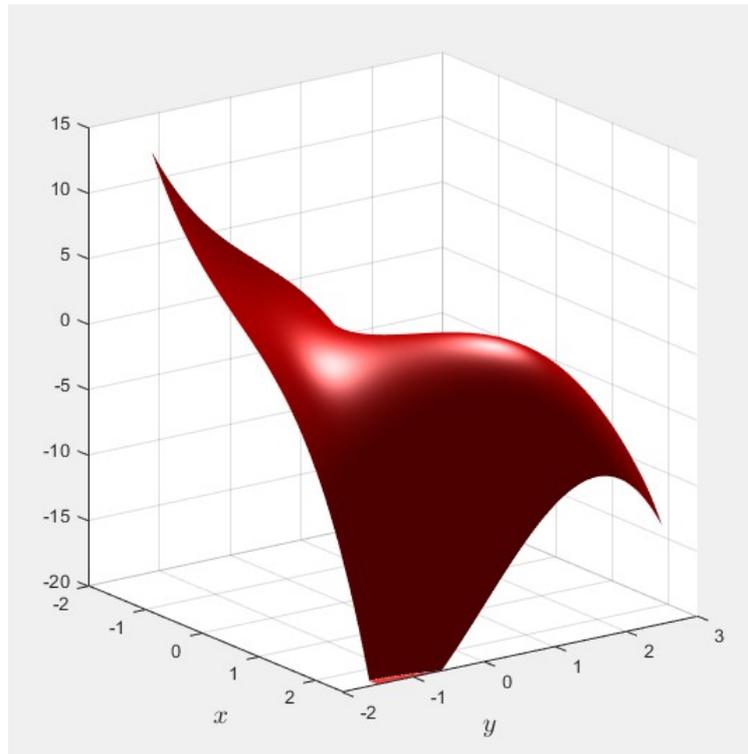


Abbildung 6: Die Funktion aus Beispiel 2.34.

08/02:59
(06.05.21)

2.35 Beispiel (Methode der kleinsten Fehlerquadrate, lineare Regression). Im \mathbb{R}^2 seien $n \geq 2$ Punkte $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, gegeben, wobei mindestens zwei der x_i sich unterscheiden mögen. Gesucht ist eine Ausgleichsgerade g ,

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := \alpha x + \beta,$$

mit der Eigenschaft, dass

$$\sum_{i=1}^n (g(x_i) - y_i)^2 =: \sum_{i=1}^n r_i^2 =: |r|^2 \text{ mit } r := (r_1, \dots, r_n)^\top$$

minimal wird („kleinste Fehlerquadrate“). Hierbei wurde $r := Az - y$ definiert, wobei $z := (\alpha, \beta)^\top$, $y := (y_1, \dots, y_n)^\top$ und

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto f(z) := |r|^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta - y_i)^2.$$

Da $|r|^2 = (Az - y)^\top (Az - y) = z^\top A^\top A z - 2z^\top A^\top y + y^\top y$ für $A := \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ ist,

ergibt sich für die Ableitungen:

$$\nabla f(z) = 2A^\top A z - 2A^\top y \text{ und } \text{Hess}_f(z) = 2A^\top A.$$

Für eine kritische Stelle a muss gelten:

$$A^\top Aa = A^\top y \quad (\text{Normalengleichung}).$$

Man sieht sofort aus $\langle A^\top Ah, h \rangle = |Ah|^2$, dass die Matrix $A^\top A$ positiv definit ist, falls $\ker A = \{0\}$, d.h. falls der Rang der Matrix A maximal ist. Dies ist hier der Fall, da sich zwei der x_i voneinander unterscheiden.

Als letztes Beispiel besprechen wir die konvexen Funktionen.

2.36 Definition. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn mit x_1 und x_2 auch die Verbindungsstrecke $x_1 + t(x_2 - x_1)$, $t \in [0, 1]$, zu M gehört.

08/20:00

(06.05.21)

Beliebige Durchschnitte konvexer Mengen sind offenbar konvex.

2.37 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f konvex, falls gilt:

08/21:30

(06.05.21)

$$\forall x_1, x_2 \in U, x_1 \neq x_2, \forall t \in (0, 1) : f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Gilt sogar „<“, so heißt f „streng konvex“.

Die Funktion f heißt (streng) konkav, falls $-f$ (streng) konvex ist.

2.38 Bemerkung. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Man kann zeigen, dass dann gilt: Wenn $\text{Hess}_f(x)$ für alle $x \in U$ positiv definit ist, so ist f in U streng konvex. Wenn $\text{Hess}_f(x)$ für alle $x \in U$ positiv semidefinit ist, so ist f in U konvex.

08/27:50

(06.05.21)

d) Extrema unter Nebenbedingungen

Ebenfalls häufig in der Praxis auftretende Probleme sind die Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen. Hierbei wird das Extremum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unter m ($m < n$) Nebenbedingungen

$$g_1(x_0) = \dots = g_m(x_0) = 0$$

gesucht, wobei $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls gegebene Funktionen sind.

2.39 Beispiel. Gesucht sind die Extremalstellen der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^2 + x_2^2$ unter der Nebenbedingung $x_1 + x_2 = 1$. Hier ist $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1 + x_2 - 1$. Die Funktion f hat nur im Punkt $(0, 0)$ eine Extremalstelle (ein Minimum), aber die Nebenbedingung ist nicht erfüllt, da $g(0, 0) = -1 \neq 0$ ist.

08/33:19

(06.05.21)

Man kann die Nebenbedingung $x_1 + x_2 = 1$ in diesem Fall verwenden, um eine der beiden Variablen zu eliminieren. Es folgt $x_1 = 1 - x_2$, und wir erhalten die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_2 \mapsto h(x_2) := f(1 - x_2, x_2) = (1 - x_2)^2 + x_2^2$. Die Funktion h hat die einzige kritische Stelle $x_2 = \frac{1}{2}$ und an dieser Stelle ein Minimum. Somit ist $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ die Lösung unserer Extremwertaufgabe.

08/40:50
(06.05.21)

2.40 Bemerkung. Im Allgemeinen ist eine Elimination - wie im obigen Beispiel vorgenommen - jedoch zu aufwändig. Man kann das Minimum aber auch mit einem alternativen Ansatz ohne explizite Auflösung berechnen.

Gegeben seien $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist das Minimum von $f(x)$ unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$. Dabei sei $\nabla g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, o.E. sei $\partial_1 g(x) \neq 0$.

Wir nehmen an, dass man $g(x) = 0$ nach x_1 auflösen kann, d.h. es existiert eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \varphi(x_2)$. Für spätere Zwecke setzen wir hier $z := x_2$, d.h. $x = (\varphi(z), z)$. Dann gilt

$$g(\varphi(z), z) = 0 \quad (z \in U). \quad (2-2)$$

Falls f an der Stelle $x_0 = (\varphi(z_0), z_0)$ ein Minimum besitzt, besitzt die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto f(\varphi(z), z)$ an der Stelle z_0 ein Minimum, d.h. es gilt $h'(z_0) = 0$. Mit der Kettenregel erhält man

$$\partial_1 f(x_0) \varphi'(z_0) + \partial_2 f(x_0) = 0. \quad (2-3)$$

Andererseits folgt durch Ableiten von (2-2) nach z :

$$\partial_1 g(x_0) \varphi'(z_0) + \partial_2 g(x_0) = 0. \quad (2-4)$$

Wegen $\partial_1 g(x_0) \neq 0$ kann man (2-4) nach $\varphi'(z_0)$ auflösen:

$$\varphi'(z_0) = -(\partial_1 g(x_0))^{-1} \partial_2 g(x_0).$$

Eingesetzt in (2-3) erhält man

$$\partial_2 f(x_0) - \partial_1 f(x_0) (\partial_1 g(x_0))^{-1} \partial_2 g(x_0) = 0.$$

Wir definieren

$$\lambda_0 := -\partial_1 f(x_0) (\partial_1 g(x_0))^{-1}$$

und erhalten

$$\partial_2 f(x_0) + \lambda_0 \partial_2 g(x_0) = 0. \quad (2-5)$$

Andererseits gilt nach Definition von λ_0 auch

$$\partial_1 f(x_0) + \lambda_0 \partial_1 g(x_0) = 0. \quad (2-6)$$

Aus (2-5) und (2-6) erhält man

$$\nabla f(x_0) + \lambda_0 \nabla g(x_0) = 0. \quad (2-7)$$

Andererseits gilt auch $g(x_0) = 0$. Definiert man also die Funktion

$$F: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, \lambda) \mapsto f(x) + \lambda g(x),$$

so erhält man:

Falls x_0 eine lokale Extremalstelle der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ ist, so existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla F(x_0, \lambda_0) = 0 \quad (2-8)$$

gilt. Dieses λ_0 heißt Lagrange-Multiplikator. Ausgeschrieben bedeutet (2-8):

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0) + \lambda_0 \nabla g(x_0) &= 0, \\ g(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

2.41 Beispiel. Wir wollen mit obigem Ansatz die Extremwertaufgabe unter Nebenbedingung lösen, die im Beispiel 2.39 bereits behandelt wurde. Es ist

08/1:09:10
(06.05.21)

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, \lambda) \mapsto F(x, \lambda) := x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1),$$

also

$$\nabla F(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x_1 + \lambda \\ 2x_2 + \lambda \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

$\nabla F(x_0, \lambda_0) = 0$ liefert: $x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$, $\lambda_0 = -1$.

Im allgemeinen Fall betrachtet man $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m < n$, d.h. man hat m Nebenbedingungen $g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0$.

2.42 Satz. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m < n$ stetig differenzierbare Funktionen. Der Rang der Matrix $g'(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei für alle $x \in U$ maximal, also gleich m . Sei

08/1:40:42
(06.05.21)

$$M := \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0\}.$$

Falls x_0 eine lokale Extremalstelle von $f(x)$ unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ (d.h. von $f|_M$) ist, so existiert ein Lagrange-Multiplikator $\lambda_0 = (\lambda_{0,1}, \dots, \lambda_{0,m}) \in \mathbb{R}^m$ so, dass für die Funktion

$$F: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, (x, \lambda) \mapsto F(x, \lambda) := f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)$$

gilt

$$\nabla F(x_0, \lambda_0) = 0.$$

Insbesondere gilt

$$\nabla f(x_0) + \sum_{j=1}^m \lambda_{0,j} \nabla g_j(x_0) = 0.$$

Wir verwenden im Beweis eine Aussage über die Auflösbarkeit der Gleichung $g(x) = 0$, welche später bewiesen werden wird (Satz über implizite Funktionen).

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu den Ausführungen in Bemerkung 2.40. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert (nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten) eine Funktion $\varphi: \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ so, dass gilt: $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = (\varphi(z), z)$. Jetzt kann der Beweis aus Bemerkung 2.40 wörtlich übernommen werden, wobei alle auftretenden Größen Matrizen sind. Dabei ist $\partial_1 f(x_0)$ bzw. $\partial_2 f(x_0)$ zu interpretieren als

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} f(x_0) \right) \in \mathbb{R}^{1 \times m}, \\ \partial_2 f(x_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{m+1}} f(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_0) \right) \in \mathbb{R}^{1 \times (n-m)}. \end{aligned}$$

Analog für $\partial_1 g(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\partial_2 g(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$. Der Lagrange-Multiplikator λ_0 ist wie oben gegeben durch

$$\lambda_0 := -\partial_1 f(x_0) (\partial_1 g(x_0))^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times m}.$$

□

09/03:50
(10.05.21)

2.43 Bemerkung. Eine hinreichende Bedingung dafür, dass $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Extremalstelle von $f|_M$ ist, ist die Definitheit der Hessematrix $\text{Hess}_F(x_0, \lambda_0)$, hierbei seien F und λ_0 wie in der Formulierung des Satzes definiert. Denn dann gilt z.B.

$$F(x_0, \lambda_0) \leq F(x, \lambda_0) \quad (x \in U),$$

das bedeutet aber insbesondere:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (x \in M).$$

An dieser Argumentation sieht man, dass bereits die Definitheit der „linken oberen Ecke“, d.h. der Matrix $(\partial_i \partial_j F(x_0, \lambda_0))_{i,j=1}^n$ genügt

Abschließend wollen wir mit Hilfe des Satzes 2.42 quadratische Formen untersuchen.

2.44 Beispiel. Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine symmetrische Matrix. Wir betrachten die quadratische Form

09/08:30
(10.05.21)

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} x_j.$$

Wir suchen die Extremalstellen von f auf der Sphäre $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Unsere Nebenbedingung wird somit bestimmt durch

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) := 1 - |x|^2.$$

Da $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt ist, nimmt die stetige Funktion f das Maximum auf S^{n-1} an, d.h. es gibt ein $x_0 \in S^{n-1}$ mit $f(x_0) = \max_{x \in S^{n-1}} f(x)$. Nach Satz 2.42 existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x_0) + \lambda_0 \nabla g(x_0) = 0$. Wegen $\nabla f(x) = 2Ax$ und $\nabla g(x) = -2x$ folgt

$$Ax_0 - \lambda_0 x_0 = 0,$$

d.h. λ_0 ist ein Eigenwert von A . Der Funktionswert ist dabei $f(x_0) = \langle Ax_0, x_0 \rangle = \lambda_0 \langle x_0, x_0 \rangle = \lambda_0$.

Aus der Theorie symmetrischer Matrizen ist bekannt, dass A genau n reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ besitzt (inklusive Vielfachheit). Damit ist das Maximum von $f(x)$ auf S^{n-1} gleich dem größten Eigenwert von A (und das Minimum gleich dem kleinsten Eigenwert).

2.45 Beispiel (Portfolio-Optimierung). Ein Anleger habe die Wahl, sein Kapital in einer festverzinslichen Anleihe mit 2% Zinssatz oder in Aktien zu investieren. Für die Aktie seien nach einem Jahr zwei Zustände möglich: Boom mit 10% Ertrag und Rezession mit 5% Verlust. Beide Zustände seien gleichwahrscheinlich. Das heutige Vermögen sei 10 (Rechnungseinheiten), der Besitz eines Kapitals der Größe z bringe dem Anleger einen Nutzen von $\ln z$ (Nutzenfunktion, Modell!).

09/21:55
(10.05.21)

Wieviel Kapital soll der Anleger in Aktien investieren? Ansatz:

$$\begin{aligned} x_1 &:= \text{in festverzinsliche Anleihe investiert,} \\ x_2 &:= \text{in Aktien investiert,} \\ x &:= (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Nutzen:

$$\begin{aligned} \text{Boom:} & \quad \ln((1+r)x_1 + ux_2), \\ \text{Rezession:} & \quad \ln((1+r)x_1 + dx_2) \end{aligned}$$

mit

$$r := 0,02, \quad u := 1,1, \quad d := 0,95.$$

Durchschnittlich zu erwartender Nutzen:

$$f(x) := \frac{1}{2} \ln((1+r)x_1 + ux_2) + \frac{1}{2} \ln((1+r)x_1 + dx_2).$$

Nebenbedingung, mit $K := 10$:

$$g(x) := x_1 + x_2 - K = 0.$$

Mit

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+r}{(1+r)x_1 + ux_2} + \frac{1+r}{(1+r)x_1 + dx_2}, \frac{u}{(1+r)x_1 + ux_2} + \frac{d}{(1+r)x_1 + dx_2} \right),$$

$$\nabla g(x) = (1, 1)$$

liefert der Lagrange-Ansatz

$$\frac{1+r}{(1+r)x_1 + ux_2} + \frac{1+r}{(1+r)x_1 + dx_2} = \frac{u}{(1+r)x_1 + ux_2} + \frac{d}{(1+r)x_1 + dx_2}$$

und daraus

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$$

mit

$$\alpha_1 := \frac{1+r}{1+r-u} + \frac{1+r}{1+r-d}, \quad \alpha_2 := \frac{u}{1+r-u} + \frac{d}{1+r-d}.$$

Die Nebenbedingung liefert

$$x_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} K, \quad x_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} K,$$

und damit

$$x_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{u}{1+r-u} + \frac{d}{1+r-d} \right) K.$$

Mit eingesetzten Zahlen, auf zwei Stellen gerundet: $x_1 = 0,89$, $x_2 = 9,11$. (Für eine Maximaleigenschaft wäre natürlich noch die zweite Ableitung zu untersuchen.)

3. Kurven und Flächen

3.1 Worum geht's? Eine Kurve ist eine Äquivalenzklasse von (glatten) Wegen im Raum \mathbb{R}^n . Wesentliche Begriffe sind hier die Weglänge, Tangentialvektor und Krümmung. Wir werden vor allem Kurven im zwei- und dreidimensionalen Raum genauer betrachten. Eine Fläche, etwa eine zweidimensionale Fläche in \mathbb{R}^3 , kann analog zu Kurven durch eine Parametrisierung beschrieben werden. Beispiele von Flächen sind Rotationsflächen oder die stereographische Projektion der Ebene auf die Kugeloberfläche.

09/48:50

(10.05.21)

a) Weglängen

Wir haben schon in einigen Beispielen Wege, d.h. stetige Abbildungen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ kennengelernt. Wege können einen recht willkürlichen Verlauf nehmen, z.B. können sie im \mathbb{R}^2 eine Dreiecksfläche ganz ausfüllen (Peanokurven u.a.). Wir betrachten nun glattere als stetige Wege.

3.2 Definition. a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ein Weg ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *glatt*, falls γ stetig differenzierbar ist mit $\gamma'(s) \neq 0$ für alle $s \in (a, b)$. Der Weg γ heißt *stückweise glatt*, falls er aus endlich vielen glatten Wegen zusammengesetzt ist.

09/51:30

(10.05.21)

b) Für glatte Wege (oder die glatten Teilstücke eines stückweise glatten Weges) heißt $\gamma'(s)$ der Geschwindigkeitsvektor an der Stelle $\gamma(s)$ und $t(s) = \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}$ der Tangenteneinheitsvektor an der Stelle $\gamma(s)$.

3.3 Beispiel. Sei $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t)$ definiert durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} (-t^2, 0) & \text{für } -1 \leq t \leq 0 \\ (0, t^2) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(siehe Abbildung 7). Dann ist γ stetig differenzierbar mit

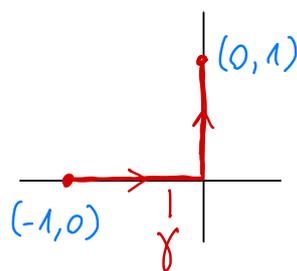
$$\gamma'(t) = \begin{cases} (-2t, 0) & \text{für } -1 \leq t \leq 0 \\ (0, 2t) & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

aber γ ist nicht glatt, da $\gamma'(0) = 0$ ist; γ ist jedoch stückweise glatt, da $\gamma|_{[-1,0]}$ und $\gamma|_{[0,1]}$ glatt sind.

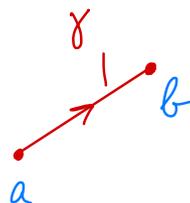
Für stückweise glatte Wege lässt sich die euklidische Länge erklären:

09/59:55

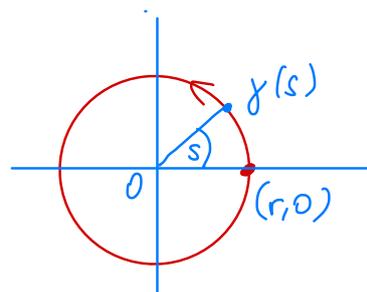
(10.05.21)



Beispiel 3.3



Beispiel 3.5 a)



Beispiel 3.5 b)

Abbildung 7: Die Kurven aus den Beispielen 3.3 und 3.5

09/1:04:30
(10.05.21)

3.4 Definition. Für einen stückweise glatten Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die Länge $L(\gamma)$ des Weges γ erklärt durch

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(s)| \, ds.$$

09/1:06:10
(10.05.21)

3.5 Beispiele. a) Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \mapsto \gamma(s) := a + s(b - a)$ die Strecke von $a \in \mathbb{R}^n$ nach $b \in \mathbb{R}^n$, siehe Abbildung 7. Dann ist

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(s)| \, ds = \int_0^1 |b - a| \, ds = |b - a|.$$

Dies entspricht dem euklidischen Abstand der Punkte a und b .

b) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \gamma(s) := \begin{pmatrix} r \cos s \\ r \sin s \end{pmatrix}$ die Kreislinie des Kreises mit Radius $r > 0$. Dann ist

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(s)| \, ds = \int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} -r \sin s \\ r \cos s \end{pmatrix} \right| \, ds = \int_0^{2\pi} r \, ds = 2\pi r,$$

die oben definierte Länge ergibt also die korrekte Formel für den Kreisumfang.

09/1:16:05
(10.05.21)

3.6 Beispiel. Der Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \gamma(s) := \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ wird in $C([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, d.h. bezüglich der Supremumsnorm

$$\|\gamma\|_\infty := \sup_{s \in [0, 1]} |\gamma(s)|,$$

approximiert durch die Sägezahnkurven $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \gamma_n(s) := \begin{pmatrix} s \\ a_n(s) \end{pmatrix}$ mit

$$a_n(s) := \begin{cases} s & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2^n} \\ 2 \cdot \frac{1}{2^n} - s & \text{für } \frac{1}{2^n} \leq s \leq 2 \cdot \frac{1}{2^n} \\ \vdots & \vdots \\ (2^n - 1) \cdot \frac{1}{2^n} - s & \text{für } \frac{2^n - 1}{2^n} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

siehe Abbildung 8. Dann ist $L(\gamma) = 1$ und $L(\gamma_n) = \sqrt{2}$, also gilt $L(\gamma_n) \not\rightarrow L(\gamma)$. Für die Stetigkeit der Länge genügt die Norm $\|\cdot\|_\infty$ also nicht. Direkt aus der Definition der Länge folgt aber: Falls $\|\gamma - \gamma_n\|_{C^1([0,1];\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), so folgt $L(\gamma_n) \rightarrow L(\gamma)$. Dabei ist

$$\|\gamma\|_{C^1([0,1];\mathbb{R}^2)} := \|\gamma\|_\infty + \|\gamma'\|_\infty.$$

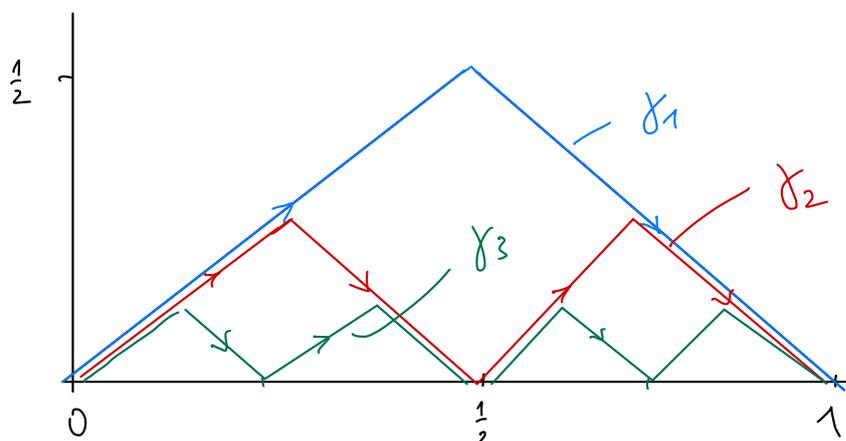


Abbildung 8: Die Sägezahnkurven aus Beispiel 3.6

Viele Eigenschaften von Wegen hängen nicht von der konkreten Wahl der Parametrisierung ab. Man definiert daher:

3.7 Definition. a) Zwei stückweise glatte Wege $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn eine stetig differenzierbare und bijektive Funktion $\varphi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ mit $\varphi'(s) > 0$ ($s \in [a_2, b_2]$) existiert, so dass

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(\varphi(s)) \quad (s \in [a_2, b_2]).$$

Ein solches φ heißt eine Parametertransformation.

b) Die durch die Äquivalenzrelation in a) definierten Äquivalenzklassen heißen orientierte stückweise glatte Kurve (die Orientierung wird festgelegt durch das Vorzeichen der Ableitung der Parametertransformation). Häufig schreibt man $\Gamma = [\gamma]$ für die durch den Repräsentanten γ festgelegte Äquivalenzklasse.

10/01:57
(17.05.21)

10/08:45
(17.05.21)

3.8 Bemerkung. a) Die Länge eines stückweise glatten Weges γ ist unabhängig von der Parametrisierung des Weges in folgendem Sinne: Seien γ_1 und γ_2 zwei äquivalente Wege, und sei $\varphi: [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ eine zugehörige Parametertransformation, d.h. es gelte $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Dann folgt mit der Substitution $t = \varphi(s)$

$$\begin{aligned} L(\gamma_2) &= \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_2'(s)| \, ds = \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_1'(\varphi(s))| \cdot |\varphi'(s)| \, ds \\ &= \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_1'(\varphi(s))| \cdot \varphi'(s) \, ds = \int_{a_1}^{b_1} |\gamma_1'(t)| \, dt = L(\gamma_1). \end{aligned}$$

Damit ist die Länge einer Kurve wohldefiniert als die Länge eines (beliebigen) Repräsentanten der Äquivalenzklasse.

b) Unter den möglichen Parametrisierungen einer Kurve ist diejenige besonders interessant, für welche $|\gamma'(s)| = 1$ für alle s gilt. Eine solche Parametrisierung heißt ein nach Bogenlänge parametrisierter Weg.

Sei dazu $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung der Kurve Γ . Man definiert die Bogenlänge

$$\psi: [a, b] \rightarrow [0, L], \quad \psi(s) := \int_a^s |\gamma_1'(t)| \, dt.$$

Dann gilt $\psi(a) = 0$ und $\psi(b) = L := L(\gamma_1)$, und ψ ist streng monoton steigend und daher bijektiv. Man definiert die Parametertransformation $\varphi: [0, L] \rightarrow [a, b]$, $\varphi := \psi^{-1}$ sowie die Umparametrisierung $\gamma_2 := \gamma_1 \circ \varphi$. Wegen

$$\varphi'(s) = \frac{1}{|\gamma_1'(\varphi(s))|} \quad (s \in [0, L])$$

erhält man

$$|\gamma_2'(s)| = |\gamma_1'(\varphi(s))\varphi'(s)| = 1 \quad (s \in [0, L]).$$

10/24:50
(17.05.21)

3.9 Beispiel. Für $a, b > 0$ parametrisiert der Weg

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto \gamma(s) := \begin{pmatrix} a \cos s \\ b \sin s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

eine Ellipse, siehe Abbildung 9. Es gilt

$$|\gamma'(s)| = \left| \begin{pmatrix} -a \sin s \\ b \cos s \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s}.$$

Somit ist die Bogenlänge gegeben durch

$$\sigma = \psi(s) = \int_0^s \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt.$$

Dies ist ein elliptisches Integral und im Allgemeinen nicht elementar berechenbar.

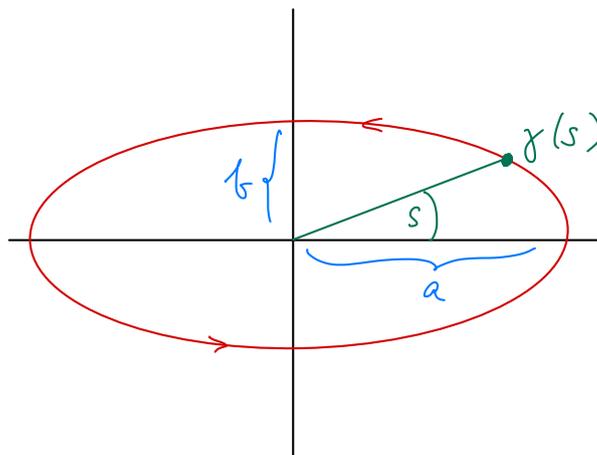


Abbildung 9: Die Ellipse aus Beispiel 3.9

Sei nun $a = b =: r$. Dann erhalten wir einen Kreis mit Radius r , und es folgt $\psi(s) = r \cdot s$ mit Umkehrfunktion $\varphi(\sigma) = \frac{\sigma}{r}$. Die Parametrisierung nach Bogenlänge hat in diesem Fall also die Form

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \sigma \mapsto \tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(\sigma/r) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\sigma/r) \\ \sin(\sigma/r) \end{pmatrix}.$$

3.10 Definition. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal differenzierbar mit $|\gamma'(s)| = 1$ ($s \in [a, b]$) (d.h. der Geschwindigkeitsvektor ist gleich dem Tangenteneinheitsvektor). Dann heißt $\gamma''(s)$ der Krümmungsvektor oder Beschleunigungsvektor zu γ und $\kappa(s) := |\gamma''(s)|$ heißt (skalare) Krümmung von γ an der Stelle $\gamma(s)$. 10/34:25
(17.05.21)

Sei $s \in [a, b]$ mit $\gamma''(s) \neq 0$. Dann heißt die von $\gamma'(s)$ und $\gamma''(s)$ aufgespannte Ebene die Schmiegebene zu γ an der Stelle $\gamma(s)$.

Man beachte bei dieser Definition, dass Tangenten- und Krümmungsvektor senkrecht aufeinander stehen, wie die Differentiation des Ausdrucks $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$ beweist. Ist $\gamma''(s) \neq 0$, so sind $\gamma'(s)$ und $\gamma''(s)$ somit linear unabhängig.

3.11 Beispiele. a) Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $|b| = 1$, $L > 0$, und sei $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \mapsto \gamma(s) := a + sb$ eine Parametrisierung der Strecke von a nach $a + Lb$. Dann ist $\kappa(s) := |\gamma''(s)| = 0$ für alle $s \in [0, L]$, d.h. die Strecke besitzt überall Krümmung 0. 10/47:20
(17.05.21)

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ orthonormal und $m \in \mathbb{R}^n$. Definiere $\gamma : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \mapsto \gamma(s) := m + r(a \cos \frac{s}{r} + b \sin \frac{s}{r})$ (γ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt m und Radius r in der durch a und b aufgespannten Ebene). Dann gilt

$$|\gamma'(s)| = \sqrt{|a|^2 \cdot \sin^2(s/r) + |b|^2 \cos^2(s/r)} = 1 \text{ und}$$

$$\gamma''(s) = -\frac{1}{r} \left(a \cos \frac{s}{r} + b \sin \frac{s}{r} \right).$$

Damit folgt $\kappa(s) = \frac{1}{r}$, d.h. der Kreis mit Radius r besitzt an jeder Stelle die Krümmung $\frac{1}{r}$.

c) Beliebigen zweimal differenzierbaren Kurven γ kann man einen Krümmungskreis zuordnen, der die Kurven von zweiter Ordnung berührt.

b) Kurven in der Ebene und im Raum

Wir behandeln zunächst ebene Kurven: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \gamma(s) := \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ eine ebene Kurve mit $|\gamma'(s)| = 1$ für $s \in [a, b]$. Dann ist

$$t(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$$

die Tangente, und es sei

$$n(s) := \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix}$$

die Normale oder der Normaleneinheitsvektor, siehe Abbildung 10.

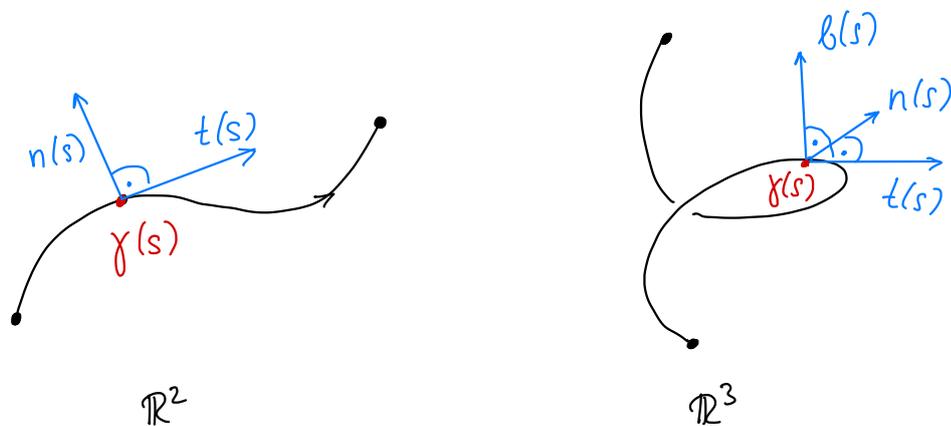


Abbildung 10: Kurven im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

Tangente und Normale stehen senkrecht aufeinander für alle $s \in [a, b]$ und haben Länge 1, bilden also eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 . Es existieren somit Abbildungen $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$t'(s) = \alpha(s)t(s) + \beta(s)n(s)$$

$$\text{und } n'(s) = \delta(s)t(s) + \varepsilon(s)n(s).$$

Diese Funktionen lassen sich leicht bestimmen:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \langle t(s), t'(s) \rangle = 0, \text{ da } |t(s)| = 1, \\ \beta(s) &= \langle t'(s), n(s) \rangle = -\langle n'(s), t(s) \rangle = -\delta(s), \text{ da } \langle n(s), t(s) \rangle = 0 \text{ und} \\ \varepsilon(s) &= \langle n'(s), n(s) \rangle = 0, \text{ da } |n(s)| = 1. \end{aligned}$$

Man erhält die Frenetsche Gleichungen¹⁰ im \mathbb{R}^2 :

$$\begin{pmatrix} t'(s) \\ n'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta(s) \\ -\beta(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \end{pmatrix} \quad (s \in [a, b]).$$

Wegen $t'(s) = \beta(s)n(s)$ folgt auch $|\beta(s)| = |t'(s)| = |\gamma''(s)| = \kappa(s)$.

Wir betrachten nun Raumkurven

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto \gamma(s) := \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$$

mit $|\gamma'(s)| = 1$. Wiederum bezeichnen

$$\begin{aligned} t(s) &:= \gamma'(s) \text{ die Tangente und} \\ n(s) &:= \frac{t'(s)}{|t'(s)|} = \frac{t'(s)}{\kappa(s)} \text{ die Normale.} \end{aligned}$$

Wieder sind die Vektoren $t(s)$ und $n(s)$ nach Konstruktion orthonormal. Wir ergänzen sie zu einer Orthonormalbasis $\{t(s), n(s), b(s)\}$ des \mathbb{R}^3 , wobei wir $\det(t(s), n(s), b(s)) = 1$ verlangen (siehe Abbildung 10). Der Vektor $b(s)$ heißt Binormale und ist gegeben durch

$$b(s) := t(s) \times n(s).$$

Hierbei ist für zwei Vektoren $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$, $b = (b_1, b_2, b_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ das Kreuzprodukt $a \times b$ erklärt durch:

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet direkt nach, dass für drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\langle a, b \times c \rangle = \langle a \times b, c \rangle = \det(a, b, c).$$

Weiter ist $a \times b = 0$, falls a und b linear abhängig sind.

¹⁰Jean Frédéric Frenet, 7.2.1816 – 12.6.1900

Wie zuvor kann man nun die Vektoren $t'(s)$, $n'(s)$ und $b'(s)$ bzgl. der Basis $\{t(s), n(s), b(s)\}$ darstellen, und wir erhalten durch ähnliche Überlegungen wie für ebene Kurven die Frenetschen Gleichungen im \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} t'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}.$$

Hierbei heißt

$$\tau(s) := \langle n'(s), b(s) \rangle = \langle -b'(s), n(s) \rangle$$

die Windung (oder Torsion) von γ . Es gilt (zur kürzeren Schreibweise verzichten wir auf das Ausschreiben der Variablen s):

$$\begin{aligned} \tau &= \langle b, n' \rangle = \langle t \times n, n' \rangle = \langle t, n \times n' \rangle \\ &= \langle t, \frac{t'}{\kappa} \times (\frac{t''}{\kappa} + (\frac{1}{\kappa})' t') \rangle = \frac{1}{\kappa^2} \langle t, t' \times t'' \rangle \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \langle \gamma', \gamma'' \times \gamma''' \rangle = \frac{1}{\kappa^2} \det(\gamma', \gamma'', \gamma'''). \end{aligned}$$

11/33:16
(20.05.21)

3.12 Beispiel. Betrachten wir die Spirale

$$\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos ks \\ r \cdot \sin ks \\ c \cdot ks \end{pmatrix}$$

mit $k := \frac{1}{\sqrt{r^2+c^2}}$, siehe Abbildung 11. Dann sind

$$\gamma'(s) = k \begin{pmatrix} -r \sin ks \\ r \cos ks \\ c \end{pmatrix}, \quad \gamma''(s) = k^2 \begin{pmatrix} -r \cos ks \\ -r \sin ks \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma'''(s) = k^3 \begin{pmatrix} r \sin ks \\ -r \cos ks \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} |\gamma'(s)| &= 1, \\ \kappa(s) &= |\gamma''(s)| = k^2 \cdot r = \frac{r}{r^2+c^2} \text{ und} \\ \tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)} \det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)) = \frac{c}{r^2+c^2}. \end{aligned}$$

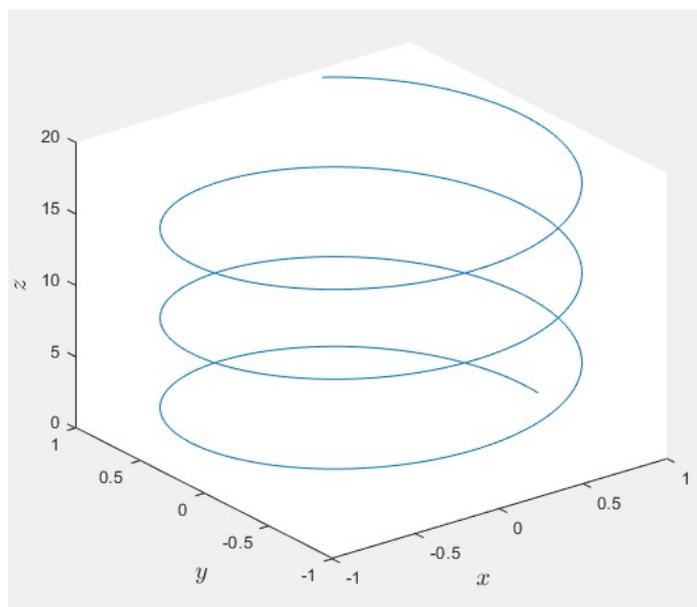


Abbildung 11: Die Spirale aus Beispiel 3.12.

c) m -dimensionale Flächen im \mathbb{R}^n

3.13 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $m < n$. Die Abbildung $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und $\gamma' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ habe für alle $u \in U$ den Rang m . Dann heißt γ (Parametrisierung oder) Parameterdarstellung einer m -dimensionalen Fläche in \mathbb{R}^n (m -Fläche).

11/46:13
(20.05.21)

Im Falle $m = 1$, also für eine 1-Fläche, erhält man gerade einen glatten Weg. Aufgrund der Rangbedingung ist für jedes feste $u \in U$ die Abbildung

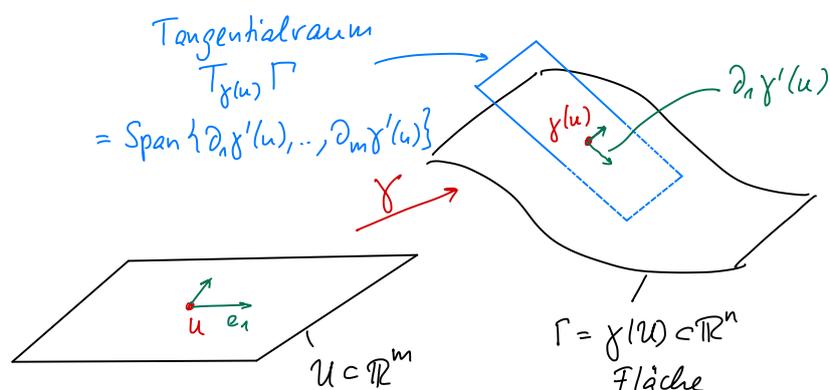
$$\tau : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, h \mapsto \tau(h) := \gamma(u) + \gamma'(u, h)$$

ebenfalls die Parameterdarstellung einer m -Fläche. τ ist in h linear, d.h. der Wertebereich $\mathcal{R}(\tau) := \tau(\mathbb{R}^m)$ ist ein affiner Unterraum des \mathbb{R}^n , durch den $\mathcal{R}(\gamma)$ in der Nähe von $\gamma(u)$ approximiert wird. τ ist „die“ Parameterdarstellung des m -dimensionalen Tangentialraums für γ im Punkte $\gamma(u)$, siehe Abbildung 12.

3.14 Beispiel (Rotationsflächen im \mathbb{R}^3). Anschaulich ist eine Rotationsfläche die Menge von Punkten, die man erhält, wenn man eine ebene Kurve um eine Achse, die in der Kurvenebene liegt und die Kurve nicht schneidet, dreht. Als 2-Fläche lässt sich eine Rotationsfläche durch

11/1:06:19
(20.05.21)

$$\gamma(u, v) = \begin{pmatrix} f(u) \cos v \\ f(u) \sin v \\ g(u) \end{pmatrix}$$

Abbildung 12: Die Parametrisierung einer m -dimensionalen Fläche

mit $f(u) > 0$ und $f'(u)^2 + g'(u)^2 > 0$ beschreiben, siehe Abbildung 13. Nehmen wir also beispielsweise $f(u) = u$ als Radius und v als Winkel im \mathbb{R}^2 , so variiert $\gamma(u, v)$ für festes u nur mit v und beschreibt eine Rotation. Zur Überprüfung, dass durch $\gamma(u, v)$ tatsächlich eine 2-Fläche beschrieben wird, berechnen wir

$$\gamma'(u, v) = \begin{pmatrix} f'(u) \cos v & -f(u) \sin v \\ f'(u) \sin v & f(u) \cos v \\ g'(u) & 0 \end{pmatrix}$$

und sehen, dass $\text{rg}(\gamma') = 2$ ist.

11/1:22:28
(20.05.21)

3.15 Definition. Zwei Parameterdarstellungen $\gamma : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ von m -Flächen heißen äquivalent, wenn ein Diffeomorphismus $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ existiert mit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \Phi$. Man schreibt $\gamma \sim \tilde{\gamma}$.

Die durch die Parameterdarstellungen γ und $\tilde{\gamma}$ beschriebenen m -Flächen haben die gleiche Orientierung, wenn $\det \Phi' > 0$ ist.

Eine spezielle Parameterdarstellung $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ einer m -Fläche ist durch:

$$\begin{aligned} \gamma_1(u) &= u_1 \\ &\vdots \\ \gamma_m(u) &= u_m \\ \gamma_{m+1}(u) &= f_1(u) \\ &\vdots \\ \gamma_n(u) &= f_{n-m}(u) \end{aligned}$$

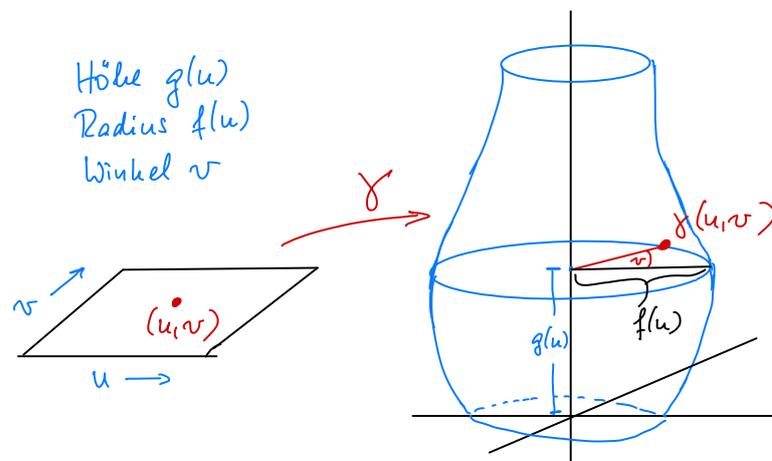


Abbildung 13: Rotationsflächen

mit $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ und $f_i \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, n - m$) gegeben, denn es gilt:

$$\gamma'(u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ \partial_1 f_1 & \dots & \partial_m f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_{n-m} & \dots & \partial_m f_{n-m} \end{pmatrix}$$

und damit $\text{rg}(\gamma'(u)) = m$. Vergleiche Abbildung 14 für die geometrische Situation. Wir werden nun zeigen, dass jede m -Fläche (bzw. die zugehörige Parameterdarstellung) lokal äquivalent ist zu einem γ dieses speziellen und einfachen Typs. Dabei wenden wir wieder den Satz von der lokalen Umkehrbarkeit an (Satz 2.18).

3.16 Satz. Sei $\gamma : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung einer m -Fläche. Für ein $u_0 \in U$ gelte

12/07:00
(27.05.21)

$$\det \begin{pmatrix} \partial_1 \gamma_1 & \dots & \partial_m \gamma_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \gamma_m & \dots & \partial_m \gamma_m \end{pmatrix} (u_0) \neq 0.$$

Dann gibt es eine Umgebung W von u_0 mit

$$\gamma|_W \sim \tilde{\gamma} : V \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei $V \subset \mathbb{R}^m$ offen geeignet gewählt werden kann und $\tilde{\gamma}_1(v) = v_1, \dots, \tilde{\gamma}_m(v) = v_m$ sowie $\tilde{\gamma}_{m+1}(v) = f_1(v), \dots, \tilde{\gamma}_n(v) = f_{n-m}(v)$ ist.

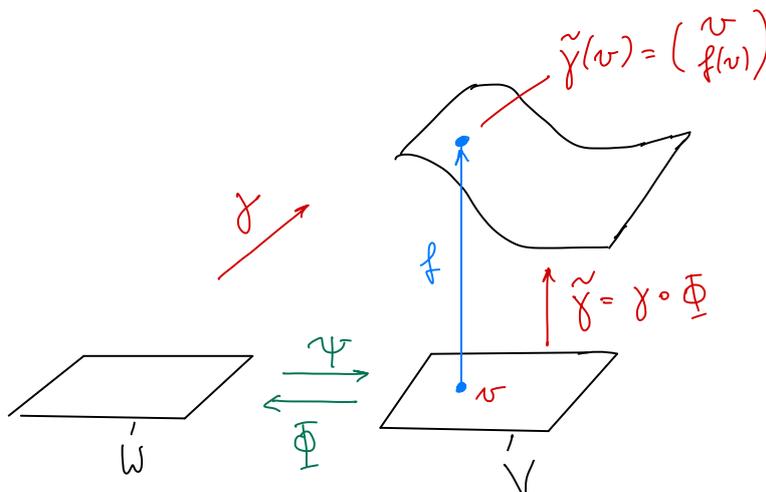


Abbildung 14: Parametrisierung als Graph einer Funktion

Beweis. Man betrachte die Abbildung

$$\Psi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \Psi(u) := \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \\ \vdots \\ \gamma_m(u) \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz von der lokalen Umkehrbarkeit, der sich aufgrund der Voraussetzungen des Satzes anwenden lässt, gibt es eine Umgebung W von u_0 und eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$, so dass $\Psi|_W : W \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $\Phi := (\Psi|_W)^{-1} : V \rightarrow W$ und $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann sind γ und $\tilde{\gamma}$ äquivalent, und es gilt nach Konstruktion:

$$\tilde{\gamma}_j(v) = v_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

□

Lokal lässt sich also eine m -Fläche in der Form

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= f_1(x_1, \dots, x_m) \\ &\vdots \\ x_n &= f_{n-m}(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

schreiben oder implizit als Nullstellenmenge der Funktionen g_1, \dots, g_{n-m} , die durch

$$\begin{aligned} 0 &= g_1(x) = x_{m+1} - f_1(x_1, \dots, x_m) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$0 = g_{n-m}(x) = x_n - f_{n-m}(x_1, \dots, x_m)$$

gegeben ist. Man sieht leicht ein, dass für $g = (g_1, \dots, g_{n-m})$ gilt: $\text{rg}(g') = n - m$.

3.17 Beispiel (Stereographische Projektion). Es sei $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus (0, 0, -1)^\top$ gegeben durch

12/24:30
(27.05.21)

$$\gamma(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 - u^2 - v^2 \end{pmatrix},$$

dann wird der \mathbb{R}^2 auf die „gelochte Kugeloberfläche (ohne Südpol)“ abgebildet, siehe Abbildung 15. Es gilt:

$$\gamma(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \gamma(\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Anschaulich ist die stereographische Projektion die Abbildung, die jedem Punkt P der x - y -Ebene den Schnittpunkt der Einheitssphäre (mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung) und der Geraden, die durch den Punkt P und den „Südpol“ $S = (0, 0, -1)^\top$ verläuft, zuordnet.

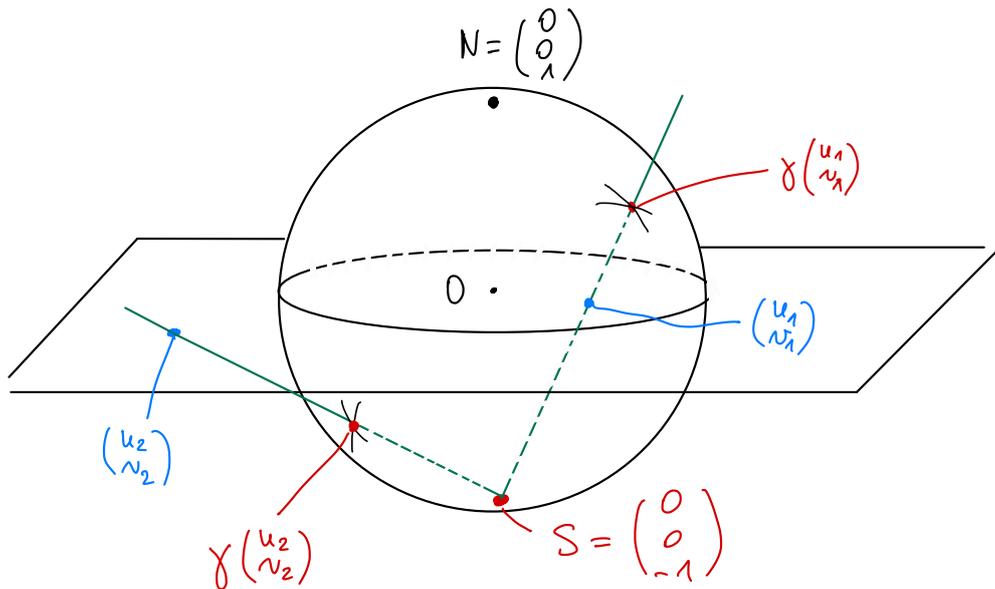


Abbildung 15: Stereographische Projektion

Es gilt:

$$\gamma'(u, v) = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} 1 - u^2 + v^2 & -2uv \\ -2uv & 1 + u^2 - v^2 \\ -2u & -2v \end{pmatrix},$$

also $\text{Rang}(\gamma') = 2$.

Für die Anwendung von Satz 3.16 berechnen wir:

$$\det \begin{pmatrix} \partial_1 \gamma_1 & \partial_2 \gamma_1 \\ \partial_1 \gamma_2 & \partial_2 \gamma_2 \end{pmatrix} = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^4} (1 - (u^2+v^2)^2) \neq 0,$$

falls (u, v) nicht auf dem Einheitskreis liegt. In einer Umgebung U von $u_0 := (0, 0)$, finden wir also eine zu γ äquivalente „einfache“ Parameterdarstellung $\tilde{\gamma}$. Es seien

$$x = \frac{2u}{1+w^2}, \quad y = \frac{2v}{1+w^2} \quad \text{und} \quad z = \frac{1-w^2}{1+w^2},$$

mit $w^2 = u^2 + v^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{4w^2}{(1+w^2)^2} \quad \text{und} \quad z^2 = \frac{(1-w^2)^2}{(1+w^2)^2} = 1 - x^2 - y^2, \\ \text{d.h.} \quad z &= \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \end{aligned}$$

wobei die negative Wurzel nicht gewählt werden kann, wenn wir für U eine Umgebung des Nullpunktes betrachten, da der Südpol nicht zum Wertebereich gehört. Es ergibt sich also:

$$\tilde{\gamma}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Parameterdarstellung der oberen Hälfte der Kugeloberfläche, welche diese zugleich als Graph der Funktion $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ beschreibt.

4. Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie

4.1 Worum geht's? Eine der fundamentalen Fragen in der Mathematik ist das Messen von Flächen (oder das Berechnen eines Volumens). Aus mathematischer Sicht ist dies ein Teil der Maßtheorie. Ein Maß ist eine Abbildung, welche einer Teilmenge des \mathbb{R}^n einen Wert zuordnet. Dabei stellt sich heraus, dass man nicht beliebige Teilmengen messen kann, was auf den Begriff der σ -Algebra führt. Neben dem Maßbegriff ist auch der Begriff des zugehörigen Integrals wichtig, bei welchem z.B. Funktionen integriert werden können, welche auf einer Fläche definiert sind. Wir werden in diesem Abschnitt einen kurzen Abriss der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie kennenlernen.

12/54:14
(27.05.21)

a) Maße und messbare Funktionen

Um mehrdimensionale Integrale definieren zu können, benötigen wir einen mathematischen Begriff, der die Fläche bzw. das Volumen einer Teilmenge des \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 angibt. Anschaulich sieht man (z.B. auch für die Länge im \mathbb{R}^1), dass folgende Bedingungen für das n -dimensionale Volumen λ_n sinnvoll sind:

- (i) Das Volumen eines n -dimensionalen „Intervalls“ $\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ ist das Produkt der Seitenlängen $\prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.
- (ii) Die leere Menge hat Volumen 0, die Werte von λ_n sind ≥ 0 .
- (iii) Das Volumen einer disjunkten Vereinigung von zwei Mengen ist die Summe der einzelnen Volumen.

Betrachtet man z.B. $(0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((\frac{1}{2})^n, (\frac{1}{2})^{n-1}]$, so scheint auch folgende „Stetigkeitsbedingung“ plausibel:

- (iv) Das Volumen einer abzählbaren disjunkten Vereinigung von Mengen ist gleich der abzählbaren Summe der einzelnen Volumina.

Da z.B. \mathbb{R}^n sicher unendliches Volumen besitzt, muss λ_n auch den Wert $+\infty$ annehmen können. Während die Bedingung (i) speziell das n -dimensionale Volumen auszeichnet, wurden die Bedingungen (ii)-(iv) verwendet, um einen allgemeinen Maßbegriff zu definieren. Dies hat den Vorteil, dass z.B. auch die Wahrscheinlichkeit von Zufallsereignissen als Maß gesehen werden kann.

Welchen Mengen kann ein Volumen zugeordnet werden? Neben den Intervallen aus Bedingung (i) sollten wegen (iv) auch alle (disjunkten) Vereinigungen von Intervallen „messbar“ sein. Allerdings lässt sich zeigen, dass nicht allen Teilmengen des \mathbb{R}^n in sinnvoller Weise ein Volumen zugeordnet werden kann. Daher wird das n -dimensionale Volumen als eine Abbildung $\lambda_n: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ definiert. Dabei ist der Definitionsbereich ein System von Mengen, welche Axiome erfüllt, die

zu den Bedingungen (i)-(iv) passen.

12/59:30

(27.05.21)

4.2 Definition (σ -Algebra). Sei X eine Menge, $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$ die Potenzmenge von X und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

Dann heißt \mathcal{A} eine σ -Algebra über X , falls gilt:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- (ii) Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt $A^c := \{x \in X : x \notin A\} \in \mathcal{A}$.
- (iii) Für $A_n \in \mathcal{A}$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

In diesem Fall heißt (X, \mathcal{A}) Messraum, und die Mengen $A \in \mathcal{A}$ heißen (\mathcal{A} -)messbar.

12/1:05:05

(27.05.21)

4.3 Definition und Bemerkung.

(i) Die (bezüglich Mengeninklusion) größte σ -Algebra ist $\mathcal{P}(X)$, die kleinste ist $\{\emptyset, X\}$. Falls \mathcal{A}_i eine σ -Algebra ist für $i \in I$, wobei I eine nichtleere Indexmenge ist, dann ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ wieder eine σ -Algebra.

(ii) Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ beliebig. Dann ist

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \supset \mathcal{E} : \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } X \}$$

die kleinste σ -Algebra, die \mathcal{E} enthält (von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra). In diesem Fall heißt \mathcal{E} ein Erzeugendensystem der σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E})$.

12/1:14:22

(27.05.21)

4.4 Definition (Maß). Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum.

(i) Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß auf \mathcal{A} , falls gilt:

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (2) σ -Additivität: Für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ ($n \neq m$) gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \quad (4-1)$$

In diesem Fall heißt (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum.

(ii) Ein Maß μ auf einer σ -Algebra \mathcal{A} heißt

- σ -endlich (oder normal), falls es eine Folge $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ gibt mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- endlich, falls $\mu(X) < \infty$ (und damit $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$).
- ein Wahrscheinlichkeitsmaß, falls $\mu(X) = 1$.

(iii) Sei μ ein Maß auf \mathcal{A} . Dann heißt eine Menge $A \subset X$ eine μ -Nullmenge, falls $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) = 0$ gilt. Falls für eine Aussage $M(x)$ gilt $\{x \in X : M(x) \text{ gilt nicht}\}$ ist eine μ -Nullmenge, so sagt man, die Aussage $M(x)$ gilt μ -fast überall.

4.5 Bemerkung. In obiger Definition und auch im folgenden tritt der Wert ∞ auf. Dabei sind folgende Rechenregeln zu beachten:

12/1:26:14
(27.05.21)

- $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$,
- $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty \quad (0 < a \leq \infty)$,
- $\infty + a = a + \infty = \infty \quad (-\infty < a \leq \infty)$.
- Der Ausdruck $\infty - \infty$ ist nicht definiert.

4.6 Beispiele. (i) Dirac-Maß: Zu $x \in X$ definiere

12/1:28:25
(27.05.21)

$$\delta_x(A) := \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Dann ist δ_x ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ und damit auf jeder σ -Algebra. Das Maß δ_x wird als Dirac-Maß oder auch Punktmaß bezeichnet.

(ii) Zählmaß: Definiere

$$\zeta(A) := \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich.} \end{cases}$$

Dann ist ζ ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$, welches genau dann σ -endlich ist, falls X abzählbar ist.

4.7 Bemerkung. (i) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $E \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A} \cap E := \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ -Algebra, und die Einschränkung $\mu|_E := \mu|_{\mathcal{A} \cap E}$ ist wieder ein Maß. Man erhält einen neuen Maßraum $(E, \mathcal{A} \cap E, \mu|_E)$. Man spricht von der Spur- σ -Algebra und dem Spurmaß.

13/23:23
(07.06.21)

(ii) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, (Y, \mathcal{B}) ein Messraum und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Dann ist $\sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ eine σ -Algebra auf X , die von f erzeugte σ -Algebra.

4.8 Satz. Seien (X, \mathcal{A}) ein Messraum und $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ eine Abbildung mit $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für $A, B \in \mathcal{A}$ disjunkt. Betrachte die folgenden Aussagen:

13/38:33
(07.06.21)

(a) μ ist σ -additiv.

(b) Für alle $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =: A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

(d.h. μ ist stetig von unten).

(c) Für alle $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ und $\mu(A_1) < \infty$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$$

(d.h. μ ist stetig von oben).

Dann gilt (a) \iff (b) \implies (c). Falls μ endlich ist, sind alle drei Aussagen äquivalent.

Beweis. (a) \implies (b). Mit $A_0 := \emptyset$ und $\tilde{A}_n := A_n \setminus A_{n-1}$ ist $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n$ und $A_n = \bigcup_{k=1}^n \tilde{A}_k$. Also ist

$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{A}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(\tilde{A}_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(b) \implies (a). Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Setze $\tilde{A}_n := A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_n$. Dann gilt $\tilde{A}_n \nearrow A$ (d.h. $\tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2 \subset \dots$ und $\bigcup \tilde{A}_n = A$), und nach (b) gilt $\mu(\tilde{A}_n) \rightarrow \mu(A)$. Wegen $\mu(\tilde{A}_n) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$ gilt also $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$.

(b) \implies (c). Wegen $\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ und $A_1 \setminus A_n \nearrow A_1$ gilt nach (b)

$$\mu(A_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

und damit $\mu(A_n) \rightarrow 0$.

Sei nun μ endlich.

(c) \implies (b). Falls $A_n \nearrow A$, gilt $A \setminus A_n \searrow \emptyset$ und damit gilt $\mu(A \setminus A_n) \rightarrow 0$ nach (c). Somit folgt $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$. \square

13/1:10:15

4.9 Definition (Borel- σ -Algebra). (i) Zu $a, b \in \mathbb{R}^n$ schreibe

$$a < b \iff \forall j = 1, \dots, n : a_j < b_j,$$

analog $a \leq b$. Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ sei $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j \leq b_j (j = 1, \dots, n)\} = \prod_{j=1}^n (a_j, b_j]$ das n -dimensionale (halboffene) Intervall (Quader). Analog $[a, b], (a, b], (a, b)$.

(ii) Die von allen Intervallen erzeugte σ -Algebra

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \sigma(\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n, a < b\})$$

heißt die Borel- σ -Algebra im \mathbb{R}^n . Die Mengen in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ heißen Borel-messbar.

Es gilt sogar:

4.10 Lemma. Sei τ das Mengensystem aller offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Dann gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\tau)$. Insbesondere ist jede offene Teilmenge und damit jede abgeschlossene Teilmenge Borel-messbar.

13/1:22:22
(07.06.21)

Beweis. Um für $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ die Gleichheit $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ zu zeigen, reicht es offensichtlich, die Inklusionen $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$ und $\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ zu zeigen.

(i) Aus $(a, b] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^n (a_j, b_j + \frac{1}{k})$ sieht man sofort $(a, b] \in \sigma(\tau)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$.

(ii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zu jedem Punkt $x \in U$ existiert ein $\varepsilon_x > 0$ mit

$$I_x := \{y \in \mathbb{R}^n : x_i - \varepsilon_x < y_i < x_i + \varepsilon_x \ (i = 1, \dots, n)\} \subset U.$$

Wie oben sieht man $I_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Weiter gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} I_x.$$

Diese offene Überdeckung besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung (Übung). Dies ist aber eine abzählbare Vereinigung, und somit ist $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Also ist $\tau \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. \square

Lemma 4.10 liefert eine Verbindung zwischen den Intervallen als Erzeugendensystem (dies war durch die Eigenschaften des Lebesgue-Maßes motiviert) und den offenen Mengen, einem Begriff, der in beliebigen metrischen oder (allgemeiner) topologischen Räumen definiert ist. Für einen topologischen Raum (X, \mathcal{T}) kann man daher die Borel- σ -Algebra durch $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$ definieren. Insbesondere ist damit die Borel- σ -Algebra für metrische Räume definiert, z.B. für Teilmengen von \mathbb{R}^n (versehen mit der Spurmtrik).

Der folgende Satz wird im Abschnitt Maßtheorie bewiesen.

4.11 Definition und Satz (Lebesgue-Maß). Es existiert genau ein Maß $\lambda = \lambda_n: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ mit der Eigenschaft

14/26:25
(10.06.21)

$$\lambda\left(\prod_{j=1}^n (a_j, b_j]\right) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$. Das Maß λ_n heißt das n -dimensionale Lebesgue-Maß.

4.12 Bemerkung. Man sieht sofort folgende Eigenschaften des Lebesgue-Maßes:

14/29:50
(10.06.21)

(i) Die Menge $\{x\}$ ist für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ eine λ -Nullmenge, denn $\{x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^n (x_j - \frac{1}{k}, x_j]$ und damit nach Satz 4.8: $\lambda(\{x\}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{1}{k})^n = 0$.

(ii) Analog ist $\lambda(Q) = 0$ für entartete Quader $Q = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ mit mindestens einem $a_j = b_j$. Falls $U \subset \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum der Form $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_k = 0\}$ ist, folgt aus $U = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} (U \cap [-N, N]^n)$ somit $\lambda(U) = 0$.

(iii) $\lambda((a, b)) = \lambda([a, b)) = \lambda((a, b]) = \lambda([a, b]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$.

(iv) $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, da \mathbb{Q} abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist.

(v) λ ist σ -endlich, da $\mathbb{R}^n = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} [-N, N]^n$ gilt.

14/47:35

4.13 Beispiel (Cantormenge). Definiere iterativ die Mengen $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

(10.06.21)

$$C_1 := [0, 1],$$

$$C_2 := C_1 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$C_3 := C_2 \setminus \left[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right],$$

$$\vdots$$

(d.h. man nimmt jeweils in den verbleibenden Intervallen das mittlere Drittel weg, siehe Abbildung 16). Die Cantormenge C ist nun definiert als $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Als abzählbarer Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Andererseits gilt $\lambda(C_1) = 1$, $\lambda(C_2) = 1 - \frac{1}{3}$, $\lambda(C_3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9}$ etc. Man erhält

$$\lambda(C) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Die Elemente in C sind gerade die Zahlen $x \in [0, 1]$, welche eine 3-adische Entwicklung der Form

$$x = 0.a_1a_2a_3\dots$$

mit $a_n \in \{0, 2\}$ besitzen.

Die Abbildung $x = 0.a_1a_2a_3\dots \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ ist surjektiv von C nach $[0, 1]$. Also besitzt die Menge C die gleiche Mächtigkeit (Kardinalität) wie das Intervall $[0, 1]$, nämlich $|[0, 1]| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Insbesondere ist C überabzählbar, d.h. die Cantormenge ist eine überabzählbare Lebesgue-Nullmenge.

Um das Integral bezüglich des Lebesgue-Maßes zu definieren, gehen wir ähnlich wie in Analysis I schrittweise vor: Zunächst wird das Integral für Treppenfunktionen definiert (die hier allerdings allgemeiner sind), dann wird die Definition auf allgemeinere Funktionen durch einen Grenzprozess ausgeweitet. Wir beginnen mit dem Begriff der messbaren Funktionen.

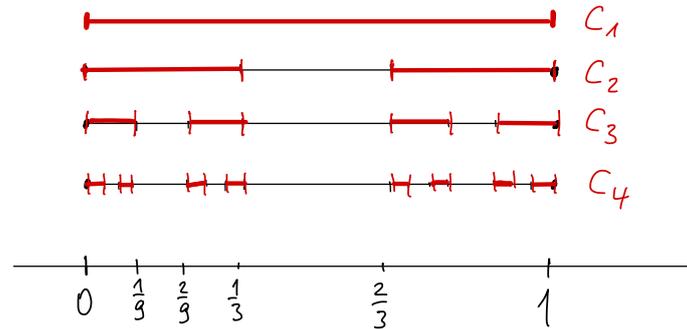


Abbildung 16: Die Cantormenge

4.14 Definition (messbare Funktionen). Seien (X, \mathcal{A}) und (S, \mathcal{S}) Messräume. Für eine Abbildung $f: X \rightarrow S$ setze $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ und $f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann heißt f messbar (genauer \mathcal{A} - \mathcal{S} -messbar), falls $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$, d.h. falls für alle $B \in \mathcal{S}$ gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

14/1:06:00
(10.06.21)

Falls $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, so heißt eine \mathcal{A} - \mathcal{S} -messbare Funktion f auch \mathcal{A} -messbar. Falls auch $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, so heißt f Borel-messbar oder auch nur messbar.

4.15 Bemerkung. (i) Jede konstante Funktion ist messbar bezüglich jeder σ -Algebra.

14/1:13:25
(10.06.21)

b) Sind $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (S_1, \mathcal{S}_1)$ und $g: (S_1, \mathcal{S}_1) \rightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$ messbar, so auch $g \circ f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (S_2, \mathcal{S}_2)$. Denn es gilt

$$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{S}_2) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{S}_2)) \subset f^{-1}(\mathcal{S}_1) \subset \mathcal{A}.$$

4.16 Lemma. Seien (X, \mathcal{A}) und (S, \mathcal{S}) Messräume und $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$ (d.h. \mathcal{E} ist ein Erzeugendensystem von \mathcal{S}). Dann ist $f: X \rightarrow S$ genau dann \mathcal{A} - \mathcal{S} -messbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

14/1:18:05
(10.06.21)

Beweis. Das Mengensystem $\mathcal{S}' := \{B \subset S : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ -Algebra über S . Nach Definition ist f genau dann \mathcal{A} - \mathcal{S} -messbar, wenn $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{S}'$. Dies ist aber äquivalent zu $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}'$, d.h. zu $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$. \square

4.17 Korollar. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

14/1:24:32
(10.06.21)

(i) f ist Borel-messbar.

(ii) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(iv) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(v) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. (i) \implies (ii) ist klar wegen $(a, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(ii) \implies (i). Nach Lemma 4.16 ist nur zu zeigen, dass $\mathcal{E} := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist. Dies folgt aber aus $(a, b] = (a, \infty) \setminus (b, \infty)$ für $a < b$, da damit $(a, b] \in \sigma(\mathcal{E})$ gilt.

Die Äquivalenz von (ii)–(v) folgt aus den Darstellungen

$$\begin{aligned} \{f \geq a\} &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left\{ f > a - \frac{1}{k} \right\}, \\ \{f < a\} &= \{f \geq a\}^c, \\ \{f \leq a\} &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left\{ f < a + \frac{1}{k} \right\}, \\ \{f > a\} &= \{f \leq a\}^c. \end{aligned}$$

□

15/07:34
(14.06.21)

4.18 Bemerkung. Im Folgenden treten auch die Werte $\pm\infty$ als Funktionswerte auf. Dazu setze $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und die Borel- σ -Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \sigma(\{(a, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}} : a \in \mathbb{R}\})$. Die obigen Aussagen gelten analog auch für messbare Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

15/13:00
(14.06.21)

4.19 Satz. (i) Alle stetigen Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind Borel-messbar.

(ii) Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge (Borel-)messbarer Funktionen $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k$, $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$, $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_k$ und $\limsup_{k \in \mathbb{N}} f_k$ messbar.

(iii) Der Grenzwert einer punktweise konvergenten Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ messbarer Funktionen ist messbar.

(iv) Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := F(f(x), g(x))$ messbar. Insbesondere sind mit f und g auch $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f \pm g$ und $f \cdot g$ messbar, ebenso $|f|^r$ für $r > 0$ und f^r für $r \in \mathbb{N}$.

Beweis. (i) Die Urbilder $\{f > a\} = f^{-1}((a, \infty))$ sind offen, also messbar.

(ii) Es gilt

$$\left\{ \sup_k f_k \leq a \right\} = \bigcap_k \{f_k \leq a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

für alle $a \in \mathbb{R}$. Mit Korollar 4.17 folgt die Behauptung für das Supremum. Wegen $\inf f_k = -\sup(-f_k)$ und $\limsup f_k = \inf_k \sup_{m \geq k} f_m$ folgt der Rest daraus, da mit f offensichtlich auch $-f$ messbar ist.

(iii) Für eine konvergente Folge gilt $\lim f_k = \limsup f_k$ und damit folgt die Behauptung aus (ii).

(iv) Da F stetig ist, ist zu $a \in \mathbb{R}$ die Menge $G_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) > a\}$ offen. Wie in Beweis von Lemma 4.10 können wir schreiben $G_a = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ mit $A_k = (a_k, b_k) \times (c_k, d_k)$. Da f und g messbar sind, gilt

$$\{a_k < f < b_k\} = f^{-1}((a_k, b_k)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

und ebenso $\{c_k < g < d_k\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Also ist auch

$$\{(f, g) \in A_k\} = \{a_k < f < b_k\} \cap \{c_k < g < d_k\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

und damit

$$\{x \in \mathbb{R}^n : F(f(x), g(x)) > a\} = \{(f, g) \in G_a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{(f, g) \in A_k\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Die restlichen Aussagen von (iv) folgen aus der Stetigkeit der Abbildungen $(x, y) \mapsto x \pm y$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$, $(x, y) \mapsto \min\{x, y\}$, $(x, y) \mapsto |x|^r$ und $(x, y) \mapsto x^r$. \square

b) Das Lebesgue-Integral

Im folgenden sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum.

4.20 Definition. (i) Eine Stufenfunktion (oder Treppenfunktion oder einfache Funktion) ist eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ der Form $f = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$ und $A_i \in \mathcal{A}$. Dabei ist

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von $A \subset X$.

(ii) $B(X, \mathcal{A}; \mathbb{R})$ bezeichne den Raum aller beschränkten \mathcal{A} -messbaren Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

4.21 Satz. (i) Zu jeder messbaren Funktion $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ existiert eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit $s_k(x) \rightarrow f(x)$ ($x \in X$).

Falls zusätzlich $f \geq 0$ gilt, so kann man eine monoton wachsende Folge $(s_j)_j$ finden.

15/44:05
(14.06.21)

15/50:00
(14.06.21)

(ii) Falls $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und messbar ist, so Folge von Stufenfunktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. (Der Raum der Stufenfunktionen liegt somit dicht in $B(X, \mathcal{A}; \mathbb{R})$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ -Norm.)

Beweis. (i) Sei zunächst $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $f \geq 0$. Für $k, j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq k \cdot 2^k$ definiere

$$A_{kj} := \left\{ x \in X : \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k} \right\} = f^{-1} \left(\left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right) \right)$$

und $A_k := f^{-1}([k, \infty))$, siehe Abbildung 17. Da f messbar ist, sind A_{kj} und A_k messbar. Definiere nun

$$s_k := \sum_{j=1}^{k \cdot 2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{A_{kj}} + k \cdot \chi_{A_k}.$$

Dann konvergiert die Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend punktweise gegen f .

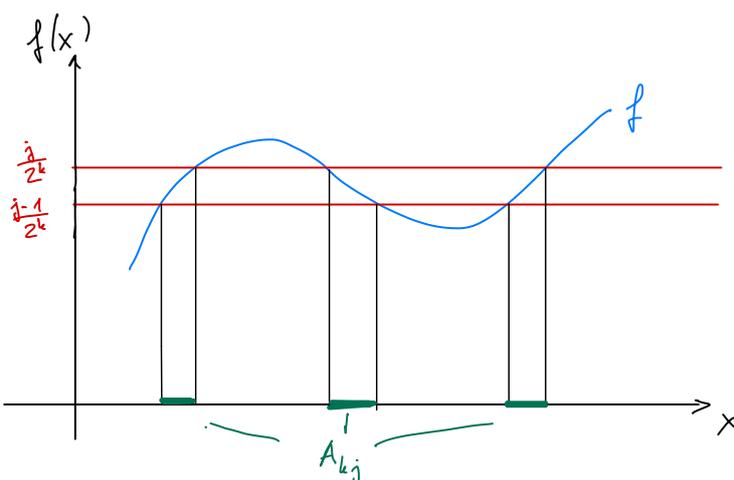


Abbildung 17: Die Mengen A_{kj} im Beweis von Satz 4.21

Im allgemeinen Fall zerlege man $f = f_+ - f_-$ mit $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := -\min\{0, f\}$ und wende obige Konstruktion auf f_+ und f_- an.

(ii) Die obige Konstruktion zeigt, dass die Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bei beschränktem messbaren f sogar gleichmäßig konvergiert. \square

15/1:21:08
(14.06.21)

4.22 Definition (allgemeines Lebesgue-Integral). (i) Sei $s = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ mit $c_j \in \mathbb{R}$ und $A_j \in \mathcal{A}$ eine Stufenfunktion mit $s \geq 0$. Definiere das Integral von s bzgl. μ durch

$$\int s d\mu := \sum_{j=1}^k c_j \mu(A_j) \in [0, \infty].$$

(ii) Sei nun $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $f \geq 0$. Definiere

$$\int f d\mu := \sup \left\{ \int s d\mu : s \text{ Stufenfunktion mit } 0 \leq s \leq f \right\} \in [0, \infty].$$

(iii) Falls $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, definiert man

$$\int f d\mu := \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu, \quad (4-2)$$

falls nicht beide Integrale den Wert $+\infty$ haben.

(iv) Eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (Lebesgue-)integrierbar, falls f messbar ist und beide Integrale in (4-2) endlich sind. Die Menge aller integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(X, \mu) = \mathcal{L}^1(X)$ bezeichnet. Andere Schreibweisen sind etwa $\int f(x)d\mu(x) := \int f\mu(dx) := \int f d\mu$. Der Index „1“ wird manchmal unten geschrieben: $\mathcal{L}_1(\mu)$.

Falls $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^n ist, so schreibt man $\int f(x)dx$.

(v) Für $A \in \mathcal{A}$ definiert man

$$\int_A f d\mu := \int \chi_A f d\mu.$$

Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ schreiben wir $\mathcal{L}^1(A) := \mathcal{L}^1(\lambda|_A)$, wobei λ das n -dimensionale Lebesgue-Maß bezeichne.

4.23 Satz (Elementare Eigenschaften des Lebesgue-Integrals). Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $A \in \mathcal{A}$.

16/12:12
(17.06.21)

(i) Sei zusätzlich f beschränkt und $\mu(X) < \infty$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(ii) Monotonie: Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f \leq g$, so ist

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Speziell gilt: Ist $a \leq f(x) \leq b$ ($x \in A$) und $\mu(A) < \infty$, so gilt

$$a\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq b\mu(A).$$

(iii) Ist A eine μ -Nullmenge, so gilt $\int_A f d\mu = 0$.

(iv) Sind $A, B \in \mathcal{A}$ disjunkt und $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, so gilt $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$.

(v) Ist $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, so ist $f \in \mathcal{L}^1(A, \mu|_A)$.

Beweis. (i) Zu $f \in B(X, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ existiert ein $K > 0$ mit $0 \leq f_{\pm} \leq K$. Für jede Stufenfunktion s mit $0 \leq f_+$ gilt somit $\int s d\mu \leq K\mu(X)$. Somit gilt $\int f_+ d\mu \leq K\mu(X) < \infty$. Analog sieht man $\int f_- d\mu < \infty$.

(ii) Ist $f \leq g$, so folgt $f_+ \leq g_+$ und $f_- \geq g_-$. Für jede Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f_+$ gilt daher auch $s \leq g_+$. Damit folgt $\int f_+ d\mu \leq \int g_+ d\mu$. Genauso folgt $\int f_- d\mu \geq \int g_- d\mu$ und damit die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung folgt mit $a\chi_A \leq f\chi_A \leq b\chi_A$.

(iii) Für jede Stufenfunktion $s = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ mit $0 \leq s \leq f_+$ gilt

$$\int_A s d\mu = \sum_{j=1}^k c_j \mu(A \cap A_j) = 0$$

wegen $\mu(A \cap A_j) \leq \mu(A) = 0$. Damit ist $\int_A f_+ d\mu = 0$. Analog folgt $\int_A f_- d\mu = 0$.

(iv) Die Gleichheit gilt nach Definition des Integrals für Stufenfunktionen. Für integrierbare Funktionen $f \geq 0$ und Stufenfunktionen $0 \leq s \leq f$ gilt $0 \leq s\chi_A \leq f\chi_A$ und $0 \leq s\chi_B \leq f\chi_B$, andererseits ist für zwei Stufenfunktionen s_1, s_2 mit $s_1 \leq f\chi_A$ und $s_2 \leq f\chi_B$ auch $s := s_1\chi_A + s_2\chi_B$ eine Stufenfunktion mit $s \leq f$. Geht man zum Supremum über, folgt die Behauptung für integrierbares $f \geq 0$ und damit für $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(v) Für jede Stufenfunktion $s = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ mit $0 \leq s \leq f_+$ gilt

$$\int_A s d\mu = \sum_{j=1}^k c_j \mu(A \cap A_j) \leq \sum_{j=1}^k c_j \mu(A_j) = \int s d\mu.$$

Damit folgt $\int_A f_+ d\mu \leq \int f_+ d\mu < \infty$, analog für f_- . □

16/49:40

4.24 Lemma. Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

(i) Ist $f \geq 0$ mit $\int f d\mu = 0$, so ist $f = 0$ μ -f.ü..

(ii) Es gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ genau dann, wenn $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt. In diesem Fall ist

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

(iii) (Majorantenkriterium) Sei $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $|f| \leq g$ μ -f.ü.. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Beweis. (i) Wir schreiben $\{f \neq 0\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\frac{1}{j+1} \leq f < \frac{1}{j}\} \cup \{f \geq 1\}$. Falls $\mu(\{f \neq 0\}) > 0$, so hat wegen der σ -Additivität von μ eine der Mengen auf der rechten Seite positives Maß und damit nach Satz 4.23 (ii) $\int f d\mu > 0$.

(ii) Die Mengen $A := \{f \geq 0\}$ und $B := \{f < 0\}$ sind messbar, ebenso die Funktion $|f|$. Nach Satz 4.23 (iv) gilt

$$\int |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu = \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu < \infty.$$

Die Abschätzung folgt aus $-|f| \leq f \leq |f|$ und der Monotonie des Integrals (Satz 4.23 (ii)).

(iii) Nach Änderung auf einer Nullmenge können wir o.E. $|f| \leq g$ annehmen. Dann ist $f_- \leq g$ und $f_+ \leq g$ und somit $\int f_{\pm} d\mu < \infty$. \square

Der Vorteil des soeben definierten Lebesgue-Integrals liegt zum einen an der großen Allgemeinheit (beliebige Maße), zum anderen an starken Konvergenzaussagen. Die folgenden Aussagen werden hier nur zitiert und im Abschnitt Maßtheorie bewiesen.

Im folgenden sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum.

4.25 Satz (Linearität des Integrals). Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

16/1:15:44
(17.06.21)

$$\int (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) d\mu = \alpha_1 \int f_1 d\mu + \alpha_2 \int f_2 d\mu.$$

4.26 Satz (von Lebesgue über monotone Konvergenz). Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, und sei $f: X \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ ($x \in X$). Dann gilt

16/1:17:27
(17.06.21)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu = \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu.$$

4.27 Satz. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen und $f: X \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Dann gilt

16/1:22:15
(17.06.21)

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Falls $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ($n \in \mathbb{N}$) und die Summe auf der rechten Seite konvergiert, so gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert für μ -fast alle $x \in X$.

4.28 Satz (Lemma von Fatou). Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen und $f: X \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch $f := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$. Dann gilt

16/1:28:10
(17.06.21)

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Der folgende Satz ist einer der wichtigsten Sätze der Integrationstheorie und heißt auch Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz.

17/01:45
(21.06.21)

4.29 Satz (von Lebesgue über majorisierte Konvergenz). Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen, und der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existiere μ -fast überall. Weiter existiere eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ für μ -fast alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Im folgenden werden wir stets den Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ mit $\lambda = \lambda_n$ betrachten. In diesem Fall schreibt man auch

$$\int_A f(x) dx := \int_A f(x) d\lambda(x) := \int_A f d\lambda.$$

Ein weiterer wichtiger Integralbegriff wurde schon im ersten Semester erwähnt: Das Riemann-Integral.

17/06:20
(21.06.21)

4.30 Definition (Riemann-Integral). (i) Eine Stufenfunktion $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}$ heißt eine Riemann-Stufenfunktion, falls A_i n -dimensionale Intervalle sind, d.h. $A_i = (a_i, b_i]$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}^n$, $a_i < b_i$.

(ii) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit kompaktem Träger

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Dann heißt

$$\overline{\int} f(x) dx := \inf \left\{ \int s(x) dx : s \text{ Riemann-Stufenfunktion, } s \geq f \right\}$$

das Oberintegral von f und

$$\underline{\int} f(x) dx := \sup \left\{ \int s(x) dx : s \text{ Riemann-Stufenfunktion, } s \leq f \right\}$$

das Unterintegral von f .

f heißt Riemann-integrierbar, wenn $\overline{\int} f(x) dx = \underline{\int} f(x) dx =: \int f(x) dx$ (Riemann-Integral).

17/15:51
(21.06.21)

4.31 Satz. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit kompaktem Träger.

(i) Falls f gleichmäßig stetig ist, so ist f Riemann-integrierbar.

(ii) Falls f Riemann-integrierbar ist, so ist f (nach eventueller Abänderung auf einer Nullmenge) Lebesgue-integrierbar, und

$$\int f(x)dx = \int f d\lambda,$$

wobei links das Riemann-Integral und rechts das Lebesgue-Integral steht.

Beweis. (i) Wir wählen ein Intervall $(-N, N]^n$ mit $\text{supp } f \subset (-N, N]^n$ und dann eine Folge von Partitionen

$$(-N, N]^n = \bigcup_{k=1}^{m_j} I_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

mit Intervallen I_{kj} , deren Feinheit gegen 0 konvergiert. Setze für $j \in \mathbb{N}$

$$s_j := \sum_{k=1}^{m_j} c_{kj} \chi_{I_{kj}}, \quad S_j := \sum_{k=1}^{m_j} C_{kj} \chi_{I_{kj}}$$

mit

$$c_{kj} := \inf_{y \in I_{kj}} f(y), \quad C_{kj} := \sup_{y \in I_{kj}} f(y).$$

Da f gleichmäßig stetig ist, gilt $\int S_j(x)dx - \int s_j(x)dx \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$). Damit ist f Riemann-integrierbar und $\int f(x)dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int S_j(x)dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int s_j(x)dx$.

(ii) Sei f Riemann-integrierbar. Definiert man s_j und S_j wie oben, so gilt

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq S_2 \leq S_1.$$

Als Grenzwerte monotoner Folgen existieren punktweise $s(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} s_j(x)$ und $S(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} S_j(x)$ und sind wieder messbar. Es gilt $s \leq f \leq S$.

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$\int s d\lambda = \lim_{j \rightarrow \infty} \int s_j d\lambda = \lim_{j \rightarrow \infty} \int s_j(x)dx,$$

letzteres, da auf Riemann-Stufenfunktionen Riemann- und Lebesgue-Integral nach Definition übereinstimmen. Genauso gilt

$$\int S d\lambda = \lim_{j \rightarrow \infty} \int S_j(x)dx.$$

Da f Riemann-integrierbar ist, gilt außerdem

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int s_j(x)dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int S_j(x)dx$$

und damit $\int (S - s)d\lambda = 0$. Nach Lemma 4.24 folgt $S = s$ λ -fast überall und somit wegen $s \leq f \leq S$ auch $s = S = f$ fast überall. Damit ist f nach eventueller Änderung auf einer Nullmenge messbar mit

$$\int f d\lambda = \int s d\lambda = \int f(x) dx.$$

Beachte, dass wegen Beschränktheit von f und Kompaktheit des Trägers von f automatisch $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ gilt. \square

c) Iterierte Integrale

17/46:45

(21.06.21)

4.32 Beispiel. Sei $M = \{x \in [0, 1]^2 : x_2 \leq x_1^2\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_M |x|^2 dx &= \int_M (x_1^2 + x_2^2) dx \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 \int_0^{x_1^2} (x_1^2 + x_2^2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^1 (x_1^4 + \frac{x_1^6}{3}) dx_1 = (\frac{x_1^5}{5} + \frac{x_1^7}{7 \cdot 3}) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}. \end{aligned}$$

Frage: Ist (*) erlaubt? Die Antwort (ja) liefert der Satz von Fubini.

17/56:30

(21.06.21)

4.33 Satz (von Tonelli). Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann sind $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx, \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ für jedes feste x und $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy, \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ messbar (analog für vertauschtes x und y), und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx \in [0, \infty].$$

Beweis. Wir zeigen den Satz nur für den Spezialfall, dass f Riemann-integrierbar ist. Nach dem Beweis von Satz 4.31 (ii) existiert dann eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Riemann-Stufenfunktionen mit $s_k \nearrow f$ punktweise.

Sei $A = (a, b], a, b \in \mathbb{R}^2, a < b$. Dann sind folgende Funktionen offensichtlich messbar:

$$\begin{aligned} y &\mapsto \chi_A(x, y), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{für festes } x, \\ x &\mapsto \chi_A(x, y), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{für festes } y, \\ y &\mapsto \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x, y) dx, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x, y) dy, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_A d(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x, y) dy dx = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

Wegen der Linearität des Integrals folgen die Behauptungen für alle Riemann-Stufenfunktionen s_k . Als punktwiser Limes messbarer Funktionen sind somit $y \mapsto f(x, y) = \lim_k s_k(x, y)$ und $x \mapsto f(x, y)$ messbar. Mit dem Satz über monotone Konvergenz folgt die Messbarkeit von $y \mapsto \int f(x, y) dx = \lim_k \int s_k(x, y) dx$ und $x \mapsto \int f(x, y) dy$. Wieder mit monotoner Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} s_k(x, y) d(x, y) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s_k(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

□

4.34 Satz (von Fubini). Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (Lebesgue-)integrierbar. Dann sind (eventuell nach Änderung auf einer Nullmenge) die Funktionen $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$ und $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$ integrierbar, und es gilt

17/1:19:05
(21.06.21)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Beweis. Der Satz von Tonelli, angewendet auf $|f|$, liefert die Messbarkeit von $x \mapsto \int |f(x, y)| dy$. Damit ist

$$N := \left\{ x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dy = \infty \right\}$$

Borel-messbar, und wegen

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| d(x, y) < \infty$$

ist $\lambda_1(N) = 0$. Definiert man

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & \text{falls } x \notin N, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $g(x) := \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x, y) dy$, so folgt $\tilde{f} = f$ fast überall und $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Falls $f \geq 0$ (und damit auch $\tilde{f} \geq 0, g \geq 0$), so folgt wieder mit dem Satz von Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y).$$

Für beliebiges $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ folgt die Behauptung durch die Zerlegung $f = f_+ - f_-$. □

18/04:30
(24.06.21)

4.35 Korollar. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

wobei die Integrationsreihenfolge auf der rechten Seite frei wählbar ist.

Beweis. Iteriertes Anwenden des Satzes von Fubini. □

18/07:24
(24.06.21)

4.36 Korollar (Prinzip von Cavalieri¹¹). Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $t \in \mathbb{R}$ sei

$$A_t := \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in A\}$$

der Schnitt zum Wert t . Dann ist $A_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$, und

$$\lambda_n(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(A_t) dt.$$

Beweis. Dies folgt durch die Anwendung des Satzes von Tonelli auf χ_A . □

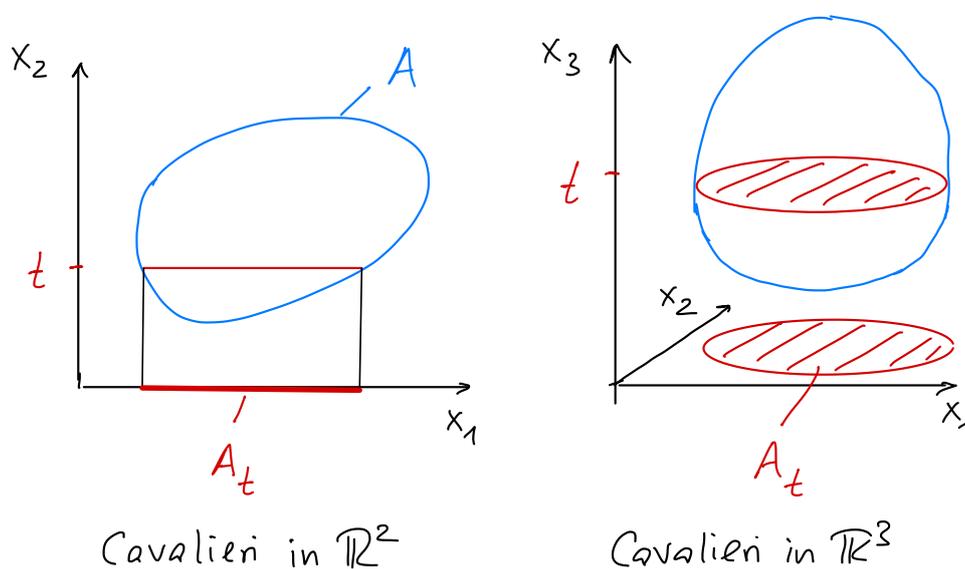


Abbildung 18: Das Prinzip von Cavalieri

¹¹Bonaventura Cavalieri, 1598-30.11.1647

4.37 Korollar. Sei $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar. Dann gilt $\text{graph } f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda_n(\text{graph } f) = 0$. Insbesondere hat jede Hyperebene im \mathbb{R}^n Lebesgue-Maß 0. 18/12:24
(24.06.21)

Beweis. O.E. sei $D = \mathbb{R}^{n-1}$, denn sonst setze f durch 0 zu einer messbaren Funktion \tilde{f} auf \mathbb{R}^n fort. Die Behauptung für f folgt dann aus $\text{graph } f = (D \times \mathbb{R}) \cap \text{graph } \tilde{f}$.

Die Koordinatenprojektionen $\text{pr}_i: x \mapsto x_i, i = 1, \dots, n$, sind stetig und damit Borel-messbar. Also ist auch

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n$$

Borel-messbar. Damit ist $\text{graph } f = \{g = 0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Wegen $\chi_{\text{graph } f}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) = 0$ für $t \neq f(x_1, \dots, x_{n-1})$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\text{graph } f}(x', t) d\lambda_1(t) = 0$$

für alle $x' := (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Nach dem Satz von Tonelli folgt

$$\lambda_n(\text{graph } f) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\text{graph } f}(x', t) d\lambda_1(t) \right) d\lambda_{n-1}(x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 0 d\lambda(x') = 0.$$

□

4.38 Beispiel (Kreisfläche, Kugelvolumen). (i) Sei $M := \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)^\top| \leq r\}$ der Kreis mit Radius r . Nach dem Prinzip von Cavalieri erhält man für die Kreisfläche 18/23:45
(24.06.21)

$$\lambda_2(M) = \int_{-r}^r \lambda_1([- \sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}]) dx = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Mit der Substitution $x = r \sin t, dx = r \cos t dt, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, erhält man

$$\lambda_2(M) = 4 \int_0^{\pi/2} r^2 \cos^2 t dt = 4r^2 \frac{\pi}{4} = \pi r^2.$$

(ii) Sei nun $K := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : |(x, y, z)^\top| \leq r\}$ die Kugel im \mathbb{R}^3 mit Radius r . Für $x \in [-r, r]$ ist der Schnitt zum Wert x gegeben durch $K_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq r^2 - x^2\}$, d.h. nach (i) ist $\lambda_2(K_x) = \pi(r^2 - x^2)$. Damit ist

$$\lambda_3(K) = \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = 2\pi(r^3 - \frac{r^3}{3}) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Somit besitzt ein Kreis im \mathbb{R}^2 mit Radius r die Fläche πr^2 und eine Kugel im \mathbb{R}^3 mit Radius r das Volumen $\frac{4}{3} \pi r^3$.

18/40:35
(24.06.21)

4.39 Beispiel (Trägheitsmoment einer Kugel). Sei $K := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : |(x, y, z)^\top| \leq r\}$ (Kugel mit Radius $r > 0$). Das Trägheitsmoment von K bzgl. der z -Achse ist gegeben durch $J := \int_K (x^2 + y^2) d(x, y, z)$. Nach dem Satz von Fubini ist

$$\begin{aligned} J &= 2 \int_K x^2 d(x, y, z) = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} x^2 dz dy dx \\ &= 16 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} x^2 dz dy dx \\ &= 16 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2 \sqrt{r^2-x^2-y^2} dy dx. \end{aligned}$$

Substituiert man $y = \sqrt{r^2-x^2} \sin t$, $dy = \sqrt{r^2-x^2} \cos t dt$, so erhält man

$$\begin{aligned} J &= 16 \int_0^r x^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{1-\sin^2 t} \sqrt{r^2-x^2} \cos t dt dx \\ &= 16 \int_0^r x^2 (r^2-x^2) dx \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= 16 \left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^5}{3} \right) \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{8}{15} \pi r^5. \end{aligned}$$

d) Der Transformationssatz

Im folgenden sei $\lambda = \lambda_n$ das Lebesgue-Maß im \mathbb{R}^n .

18/1:00:35
(24.06.21)

4.40 Definition und Satz. (i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, μ ein Maß auf $(U, \mathcal{B}(U))$, und $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ messbar. Dann ist $\mu \circ \Phi^{-1}: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$, $A \mapsto \mu(\Phi^{-1}(A))$ ein Maß, das Bildmaß von μ unter Φ .

(ii) Ein Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ heißt translationsinvariant, falls $\mu \circ \Phi^{-1} = \mu$ für alle Translationen $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + c$ mit $c \in \mathbb{R}^n$ gilt. Das Maß μ heißt bewegungsinvariant, falls $\mu \circ \Phi^{-1} = \mu$ gilt für alle Bewegungen $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Sx + c$ mit $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale Matrix und $c \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Die σ -Additivität folgt sofort aus

$$\lambda\left(\Phi^{-1}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)\right) = \lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Phi^{-1}(A_k)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(\Phi^{-1}(A_k)),$$

die anderen Eigenschaften eines Maßes sind klar. □

4.41 Satz. (i) λ ist translationsinvariant.

18/1:11:52

(ii) Sei $W := ((0, \dots, 0), (1, \dots, 1)) = (0, 1]^n$ der n -dimensionale Einheitswürfel. Falls μ ein translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit $\mu(W) =: \alpha < \infty$ ist, so ist $\mu = \alpha\lambda$.

(24.06.21)

Beweis. (i) Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $\Phi(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}^n$, gilt $\lambda \circ \Phi^{-1}((a, b]) = \lambda((a - c, b - c]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) = \lambda((a, b])$. Nach Satz 4.11 ist $\lambda \circ \Phi^{-1} = \lambda$.

(ii) Sei $a_k := (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$, $W_k := (0, a_k]$ und $G_k := \{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, 1\}^n$. Dann ist $W = W_1 = \bigcup_{r \in G_k} (r - a_k, r]$ und damit $\mu(W) = \alpha = k^n \mu(W_k)$. Wegen $\alpha < \infty$ folgt $\mu(W_k) = \frac{\alpha}{k^n} = \alpha\lambda(W_k)$.

Betrachte nun $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^n$, wobei o.E. $a = 0$, $b = (\frac{m_1}{k}, \dots, \frac{m_n}{k})$. Dann ist $(0, b] = \bigcup_{r \in H_k} (r - a_k, r]$ mit der Indexmenge $H_k := \prod_{i=1}^n \{\frac{1}{k}, \dots, \frac{m_i}{k}\}$. Damit

$$\mu((0, b]) = \sum_{r \in H_k} \mu((r - a_k, r]) = \alpha \cdot \frac{m_1}{k} \cdot \dots \cdot \frac{m_n}{k} = \alpha\lambda((0, b]).$$

Somit gilt $\mu((a, b]) = \alpha\lambda((a, b])$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}^n$ mit $a < b$.

Zu $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$, wähle nun $a_k, b_k \in \mathbb{Q}^n$ mit $(a_k, b_k] \nearrow (a, b]$ und erhalte $\mu((a, b]) = \alpha\lambda((a, b])$. Nach Satz 4.11 folgt $\mu = \alpha\lambda$. \square

4.42 Satz. λ ist bewegungsinvariant.

19/03:37

(28.06.21)

Beweis. Sei $\Phi(x) = Sx + c$, d.h. $\Phi = T_c \circ S$ mit $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ orthogonal und $T_c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + c$ mit $c \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\Phi = T_c \circ S = S \circ T_d$ mit $d := S^{-1}c$ und damit

$$\lambda \circ \Phi^{-1} = (\lambda \circ S^{-1}) \circ T_c^{-1} = (\lambda \circ T_d^{-1}) \circ S^{-1} = \lambda \circ S^{-1} \quad (4-3)$$

nach Satz 4.41 (i). Zu zeigen ist also noch $\lambda \circ S^{-1} = \lambda$.

Da $S^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, folgt $\alpha := (\lambda \circ S^{-1})(W) < \infty$. Nach (4-3) ist $\lambda \circ S^{-1}$ translationsinvariant, und nach Satz 4.41 (ii) folgt $\lambda \circ S^{-1} = \alpha \cdot \lambda$. Für $K := \overline{B(0, 1)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ ist $S^{-1}(K) = K$, d.h. $(\lambda \circ S^{-1})(K) = \lambda(S^{-1}(K)) = \lambda(K) > 0$ und damit $\alpha = 1$. \square

4.43 Satz. Sei $T \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann gilt

19/11:34

(28.06.21)

$$(\lambda \circ T^{-1})(B) = \frac{1}{|\det T|} \lambda(B) \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

bzw.

$$\lambda(T(B)) = |\det T| \cdot \lambda(B) \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)).$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz 4.42, Gleichung (4-3), sieht man, dass $\lambda \circ T^{-1}$ translationsinvariant ist. Da $\alpha := (\lambda \circ T^{-1})(W) = \lambda(T^{-1}(W)) < \infty$, folgt aus Satz 4.41 (ii) $\lambda \circ T^{-1} = \alpha \cdot \lambda$.

Nach einem Satz der linearen Algebra existieren orthogonale Matrizen S_1, S_2 und eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $T = S_1 D S_2$. Für $B := S_1(W)$ folgt

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha \lambda(W) = \alpha \cdot (\lambda \circ S_1)(W) = \alpha \lambda(B) \\ &= (\lambda \circ T^{-1})(B) = \lambda(S_2^{-1} \circ D^{-1} \circ S_1^{-1}(B)) \\ &= \lambda \circ S_2^{-1}(D^{-1}(W)) = \lambda(D^{-1}(W)) \\ &= \lambda\left(\prod_{j=1}^n (0, |\lambda_j|^{-1}]\right) = \prod_{j=1}^n |\lambda_j|^{-1} = |\det D|^{-1} = |\det T|^{-1}. \end{aligned}$$

□

Für lineare bijektive Abbildungen haben wir also die Gleichheit $\lambda(T(B)) = |\det T| \cdot \lambda(B)$ ($B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$). Seien nun $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi: U \rightarrow V$, $z \mapsto \Phi(z) =: x$, ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann gilt $x_2 - x_1 = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \Phi'(z_1)(z_2 - z_1) + \dots$. Somit liegt es nahe, dass Würfelinhalte lokal um den Faktor $|\det \Phi'(z)|$ verstärkt werden, d.h. dass gilt “ $dx = |\det \Phi'(z)| dz$ ”. Dies ist tatsächlich der Fall, wie der folgende Satz zeigt, der erst in Analysis III vollständig bewiesen wird.

19/26:30
(28.06.21)

4.44 Satz (Transformationssatz). Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi: U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Sei $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann ist f über $V = \Phi(U)$ genau dann integrierbar, wenn $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'|: U \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über U ist, und dann gilt

$$\int_{\Phi(U)} f(x) dx = \int_U f(\Phi(z)) \cdot |\det \Phi'(z)| dz.$$

19/36:55
(28.06.21)

4.45 Beispiel (Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2). Bereits in Beispiel 2.19 hatten wir die Koordinatentransformation von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2 angegeben:

$$\mathbb{R}^2 \in (x, y) = \Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi),$$

wobei $\Phi: Q \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ mit $Q := \{(r, \varphi) \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$. Φ ist bijektiv, und es gilt

$$\det \Phi'(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r > 0 \text{ in } Q,$$

also ist Φ ein Diffeomorphismus. ($\Phi: \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist dagegen nicht bijektiv, deshalb die Abbildung auf die „geschlitzte Ebene“ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$). Die unbeschränkte Menge $N := \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ ist eine Nullmenge, so dass wir schreiben können:

$$\int_{B(0,R)} f(x, y) d(x, y) = \int_{B(0,R) \setminus N} f(x, y) d(x, y) = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi dr,$$

wobei die letzte Gleichung gerade aus der Transformationsformel resultiert.

Für $f = 1$ erhält man wieder die Fläche des Kreises:

$$\lambda(B(0, R)) = \int_{B(0, R)} 1 d(x, y) = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\varphi dr = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2.$$

Für $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ erhält man

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\varphi = \frac{2\pi}{2} (-e^{-r^2}) \Big|_0^\infty = \pi.$$

Wegen $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^2$ folgt damit $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ und somit für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Standard-Normalverteilung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1.$$

5. Kurvenintegrale und Flächenintegrale, der Satz von Gauß

19/57:17
(28.06.21)

5.1 Worum geht's? Nachdem die maß- und integrationstheoretischen Grundlagen bereitgestellt wurden, können wir nun Funktionen integrieren, welche auf einer Kurve oder einer Fläche definiert sind. Für das Flächenintegral ist die Gramsche Determinante zentral, welche eine der Fläche angepasste Skalierung des Integranden bewirkt. Einer der wichtigsten Sätze für Flächenintegrale ist der Satz von Gauß, welcher das Analogon zur partiellen Integration in \mathbb{R} darstellt.

a) Kurvenintegrale und 1-Formen

Unser Ziel ist es nun, Wegintegrale zu erklären. Wir erinnern uns an die Definition eines Weges als stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diese können noch recht exotisch sein, wenn man an das Beispiel der Peanokurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ (surjektiv) denkt. Für stückweise differenzierbare Wege haben wir deren Länge über

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

festgelegt. Zunächst behandeln wir Kurvenintegrale, also Integrale über ein Integrationsgebiet $\Gamma = \gamma([a, b])$ und wollen zu einer Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: $\int_\alpha^\beta f'(x) dx = f(\beta) - f(\alpha)$ gelangen. Später beweisen wir dann eine entsprechende Aussage über Flächenintegrale.

19/1:05:16
(28.06.21)

5.2 Definition. Unter einem Vektorfeld auf einer Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine Abbildung $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Damit wird jedem Punkt $x \in U$ ein Vektor $v(x) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet. Meist denkt man sich den Vektor $v(x)$ im Fußpunkt x angetragen.

Wir führen nun Integrale über Γ ein und denken dabei beispielsweise an die folgende Situation: Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ ein glatter Weg, $v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Ist v etwa ein Kraftfeld, so berechnet sich die physikalische Arbeit als „Kraft mal Weg“ und man möchte das Integral

$$A := \int_\Gamma \langle v(x), dx \rangle := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Skalarprodukt in } \mathbb{R}^3$$

berechnen, also v „längs Γ “ integrieren, siehe Abbildung 19.

Einen Kalkül zur Berechnung solcher Integrale liefern die „Pfaffschen Differentialformen¹²“. In diesem Zusammenhang sind auch die Namen Henri Poincaré¹³ und

¹²Johann Friedrich Pfaff, 22.12.1765 – 21.4.1825

¹³Henri Poincaré, 29.4.1854 – 17.7.1912

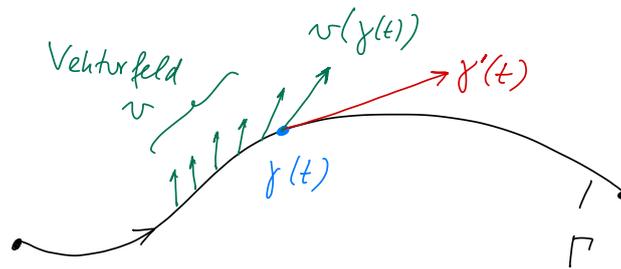


Abbildung 19: Wegintegral über ein Vektorfeld

Cartan¹⁴ zu nennen.

5.3 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$.

a) Sei $\omega : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, h) \mapsto \omega(x, h)$ stetig und linear in h . Dann heißt ω eine 1-Form in U . Die 1-Form ω heißt stetig differenzierbar, falls die Abbildung $x \mapsto \omega(x, h)$ für jedes feste h stetig differenzierbar ist.

19/1:13:49
(28.06.21)

b) Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt auch eine 0-Form in U .

Sei $\omega : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine 1-Form. Wir schreiben die zweite Variable h bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^n : $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$, e_i i -ter Einheitsvektor des \mathbb{R}^n . Damit ist $\omega(x, h) = \sum_{i=1}^n \omega(x, e_i) h_i$, d.h. mit $\omega_i(x) := \omega(x, e_i)$ gilt:

$$\omega(x, h) = \langle \omega(x), h \rangle, \quad \omega(x) = \begin{pmatrix} \omega_1(x) \\ \vdots \\ \omega_n(x) \end{pmatrix}.$$

Falls ω stetig differenzierbar ist, so gilt $x \mapsto \omega(x) \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$. Dem klassischen „ dx “ geben wir hiermit folgenden Sinn:

$$dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \mapsto h_i = dx_i(h) = \langle h, e_i \rangle.$$

Damit erhält man

$$\omega(x, \cdot) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i =: \langle \omega(x), dx \rangle.$$

Speziell betrachten wir hier 1-Formen auf dem Wertebereich von glatten Kurven Γ .

5.4 Definition. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung von Γ . Dann ist

$$\int_{\Gamma} \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t)) dt$$

19/1:27:42
(28.06.21)

¹⁴Élie Joseph Cartan, 9.4.1869 – 6.5.1951

das Kurvenintegral der 1-Form ω längs Γ .

Erinnern wir uns an das obige Beispiel der physikalischen Arbeit, so ist $\omega(x, \cdot) = \langle v(x), dx \rangle$, d.h. $A = \int_{\Gamma} \omega$.

Die Definition des Kurvenintegrals ist von der speziellen Darstellung unabhängig, solange dieselbe Orientierung gewählt wird: Denn seien $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($j = 1, 2$) und $\varphi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ mit $\varphi' > 0$, so dass $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Dann gilt

$$\int_{a_1}^{b_1} \omega(\gamma_1(t), \gamma_1'(t)) dt = \int_{a_2}^{b_2} \omega(\gamma_1 \circ \varphi(\tau), \gamma_1' \circ \varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau = \int_{a_2}^{b_2} \omega(\gamma_2, \gamma_2')(\tau) d\tau.$$

Weiterhin gelten offensichtlich die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega_1 + \omega_2 &= \int_{\Gamma} \omega_1 + \int_{\Gamma} \omega_2 \\ \int_{\Gamma} c\omega &= c \int_{\Gamma} \omega \quad (c \in \mathbb{R}) \\ \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega &= \int_{\Gamma} \omega, \quad \text{für } \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2. \end{aligned}$$

20/13:07
(01.07.21)

5.5 Beispiele. a) Betrachte das Vektorfeld $v: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$ und die Kurve $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ in \mathbb{R}^2 mit

$$\Gamma_1 = \left\{ x = \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{ x = \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, 1 \leq t \leq 2 \right\},$$

siehe Abbildung 20.

Für die 1-Form $\omega: (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, h) \mapsto \langle v(x), h \rangle$ erhält man das Kurvenintegral

$$A := \int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega, \quad \text{wobei } \omega(x, \cdot) = \langle v(x), dx \rangle.$$

Wegen $\omega(\gamma_1, \gamma_1') = \langle v(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t) \rangle = 0$ ist $\int_{\Gamma_1} \omega = 0$, und damit folgt

$$A = \int_{\Gamma_2} \omega = \int_1^2 \langle v(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t) \rangle dt = \int_1^2 \left\langle \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln 2.$$

Verlängert man Γ_1 zu einer vollen Kreislinie $\tilde{\Gamma}_1$, so erhält man einen geschlossenen Weg, und wie oben gilt $\int_{\tilde{\Gamma}_1} \omega = 0$.

b) Wieder sei $\omega: (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, h) \mapsto \langle v(x), h \rangle$, wobei jetzt das Vektorfeld v gegeben ist durch

$$v: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

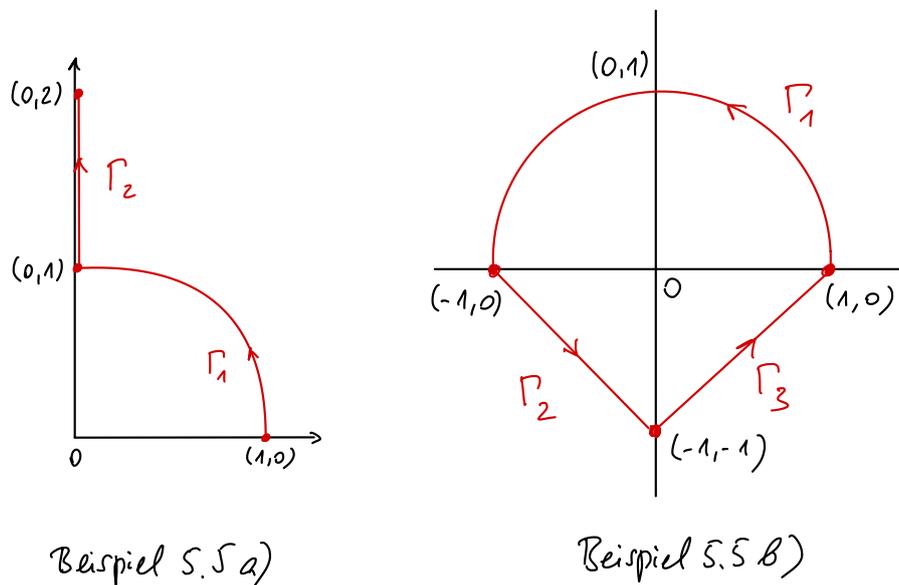


Abbildung 20: Die Kurven aus Beispiel 5.5

Sei $\Gamma := \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ gegeben durch die jeweiligen Parametrisierungen

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t-1 \\ -t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \gamma_3(t) &= \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \omega &= \int_0^\pi \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \pi \\ \int_{\Gamma_2} \omega &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{t^2 + (t-1)^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t^2 + (1-t)^2} dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{(\tau + \frac{1}{2})^2 + (\tau - \frac{1}{2})^2} d\tau \\ &= 2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{4\tau^2 + 1} d\tau = \int_{-1}^1 \frac{1}{s^2 + 1} ds = \arctan s \Big|_{s=-1}^{s=1} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Analog folgt $\int_{\Gamma_3} \omega = \frac{\pi}{2}$ und damit $\int_{\Gamma} \omega = 2\pi$.

Wenn man jetzt Γ_1 zu einer vollen Kreislinie $\tilde{\Gamma}_1$ verlängert, so ergibt sich $\int_{\tilde{\Gamma}_1} \omega = 2\pi$.

Während in obigem Beispiel 5.5 a) das Integral über die geschlossene Kreislinie den Wert 0 ergibt, gilt dies nicht für Beispiel b). In Beispiel 5.5 b) verbindet die Kurve Γ_1 den Punkt $(1, 0)$ mit dem Punkt $(-1, 0)$, und es gilt $\int_{\Gamma_1} \omega = \pi$, aber auch die Kurve $-\Gamma_2 - \Gamma_3$ (d.h. die Kurve $\Gamma_2 + \Gamma_3$ in umgekehrter Richtung durchlaufen) verbindet diese beiden Punkte, und es gilt $\int_{-\Gamma_2-\Gamma_3} \omega = -\pi$.

Es stellt sich daher die Frage, wann Kurvenintegrale $\int_{\Gamma} \omega$ wegunabhängig sind, d.h. nur vom Anfangs- und Endpunkt von Γ abhängen, bzw. wann Integrale über geschlossene Flächen den Wert 0 ergeben.

20/49:51
(01.07.21)

5.6 Definition und Bemerkung. a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U; \mathbb{R})$. Dann ist $df: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, h) \mapsto f'(x, h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$ eine 1-Form in U . Sie heißt das totale Differential von f . Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} df &= \int_a^b f'(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \\ &= f(B) - f(A) \end{aligned}$$

mit $B := \gamma(b)$ und $A := \gamma(a)$, d.h. das Integral hängt nur von den Endpunkten ab.

b) Existiert zur 1-Form $\omega: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine 0-Form $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega(x, h) = f'(x, h) = (df)(x, h)$, so heißt ω exakt und f Stammfunktion zu ω .

Schreibt man ω in der Form $\omega(x, h) = \langle \omega(x), h \rangle$, so ist also ω exakt, falls ein f existiert mit $\omega(x) = \nabla f(x)$.

c) Eine 1-Form $\omega: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt wegunabhängig, falls $\int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega$ für alle in U verlaufenden Wege Γ_1, Γ_2 mit denselben Anfangs- und Endpunkten gilt.

Eine Antwort auf die obigen Fragen und eine Verbindung zur vorangegangenen Definition liefert der

20/1:03:30
(01.07.21)

5.7 Satz. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und $\omega: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine 1-Form. Dann ist ω genau dann exakt, wenn ω wegunabhängig ist.

Beweis. „ \Rightarrow “: Ist bereits in Bemerkung 5.6 a) bewiesen worden.

„ \Leftarrow “: Sei $x_0 \in U$ fest gewählt und $\Gamma(x_0, x)$ verbinde x_0 mit $x \in U$, dann ist

$$f(x) := \int_{\Gamma(x_0, x)} \omega$$

wohldefiniert, da das Integral nach Voraussetzung wegunabhängig ist. Das so definierte f ist die gesuchte Funktion, denn $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit folgendem Argument: Verbindet man x mit $x+h$ geradlinig (für kleine h) und $\Gamma_{x, x+h}$ sei die Verbindungs-

strecke, dann ist

$$\begin{aligned}
 f(x+h) - f(x) &= \int_{\Gamma_{x,x+h}} \omega = \int_0^1 \omega(x+th, h) dt \\
 &= \omega(x+\tau h, h) \quad \text{für ein } \tau \in (0,1), \tau = \tau(x, h) \\
 &= \omega(x, h) + \omega(x+\tau h, h) - \omega(x, h) \\
 &= \omega(x, h) + r(x, h)|h| \\
 \text{mit } r(x, h) &:= \begin{cases} \frac{\omega(x+\tau h, h) - \omega(x, h)}{|h|} & , h \neq 0 \\ 0 & , h = 0 \end{cases} \\
 &= \omega\left(x+\tau h, \frac{h}{|h|}\right) - \omega\left(x, \frac{h}{|h|}\right) \quad \text{für } h \neq 0,
 \end{aligned}$$

d.h., da ω stetig: $|r(x, h)| < \varepsilon$, falls $|\tau h| < \delta(\varepsilon, x)$. Somit ist f an der Stelle x differenzierbar mit $f'(x) = \omega(x, \cdot)$. \square

5.8 Beispiele. Wenn wir die Beispiele 5.5 betrachten, so gilt:

20/1:21:10
(01.07.21)

a) $\omega(x) = \frac{x}{|x|^2} = \nabla \ln|x|$ in $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, d.h. ω ist exakt.

b) $\omega(x) = \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ ist nicht exakt, da für den geschlossenen Weg Γ gilt $\int_{\Gamma} \omega = 2\pi \neq 0$.

Falls $\omega: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, h) \mapsto \langle \omega(x), h \rangle$ stetig differenzierbar und exakt ist, so folgt wegen $\omega(x) = \nabla f(x)$ nach dem Satz von Schwarz (Satz 2.25)

$$\partial_i \omega_j(x) = \partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x) = \partial_j \omega_i(x) \quad (x \in U)$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$.

Die Bedingung ist jedoch nicht hinreichend, wie Beispiel 5.5 b) zeigt:

$$\partial_2 \omega_1 = \frac{-1 \cdot |x|^2 + 2x_2^2}{|x|^4} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^4}, \quad \text{sowie} \quad \partial_1 \omega_2 = \frac{|x|^2 - 2x_1^2}{|x|^4} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^4}.$$

Eine hinreichende Bedingung erhält man unter zusätzlichen Voraussetzungen an U :

5.9 Definition. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig bezüglich eines Punktes $p \in U$, wenn für alle $x \in U$ die Verbindungsstrecke von p nach x in U enthalten ist (siehe Abbildung 21).

21/11:36
(05.07.21)

5.10 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig und $\omega: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare 1-Form mit $\partial_j \omega_i = \partial_i \omega_j$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Dann ist ω exakt.

21/14:07
(05.07.21)

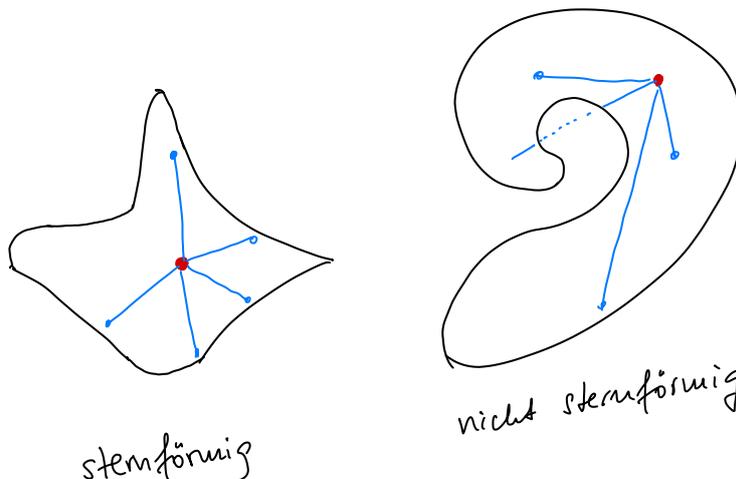


Abbildung 21: Der Begriff eines sternförmigen Gebietes

Beweis. O.E. sei U sternförmig bezüglich des Nullpunktes. Durch geradliniges Integrieren längs der Verbindungsstrecke $\Gamma_{0,x} = \{\gamma(t) = tx \mid 0 \leq t \leq 1\}$ von 0 nach x geben wir eine Stammfunktion an:

$$f(x) := \int_{\Gamma_{0,x}} \omega = \int_0^1 \omega(tx, x) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) x_i dt$$

Da nach Voraussetzung ω_i stetig differenzierbar ist, folgt

$$\partial_j f(x) = \int_0^1 \omega_j(tx) dt + \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i t \partial_j \omega_i(tx) dt = \int_0^1 \omega_j(tx) dt + \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i t \partial_i \omega_j(tx) dt.$$

Mit partieller Integration erhält man

$$\int_0^1 t \sum_{i=1}^n x_i \partial_i \omega_j(tx) dt = t \omega_j(tx) \Big|_0^1 - \int_0^1 \omega_j(tx) dt = \omega_j(x) - \int_0^1 \omega_j(tx) dt$$

und damit $\partial_j f(x) = \omega_j(x)$. □

21/29:00

(05.07.21)

5.11 Beispiele. Wiederum betrachten wir die Beispiele 5.5:

a) Dieses Beispiel zeigt, dass in $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht beide Bedingungen nötig sind, denn U ist nicht sternförmig, doch es gilt $\omega(x) = \nabla \ln |x|$ dort.

b) Dieses Beispiel wollen wir nun auf der sternförmigen Menge $U := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$ betrachten und eine Stammfunktion von

$$\omega(x) = \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

berechnen. Wir wählen $p = (1, 0)$ und nach $x = (x_1, x_2)$ den Weg $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ mit

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(t) = (t, 0) \mid 1 \leq t \leq x_1\} \text{ und } \Gamma_2 = \{\gamma_2(t) = (x_1, t) \mid 0 \leq t \leq x_2\},$$

welcher eine einfachere Berechnung des Integrals über ω zuläßt als die direkte Verbindungsstrecke von p nach x . Diese freie Wahl des Weges ist jetzt wegen der Wegunabhängigkeit (nach Satz 5.7) möglich. Für die Stammfunktion erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\Gamma} \omega = \int_1^{x_1} \frac{1}{t^2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt + \int_0^{x_2} \frac{1}{x_1^2 + t^2} \left\langle \begin{pmatrix} -t \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{x_2} \frac{x_1}{x_1^2 + t^2} dt = \int_0^{x_2/x_1} \frac{1}{1 + \tau^2} d\tau = \arctan \frac{x_2}{x_1}. \end{aligned}$$

Man darf aber nicht beliebig um den Nullpunkt herum integrieren, weil man sonst womöglich einen einmal gewählten Ast der arctan-Funktion verlassen wird.

Im Folgenden werden wir analog zur Bogenlänge von Kurven ein Flächenmaß einführen. Sei also $\gamma : T \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung einer m -dimensionalen Fläche, $\Gamma = \gamma(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\gamma'(u, \cdot)$ habe Rang p .

Was soll nun das Maß $A(\Gamma)$ von Γ sein? Betrachte dazu ein m -dimensionales Parallelepipiped (Spat) $P := \{x = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j : \lambda_j \in [0, 1]\}$ mit Kantenvektoren $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, siehe Abbildung 22. Es gilt $P = S([0, 1]^m)$ mit der Matrix $S := (a_1, \dots, a_m)$.

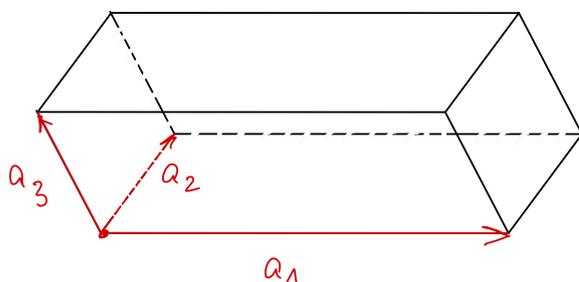


Abbildung 22: Ein Parallelepipiped mit den Kantenvektoren a_1, a_2, a_3

Im Falle $n = m$ erhält man (vgl. Satz 4.43) $A(P) = \lambda_m(S([0, 1]^m)) = |\det S|$, d.h. $A(P)^2 = (\det S)^2 = (\det S^T) \det S = \det(S^T S) = \det G(a_1, \dots, a_m)$

$$G(a_1, \dots, a_m) := \left(\langle a_i, a_j \rangle \right)_{i,j=1,\dots,m} = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle a_m, a_1 \rangle & \dots & \langle a_m, a_m \rangle \end{pmatrix}.$$

Diese Formel ist aber auch für $m < n$ sinnvoll und zeigt, dass das m -dimensionale Volumen eines Würfels unter der Abbildung S mit dem Faktor $\sqrt{G(a_1, \dots, a_m)}$ multipliziert wird.

Sei nun $\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung einer m -dimensionalen Fläche Γ . Lokal an der Stelle $x = \gamma(u)$ wird die Fläche (approximativ) durch die Vektoren $\gamma(u + he_i) - \gamma(u)$, $i = 1, \dots, m$, aufgespannt. Im Limes erhält man die partiellen Ableitungen $\partial_i \gamma(u)$. Mit $a_i := \partial_i \gamma(u) \in \mathbb{R}^n$ gilt $\gamma'(u) = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Es ist daher plausibel, dass das m -dimensionale Volumen eines Würfels lokal mit dem Faktor $\sqrt{(\langle a_i, a_j \rangle)_{i,j=1,\dots,m}} = \sqrt{\det(\gamma'(u)^\top \gamma'(u))}$ verstärkt wird.

21/1:06:05
(05.07.21)

5.12 Definition. Seien $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung einer m -dimensionalen Fläche Γ .

(i) Dann heißt

$$g: U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}, u \mapsto g(u) = \gamma'(u)^\top \gamma'(u) = (\langle \partial_i \gamma(u), \partial_j \gamma(u) \rangle)_{i,j=1,\dots,m}$$

die Gramsche Matrix¹⁵ (oder Maßtensor) zu γ und $\det g(u)$ die Gramsche Determinante zu γ .

(ii) Der Flächeninhalt $A(\Gamma)$ (“Areal”) von Γ ist definiert durch

$$A(\Gamma) := \int_U \sqrt{\det g(u)} du = \int_U \sqrt{\det(\gamma'(u)^\top \gamma'(u))} du.$$

21/1:17:00
(05.07.21)

5.13 Lemma. (i) Der Inhalt einer Fläche ist invariant gegenüber Bewegungen im \mathbb{R}^n .

(ii) Der Inhalt einer Fläche ist unabhängig von der Parametrisierung der Fläche.

Beweis. (i) Sei $T(x) = Sx + c$ eine Bewegung. Dann ist $\tilde{\gamma} := T \circ \gamma$ eine Parametrisierung der Fläche $\tilde{\Gamma} := T(\Gamma)$. Es folgt $\tilde{\gamma}'(u) = S\gamma'(u)$ und damit $\tilde{\gamma}'(u)^\top \tilde{\gamma}'(u) = \gamma'(u)^\top S^\top S \gamma'(u) = \gamma'(u)^\top \gamma'(u)$, da S orthogonal ist.

(ii) Seien $\gamma_j: U_j \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$ äquivalente Parametrisierungen von Γ , also $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \Phi$ mit $\Phi: U_2 \rightarrow U_1$ diffeomorph und $\det \Phi' > 0$. Dann folgt $\gamma_2'(u) = \gamma_1'(\Phi(u))\Phi'(u)$ und damit

$$g_{\gamma_2}(u) = \gamma_2'(u)^\top \gamma_2'(u) = \Phi'(u)^\top \gamma_1'(\Phi(u)) \gamma_1'(\Phi(u)) \Phi'(u),$$

also

$$\det g_{\gamma_2}(u) = |\det \Phi'(u)|^2 \det g_{\gamma_1}(u).$$

Somit erhält man für die zugehörigen Flächeninhalte nach dem Transformationssatz

$$\int_{U_2} \sqrt{\det g_{\gamma_2}(u)} du = \int_{U_2} \sqrt{\det g_{\gamma_1}(\Phi(u))} |\det \Phi'(u)| du = \int_{U_1} \sqrt{\det g_{\gamma_1}(u)} du.$$

□

¹⁵Jorgen Pedersen Gram, 27.6.1850 – 29.4.1916

Wir hatten für das Flächenmaß $A(\Gamma) = \int_U \sqrt{\det g(u)} du$ mit $g_{ij}(u) = \langle \partial_i \gamma(u), \partial_j \gamma(u) \rangle$ hergeleitet, wobei $\gamma: U \rightarrow \Gamma$ eine Parametrisierung der m -Fläche Γ war. Es gilt somit “ $dA = \sqrt{\det g(u)} du$ ”. Dies ist die Grundlage des Integrals über m -dimensionale Flächen.

5.14 Definition. Sei $\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung einer m -Fläche Γ mit Gramscher Matrix $g(u)$ und $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f integrierbar über Γ , falls $u \mapsto f(\gamma(u))\sqrt{\det g(u)}$ integrierbar über U ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_{\Gamma} f dA := \int_{\Gamma} f(x) dA(x) := \int_U f(\gamma(u)) \sqrt{\det g(u)} du.$$

Andere Schreibweise ist $\int_{\Gamma} f dS$ (“surface”). Im Fall $m = 1$ schreibt man auch $\int_{\Gamma} f ds$ (s : Bogenlänge).

Eine Teilmenge $M \subset \Gamma$ heißt integrierbar, falls χ_M integrierbar ist, und in diesem Fall heißt $A(M) := \int_{\Gamma} \chi_M dA$ der m -dimensionale Flächeninhalt von $M \subset \mathbb{R}^n$.

5.15 Bemerkung. (i) Wie in Lemma 5.13 (ii) sieht man mit dem Transformationsatz, dass das Integral wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Parametrisierung ist.

(ii) Für $f = 1$ erhält man wieder $A(\Gamma) = \int_{\Gamma} 1 dA$. Für $m = 1$ ist $g(u) = \langle \gamma'(u), \gamma'(u) \rangle$ für $u \in U = (a, b)$ und damit

$$A(\Gamma) = \int_{\Gamma} 1 dA = \int_a^b |\gamma'(u)| du$$

die Bogenlänge der Kurve Γ . In diesem Fall ist

$$\int_{\Gamma} f(x) ds(x) = \int_a^b f(\gamma(u)) |\gamma'(u)| du.$$

(iii) Als Beziehung zum Kurvenintegral für 1-Formen ergibt sich für $m = 1$ und $\omega(x, h) = \langle v(x), h \rangle$ mit $v: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \vec{t}(\gamma(t)) \rangle |\gamma'(t)| dt = \int_{\Gamma} \langle v, \vec{t} \rangle ds,$$

wobei $\vec{t}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ den Tangenteneinheitsvektor bezeichnet.

(iv) Für $m = n$ erhält man

$$\begin{aligned} A(\Gamma) &= \int_{\Gamma} 1 dA = \int_U 1 \cdot \sqrt{\det(\gamma'(u)^{\top} \gamma'(u))} du \\ &= \int_U 1 \cdot |\det \gamma'(u)| du = \int_{\Gamma} 1 dx = \lambda_n(\Gamma), \end{aligned}$$

der n -dimensionale Flächeninhalt im \mathbb{R}^n ist also wieder das Lebesgue-Maß (Volumen).

22/25:20
(08.07.21)

5.16 Beispiel (Rotationsflächen). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^1(I; \mathbb{R})$ mit $f(t) \geq 0$, $t \in I$. Setze $\Gamma := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : z \in I, x^2 + y^2 = f(z)^2\}$. Dann ist

$$\gamma: I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} f(t) \cos \varphi \\ f(t) \sin \varphi \\ t \end{pmatrix}$$

bis auf eine Nullmenge eine Parametrisierung von Γ . Es gilt

$$\gamma'(t, \varphi) = \begin{pmatrix} f'(t) \cos \varphi & -f(t) \sin \varphi \\ f'(t) \sin \varphi & f(t) \cos \varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\gamma'(t)^\top \gamma'(t) = \begin{pmatrix} f'(t)^2 + 1 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\sqrt{\det g(t, \varphi)} = f(t) \sqrt{f'(t)^2 + 1}$ und damit

$$\begin{aligned} A(\Gamma) &= \int_{\Gamma} 1 dA = \int_{I \times (0, 2\pi)} \sqrt{\det g(t, \varphi)} d(t, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_I f(t) \sqrt{f'(t)^2 + 1} dt d\varphi \\ &= 2\pi \int_I f(t) \sqrt{f'(t)^2 + 1} dt. \end{aligned}$$

Speziell sei $f(t) = r$ und $I = (0, L)$. Dann ist Γ die Oberfläche eines Zylinders der Länge L mit Radius r , und man erhält $A(\Gamma) = 2\pi \int_0^L r dt = 2\pi Lr$.

22/39:20
(08.07.21)

5.17 Beispiel (Oberfläche eines Graphen). Sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $F \in C^1(U; \mathbb{R})$. Dann ist $\Gamma := \text{graph } F \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$ -dimensionale Fläche mit Parametrisierung $\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}^n, u \mapsto (u, F(u))^\top$. Dann gilt

$$\gamma'(u) = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ \nabla F(u)^\top \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \det(\gamma'(u)^\top \gamma'(u)) &= \det \left[\begin{pmatrix} I_{n-1} & \nabla F(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ \nabla F(u)^\top \end{pmatrix} \right] \\ &= \det (I_{n-1} + \nabla F(u) \nabla F(u)^\top) \\ &= 1 + |\nabla F(u)|^2, \end{aligned}$$

wobei die Formel $\det(I+aa^\top) = 1+|a|^2$ verwendet wurde. Somit ist für integrierbares $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\Gamma} f dA = \int_U f(u, F(u)) \sqrt{1 + |\nabla F(u)|^2} du.$$

Insbesondere erhält man $A(\text{graph } F) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla F(u)|^2} du$.

Sei nun speziell $U := \{u \in \mathbb{R}^{n-1} : |u| < r\}$ und $F(u) := \sqrt{r^2 - |u|^2}$ für $r > 0$. Dann ist $\Gamma := \text{graph } F = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r, x_n > 0\}$ die Nordhalbkugel mit Radius r . Wegen $\nabla F(u) = -\frac{u}{\sqrt{r^2 - |u|^2}}$ erhält man $\det g(u) = 1 + |\nabla F(u)|^2 = 1 + \frac{|u|^2}{r^2 - |u|^2} = \frac{r^2}{r^2 - |u|^2}$. Somit ist

$$\int_{\Gamma} f dA = \int_{|u| < r} f(u, \sqrt{r^2 - |u|^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - |u|^2}} du = \int_{|v| < 1} r^{n-1} \frac{f(rv, r\sqrt{1 - |v|^2})}{\sqrt{1 - |v|^2}} dv,$$

wobei die Substitution $u = rv$, $du = r^{n-1} dv$ verwendet wurde.

5.18 Satz. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{|x|=r} f(x) dA(x) \right) dr.$$

22/59:55
(08.07.21)

Beweis. Sei $U := \{u \in \mathbb{R}^{n-1} : |u| < 1\}$. Wir betrachten die beiden Diffeomorphismen Φ_+ und Φ_- , gegeben durch

$$\Phi_{\pm}: U \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\pm}^n, \begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ru \\ \pm r \sqrt{1 - |u|^2} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbb{R}_{\pm}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \pm x_n > 0\}$. Es gilt

$$\Phi'_{\pm}(u, r) = \begin{pmatrix} rI_{n-1} & u \\ \mp ru^\top & \pm \sqrt{1 - |u|^2} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\det \Phi'_{\pm}(u, r) = \frac{\pm r^{n-1}}{\sqrt{1 - |u|^2}} \det \begin{pmatrix} I_{n-1} & u \\ -u^\top & 1 - |u|^2 \end{pmatrix} = \frac{\pm r^{n-1}}{\sqrt{1 - |u|^2}}.$$

Da $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ eine Nullmenge ist, folgt nach dem Transformationssatz

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}_-^n} f(x) dx \\ &= \int_{U \times (0, \infty)} f(\Phi_+(u, r)) |\det \Phi'_+(u, r)| d(u, r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{U \times (0, \infty)} f(\Phi_-(u, r)) |\det \Phi'_-(u, r)| d(u, r) \\
& = \int_0^\infty \int_U f(ru, r\sqrt{1-|u|^2}) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|u|^2}} dudr \\
& \quad + \int_0^\infty \int_U f(ru, -r\sqrt{1-|u|^2}) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|u|^2}} dudr \\
& = \int_0^\infty \int_{|u|=r} f(u) dA(u) dr.
\end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Rechnung aus Beispiel 5.17 verwendet. \square

22/1:18:45
(08.07.21)

5.19 Korollar (rotationssymmetrische Funktionen). (i) Sei $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(|x|)$ integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx = A(S^{n-1}) \int_0^\infty f(r) r^{n-1} dr.$$

(ii) Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ und $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Dann gilt $A(S^{n-1}) = n\lambda_n(B_n)$. Speziell ist $A(S^1) = 2\pi$, $A(S^2) = 4\pi$.

Beweis. (i) Nach Satz 5.18 ist

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx & = \int_0^\infty \int_{|x|=r} f(|x|) dA(x) dr = \int_0^\infty f(r) \int_{|x|=r} 1 dA(x) dr \\
& = A(S^{n-1}) \int_0^\infty f(r) r^{n-1} dr.
\end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i) mit $f = \chi_{(0,1)}$ wegen $\int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{1}{n}$. \square

b) Die Integralsätze von Gauß und Stokes

In \mathbb{R} lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ für stetig differenzierbares f . Entsprechendes haben wir für Kurvenintegrale und 1-Formen in Bemerkung 5.6 bewiesen:

$$\int_\Gamma df = f(B) - f(A),$$

wobei A, B die Randpunkte von Γ sind.

In diesem Abschnitt werden wir Analoga für glatte bzw. stückweise glatte m -Flächen, $m \geq 1$ beliebig, erhalten.

Wir benötigen dafür noch einige geometrische Begriffe.

5.20 Definition. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine m -Fläche mit Parametrisierung $\gamma: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei $u \in U$ und $a := \gamma(u)$. Der von den Vektoren $\partial_1\gamma(u), \dots, \partial_m\gamma(u)$ aufgespannte (m -dimensionale) Vektorraum $T_a\Gamma := \{\gamma'(u)h : h \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^n$ heißt der Tangentialraum an Γ im Punkt a , siehe Abbildung 23. Die Elemente $v \in T_a\Gamma$ heißen Tangentialvektoren an Γ im Punkt a .

23/07:25

(12.07.21)

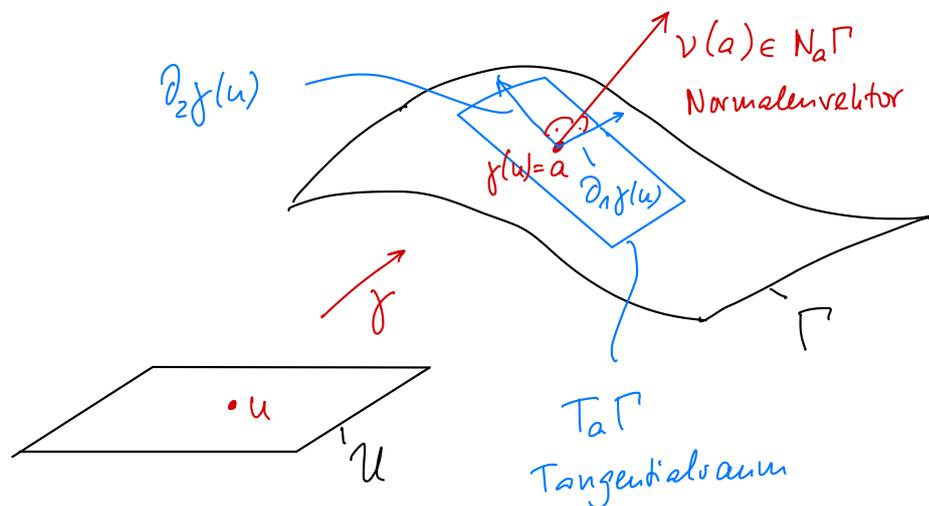


Abbildung 23: Tangentialraum und Normalenvektor

5.21 Definition. a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt $\partial G := \overline{G} \cap \overline{\mathbb{R}^n} \setminus G$ der Rand von G .

23/14:50

b) Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein Gebiet, falls G offen und zusammenhängend ist (in diesem Fall ist G auch wegzusammenhängend).

(12.07.21)

c) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet (d.h. G ist offen, zusammenhängend und beschränkt). Dann besitzt G einen glatten Rand, falls zu jedem $a \in \partial G$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ und ein $\psi \in C^1(V; \mathbb{R})$ gibt mit $\nabla\psi(v) \neq 0 (v \in V)$ und $G \cap V = \{x \in V : \psi(x) < 0\}$, siehe Abbildung 24.

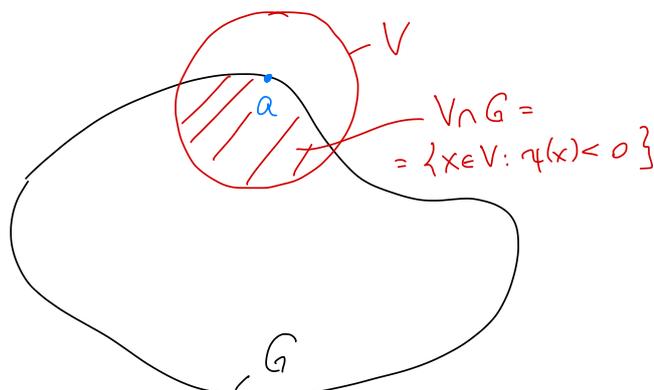


Abbildung 24: Ein Gebiet mit glattem Rand

23/22:12
(12.07.21)

5.22 Bemerkung. (i) Für jede Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ ist der Rand von G beschrieben durch

$$\partial G = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset, B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus G) \neq \emptyset\}.$$

(ii) In der Situation von Definition 5.21 c) gilt $\partial G \cap V = \{x \in V : \psi(x) = 0\}$: Sei $x \in \partial G \cap V$. Falls $\psi(x) < 0$, dann existiert eine Umgebung $W \subset V$ mit $\psi < 0$ in W . Insbesondere folgt $W \subset G$ und damit ist x kein Randpunkt von G . (Analog für den Fall $\psi(x) > 0$.)

Sei andererseits $x \in V$ mit $\psi(x) = 0$. Für $v := \nabla \psi(x) \neq 0$ gilt

$$\psi(x+h) = \psi(x) + \langle \nabla \psi(x), h \rangle + o(|h|) = \langle v, h \rangle + o(|h|), \quad (h \in \mathbb{R}^n, h \rightarrow 0).$$

Für $h := tv$, $t \in \mathbb{R}$, erhält man $\psi(x+tv) = t|v|^2 + o(t|v|)$, $t \rightarrow 0$. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\psi(x-tv) < 0 < \psi(x+tv)$ für $0 < t < \varepsilon$. Somit enthält jede Umgebung von x Punkte in G und Punkte in $\mathbb{R}^n \setminus G$, d.h. $x \in \partial G$.

(iii) Sei G beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und $a \in \partial G$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein Intervall $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ und $g \in C^1(U; \mathbb{R})$ mit

$$G \cap (U \times I) = \{x = (x', x_n) \in U \times I : x_n < g(x')\}$$

und

$$\partial G \cap (U \times I) = \{x = (x', x_n) \in U \times I : x_n = g(x')\}.$$

D.h. man kann in Definition 5.21 $\psi(x) = x_n - g(x')$ wählen. Insbesondere ist durch

$$\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}^n, u \mapsto \begin{pmatrix} u \\ g(u) \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung von $\partial G \cap (U \times I)$ gegeben, d.h. ∂G ist (lokal) eine $(n-1)$ -dimensionale Fläche.

5.23 Definition und Bemerkung. Sei G beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und $a \in \partial G$. Dann heißt

$$N_a(\partial G) := (T_a(\partial G))^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall v \in T_a(\partial G) : \langle x, v \rangle = 0\}$$

der Raum aller Normalenvektoren. Es gilt $\dim T_a(\partial G) = n-1$ (siehe Bemerkung 5.22 (ii)) und damit $\dim N_a(\partial G) = 1$. Damit existiert genau ein Vektor $\nu(a) \in N_a(\partial G)$ mit $|\nu(a)| = 1$ und der Eigenschaft $a + t\nu(a) \notin G$ für hinreichend kleine t . Der Vektor $\nu(a)$ heißt äußerer Normalenvektor von ∂G im Punkt a . Andere Schreibweisen $n(a), \vec{n}(a)$.

Falls G lokal durch $\psi(x) < 0$ dargestellt wird, so ist $\nu(a) = \frac{\nabla\psi(a)}{|\nabla\psi(a)|}$ (denn der Gradient ist orthogonal zur Höhenlinie und zeigt nach außen). Wird speziell ∂G lokal durch $x_n = g(x')$, d.h. mit $\psi(x) = x_n - g(x')$ dargestellt, so ist

$$\nu(a) = \frac{\nabla\psi(a)}{|\nabla\psi(a)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(a')|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla g(a') \\ 1 \end{pmatrix} \quad (a \in \partial A, a' := (a_1, \dots, a_{n-1})).$$

Damit ist $\nu: \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n, a \mapsto \nu(a)$, stetig.

Im folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Der Satz von Gauß besagt, dass für glatte Vektorfelder $V: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Gleichheit $\int_G \operatorname{div} V(x) dx = \int_{\partial G} \langle V(x), \nu(x) \rangle dA(x)$ gilt. Beachte dabei $\operatorname{div} V = \partial_1 V_1 + \dots + \partial_n V_n$. Wir betrachten zunächst V mit $\operatorname{supp} V \subset G$. Dann ist $V = 0$ auf ∂G und das rechte Integral ist gleich 0. Wir zeigen, dass $\int \partial_j V_j(x) dx = 0$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt:

5.24 Lemma. Sei $h \in C^1(G; \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} h \subset G$. Dann gilt $\int_G \partial_j h(x) dx = 0$ für $j = 1, \dots, n$.

Beweis. O.E. sei $j = 1$. Setze h durch 0 zu $\tilde{h} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ fort. Dann ist $\int_G \partial_j h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j h(x) dx$. Wähle $R > 0$ mit $\operatorname{supp} h \subset [-R, R]^n$. Für festes $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_1 h(x) dx_1 = \int_{-R}^R \partial_1 h(x) dx_1 = \tilde{h}(x_1, \dots, x_n) \Big|_{x_1=-R}^R = 0.$$

Integration bzgl. (x_2, \dots, x_n) liefert die Behauptung. \square

In einem zweiten Schritt betrachten wir ein Vektorfeld $V: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$, das nur in der Nähe eines Punktes $a \in \partial G$ nicht verschwindet. Lokal kann man den Rand durch $x_n = g(x')$ darstellen (siehe Bemerkung 5.23 und Abbildung 25). Die Behauptung wird wieder für jede Komponente von V formuliert:

23/1:24:23
(12.07.21)

5.25 Satz. Sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, zusammenhängend und beschränkt, $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $g \in C^1(U; \mathbb{R})$ mit $g(U) \subset I$. Sei $W := \{x = (x', x_n) \in U \times I : x_n < g(x')\}$ und $M := \{x \in U \times I : x_n = g(x')\}$. Sei weiter $\nu(x) := \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g(x')|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla g(x') \\ 1 \end{pmatrix}$ der äußere Normalenvektor. Für $f \in C^1(U \times I; \mathbb{R})$ mit $\text{supp } f \subset U \times I$ gilt

$$\int_W \partial_j f(x) dx = \int_M f(x) \nu_j(x) dA(x) \quad (j = 1, \dots, n).$$

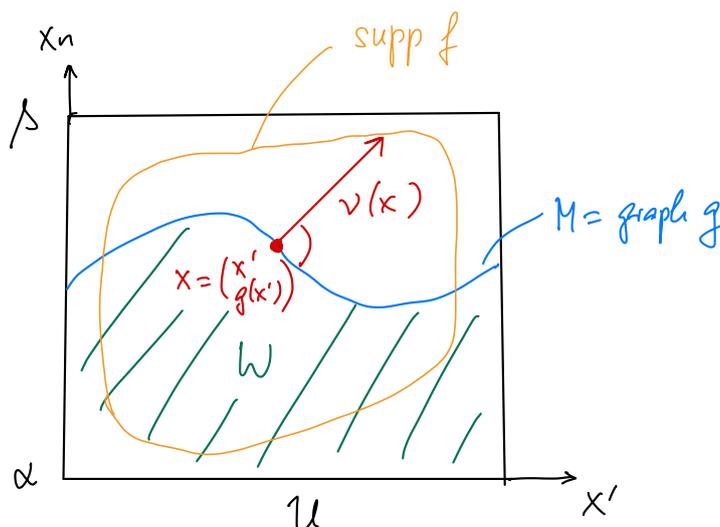


Abbildung 25: Die Situation in Satz 5.25

Beweis. Wegen $M = \text{graph } g$ gilt nach Beispiel 5.17 für integrierbares $h: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_M h dA = \int_U h(u, g(u)) \sqrt{1 + |\nabla g(u)|^2} du.$$

(i) Sei $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Definiere $F: U \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x', z) := \int_\alpha^z f(x', x_n) dx_n$. Dann ist $\frac{\partial}{\partial z} F(x', z) = f(x', z)$ und $\partial_j F(x', z) = \int_\alpha^z \partial_j f(x', z) dx_n$. Setzt man $h(x') := F(x', g(x'))$, so ist $\text{supp } h \subset U$ kompakt, und nach der Kettenregel folgt

$$\partial_j h(x') = \partial_j F(x', g(x')) = \int_\alpha^{g(x')} \partial_j f(x', x_n) dx_n + f(x', g(x')) \partial_j g(x').$$

Wende Lemma 5.24 (mit $n-1$ statt n und U statt G) an und erhalte $\int_U \partial_j h(x') dx' = 0$. Damit

$$\int_W \partial_j f(x) dx = \int_U \int_\alpha^{g(x')} \partial_j f(x', x_n) dx_n dx'$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_U f(x', g(x')) \partial_j g(x') dx' \\
&= \int_U f(x', g(x')) \nu_j(x', g(x')) \sqrt{1 + |\nabla g(x')|^2} dx' \\
&= \int_M f(x) \nu_j(x) dA(x).
\end{aligned}$$

(ii) Sei nun $j = n$. Für festes $x' \in U$ hat $x_n \mapsto f(x', x_n)$ kompakten Träger in $I = (\alpha, \beta)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int_{\alpha}^{g(x')} \partial_n f(x', x_n) dx_n = f(x', g(x')).$$

Damit

$$\begin{aligned}
\int_W \partial_n f(x) dx &= \int_U \int_{\alpha}^{g(x')} \partial_n f(x', x_n) dx_n dx' \\
&= \int_U f(x', g(x')) = \int_U f(x', g(x')) \nu_n(x', g(x')) \sqrt{1 + |\nabla g(x')|^2} dx' \\
&= \int_M f(x) \nu_n(x) dA(x).
\end{aligned}$$

□

Der folgende Satz wird auch als Divergenzsatz bezeichnet.

5.26 Satz (Gaußscher Integralsatz). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂G , und $\nu: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^n$ die äußere Normale. Sei $V: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Dann gilt

24/34:22
(15.07.21)

$$\int_G \operatorname{div} V(x) dx = \int_{\partial G} \langle V(x), \nu(x) \rangle dA(x).$$

Beweisskizze. Wir haben die “lokalen Versionen” bereits bewiesen: Falls $\operatorname{supp} V \subset G$, so folgt die Behauptung aus Lemma 5.24, falls $\operatorname{supp} V$ hinreichend klein mit $\operatorname{supp} V \cap \partial G \neq \emptyset$ ist, so kann man ∂G in $\operatorname{supp} V$ darstellen in der Form $x_n = g(x')$, und die Behauptung folgt aus Satz 5.25.

Im allgemeinen Fall wird der Satz durch eine Partition der Eins bewiesen. Es existiert eine offene Überdeckung $\overline{G} \subset \bigcup_{i \in I} W_i$ mit folgender Eigenschaft: Entweder ist $W_i \subset G$ oder (nach Umnummerierung) $W_i = U_i \times (\alpha_i, \beta_i)$ mit $U_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $\overline{G} \cap W_i = \{x \in U_i \times (\alpha_i, \beta_i) : x_n \leq g_i(x')\}$ mit $g_i \in C^1(U_i; \mathbb{R})$.

Da \overline{G} kompakt ist, kann man eine endliche Teilüberdeckung $\{W_1, \dots, W_N\}$ auswählen. Eine zugehörige Partition der Eins besteht aus Funktionen $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ mit

$\text{supp } \varphi \subset W_i$ und $\sum_{i=1}^N \varphi_i = 1$ in \overline{G} . (Eine solche Partition der Eins kann unter Verwendung der Funktion $t \mapsto \exp(-\frac{1}{1-t^2})$ konstruiert werden.) Wegen $\sum_{i=1}^N \varphi_i = 1$ ist

$$\begin{aligned} \int_G \text{div } V(x) dx &= \sum_{i=1}^N \int_G \text{div } V(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\partial G} \langle V(x) \varphi_i(x), \nu(x) \rangle dA(x) = \int_{\partial G} \langle V(x), \nu(x) \rangle dA(x). \end{aligned}$$

Hierbei wurde für die mittlere Gleichheit Lemma 5.24 bzw. Satz 5.25 verwendet. \square

24/1:01:01

5.27 Korollar. Sei G beschränktes Gebiet mit glattem Rand.

(15.07.21)

(i) Für $f \in C^1(\overline{G}; \mathbb{R})$ gilt

$$\int_G \partial_j f(x) dx = \int_{\partial G} f(x) \nu_j(x) dA(x).$$

(ii) Seien $f, g \in C^2(\overline{G}; \mathbb{R})$ und $\Delta := \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ der Laplace-Operator. Dann gelten die Greenschen Formeln¹⁶

$$\begin{aligned} \int_G f \Delta g dx &= - \int_G \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx + \int_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \nu} dA(x), \\ \int_G (f \Delta g - g \Delta f) dx &= \int_{\partial G} \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dA(x). \end{aligned}$$

Dabei ist $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \langle \nabla f, \nu \rangle$ die Richtungsableitung von f in Richtung ν .

(iii) Für $f, g \in C^1(\overline{G}; \mathbb{R})$ gilt die Formel der partiellen Integration:

$$\int_G f(x) (\partial_j g)(x) dx = - \int_G (\partial_j f)(x) g(x) dx + \int_{\partial G} f(x) g(x) \nu_j(x) dA(x).$$

Beweis. (i) Setze im Satz von Gauß $V = (0, \dots, 0, f, 0, \dots, 0)^\top$ (j -te Stelle) und erhalte $\text{div } V = \partial_j f$ und $\langle V, \nu \rangle = f \nu_j$.

(ii) Setze $V := f \nabla g$. Dann ist $\text{div } V = f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$ und $\langle V, \nu \rangle = f \langle \nabla g, \nu \rangle = f \frac{\partial g}{\partial \nu}$. Dies gibt die erste Formel, die zweite folgt, wenn man die Rollen von f und g vertauscht und die Gleichungen subtrahiert.

(iii) Wende (i) auf fg anstelle von f an. \square

¹⁶George Green, 14.7.1793–31.3.1841

5.28 Beispiel. Sei $V(x) := x$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Dann ist $\operatorname{div} V(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j x_j = n$. Somit folgt

$$\lambda_n(G) = \int_G 1 dx = \frac{1}{n} \int_G \operatorname{div} V(x) dx = \frac{1}{n} \int_{\partial G} \langle x, \nu(x) \rangle dA(x).$$

Speziell für $G = B_n = B(0, 1)$ (n -dimensionale Einheitskugel) folgt wegen $\nu(x) = x$ die Gleichheit

$$\lambda_n(B_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \langle x, x \rangle dA(x) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} 1 dA(x) = \frac{1}{n} A(S^{n-1}).$$

In \mathbb{R}^2 lautet der Satz von Gauß

$$\int_G (\partial_1 W_1 + \partial_2 W_2) dx = \int_{\partial G} (W_1 \nu_1 + W_2 \nu_2) dA(x).$$

Setzt man $V := \begin{pmatrix} -W_2 \\ W_1 \end{pmatrix}$, erhält man

$$\int_G (\partial_1 V_2 - \partial_2 V_1) dx = \int_{\partial G} (V_2 \nu_1 - V_1 \nu_2) dA(x).$$

Falls $\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung von ∂G ist, gilt

$$\nu(\gamma(\tau)) = \frac{1}{|\gamma'(\tau)|} \begin{pmatrix} \gamma'_2(\tau) \\ -\gamma'_1(\tau) \end{pmatrix}.$$

Das Kurvenintegral auf der rechten Seite wird dann zu

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} (V_2 \nu_1 - V_1 \nu_2) dA(x) &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{|\gamma'(\tau)|} (V_2(\gamma(\tau)) \gamma'_2(\tau) + V_1(\gamma(\tau)) \gamma'_1(\tau)) |\gamma'(\tau)| d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle V(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau) \rangle d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \omega \end{aligned}$$

mit der 1-Form $\omega(x, h) := \langle V(x), h \rangle$.

Man definiert die Rotation in \mathbb{R}^2 durch

$$\operatorname{rot} V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{rot} V := \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1.$$

Somit erhält man:

5.29 Satz (Satz von Stokes¹⁷ im \mathbb{R}^2). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $V \in C^1(\overline{G}; \mathbb{R}^2)$. Dann gilt

$$\int_G \operatorname{rot} V(x) dx = \int_{\partial G} \langle V(x), dx \rangle.$$

¹⁷George Gabriel Stokes, 13.8.1819 – 1.2.1903

24/1:18:08
(15.07.21)

25/03:50
(19.07.21)

Im \mathbb{R}^3 definiert man für $V \in C^1(G; \mathbb{R}^3)$ die klassische Rotation durch

$$\operatorname{rot} V := \nabla \times V := \begin{pmatrix} \partial_2 V_3 - \partial_3 V_2 \\ \partial_3 V_1 - \partial_1 V_3 \\ \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1 \end{pmatrix}.$$

Der Satz von Stokes im \mathbb{R}^3 handelt von zweidimensionalen Flächen im \mathbb{R}^3 . Sei $G \subset M$ für eine zweidimensionale Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$, und sei $\nu(x)$ der Normalenvektor zu M , $\nu_{\partial G}(x)$ der Normalenvektor zu ∂G "auf M " und $t(x)$ der Tangenteneinheitsvektor zu ∂G . Dann bilden für $x \in \partial G$ die Vektoren $\nu(x), \nu_{\partial G}(x), t(x)$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 , vergleiche Abbildung 26. Der folgende Satz wird nicht bewiesen:

25/16:10

(19.07.21)

5.30 Satz (Satz von Stokes im \mathbb{R}^3). Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Fläche, $G \subset M$ beschränkt mit glattem Rand ∂G . Für $V \in C^1(\overline{G}; \mathbb{R}^3)$ gilt

$$\int_G \langle \operatorname{rot} V(x), \nu(x) \rangle dA(x) = \int_{\partial G} \langle V(x), dx \rangle.$$

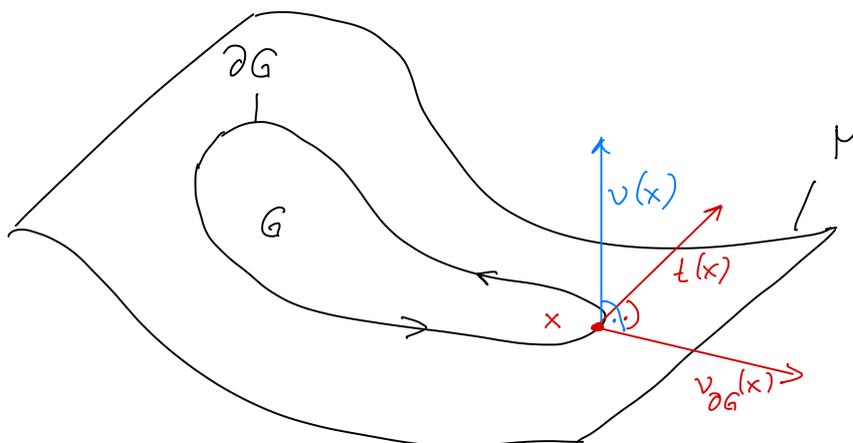


Abbildung 26: Der Satz von Stokes in \mathbb{R}^3

25/23:55

(19.07.21)

5.31 Bemerkung. a) Man beachte, dass auf der linken Seite ein Flächenintegral, auf der rechten Seite ein Kurvenintegral steht. Definiert man die 1-Form $\omega(x, h) := \langle V(x), h \rangle$, so steht auf der rechten Seite $\int_{\partial G} \omega$.

b) Es gelten die folgenden Rechenregeln: Seien f eine reellwertige Funktion und V wie oben, dann ist

$$\operatorname{rot} \nabla f = 0,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{rot} V &= 0, \\ \operatorname{div}(fV) &= \langle \nabla f, V \rangle + f \operatorname{div} V, \\ \operatorname{rot}(fV) &= (\nabla f) \times V + f \operatorname{rot} V, \\ \operatorname{div} \nabla f &= \Delta f, \\ \Delta V &= \nabla \operatorname{div} V - \operatorname{rot} \operatorname{rot} V,\end{aligned}$$

wobei der Laplaceoperator in der letzten Zeile komponentenweise zu verstehen ist.

c) In die Definition von \int_G , $\int_{\partial G}$ geht eine gewisse Orientierung mit ein, denn die Integrale sind nur unabhängig von Parametrisierungen in äquivalenten Klassen, d.h. unter Transformationen φ mit $\det \varphi' > 0$. Allgemein heißt eine Basis des \mathbb{R}^n positiv orientiert, falls $\det B > 0$, wobei $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis des \mathbb{R}^n . Zwei Basen heißen gleich orientiert, falls $A = \Phi B$ mit $\det \Phi > 0$. Beispielsweise ist die Standardbasis positiv orientiert und über $\gamma : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ erhält man eine Orientierung in den Tangentialräumen des von γ beschriebenen p -Flächenstücks Γ aus der Orientierung von $\{e_1, \dots, e_p\}$, d.h. wir haben eine natürliche Orientierung im Tangentialraum $T_{\gamma(u)}\Gamma = \operatorname{Span}\{\partial_1\gamma(u), \dots, \partial_p\gamma(u)\}$. Eine p -Fläche heißt orientierbar, falls alle so erhaltenen Orientierungen $\operatorname{Or}(u)$ gleichorientiert sind.

Man sagt, dass auf ∂G eine positive Orientierung induziert wird, falls gilt: Ist $p \in \partial G$ und $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ eine Basis des Tangentialraums von ∂G in p , so ist für jeden nach „außen“ weisenden Vektor $w = \{w, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ positiv orientiert (d.h. gleich orientiert zur gegebenen Orientierung des \mathbb{R}^n).

d) Führt man p -Differentialformen ω ein für $1 \leq p \leq n$ – der Fall $p = 1$ ist bekannt – sowie einen Ableitungsoperator d , der aus $(p-1)$ -Formen geeignete p -Formen macht – Beispiel $p = 1$, $p - 1 = 0$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, Nullform, so

$$df := \sum_{k=1}^n \partial_k f dx_k,$$

also df die zugehörige 1-Form –, so lassen sich die Sätze von Gauß und von Stokes vereinheitlichen zu

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$$

wobei M eine orientierte p -Fläche und ω eine $(p-1)$ -Form ist. Für $p = n$ erhält man den Gaußschen Satz, für $1 \leq p \leq n-1$ den Stokesschen Satz.

Wir haben in diesem Abschnitt gesehen, dass Flächen in verschiedener Weise beschrieben werden können. Dies wird in folgendem Satz zusammengefasst, dessen Beweis sich im Wesentlichen aus dem Satz über lokale Umkehrbarkeit ergibt:

5.32 Satz. Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $m < n$. Dann sind äquivalent:

- (i) Für alle $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von x und eine Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ einer m -dimensionalen Fläche mit $M \cap V = \gamma(U)$.

25/38:10

(19.07.21)

- (ii) Für alle $x \in M$ existieren offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ und $f \in C^1(U; \mathbb{R}^{n-m})$ mit $M \cap V = \text{graph } f = \{(u, f(u)) : u \in U\}$.
- (iii) Für alle $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ und $g \in C^1(V; \mathbb{R}^{n-m})$ so, dass der Rang der Matrix $g'(y)$ für alle $y \in V$ gleich $n-m$ ist und $M \cap V = \{x \in V : g(x) = 0\}$.

25/49:58
(19.07.21)

5.33 Definition. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine m -dimensionale (C^1 -)Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , falls M die äquivalenten Bedingungen aus Satz 5.32 erfüllt. Eine Parametrisierung wie in (i) heißt eine Karte von M . Ersetzt man überall C^1 durch C^k mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, heißt M eine C^k -Untermannigfaltigkeit.

6. Lokale Umkehrbarkeit und implizite Funktionen

6.1 Worum geht's? In diesem kurzen Abschnitt werden drei wichtige Sätze vorgestellt, welche für Beweise der Analysis in vielen Fällen nützlich sind: Der Banachsche Fixpunktsatz, der Satz über lokale Umkehrbarkeit und der damit verwandte Satz über implizite Funktionen. Der Satz über implizite Funktionen wurde in den letzten Abschnitten bereits mehrmals verwendet, z.B. um eine Nullstellenmenge als Graph einer Funktion zu schreiben.

25/55:10
(19.07.21)

Wir beginnen mit einem Fixpunktsatz, der an vielen Stellen der Analysis eine zentrale Rolle spielt.

6.2 Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann heißt eine Abbildung $\Phi: M \rightarrow M$ kontrahierend oder eine Kontraktion, falls es ein $c \in [0, 1)$ gibt mit $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq cd(x, y)$ für alle $x, y \in M$.

25/56:43
(19.07.21)

6.3 Satz (Banachscher Fixpunktsatz). Sei (M, d) vollständiger metrischer Raum und $\Phi: M \rightarrow M$ eine Kontraktion. Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt $z \in M$, d.h. $\Phi(z) = z$.

25/59:52
(19.07.21)

Definiert zu $x_0 \in M$ die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset M$ durch $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}_0$), so gilt $x_n \rightarrow z$ ($n \rightarrow \infty$) und $d(x_n, z) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$ (a priori-Abschätzung).

Beweis. Es gilt $d(x_n, x_{n+1}) \leq cd(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq c^n d(x_0, x_1)$ und damit für $m \geq 1$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq (1 + c + c^2 + \dots + c^{m-1})d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Wegen $c^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ist $(x_n)_n \subset M$ eine Cauchyfolge. Da M vollständig ist, existiert der Grenzwert $z := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Als Kontraktion ist Φ Lipschitz-stetig und damit insbesondere stetig, also gilt

$$\Phi(z) = \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = z.$$

Da die Metrik $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, folgt

$$d(x_n, z) = d(x_n, \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n+m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+m}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1).$$

Somit existiert ein Fixpunkt z und erfüllt die a priori-Abschätzung. Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit. Seien dazu z, z' Fixpunkte von Φ . Dann ist $d(z, z') = d(\Phi(z), \Phi(z')) \leq cd(z, z')$, und wegen $c < 1$ folgt $z = z'$. \square

Für Funktionen $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hatten wir gezeigt, dass strenge Monotonie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Injektivität ist. Für Funktionen $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, n \geq 2$, existiert kein Analogon. Wir wollen hier zunächst für den Fall $n = m$ ein hinreichendes Kriterium für die lokale Invertierbarkeit von Funktionen beweisen.

25/1:17:30
(19.07.21)

6.4 Satz (Satz über lokale Umkehrbarkeit). Seien $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U_0, \mathbb{R}^n)$, $a \in U_0$ und $\det f'(a) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset U_0$ von a mit:

(i) $f|_U$ ist injektiv.

(ii) $V := f(U)$ ist offen.

(iii) $g := (f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ ist stetig differenzierbar.

Somit ist $f|_U : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus.

Beweis. O.E. können wir $a = 0$, $f(a) = 0$ und $f'(a) = I_n$ annehmen (sonst betrachte die Funktion $x \mapsto (f'(a))^{-1}(f(a+x) - f(a))$).

Wir definieren zu festem $y \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$\Phi_y : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \Phi_y(x) := x - f(x) + y.$$

(a) Wir zeigen, dass für kleines $r > 0$ und $y \in B(0, r)$ die Abbildung $\Phi_y : \overline{B(0, 2r)} \rightarrow B(0, 2r)$ eine Kontraktion ist.

Sei $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$. Für $j = 1, \dots, n$ gilt $\nabla f_j(0) = e_j$ (j -ter Einheitsvektor) wegen $f'(0) = I_n$. Da f' stetig ist, existiert ein $r > 0$ so, dass

$$|e_j - \nabla f_j(x)| < \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad (x \in \overline{B(0, 2r)}, j = 1, \dots, n) \quad (6-1)$$

Zu $x \in \overline{B(0, 2r)}$ und $j = 1, \dots, n$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\theta_j \in (0, 1)$ mit

$$|x_j - f_j(x)| = |(x_j - f_j(x)) - (0 - f_j(0))| \leq |\langle e_j - \nabla f_j(\theta_j x), x \rangle| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} |x|$$

und damit $|x - f(x)| \leq \frac{1}{2}|x|$. Somit erhalten wir für alle $y \in B(0, r)$ und alle $x \in \overline{B(0, 2r)}$ die Abschätzung

$$|\Phi_y(x)| \leq |x - f(x)| + |y| \leq \frac{1}{2}|x| + |y| < 2r. \quad (6-2)$$

Für $y \in B(0, r)$ gilt insbesondere $\Phi_y(\overline{B(0, 2r)}) \subset \overline{B(0, 2r)}$. Für $x, x' \in \overline{B(0, 2r)}$ ist die j -te Komponente von $\Phi_y(x) - \Phi_y(x')$ gegeben durch

$$(x_j - f_j(x) + y) - (x'_j - f_j(x') + y) = \langle e_j - \nabla f_j(x + \theta_j(x' - x)), x - x' \rangle,$$

und wie oben folgt $|\Phi_y(x) - \Phi_y(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$. Also ist Φ_y eine Kontraktion in $\overline{B(0, 2r)}$.

(b) Nach (a) und dem Banachschen Fixpunktsatz existiert für alle $y \in B(0, r)$ genau ein Fixpunkt x von Φ_y in $\overline{B(0, 2r)}$, also genau ein $x \in \overline{B(0, 2r)}$ mit $f(x) = y$. Nach (6-2) gilt sogar $x = \Phi_y(x) \in B(0, 2r)$. Wir definieren daher

$$U := f^{-1}(B(0, r)) \cap B(0, 2r) \subset U_0 \quad \text{und} \quad V := B(0, r).$$

Dann ist U offen, da f stetig ist, und $f|_U: U \rightarrow V$ ist bijektiv.

(c) Wir zeigen, dass $g := (f|_U)^{-1}: V \rightarrow U$ stetig ist. Für $x, x' \in U$ gilt wegen $\Phi_0(x) = x - f(x)$ die Abschätzung

$$|x - x'| \leq |\Phi_0(x) - \Phi_0(x')| + |f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'| + |f(x) - f(x')|.$$

Für $y := f(x)$, $y' := f(x')$ und damit $x = g(y)$, $x' = g(y')$ erhalten wir somit

$$|g(y) - g(y')| \leq 2|y - y'| \quad (y, y' \in V),$$

also ist g Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 2.

(d) Wir zeigen, dass g stetig differenzierbar ist. Seien $y \in V$ und $h_y \in \mathbb{R}^n$ klein, und sei $x := g(y) \in U$ sowie $h_x := g(y + h_y) - g(y)$, d.h. $x + h_x = g(y + h_y)$. Wir schreiben

$$f(x + h_x) = f(x) + f'(x)h_x + r(x, h_x)|h_x| = f(x) + F(x, h_x)h_x$$

mit

$$F(x, h_x) := \begin{cases} f'(x) + r(x, h_x) \frac{h_x^\top}{|h_x|}, & \text{falls } h_x \neq 0, \\ f'(x), & \text{falls } h_x = 0. \end{cases}$$

Wegen (6-1) ist $F(x, 0) = f'(x)$ invertierbar, also ist auch $F(x, h_x)$ für kleines h_x invertierbar. Für $G(y, h_y) := F(x, h_x)^{-1}$ erhält man

$$G(y, h_y)h_y = G(y, h_y)(f(x + h_x) - f(x)) = G(y, h_y)F(x, h_x)h_x = h_x = g(y + h_y) - g(y).$$

Insgesamt haben wir also die Darstellung

$$g(y + h_y) = g(y) + G(y, h_y)h_y$$

erhalten, wobei $G(y, h_y) = F(x, h_x)^{-1} \rightarrow (f'(x))^{-1}$ für $h_y \rightarrow 0$. Dies zeigt, dass g an der Stelle y differenzierbar ist mit Ableitung

$$g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}.$$

Aus dieser Darstellung und der Stetigkeit von f' und g erhalten wir auch die Stetigkeit von g' . \square

In den Anwendungen tritt häufig folgendes Problem auf: Gegeben sei eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{n+m} \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, u) \mapsto f(x, u).$$

Gesucht ist nun eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u \mapsto \varphi(u)$ mit

$$f(\varphi(u), u) = 0 \quad (u \in U),$$

d.h. wir wollen die Gleichung $f(x, u) = 0$ nach x auflösen. Wir werden dazu folgende Schreibweise benutzen: Für $h \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{R}^m$ definiere

$$f'(x, u) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} =: \tilde{f}'_1(x, u)h + \tilde{f}'_2(x, u)k$$

mittels

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 & \partial_{n+1} f_1 & \cdots & \partial_{n+m} f_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n & \cdots & \partial_n f_n & \partial_{n+1} f_n & \cdots & \partial_{n+m} f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \\ k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n & \cdots & \partial_n f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_{n+1} f_1 & \cdots & \partial_{n+m} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n+1} f_n & \cdots & \partial_{n+m} f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

26/59:45
(22.07.21)

6.5 Satz (Satz über implizite Funktionen). Seien $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. Es gebe $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ mit $f(a, b) = 0$ und $\det \tilde{f}'_1(a, b) \neq 0$. Dann existieren eine Umgebung $U = U(b) \subset \mathbb{R}^m$ von b und eine eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(b) = a$ und

$$f(\varphi(u), u) = 0 \quad (u \in U).$$

Beweis. Definiere

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \quad (x, u) \mapsto F(x, u) := \begin{pmatrix} f(x, u) \\ u \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}.$$

Es gilt $F(a, b) = (0, b)$ sowie

$$F'(x, u) = \begin{pmatrix} \tilde{f}'_1(x, u) & \tilde{f}'_2(x, u) \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det F'(x, u) = \det \tilde{f}'_1(x, u) \neq 0$ kann Satz 6.4 angewendet werden. Somit existiert eine Umgebung $W \subset D$ von (a, b) so, dass $F|_W : W \rightarrow F(W)$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $G := (F|_W)^{-1} : F(W) \rightarrow W$ die Umkehrabbildung. Wir definieren

$g: F(W) \rightarrow \mathbb{R}^n$ als die erste Komponente von G , d.h. falls $G(y, u) = (x, u)$, so setzen wir $g(y, u) := x$. Wegen $F(G(y, u)) = (y, u)$ folgt insbesondere

$$f(g(y, u), u) = y \quad ((y, u) \in F(W)).$$

Da $(0, b) \in F(W)$ und $F(W)$ offen ist, existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ von b so, dass $(0, u) \in F(W)$ für alle $u \in U$. Definiert man $\varphi(u) := g(0, u)$ ($u \in U$), so gilt

$$f(\varphi(u), u) = 0 \quad (u \in U),$$

also ist φ die gewünschte Auflösung.

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit dieser Auflösung: Nach Definition der Abbildung g ist $g(f(x, u), u) = x$: Aus $f(x, u) = 0$ folgt somit $g(0, u) = x$, was äquivalent ist zu $x = \varphi(u)$. \square

6.6 Beispiele. a) Seien $n = m = 1$ und $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, u) \mapsto f(x, u) := x + x^2 - u^2$. Dann sind $f(0, 0) = 0$, $\tilde{f}'_1(x, u) = 1 + 2x$, also $\tilde{f}'_1(0, 0) = 1$. Die Voraussetzungen des Satzes über implizit gegebene Funktionen sind somit für $(a, b) = (0, 0)$ erfüllt.

26/1:19:10
(22.07.21)

Durch formales Auflösen erhalten wir: $\varphi(u) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + u^2}$ für $u \in \mathbb{R}$ (da $\varphi(0) \stackrel{!}{=} 0$).

b) Seien $n = 2$, $m = 1$ und

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, u) \mapsto f(x, y, u) = \begin{pmatrix} 1 + x + y - u \\ -1 + x + y^2 + u \end{pmatrix}.$$

Für $(a, b) = ((0, 0), 1)$ erhalten wir $f(a, b) = (0, 0)$ und aus

$$\tilde{f}'_1(x, y, u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

det $\tilde{f}'_1(a, b) = 2y - 1 \Big|_{y=0} = -1$. Die Voraussetzungen des Satzes sind somit erfüllt.

Formales Auflösen und die Bedingung $\varphi(1) = (0, 0)$ liefert:

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2u - 3 + \sqrt{9 - 8u} \\ 1 - \sqrt{9 - 8u} \end{pmatrix}.$$

A. Zusammenfassung und Veranschaulichung

a) Anschauliche Interpretation der Integralformeln

Im Folgenden werden die behandelten Integrale durch Betrachtung von kleinen Zeitintervallen $[t, t + \Delta t]$ bzw. kleinen Strecken $[x, x + \Delta x]$ etc. veranschaulicht. Die präzisen Definitionen, die in den vorigen Kapiteln angegeben wurden, ergeben sich dann als Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$ bzw. $\Delta x \rightarrow 0$. Hierbei handelt es sich natürlich nicht um mathematisch exakte Beweise.

A.1 Beispiel (Weglänge). Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t)$ eine Parametrisierung einer Kurve Γ . Dann legt man in der Zeit von t bis $t + \Delta t$ die Weglänge

$$|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)| \approx |\gamma'(t)| \Delta t$$

zurück, siehe Abbildung 27. Aufsummiert über alle Zeiten von a bis b , erhält man die Weglänge

$$L(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

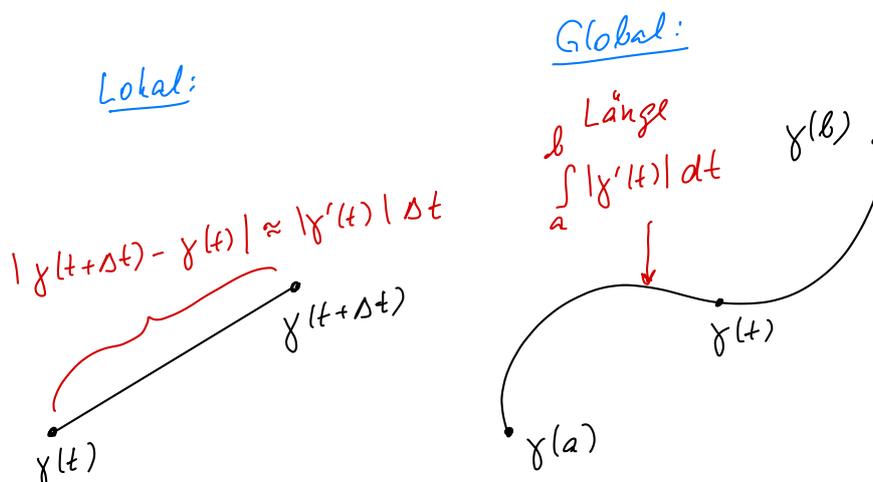


Abbildung 27: Die Weglänge

A.2 Beispiel (Skalare Integrale über Kurven). Sei wieder $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung einer Kurve Γ , und sei $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion, etwa die Dichte einer Größe, die sich auf dem Weg pro Längeneinheit befindet. Um die Gesamtgröße auf dem Weg zu berechnen, hat man lokal die Menge pro Längeneinheit $f(\gamma(t))$ mal die zurückgelegte Längeneinheit $|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)|$ zu berechnen. Man erhält also lokal

$$f(\gamma(t)) |\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)| \approx f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \Delta t.$$

Aufsummiert erhält man

$$\int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_{\Gamma} f(x) dA(x),$$

wobei hier $\int \dots dA(x) = \int \dots ds(x)$ das eindimensionale Flächenintegral (Streckenintegral) bezeichnet.

A.3 Beispiel (Kurvenintegrale). Wieder sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung der Kurve Γ , und $V: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein Vektorfeld (z.B. Kraftfeld). Nach der Regel „Arbeit ist Kraft mal Weg“ ist die lokal zu verrichtende Arbeit bzw. die Energie gegeben durch

$$\langle V(\gamma(t)), \gamma(t + \Delta t) - \gamma(t) \rangle \approx \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \Delta t.$$

Man beachte, dass hier das Skalarprodukt zu nehmen ist, da sowohl die Kraft als auch die zurückgelegte Strecke Vektoren sind. Insgesamt erhält man

$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{\Gamma} \langle V(x), dx \rangle = \int_{\Gamma} \omega$$

mit der 1-Form $\omega: \Gamma \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, h) \mapsto \omega(x, h) := \langle V(x), h \rangle$, siehe Abbildung 28.

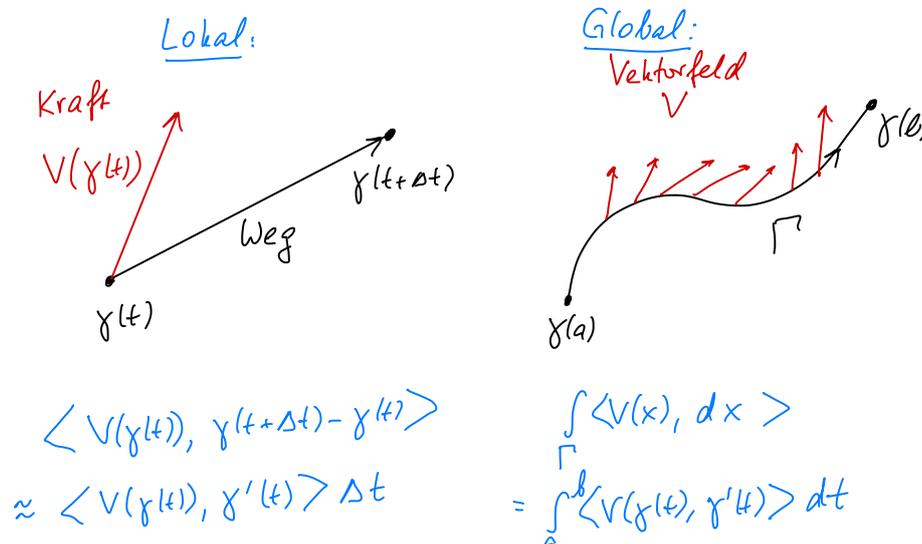


Abbildung 28: Kurvenintegral

A.4 Beispiel (Flächeninhalt). Sei $\gamma: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung einer zweidimensionalen Fläche $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Man betrachtet ein kleines Rechteck an der

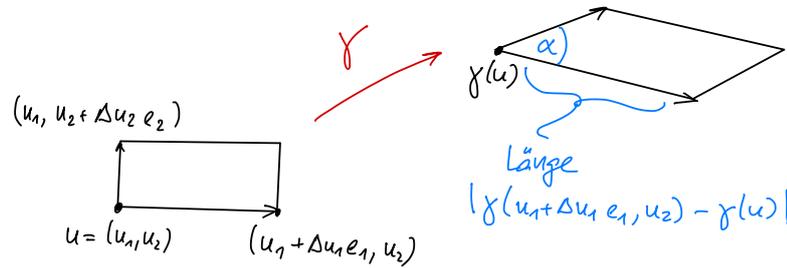


Abbildung 29: Flächeninhalt in lokaler Approximation

Stelle $u \in U$ mit den Seitenlängen Δu_1 in Richtung $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Δu_2 in Richtung $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dieses Rechteck mit Fläche $(\Delta u_1)(\Delta u_2)$ wird durch γ abgebildet auf das Parallelogramm mit den (nicht mehr rechtwinkligen) Seiten $\gamma(u + \Delta u_1 e_1) - \gamma(u)$ und $\gamma(u + \Delta u_2 e_2) - \gamma(u)$, siehe Zeichnung 29.

Falls α der Winkel zwischen diesen beiden Vektoren ist, so ist die Fläche des Parallelogramms gegeben durch die Länge der Seiten mal $\sin \alpha$, d.h. durch

$$\begin{aligned} \Delta A(\gamma(u)) &= |\gamma(u + \Delta u_1 e_1) - \gamma(u)| |\gamma(u + \Delta u_2 e_2) - \gamma(u)| \sin \alpha \\ &\approx |\partial_1 \gamma(u)| \Delta u_1 |\partial_2 \gamma(u)| \Delta u_2 \sin \alpha \\ &= |\partial_1 \gamma(u)| |\partial_2 \gamma(u)| \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \Delta u_1 \Delta u_2 \\ &= \sqrt{|\partial_1 \gamma(u)|^2 |\partial_2 \gamma(u)|^2 - \langle \partial_1 \gamma(u), \partial_2 \gamma(u) \rangle^2} \Delta u_1 \Delta u_2. \end{aligned}$$

Dabei wurde $\langle \partial_1 \gamma(u), \partial_2 \gamma(u) \rangle = |\partial_1 \gamma(u)| |\partial_2 \gamma(u)| \cos \alpha$ verwendet. Unter der Wurzel steht genau die Gramsche Determinante $g(u)$ wegen

$$\begin{aligned} \gamma'(u)^\top \gamma'(u) &= \begin{pmatrix} \partial_1 \gamma(u)^\top \\ \partial_2 \gamma(u)^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \gamma(u) & \partial_2 \gamma(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \partial_1 \gamma(u), \partial_1 \gamma(u) \rangle & \langle \partial_1 \gamma(u), \partial_2 \gamma(u) \rangle \\ \langle \partial_2 \gamma(u), \partial_1 \gamma(u) \rangle & \langle \partial_2 \gamma(u), \partial_2 \gamma(u) \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g(u)} &:= \sqrt{\det(\gamma'(u)^\top \gamma'(u))} \\ &= \sqrt{|\partial_1 \gamma(u)|^2 |\partial_2 \gamma(u)|^2 - \langle \partial_1 \gamma(u), \partial_2 \gamma(u) \rangle^2}. \end{aligned}$$

Aufsummiert über alle kleinen Rechtecke erhält man den gesamten Flächeninhalt

$$A(\Gamma) = \int_{\Gamma} 1 dA(x) = \int_U \sqrt{\det g(u)} du.$$

A.5 Beispiel (Volumenintegrale). Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine (messbare) Menge. Dann ist das dreidimensionale Volumen der Menge M lokal gegeben durch $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$. Aufsummiert über alle in M enthaltenen Rechtecke erhält man das Lebesgue-Maß der Menge

$$\lambda_3(M) = \int_M 1 dx_1 dx_2 dx_3 = \int_M 1 dx.$$

Falls z.B. für einen Stoff eine Dichte $f(x)$ pro Volumeneinheit an der Stelle $x \in M$ gegeben ist, erhält man für die Gesamtmenge des Stoffes lokal $f(x) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ und global

$$\int_M f(x) dx$$

mit dem Lebesgue-Integral.

A.6 Beispiel (Integrale über Flächen). Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Fläche, und sei $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine Dichte eines Stoffes pro Flächeneinheit. Dann ist die lokale Fläche an der Stelle $x = \gamma(u)$ gegeben durch $\Delta A(x)$ (siehe Beispiel A.4), die lokale Menge des Stoffes durch $f(x) \Delta A(x)$, und die globale Menge durch das Flächenintegral

$$\int_{\Gamma} f(x) dA(x) = \int_U f(\gamma(u)) \sqrt{\det g(u)} du.$$

A.7 Beispiel (Der Satz von Gauß). Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper, der von einer Flüssigkeit durchströmt wird. Dabei sei $F: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Strömungsdichte. An einem Punkt x auf der Oberfläche ∂G des Körpers strömt lokal in einem Flächenstück $\Delta A(x)$ die Strömung

$$\langle F(x), \nu(x) \rangle \Delta A(x)$$

aus dem Körper, wobei $\nu(x)$ der äußere Normalenvektor an der Stelle x sei, siehe Abbildung 30, linke Hälfte. Die Gesamtmenge der aus dem Körper G strömenden Flüssigkeit ist dann

$$\int_{\partial G} \langle F(x), \nu(x) \rangle dA(x).$$

Für die Strömung im Inneren des Körpers betrachtet man einen kleinen Würfel, siehe Abbildung 30, rechte Hälfte. In Richtung der x_1 -Achse sieht die Flüssigkeitsbilanz folgendermaßen aus: Auf der rechten Seite des Würfels strömt die Flüssigkeit $F_1(x + \Delta x_1 e_1) \Delta x_2 \Delta x_3$ aus dem Körper, auf der linken Seite strömt die Menge $F_1(x) \Delta x_2 \Delta x_3$ in den Körper (beachte, dass F_1 die Strömungsdichte in x_1 -Richtung ist). Insgesamt strömt also in x_1 -Richtung die Menge

$$(F(x + \Delta x_1 e_1) - F(x)) \Delta x_2 \Delta x_3 \approx \partial_1 F(x) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$$

aus dem kleinen Würfel. Für alle drei Richtungen erhält man dann lokal

$$(\partial_1 F_1(x) + \partial_2 F_2(x) + \partial_3 F_3(x)) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \operatorname{div} F(x) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3.$$

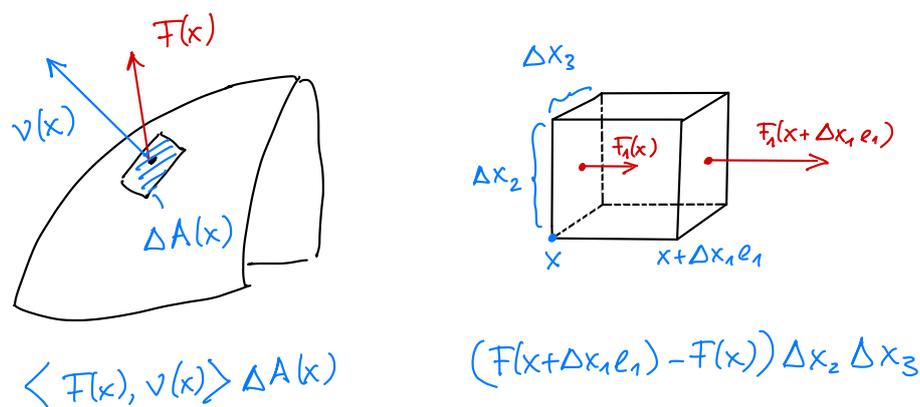


Abbildung 30: Der Satz von Gauß: Oberflächenströmung (links) und innere Strömung (rechts).

Diese Flüssigkeitsmenge kann man sich als in dem Würfel erzeugte Flüssigkeit denken, deshalb wird die Divergenz auch als Flüssigkeitsquelle im Inneren des Körpers veranschaulicht. Für den gesamten Körper erhält man die im Körper generierte Flüssigkeit als

$$\int_G \operatorname{div} F(x) dx.$$

Der Satz von Gauß besagt nun, dass die im Körper erzeugte Flüssigkeit dieselbe ist wie die aus dem Körper ausströmende Flüssigkeit (man beachte dabei, dass die Strömung sich nicht mit der Zeit ändert), es gilt also

$$\int_G \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial G} \langle F(x), \nu(x) \rangle dA(x).$$

Man kann das auch so interpretieren, dass die Strömungen auf den Würfelseiten im Inneren des Körpers sich alle aufheben (die ausströmende Flüssigkeit des einen Würfels ist die einströmende des Nachbarwürfels) und somit bei der Summe aller inneren Strömungen nur die Strömung durch die Oberfläche des Körpers überbleibt.

b) Zusammenfassung: Fragen und Antworten

Im Folgenden werden einige typische Fragen gestellt und mit den Methoden beantwortet, die im Laufe dieser Vorlesung vorgestellt wurden.

- *Frage:* Was nehme ich als Norm für Vektoren im \mathbb{R}^n ?
Antwort: Häufig verwendet man die euklidische Norm, da diese von einem

Skalarprodukt (Definition 1.2) induziert wird. Etwas allgemeiner ist auch noch die p -Norm für $p \in [1, \infty]$ üblich (Beispiel 1.3).

- *Frage:* Der Zwischenwertsatz aus dem ersten Semester sagt, dass eine stetige Funktion alle Zwischenwerte annimmt. Wie sieht das für Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ aus?
Antwort: Den Zwischenwertsatz gibt es in allgemeiner Form für metrische Räume und verwendet den Begriff des Zusammenhangs, siehe Satz 1.12.
- *Frage:* Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^4 - y^2 + 4xy$. Wo wird f maximal?
Antwort: Das ist eine typische Frage nach dem globalen Extremum. Man berechnet dazu den Gradienten und evtl. die Hessematrix. Der entsprechende Satz ist Satz 2.33, das Beispiel dazu ist Beispiel 2.34.
- *Frage:* Welcher Quader hat bei gegebener Summe der Seitenlängen das größte Volumen?
Antwort: Das kann man mit der Methode der Extrema unter Nebenbedingungen lösen, siehe Satz 2.42 und Beispiel 2.41. Man kann auch eine Seitenlänge aus der Nebenbedingung durch die anderen ausdrücken und hat dann wieder ein globales Extremum zu berechnen.
- *Frage:* Wie lege ich am besten ein Polynom vom Grad 3 durch gegebene Messpunkte (curve fitting)?
Antwort: Methode der kleinsten Quadrate, siehe Beispiel 2.35.
- *Frage:* Wie lege ich mein Geld am besten an?
Antwort: Portfolio-Optimierung, siehe Beispiel 2.45.
- *Frage:* Wie lange ist mein Weg zur Uni?
Antwort: Weglänge, siehe Definition 3.4.
- *Frage:* Wie kann man Oberflächen beschreiben?
Antwort: Lokal durch Parametrisierungen (Definition 3.13), äquivalent als Nullstellenmenge oder Graph einer Funktion (siehe Satz 5.32).
- *Frage:* Welche Teilmengen im \mathbb{R}^2 besitzen überhaupt einen Flächeninhalt?
Antwort: Mindestens die Borelmengen, denn für diese ist das zweidimensionale Lebesgue-Maß definiert, siehe Definition 4.9 und Definition 4.11.
- *Frage:* Wie berechne ich das Volumen einer Kugel?
Antwort: Das Volumen ist das Lebesgue-Maß, berechnen kann man das konkret z.B. mit dem Prinzip von Cavalieri (Korollar 4.36).
- *Frage:* Wie berechne ich die Kugeloberfläche?
Antwort: Das ist definiert als Flächeninhalt bzw. Integral über Flächen, siehe Definition 5.12.
- *Frage:* In der Analysis 1 hatten wir den Begriff der Stammfunktion. Wie sieht das im Mehrdimensionalen aus?
Antwort: Eine Art Stammfunktion für Funktionen, die auf Kurven definiert

sind, ist das Kurvenintegral (Definition 5.4). In diesem Zusammenhang ist der Begriff exakt wichtig, der sagt, wann eine 1-Form eine Stammfunktion besitzt (Definition 5.6).

- *Frage:* Wie integriere ich im \mathbb{R}^n partiell?
Antwort: Das ist der Satz von Gauß, Satz 5.26.
- *Frage:* Ich hab eine komplizierte Gleichung in (x, y, z) gegeben, die ich nach y auflösen soll. Geht das?
Antwort: Das ist der Satz über implizite Funktionen, Satz 6.5.

Abbildungsverzeichnis

1	Zum Beweis der Youngschen Ungleichung	4
2	Die Funktion f aus Beispiel 1.9	7
3	Eine nicht wegzusammenhängende Menge	8
4	Die Funktion aus Beispiel 2.11 (ii)	15
5	Die Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x ^2$, siehe Beispiel 2.14.	17
6	Die Funktion aus Beispiel 2.34.	28
7	Die Kurven aus den Beispielen 3.3 und 3.5	36
8	Die Sägezahnkurven aus Beispiel 3.6	37
9	Die Ellipse aus Beispiel 3.9	39
10	Kurven im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	40
11	Die Spirale aus Beispiel 3.12.	43
12	Die Parametrisierung einer m -dimensionalen Fläche	44
13	Rotationsflächen	45
14	Parametrisierung als Graph einer Funktion	46
15	Stereographische Projektion	47
16	Die Cantormenge	55
17	Die Mengen $A_{k,j}$ im Beweis von Satz 4.21	58
18	Das Prinzip von Cavalieri	66
19	Wegintegral über ein Vektorfeld	73
20	Die Kurven aus Beispiel 5.5	75
21	Der Begriff eines sternförmigen Gebietes	78
22	Ein Parallelepipid mit den Kantenvektoren a_1, a_2, a_3	79
23	Tangentialraum und Normalenvektor	85
24	Ein Gebiet mit glattem Rand	86
25	Die Situation in Satz 5.25	88
26	Der Satz von Stokes in \mathbb{R}^3	92
27	Die Weglänge	100

28	Kurvenintegral	101
29	Flächeninhalt in lokaler Approximation	102
30	Der Satz von Gauß: Oberflächenströmung (links) und innere Strömung (rechts).	104

Literatur

- [AE99] AMANN, Herbert ; ESCHER, Joachim: *Analysis II*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999
- [BF89] BARNER, Martin ; FLOHR, Friedrich: *Analysis II*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989
- [DR11] DENK, Robert ; RACKE, Reinhard: *Kompendium der Analysis. Band 1: Differential- und Integralrechnung, gewöhnliche Differentialgleichungen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011
- [For77] FORSTER, Otto: *Analysis 2. Differentialrechnung im \mathbf{R}^n* . Verlag Vieweg, Braunschweig, 1977
- [Heu91] HEUSER, Harro: *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1991
- [Hie19] HIEBER, Matthias: *Analysis II*. Springer Spektrum, Berlin, 2019
- [Rud99] RUDIN, Walter: *Reelle und komplexe Analysis*. R. Oldenbourg Verlag, Munich, 1999
- [Wal07] WALTER, Rolf: *Einführung in die Analysis. 2*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2007

Index

- 0-Form, 73
- 1-Form, 73

- Ableitung, 11
- äquivalente Wege, 37
- Äquivalenz von Parameterdarstellungen einer Fläche, 44
- äußerer Normalenvektor, 87
- Ausgleichsgerade, 28

- Banachscher Fixpunktsatz, 95
- Beschleunigungsvektor, 39
- beschränkter linearer Operator, 9
- bewegungsinvariant, 68
- Bildmaß, 68
- Binormale, 41
- Bogenlänge, 38
- Borel-messbar, 52
- Borel- σ -Algebra, 52

- Cantormenge, 54
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 1

- Diffeomorphismus, 18
- Differential
 - totales, 76
- differenzierbar, 11
- Dirac-Maß, 51
- Divergenz, 17, 87
- Divergenzsatz, 89

- einfache Funktion, 57
- Erzeugendensystem, 50
- erzeugte σ -Algebra, 51
- exakt
 - 1-Form, 76
- Extrema unter Nebenbedingungen, 29

- Falllinien, 16
- fast überall, 51
- Fläche, 43
- Flächeninhalt, 80, 81

- Folgenraum, 2
- Frenetsche Gleichungen, 41
- Funktion
 - konkav, 29
 - konvex, 29
 - messbare, 55

- Gaußscher Integralsatz, 89
- Gebiet, 85
- Geschwindigkeitsvektor, 35
- glatter Rand, 85
- glatter Weg, 35
- gleichmäßig konvergent, 10
- gleichorientiert, 93
- Gradient, 12
- Gramsche Determinante, 80
- Gramsche Matrix, 80
- Greensche Formeln, 90

- Höhenlinien, 16
- Höldersche Ungleichung, 3
- Hessematrix, 26
- Hilbertraum, 1

- implizite Funktion, 98
- Integral
 - Lebesgue-, 58
 - Riemann-, 62
- Integral über Flächen, 81
- integrierbar, 81
- Intervallschachtelung, 5

- Jacobi-Matrix, 13

- Kettenregel, 15
- konjugierte Exponent, 2
- konkave Funktion, 29
- Kontraktion, 95
- konvex, 29
- konvexe Funktion, 29
- Krümmung, 39
- Krümmungskreis, 40

- Krümmungsvektor, 39
- Kreisfläche, 67
- Kreuzprodukt, 41
- kritische Stelle, 25
- Kugelvolumen, 67
- Kurve, 37
- Kurvenintegral, 74
 - einer 1-Form, 74
- $L(X, Y)$, 9
- Länge, 36
- Laplace-Operator, 17
- Lebesgue-Integral, 58
- Lebesgue-Maß, 53
- Lemma von Fatou, 61
- lineare Regression, 28
- lineares Funktional, 9
- lokale Umkehrbarkeit, 96
- ℓ^p , 2
- Maß, 50
 - Bild-, 68
 - Dirac-, 51
 - endliches, 50
 - Lebesgue-, 53
 - stetig von oben, 52
 - stetig von unten, 52
- Maßraum, 50
- Maßtensor, 80
- messbare Funktionen, 55
- messbare Mengen, 50
- Messraum, 50
- Methode der kleinsten Fehlerquadrate, 28
- Minkowskische Ungleichung, 3
- Mittelwertsatz, 19
- Multiindex, 24
- nach Bogenlänge parametrisiert, 38
- Normale, 40
- Normaleneinheitsvektor, 40
- Normalengleichung, 29
- Normalenvektor, 87
- Nullmenge, 51
- Oberfläche eines Graphen, 82
- Oberflächenintegral, 81
- Operator, 9
- Operatornorm, 9
- orientierte Kurve, 37
- Orientierung, 44, 93
- p-Form, 93
- Parallelepiped, 79
- Parameterdarstellung einer Fläche, 43, 44
- Parametertransformation, 37
- partiell differenzierbar, 12
- partielle Integration im \mathbb{R}^n , 90
- Partition der Eins, 89
- Polarkoordinaten, 70
- Polarkoordinaten, 18
- Portfolio-Optimierung, 33
- Potenzmenge, 50
- Prähilbertraum, 1
- Prinzip von Cavalieri, 66
- Produktregel, 15
- Punktmaß, 51
- quadratische Form, 33
- Rand
 - glatt, 85
- Richtungsableitung, 16
- Riemann-Integral, 62
- Rotation, 17, 91
- Rotationsflächen, 82
- rotationssymmetrisch, 84
- Sägezahnkurve, 37
- Sattelpunkt, 27
- Satz
 - Banachscher Fixpunkt-, 95
 - Divergenz-, 89
 - Mittelwert-, 19
 - Transformations-, 70
 - über implizite Funktionen, 98
 - über lokale Umkehrbarkeit, 96
 - von Bolzano-Weierstraß, 5
 - von Fubini, 65
 - von Gauß, 89

- von Lebesgue über majorisierte Konvergenz, 62
- von Lebesgue über monotone Konvergenz, 61
- von Schwarz, 22
- von Stokes, 91
- von Taylor, 23
- von Tonelli, 64
- Zwischenwert-, 7
- Schniegebene, 39
- σ -additiv, 50
- σ -Algebra, 50
 - Borel-, 52
 - erzeugte, 51
 - Spur-, 51
- σ -endlich, 50
- Skalarprodukt, 1
- Spat, 79
- Spur- σ -Algebra, 51
- Spurmaß, 51
- stückweise glatt, 35
- stückweise glatte Kurve, 37
- Stammfunktion, 76
- Standard-Skalarprodukt, 2
- stereographische Projektion, 47
- sternförmig, 77
- stetig von oben, 52
- stetig von unten, 52
- stetiger linearer Operator, 9
- Stufenfunktion, 57
- Supremumsnorm, 10

- Tangenteneinheitsvektor, 35
- Tangentialraum, 85
- Tangentialvektor, 85
- Taylor-Polynom, 25
- Torsion, 42
- totales Differential, 76
- Träger, 62
- Trägheitsmoment, 68
- Transformationssatz, 70
- translationsinvariant, 68
- Treppenfunktion, 57

- Ungleichung
 - Cauchy-Schwarz-, 1
 - Höldersche, 3
 - Minkowskische, 3
 - Youngsche, 3
- Untermannigfaltigkeit, 94

- Vektorfeld, 72

- Wahrscheinlichkeitsmaß, 50
- Weg, 8, 35
- Wege
 - äquivalente, 37
- Weglänge, 36
- wegunabhängig, 76
- wegzusammenhängend, 8
- Windung, 42

- Youngsche Ungleichung, 2

- Zählmaß, 51
- zusammenhängend, 6
- Zwischenwertsatz, 7