Skript zur Vorlesung

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

Sommersemester 2014

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 22. 7. 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Viskositätslösungen

1.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt definieren wir Viskositätslösungen und betrachten einige Beispiele nichtlinearer partieller Differentialgleichungen. Die wesentliche Idee der Viskositätslösungen besteht in Ungleichungen, welche für Extremalstellen gelten, und welche es erlauben, ein Analogon der ersten und zweiten Ableitung zu definieren, selbst wenn die Funktion selbst nicht differenzierbar ist.

a) Der Begriff der Viskositätslösung und das Maximumprinzip

Im Folgenden betrachten wir Gleichungen der Form

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0 \quad (x \in G)$$

mit geeigneten Randbedingungen, wobei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, $u\colon G \to \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion,

$$F\colon G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}$$

eine Funktion, wobei $\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ die Menge aller reellen symmetrischen $n \times n$-Matrizen bezeichne. Weiter sei $\nabla u(x) = (\partial_{x_j})_{j=1,\dots,n}$ der Gradient von u an der Stelle x, $\nabla^2 u(x) = (\partial_{x_i}\partial_{x_j} u(x))_{i,j=1,\dots,n}$ die Hesse-Matrix von u an der Stelle x. Für Matrizen $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ definieren wir wie üblich $X \le Y \iff \langle Xx, x\rangle \le \langle Yx, x\rangle$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ sei. Wir schreiben etwa $0 \le X \le 1$, falls $0 \cdot I_n \le X \le I_n$ gilt. Hier ist I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix. Unter $\|X\|$ verstehen wir stets die Operatornorm der Matrix $X \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$.

Wir werden im Folgenden stets voraussetzen, dass F stetig ist.

1.2 Definition. a) Die Funktion F heißt degeneriert elliptisch, falls

$$F(x, r, p, X) \le F(x, r, p, Y) \quad (x \in G,\ r \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}^n,\ X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \text{ mit } Y \le X).$$

b) Die Funktion F heißt eigentlich, falls F degeneriert elliptisch ist und falls

$$F(x, r, p, X) \le F(x, s, p, X) \quad (x \in G,\ r, s \in \mathbb{R} \text{ mit } r \le s,\ p \in \mathbb{R}^n,\ X \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}).$$

Nach dieser Definition ist F genau dann eigentlich, wenn $F(x, \cdot, p, X)$ monoton steigend ist und $F(x, r, p, \cdot)$ monoton fallend ist. Wir werden nun eine Reihe von Beispielen linearer und nichtlinearer partieller Differentialgleichungen betrachten.

1.3 Beispiele. a) *Laplace-Gleichung:* $-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x)$ in G. Hier ist

$$F(x, r, p, X) = -\operatorname{tr} X + c(x)r - f(x).$$

Falls $c \geq 0$ in G gilt, so ist F eigentlich.

b) *Lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung:* Allgemeiner betrachten wir

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_{x_i}u(x) + c(x)u(x) = f(x).$$

Hier ist

$$F(x,r,p,X) = -\operatorname{tr}(A(x)X) + \langle b(x), p\rangle + c(x)r - f(x),$$

wobei $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ und $b(x) := (b_i(x))_{i=1,\dots,n}$. Offensichtlich ist F genau dann degeneriert elliptisch, wenn $A(x)$ für alle $x \in G$ positiv semidefinit ist und eigentlich, wenn zusätzlich $c \geq 0$ gilt.

Falls sogar $0 < \lambda \leq A(x) \leq \Lambda < \infty$ mit Konstanten $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}$ gilt, heißt F gleichmäßig elliptisch.

c) *Quasilineare elliptische Differentialgleichungen:* Betrachte

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \nabla u(x))\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(x) + b(x, u(x), \nabla u(x)) = 0.$$

Hier ist

$$F(x,r,p,X) = -\operatorname{tr}(A(x,p)X) + b(x,r,p)$$

eigentlich, falls $A(x,p) \geq 0$ und $b(x,\cdot,p)$ monoton steigend ist für alle $x \in G$ und $p \in \mathbb{R}^n$.

d) *Gleichungen erster Ordnung:* Die Gleichung $F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$ ist eigentlich, falls $F(x,\cdot,p)$ monoton wachsend ist.

e) *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung:* Sei I eine Parametermenge, und für $\alpha \in I$ sei

$$(L^{(\alpha)}u)(x) := -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(\alpha)}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(x) + \sum_{i=1}^n b_i^{(\alpha)}(x)\partial_{x_i}u(x) + c^{(\alpha)}(x)u(x) - f^{(\alpha)}(x).$$

Dann lautet die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

$$\sup_{\alpha\in I}(L^{(\alpha)}u)(x) = 0.$$

In diesem Fall ist

$$F(x,r,p,X) = \sup_{\alpha\in I}\Big(-\operatorname{tr}(A^{(\alpha)}(x)X) + \langle b^{(\alpha)}(x), p\rangle + c^{(\alpha)}(x)r - f^{(\alpha)}(x)\Big).$$

Falls $0 \leq A^{(\alpha)}(x) \leq C < \infty$ und $0 \leq c^{(\alpha)}(x) \leq C < \infty$ für alle $x \in G$ gilt, ist F eigentlich.

f) *Funktionen von Eigenwerten der Hessematrix:* Sei $g\colon \mathbb{R}^{3n+1} \to \mathbb{R}$, $g = g(x, r, p, s_1, \dots, s_n)$ eine Funktion, welche monoton wachsend in $r, s_1, \dots, s_n$ sei. Dann ist

$$F(x, r, p, X) := g(x, r, p, -\lambda_1(X), \dots, -\lambda_n(X))$$

eigentlich, wobei $\lambda_1(X), \dots, \lambda_n(X)$ die Eigenwerte von X sind.

g) *Parabolische Differentialgleichungen:* Für jedes feste $t \in [0, T]$ sei $(x, r, p, X) \mapsto F(t, x, r, p, X)$ eigentlich. Dann ist

$$\partial_t u(t, x) + F(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x), \nabla^2 u(t, x)) = 0$$

(als Gleichung in $\mathbb{R}^{n+1}$) eigentlich. So ist etwa die Mean Curvature-Gleichung

$$\partial_t u(t, x) = |\nabla u(x)| \operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\Big)$$

von der Form $\partial_t u + F(t, x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0$ mit

$$F(t, x, r, p, X) := -\operatorname{tr}\Big(\Big(I_n - \frac{p \otimes p}{|p|^2}\Big) X\Big).$$

Hier ist $p \otimes p := pp^T = (p_i p_j)_{i,j=1,\dots,n}$.

1.4 Definition. Die Funktion F heißt gleichmäßig elliptisch, falls $\lambda, \Lambda \in (0, \infty)$ existieren mit

$$\lambda \operatorname{tr} P \le F(x, r, p, X - P) - F(x, r, p, X) \le \Lambda \operatorname{tr} P$$

für alle $(x, r, p) \in G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und alle $X, P \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ mit $P \ge 0$.

Im Folgenden sei stets $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F\colon \overline{G} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}$ stetig und eigentlich.

1.5 Bemerkung. Sei $u \in C^2(\overline{G})$ mit

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) \le 0 \quad (x \in \overline{G}). \tag{1-1}$$

Sei weiter $\varphi \in C^2(\overline{G})$. Falls $x_0 \in G$ ein lokales Maximum von $u - \varphi$ ist, folgt $\nabla u(x_0) = \nabla \varphi(x_0)$ und $\nabla^2 u(x_0) \le \nabla^2 \varphi(x_0)$. Da F eigentlich ist, folgt daraus

$$F(x_0, u(x_0), \nabla \varphi(x_0), \nabla^2 \varphi(x_0)) \le F(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0), \nabla^2 u(x_0)) \le 0.$$

Insbesondere gilt für $u \in C^2(\overline{G})$ mit (1-1) und alle $\varphi \in C^2(\overline{G})$: Falls $u - \varphi$ ein lokales Maximum an der Stelle $x_0 \in G$ hat, so ist

$$F(x_0, u(x_0), \nabla \varphi(x_0), \nabla^2 \varphi(x_0)) \le 0. \tag{1-2}$$

Weiter folgt mit der Taylorreihe für $u - \varphi$

$$u(x) \le u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle + \tfrac{1}{2}\langle X(x-x_0), x - x_0\rangle + o(|x-x_0|^2) \tag{1-3}$$

mit $p := \nabla\varphi(x_0)$ und $X := \nabla^2\varphi(x_0)$. Falls andererseits (1-3) mit einem Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ und einer Matrix $X \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ gilt folgt bereits $p = \nabla u(x_0)$ und $\nabla^2 u(x_0) \le X$ und damit $F(x_0, u(x_0), p, X) \le 0$.

Diese beiden Beschreibungen verwenden nicht explizit die Ableitungen von u und können daher für eine verallgemeinerte Definition verwendet werden.

1.6 Definition. a) Sei E ein topologischer Raum und $f\colon E \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f oberhalbstetig in $x_0 \in E$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x_0 existiert mit $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ $(x \in U)$. Analog für $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Wir schreiben $USC(E)$ für die Menge aller oberhalbstetigen Funktionen von E nach $\mathbb{R}$ bzw. $\overline{\mathbb{R}}$. Analog definiert man $LSC(E)$, die Menge aller unterhalbstetigen Funktionen.

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, $u\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $x_0 \in U$. Dann heißt

$$\begin{aligned} J^+u(x_0) := J^+_U u(x_0) := \big\{&(p, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} : \\ &u(x) \le u(x_0) + \langle p, x-x_0\rangle + \langle X(x-x_0), x-x_0\rangle + o(|x-x_0|^2)\ (x \to x_0)\big\} \end{aligned}$$

der Superjet (zweiter Ordnung) von u an der Stelle x_0. Analog definiert man den Subjet $J^-u(x_0)$.

c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Eine Funktion $u \in USC(U)$ heißt eine Viskositäts-Sublösung von $F = 0$ (oder eine Viskositätslösung von $F \le 0$) in U, falls

$$F(x, u(x), p, X) \le 0 \quad (x \in U,\ (p, X) \in J^+u(x))$$

gilt. Analog definiert man eine Viskositäts-Superlösung. Falls u sowohl Sublösung als auch Superlösung ist, heißt u eine Viskositätslösung von

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0 \quad \text{in } U.$$

1.7 Bemerkung. a) Es gilt $J^+u(x_0) = \{(\nabla\varphi(x_0), \nabla^2\varphi(x_0)) : \varphi \in C^2(U), u - \varphi \text{ hat lokales Maximum bei } x_0\}$.

b) Sei $u \in USC(U)$. Dann ist u genau dann Sublösung von $F = 0$, falls für alle $x_0 \in U$ gilt: Sei $\varphi \in C^2(U)$, und $u - \varphi$ habe ein lokales Maximum an der Stelle x_0. Dann gilt $F(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0), \nabla^2\varphi(x_0)) \le 0$.

c) Falls x_0 im Inneren von U liegt, so ist $J^+_U u(x_0)$ unabhängig von U.

1.8 Definition. Wir definieren den abgeschlossenen Superjet $\overline{J}_U^+(x_0)$ als die Menge aller $(p, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$, für welche eine Folge $(x_n, p_n, X_n) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ existiert mit $(p_n, X_n) \in J^+u(x_n)$ und $(x_n, u(x_n), p_n, X_n) \to (x_0, u(x_0), p, X)$ $(n \to \infty)$. Analog wird $\overline{J}_U^- u(x_0)$ definiert.

1.9 Bemerkung. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$, $u\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist u genau dann zweimal differenzierbar an der Stelle x_0, falls $Ju(x_0) := J^+u(x_0) \cap J^-u(x_0) \neq \emptyset$. In diesem Fall ist $Ju(x_0) = \{(\nabla u(x_0), \nabla^2 u(x_0))\}$. Denn für $(p, X) \in Ju(x_0)$ gilt nach Definition von $J^\pm u(x_0)$

$$u(x) = u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle + \tfrac{1}{2}\langle X(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2).$$

1.10 Lemma (Beispiel eines klassischen Maximumprinzips)**.** *Sei $F(x, \cdot, p, X)$ streng monoton wachsend. Seien $u, v \in C^2(\overline{G})$ mit*

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) \le 0, \quad F(x, v(x), \nabla v(x), \nabla^2 v(x)) \ge 0 \quad (x \in \overline{G}).$$

Falls ferner $u \le v$ auf ∂G gilt, so gilt $u \le v$ in $\overline{G}$.

Beweis. Sei $x_0 \in G$ ein lokales Maximum von $u - v$. Dann gilt $\nabla u(x_0) = \nabla v(x_0)$ und $\nabla^2 u(x_0) \le \nabla^2 v(x_0)$ und damit

$$\begin{aligned} F(x_0, u(x_0), &\nabla u(x_0), \nabla^2 u(x_0)) \le 0 \le F(x_0, v(x_0), \nabla v(x_0), \nabla^2 v(x_0)) \\ &\le F(x_0, v(x_0), \nabla u(x_0), \nabla^2 u(x_0)). \end{aligned}$$

Da $F(x, \cdot, p, X)$ streng monoton wachsend ist, folgt $u(x_0) \le v(x_0)$ und damit $u \le v$ in G. □

Im Folgenden soll dieses Maximumprinzip auf halbstetige Funktionen übertragen werden. Dazu muss im Beweis $(\nabla u(x_0), \nabla^2 u(x_0))$ durch die Mengen $J^+u(x_0)$ bzw. $J^-v(x_0)$ ersetzt werden. Um diese beiden Funktionen betrachten zu können, verdoppeln wir die Anzahl der Variablen und ergänzen sie zusätzlich durch einen Strafterm, d.h. man betrachtet etwa $u(x) - v(y) - \frac{k}{2}|x - y|^2$ mit einem großen Parameter $k \in \mathbb{N}$.

Wir verwenden zwei technische Aussagen, die hier nicht bewiesen werden.

1.11 Lemma. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, $u \in USC(U)$ und $v \in LSC(U)$. Definiere*

$$M_k := \sup_{x,y\in U} \big(u(x) - v(y) - \tfrac{k}{2}|x - y|^2\big) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Es gelte $M_k < \infty$ für hinreichend große k. Sei $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset U^2$ eine Folge mit

$$\lim_{k\to\infty} \Big(M_k - (u(x_k) - v(y_k) - \tfrac{k}{2}|x_k - y_k|^2\Big) = 0.$$

Dann gilt $\lim_{k\to\infty} k|x_k - y_k|^2 = 0$, *und für jeden Häufungspunkt* x_0 *der Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *gilt*

$$\lim_{k\to\infty} M_k = u(x_0) - v(x_0) = \sup_{x\in U}\big(u(x) - v(x)\big).$$

1.12 Lemma. *Seien* $G \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $u \in USC(G)$, $v \in LSC(G)$ *und* $\varphi \in C^2(\overline{G}\times\overline{G})$. *Definiere* $w(x,y) := u(x) - v(y)$ $(x, y \in G)$. *Sei* $(x_0, y_0) \in G^2$ *ein lokales Maximum von* $w - \varphi$, *und sei* $\varepsilon > 0$. *Dann existieren* $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ *mit*

$$((\nabla_x\varphi)(x_0, y_0), X) \in \overline{J}^+u(x_0), \quad (-\nabla_y\varphi(x_0, y_0), Y) \in \overline{J}^-v(y_0)$$

und

$$-\tfrac{1}{\varepsilon} - \|A\| \le \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \le A + \varepsilon A^2,$$

wobei $A := \nabla^2\varphi(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{(2n)\times(2n)}_{\text{sym}}$.

Damit kann der erste zentrale Satz über Viskositätslösungen gezeigt werden. Dazu werden wir die beiden folgenden Voraussetzungen benötigen:

(M1) Es existiert ein $c_1 > 0$ mit

$$F(x, r, p, X) - F(x, s, p, X) \ge c_1(r - s)$$

für alle $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r \ge s$, $x \in \overline{G}$, $p \in \mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$.

(M2) Es existiert eine Funktion $\omega\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ mit $\lim_{h\searrow 0}\omega(h) = \omega(0) = 0$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ mit

$$-3k \le \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \le 3k\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$$

und alle $x, y \in \overline{G}$, $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(y, r, k(x-y), Y) - F(x, r, k(x-y), X) \le \omega\big(k|x-y|^2 + |x-y|\big).$$

1.13 Satz (Maximumprinzip, Vergleichsprinzip)**.** *Sei* $G \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt und offen,* $F \in C(\overline{G}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}})$ *eine eigentliche Funktion, welche die Voraussetzungen* (M1) *und* (M2) *erfüllt. Seien* $u \in USC(\overline{G})$ *eine Lösung von* $F \le 0$ *und* $v \in LSC(\overline{G})$ *eine Lösung von* $F \ge 0$ *mit* $u \le v$ *auf* ∂G. *Dann gilt* $u \le v$ *in* $\overline{G}$. *Insbesondere ist jede Viskositätslösung von* $F = 0$ *durch die Randbedingung eindeutig festgelegt.*

Beweis. **(i)** Zu $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $M_k := \sup_{x,y\in\overline{G}}\big(u(x) - v(y) - \frac{k}{2}|x-y|^2\big)$. Da G beschränkt ist und $(x,y) \mapsto u(x) - v(y) \in USC(\overline{G}\times\overline{G})$, gilt $M_k < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Angenommen, es gilt $u(z) > v(z)$ für ein $z \in G$. Dann folgt

$$M_k \geq u(z) - v(z) =: \delta > 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Wegen Kompaktheit von $\overline{G} \times \overline{G}$ wird das Supremum angenommen, d.h. es existieren $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{G} \times \overline{G}$ mit

$$M_k = u(x_k) - v(y_k) - \tfrac{k}{2}|x_k - y_k|^2.$$

Nach Lemma 1.11 gilt für jeden Häufungspunkt (x_0, x_0) von $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$u(x_0) - v(x_0) = \lim_{k\to\infty} M_k \geq \delta.$$

Wegen $u \leq v$ auf ∂G kann kein Häufungspunkt auf ∂G liegen, d.h. es gilt $(x_k, y_k) \in G \times G$ für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ wenden wir Lemma 1.12 an auf $\varphi(x, y) := \frac{k}{2}|x - y|^2$ $(x, y \in G)$. Dann gilt $\nabla_x\varphi(x, y) = -\nabla_y\varphi(x, y) = k(x - y)$ und

$$A := \nabla^2\varphi(x, y) = k\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}, \quad A^2 = 2kA, \quad \|A\| = 2k.$$

Nach Konstruktion ist (x_k, y_k) ein lokales Maximum von $w-\varphi$, und nach Lemma 1.12 existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Matrizen $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ mit

$$\big(k(x_k - y_k), X\big) \in \overline{J}^+u(x_k), \quad \big(k(x_k - y_k), Y\big) \in \overline{J}^-v(y_k)$$

sowie

$$\tfrac{1}{\varepsilon} - 2k \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq (k + 2\varepsilon k^2)\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Wählt man $\varepsilon := \frac{1}{k}$, so erhält man

$$-3k \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 3k\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\langle X\xi, \xi\rangle - \langle Y\xi, \xi\rangle &= \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \\ &\leq 3k\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = 0,\end{aligned}$$

d.h. es gilt $X \leq Y$. Da u, v Sub- bzw. Superlösungen von $F = 0$ sind, folgt

$$F(x_k, u(x_k), k(x_k - y_k), X) \leq 0 \leq F(y_k, v(y_k), k(x_k - y_k), Y).$$

Insgesamt erhalten wir unter Verwendung der Voraussetzungen (M1), (M2)

$$\begin{aligned}
c_1\delta \le c_1 M_k &= c_1\big(u(x_k) - v(y_k) - \tfrac{k}{2}|x_k - y_k|^2\big)\\
&\le c_1(u(x_k) - v(y_k))\\
&\le F(x_k, u(x_k), k(x_k - y_k), X) - F(x_k, v(y_k), k(x_k - y_k), X)\\
&= \big[F(x_k, u(x_k), k(x_k - y_k), X) - F(y_k, v(y_k), k(x_k - y_k), Y)\big]\\
&\quad + \big[F(y_k, v(y_k), k(x_k - y_k), Y) - F(x_k, v(y_k), k(x_k - y_k), X)\big]\\
&\le 0 + \omega\big(k|x_k - y_k|^2 + |x_k - y_k|\big) \to 0 \quad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

und damit einen Widerspruch. Somit war die Annahme $u(z) > v(z)$ falsch, und es gilt $u \le v$ in G. □

1.14 Bemerkung. Die technische Bedingung (M2) ist intuitiv schwer nachvollziehbar. Wir zeigen, dass aus (M2) die degenerierte Elliptizität folgt. Dazu seien $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ mit $X \le Y$. Dann gilt für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ unter Verwendung der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\langle X\xi, \xi\rangle - \langle Y\eta, \eta\rangle &\le \langle Y\xi, \xi\rangle - \langle Y\eta, \eta\rangle\\
&= 2\langle Y\eta, \xi - \eta\rangle + \langle Y(\xi - \eta), \xi - \eta\rangle\\
&\le \varepsilon|\eta|^2 + \Big(1 + \frac{\|Y\|}{\varepsilon}\Big)\|Y\|\,|\xi - \eta|^2.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y - \varepsilon \end{pmatrix} \le \Big(1 + \frac{\|Y\|}{\varepsilon}\Big)\|Y\| \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ erfüllen die Matrizen X und $Y + \varepsilon$ also die Voraussetzungen von (M2). Wir setzen in (M2) $y := x - \frac{p}{k}$ und erhalten

$$F(x - \tfrac{p}{k}, r, p, Y + \varepsilon) - F(x, r, p, X) \le \omega\big(\tfrac{1}{k}(|p|^2 + |p|)\big).$$

Mit $k \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ folgt $F(x, r, p, Y) \le F(x, r, p, X)$.

1.15 Beispiel. Die kritische Bedingung für den obigen Satz war Bedingung (M2). Wir diskutieren hier für einige Klassen von Gleichungen, wann diese Bedingung gilt.

a) Sei G beschränktes Gebiet, $F(x, r, p, X) = F_0(r, p, X) - f(x)$, wobei F_0 degeneriert elliptisch ist und $f \in C(\overline{G})$. Dann gilt Bedingung (M2). Denn aus der Bedingung

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \le 3k \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$$

folgt bereits $X \le Y$, wie im obigen Beweis gezeigt. Da F_0 degeneriert elliptisch ist, erhält man

$$F(y, r, k(x - y), Y) - F(x, r, k(x - y), X)$$

$$\leq F(y,r,k(x-y),X) - F(x,r,k(x-y),X)$$
$$= f(y) - f(x) \leq \omega(|x-y|) \leq \omega(k|x-y|^2 + |x-y|),$$

wobei ω der Stetigkeitsmodul von f ist, $\omega(h) := \omega_f(h) := \sup\{|f(x)-f(y)| : |x-y| \leq h\}$.

b) Sei $F(x,r,p,X) = \langle b(x), p\rangle$. Dann gilt (M2) mit $\omega(r) = cr$, $c > 0$, genau dann, wenn

$$\langle b(x) - b(y), x-y\rangle \geq -c|x-y|^2 \quad (x,y \in \overline{G})$$

(„Monotonie").

c) Sei $F(x,r,p,X) = -\operatorname{tr}\big(M(x)X\big)$ mit $M \in \operatorname{Lip}(\overline{G}; \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}})$ und $M \geq c > 0$ in $\overline{G}$. Dann F gleichmäßig elliptisch, und es gilt (M2).

d) Aus den obigen Bestandteilen können allgemeinere Gleichungen konstruiert werden, da die Bedingung (M2) unter Summen und sup-Bildung, sup inf-Bildung erhalten bleibt, solange die Funktion ω einheitlich gewählt werden kann. Durch Addition eines linearen Terms γr lässt sich auch Bedingung (M1) erfüllen.

b) Existenz von Viskositätslösungen

Wir betrachten im Folgenden das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} F(x,u(x),\nabla u(x),\nabla^2 u(x)) &= 0 \quad \text{in } G,\\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial G. \end{aligned} \tag{1-4}$$

Dabei sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und die Funktion F sei in diesem Abschnitt stets eigentlich und stetig in G.

1.16 Definition. Sei $u \colon G \to [-\infty, \infty]$ eine Funktion. Dann heißt

$$u^*(x) := \lim_{r\searrow 0}\big[\sup\{u(y) : y \in G,\ |x-y| \leq r\}\big] \qquad \text{bzw.}$$
$$u_*(x) := \lim_{r\searrow 0}\big[\inf\{u(y) : y \in G,\ |x-y| \leq r\}\big]$$

die oberhalbstetige (bzw. unterhalbstetige) Hülle von u.

Das folgende Lemma zeigt, dass eine konvergente Folge $(z_n, u_n(z_n)) \to (z, u(z))$ durch Elemente des Superjets zu einer konvergenten Folge $(z_n, u_n(z_n), p_n, X_n) \to (z, u(z), p, X)$ „ergänzt" werden kann.

1.17 Lemma. *Seien $u \in USC(G)$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset USC(G)$ eine Folge von Funktionen so, dass für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ mit $x_n \to x \in G$ gilt: $\limsup_{n\to\infty} u_n(x_n) \leq u(x)$.*

Sei $z \in G$, $(p, X) \in J^+u(z)$, und sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ eine Folge mit $(z_n, u_n(z_n)) \to (z, u(z))$. Dann existiert eine Folge $(\hat{z}_n, p_n, X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(p_n, X_n) \in J^+u_n(\hat{z}_n)$ und $(\hat{z}_n, u_n(\hat{z}_n), p_n, X_n) \to (z, u(z), p, X)$.

Beweis. O.E. sei $z = 0 \in G$, und sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ eine Folge mit $(z_n, u_n(z_n)) \to (0, u(0))$. Zu $\delta > 0$ existiert ein $r > 0$ mit

$$u(x) \le u(0) + \langle p, x\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Xx, x\rangle + \delta|x|^2 \quad (x \in \overline{B(0,r)}). \tag{1-5}$$

Wir definieren $\hat{z}_n \in \overline{B(0,r)}$ als Maximalstelle der Funktion

$$x \mapsto u_n(x) - \langle p, x\rangle - \tfrac{1}{2}\langle Xx, x\rangle - \delta|x|^2 \quad \text{ in } \overline{B(0,r)}.$$

Dann gilt für alle $x \in \overline{B(0,r)}$

$$u_n(x) \le u_n(\hat{z}_n) + \langle p, x - \hat{z}_n\rangle + \tfrac{1}{2}\big(\langle Xx, x\rangle - \langle X\hat{z}_n, \hat{z}_n\rangle\big) + 2\delta(|x|^2 - |\hat{z}_n|^2). \tag{1-6}$$

O.E. gelte $\hat{z}_n \to y \in \overline{B(0,r)}$. Wir setzen (für hinreichend großes n) in (1-6) $x := z_n$ ein und nehmen $\liminf_{n\to\infty} \cdots$. Wir erhalten

$$u(0) \le \liminf_{n\to\infty} u_n(\hat{z}_n) - \langle p, y\rangle - \tfrac{1}{2}\langle Xy, y\rangle - 2\delta|y|^2.$$

Nach Voraussetzung folgt $\liminf_{n\to\infty} u_n(\hat{z}_n) \le u(y)$ und damit

$$u(0) \le u(y) - \langle p, y\rangle - \tfrac{1}{2}\langle Xy, y\rangle - 2\delta|y|^2 \le u(0) - \delta|y|^2,$$

wobei die zweite Ungleichung aus (1-5) folgt. Also gilt $y = 0$, d.h. $\hat{z}_n \to 0$, und $\limsup_{n\to\infty} u_n(\hat{z}_n) \to u(0)$.

Für hinreichend großes n gilt $\hat{z}_n \in \overline{B(0,r)}$. Wir zeigen, dass dann $(p+4\delta\hat{z}_n+X\hat{z}_n, X+4\delta) \in J^+u_n(\hat{z}_n)$ gilt. Dazu müssen wir nach Definition von $J^+u_n(\hat{z}_n)$ zeigen, dass

$$u_n(x) - u_n(\hat{z}_n) - \langle p + 4\delta\hat{z}_n + X\hat{z}_n, x - \hat{z}_n\rangle - \tfrac{1}{2}\langle (X + 4\delta)(x - \hat{z}_n), x - \hat{z}_n\rangle \le 0$$

für kleines $|x - \hat{z}_n|$ gilt. Wegen (1-6) ist die linke Seite dieser Ungleichung nicht größer als

$$\begin{aligned} u_n(\hat{z}_n) &+ \langle p, x - \hat{z}_n\rangle - \tfrac{1}{2}(\langle Xx, x\rangle - \langle X\hat{z}_n, \hat{z}_n\rangle) + 2\delta(|x|^2 - |\hat{z}_n|^2) \\ &- u_n(\hat{z}_n) - \langle p, x - \hat{z}_n\rangle - 4\delta\langle \hat{z}_n, x - \hat{z}_n\rangle - \langle X\hat{z}_n, x - \hat{z}_n\rangle \\ &- \tfrac{1}{2}\langle X(x - \hat{z}_n), x - \hat{z}_n\rangle - 2\delta|x - \hat{z}_n|^2 = \ldots = 0. \end{aligned}$$

Da beim Grenzwert $n \to \infty$ die Ungleichung erhalten bleibt und $\hat{z}_n \to 0$ gilt, folgt $(p, X + 4\delta) \in J^+v(0)$. Somit gilt die Aussage des Lemmas für $(p, X + 4\delta)$ anstelle von (p, X). Die Menge aller (q, Y), für welche eine Folge $(\hat{z}_n, p_n, X_n)$ existiert mit $(p_n, X_n) \in J^+u_n(\hat{z}_n)$ und $(\hat{z}_n, u_n(\hat{z}_n), p_n, X_n) \to (0, v(0), q, Y)$ ist abgeschlossen. Wir können daher den Grenzwert $\delta \searrow 0$ nehmen und erhalten die Aussage des Lemmas für (p, X). □

1.18 Lemma. *Sei $\mathscr{F}$ eine Familie von Lösungen von $F \le 0$ in G. Setze $w(x) := \sup\{u(x) : u \in \mathscr{F}\}$ für $x \in G$. Falls für die oberhalbstetige Hülle w^* gilt $w^*(x) < \infty$ $(x \in G)$, dann ist w^* ebenfalls eine Lösung von $F \le 0$ in G.*

Beweis. Sei $z \in G$ und $(p, X) \in J^+ w^*(z)$. Nach Definition von w^* existiert eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ mit $z_n \to z$ und $w(z_n) \to w^*(z)$. Nach Definition von w existiert dazu eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ mit $u_n(z_n) \to w^*(z)$. Ebenfalls nach Definition von w^* und $\mathscr{F}$ gilt für jedes $x \in G$ und jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ die Abschätzung $\limsup_{n\to\infty} u_n(x_n) \le w^*(x)$. Damit sind alle Voraussetzungen von Lemma 1.17 erfüllt, und es existiert eine Folge $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ sowie eine Folge $(p_n, X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(p_n, X_n) \in J^+ w^*(\hat{x}_n)$ und $(\hat{x}_n, u_n(\hat{x}_n), p_n, X_n) \to (z, w^*(z), p, X)$. Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Lösung von $F \le 0$ ist, gilt auch $F(z, w^*(z), p, X) \le 0$, d.h. w^* ist eine Sublösung. □

1.19 Lemma. *Sei u eine Lösung von $F \le 0$ in G. Falls ein $x_0 \in G$ und ein $(p, X) \in J^+ u_*(x_0)$ mit $F(x_0, u_*(x_0), p, X) < 0$ existieren, so gibt es zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine Lösung u_ε von $F \le 0$ mit $u_\varepsilon(x) \ge u(x)$ $(x \in G)$, $\sup_{x\in G}(u_\varepsilon - u)(x) > 0$ sowie $u_\varepsilon(x) = u(x)$ für $x \in G \setminus B(x_0, \varepsilon)$.*

Beweis. O.E. sei $x_0 = 0 \in G$, d.h. es gilt $F(0, u_*(0), p, X) < 0$. Für $\delta, \gamma > 0$ definieren wir

$$u_{\delta,\gamma}(x) := u_*(0) + \delta + \langle p, x\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Xx, x\rangle - \gamma|x|^2 \quad (x \in G).$$

Da F stetig ist, gilt für hinreichend kleine $\varepsilon, \delta, \gamma$ die Abschätzung

$$F(x, u_{\delta,\gamma}(x), \nabla u_{\delta,\gamma}(x), \nabla^2 u_{\delta,\gamma}(x)) \le 0 \quad (x \in B(0, \varepsilon)).$$

Andererseits gilt

$$u(x) \ge u_*(x) \ge u_*(0) + \langle p, x\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Xx, x\rangle + o(|x|^2) \quad (x \to 0).$$

Für $\delta := \frac{\varepsilon^2\gamma}{8}$ und kleines ε folgt

$$u(x) > u_{\delta,\gamma}(x) \quad (x \in G,\ \tfrac{\varepsilon}{2} \le |x| \le \varepsilon).$$

Nach Lemma 1.18, angewendet auf $\mathscr{F} = \{u, u_{\delta,\gamma}\}$ in $B(0, \varepsilon)$, ist

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} \max\{u(x), u_{\delta,\gamma}(x)\}, & \text{falls } |x| < \varepsilon, \\ u(x), & \text{falls } |x| \ge \varepsilon \end{cases}$$

eine Lösung von $F \le 0$ in G. Andererseits gilt für jede Folge $(x_n, u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(x_n, u(x_n)) \to (0, u_*(0))$

$$\lim_{n\to\infty} (u_\varepsilon(x_n) - u(x_n)) = u_{\delta,\gamma}(0) - u_*(0) = \delta > 0$$

und damit $\sup_{x\in G}(u_\varepsilon(x) - u(x)) > 0$. □

Wir kommen nun zur Lösbarkeit von (1-4). Dabei betrachten wir eine Sublösung des Randwertproblems (1-4). Diese ist definiert als eine Viskositätslösung von $F \le 0$ in G mit der Randbedingung $u \le 0$ auf ∂G. Wir sagen, dass das Vergleichsprinzip für (1-4) gilt, falls für jede Sublösung v und jede Superlösung w von (1-4) die Abschätzung $v \le w$ in G gilt.

1.20 Satz. *Es gelte das Vergleichsprinzip für das Randwertproblem* (1-4)*. Falls mindestens eine Sublösung $\underline{u}$ und eine Superlösung $\overline{u}$ mit $\underline{u}_* = \overline{u}^* = 0$ auf ∂G existiert, so definiert*

$$u(x) := \sup\big\{ w(x) : \underline{u} \le w \le \overline{u} \text{ in } G,\ w \text{ ist eine Sublösung von } (1\text{-}4)\big\}$$

eine (und damit die einzige) Lösung von (1-4)*.*

1.21 Bemerkung. a) Diese Konstruktion der Lösung heißt auch Methode von Perron. Man beachte, dass die Eindeutigkeit sofort aus dem Vergleichsprinzip folgt.

b) Satz 1.13 gibt Bedingungen an F an, unter welchen das Vergleichsprinzip gilt.

Beweis von Satz 1.20. Nach Voraussetzung gilt $\underline{u}_* \le u_* \le u \le u^* \le \overline{u}^*$ in $\overline{G}$ und damit $u_* = u = u^* = 0$ auf ∂G. Nach Lemma 1.18 ist u^* eine Lösung von $F \le 0$, und nach dem Vergleichsprinzip folgt $u^* \le \overline{u}$. Nach Definition von u heißt dies $u = u^*$, d.h. u ist eine Sublösung.

Falls u_* an einer Stelle $x_0 \in G$ keine Superlösung ist, so wähle u_ε zu u wie in Lemma 1.19. Es gilt $\overline{u} \le u_\varepsilon$ in $\overline{G}$, und falls $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist, stimmen u und u_ε auf ∂G überein, d.h. es gilt $u_\varepsilon = 0$ auf ∂G. Wieder nach dem Vergleichsprinzip folgt $u_\varepsilon \le \overline{u}$ in G. Da u nach Definition die maximale Sublösung zwischen $\underline{u}$ und $\overline{u}$ ist, erhalten wir $u_\varepsilon \le u$ im Widerspruch zur Konstruktion nach Lemma 1.19.

Somit ist u_* auch eine Superlösung von (1-4). Nach dem Vergleichsprinzip folgt $u^* = u \le u_*$, d.h. $u = u_* = u^*$. Somit ist u stetig und eine Lösung von $F = 0$. □

1.22 Lemma. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Die Funktion F sei eigentlich und erfülle die Bedingung (M2) (siehe Satz 1.13). Weiter seien $f, g \in C(\overline{G})$ und u, v Lösungen von*

$$\begin{aligned} u(x) + F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) &\le f(x), \\ v(x) + F(x, v(x), \nabla v(x), \nabla^2 v(x)) &\ge g(x) \end{aligned}$$

in G. Dann gilt mit $r^+ := \max\{r, 0\}$

$$u(x) - v(x) \le \max\Big\{ \sup_{y \in \partial G} (u(y) - v(y))^+, \sup_{y \in G} (f(y) - g(y))^+ \Big\} \quad (x \in \overline{G}).$$

Beweis. Wir setzen $w(x) := u(x) - \max\{\sup_{y\in\partial G}(u(y)-v(y))^+, \sup_{y\in G}(f(y)-g(y))^+\}$. Dann gilt $J^+w(x) = J^+u(x)$ und, da F eigentlich ist,

$$w(x) + F(x, w(x), \nabla w(x), \nabla^2 w(x)) - g(x) \le 0$$

sowie $w \le v$ auf ∂G. Nach dem Vergleichsprinzip (Satz 1.13) folgt $w \le v$ in G. □

Als Anwendungsbeispiel für den Existenzsatz 1.20 geben wir eine Beispielklasse von nichtlinearen Gleichungen an.

1.23 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^2-Gebiet. Betrachte die Gleichung*

$$\begin{aligned} u(x) + g(\nabla u(x)) - f(x) &= 0 \quad \text{in } G,\\ u(x) &= 0 \quad \text{auf } \partial G. \end{aligned} \tag{1-7}$$

Dabei seien $f \in C(\overline{G})$ und $g \in C(\mathbb{R}^n)$ mit $g(p) \to \infty$ $(|p| \to \infty)$ und $g(0) \le \inf_{x\in\overline{G}} f(x)$. Dann besitzt (1-7) eine eindeutige Viskositätslösung.

Beweis. Nach Beispiel 1.15 a) erfüllt $F(x, r, p) := r + g(p) - f(x)$ die Voraussetzung (M1) und (M2), d.h. Satz 1.13 ist anwendbar, und für (1-7) gilt das Vergleichsprinzip. Nach Satz 1.20 folgt die eindeutige Lösbarkeit, wenn wir eine Sub- und eine Superlösung mit verschwindenden Randwerten angeben können.

Nach Voraussetzung gilt $F(x, 0, 0) \le 0$ $(x \in G)$, d.h. $\underline{u} := 0$ ist eine Sublösung von $F = 0$. Somit müssen wir noch eine Superlösung konstruieren.

Dazu definieren wir $d(x) := \operatorname{dist}(x, \partial G) := \inf_{y\in\partial G} |y - x|$ und $G_\lambda := \{x \in G : d(x) < \frac{1}{\lambda}\}$ für $\lambda > 0$. Dann ist $d \in C^2(\overline{G}_\lambda)$ für hinreichend großes λ, und für $x \in \partial G$ gilt $\nabla d(x) = -\nu(x)$, wobei $\nu(x)$ der äußere Normalenvektor zu G an der Stelle x ist.

Da d stetig ist, existiert ein $\lambda_0 > 0$ so, dass $|\nabla d(x)| \ge \frac{1}{2}$ $(x \in G_\lambda)$ für alle $\lambda \ge \lambda_0$ gilt. Nach Voraussetzung an g erhalten wir

$$\inf_{x\in G_\lambda} g(\lambda \nabla d(x)) \to \infty \quad (\lambda \to \infty).$$

Insbesondere existiert ein $\lambda_1 \ge \lambda_0$ mit

$$g(\lambda \nabla d(x)) \ge \sup_{y\in\overline{G}} f(y) \quad (x \in G_\lambda) \tag{1-8}$$

für alle $\lambda \ge \lambda_1$. Mit später zu bestimmenden Parametern $M > 0$ und $\lambda \ge \lambda_1$ definieren wir

$$u_1(x) := M(1 - e^{-\lambda d(x)}) \quad (x \in \overline{G}_\lambda).$$

Dann gilt $u_1 = 0$ auf ∂G. Nach Definition von G_λ gilt $\lambda d(x) \le 1$ in G_λ und damit $\frac{1}{e} \le e^{-\lambda d(x)} \le 1$ $(x \in G_\lambda)$. Weiter gilt für alle $x \in G_\lambda$

$$F(x, u_1(x), \nabla u_1(x)) = u_1(x) + g(\nabla u_1(x)) - f(x)$$

$$= M(1 - e^{-\lambda d(x)}) + g(\lambda M e^{-\lambda d(x)} \nabla d(x)) - f(x).$$

Wir wählen nun $M > 0$ so groß, dass

$$(1 - \tfrac{1}{e})M + g(0) - f(x) > 1 \quad (x \in \overline{G}), \tag{1-9}$$

und dann $\lambda \geq \max\{1, \frac{M}{e}\}\lambda_1$. Für alle $x \in G_\lambda$ gilt dann $g(\lambda M e^{-\lambda d(x)} \nabla d(x)) \geq g(0)$ nach (1-8), und wir erhalten

$$F(x, u_1(x), \nabla u_1(x)) \geq g(0) - f(x) > 0 \quad (x \in G_\lambda).$$

Wir wählen nun $c_1 \in (0, M(1 - \frac{1}{e}))$ mit $c_1 + g(0) - f(x) \geq 0$ $(x \in \overline{G})$ (dies ist möglich nach (1-9)) und definieren $\overline{u}$ durch

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} \min\{u_1(x), c_1\}, & \text{falls } x \in \overline{G}_\lambda, \\ c_1, & \text{falls } x \in G \setminus \overline{G}_\lambda. \end{cases}$$

Dann gilt $\overline{u} = 0$ auf ∂G, und nach Konstruktion ist $\overline{u}$ eine Superlösung von $F = 0$ in G. Wie zu Beginn des Beweises erläutert, folgt daraus die Behauptung. □

Ähnlich wie den letzten Satz zeigt man auch die folgende Aussage:

1.24 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^2-Gebiet. Betrachte das Randwertproblem*

$$\begin{aligned} u(x) - \operatorname{tr}(A(x)\nabla^2 u(x)) + \langle b(x), \nabla u(x)\rangle - f(x) &= 0 \quad \text{in } G, \\ u(x) &= 0 \quad \text{auf } \partial G. \end{aligned} \tag{1-10}$$

Es gelte $f \in C(\overline{G})$, $b \in C(\overline{G}; \mathbb{R}^n)$, $A \in \operatorname{Lip}(\overline{G}, \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}})$ sowie $A(x) \geq 0$ $(x \in \overline{G})$ und $\langle A(x)\nu(x), \nu(x)\rangle > 0$ auf ∂G. Dann besitzt (1-10) eine eindeutige Viskositätslösung.

Man beachte, dass hier keine gleichmäßige Elliptizität vorausgesetzt wird.

2. Weitere Eigenschaften von Viskositätslösungen und Verallgemeinerungen

2.1 Worum geht's? Die im ersten Kapitel skizzierte Theorie der Viskositätslösungen lässt sich auf allgemeinere Situationen übertragen. Hier werden als Beispiel unbeschränkte Lösungen im Ganzraum und parabolische Gleichungen diskutiert. Eine weitere zentrale Eigenschaft der Viskositätslösung ist es, dass das Supremum von Lösungen wieder eine Lösung ist, was insbesondere dazu verwendet werden kann, um Gleichungen zu regularisieren (etwa durch Addition eines Terms der Form $\varepsilon\Delta u$) und dann den entsprechenden Regularisierungsparameter gegen 0 gehen zu lassen. Gerade der Term $\varepsilon\Delta$, welcher bei Evolutionsgleichungen eine Viskosität beschreibt, war namensgebend für diesen Lösungsbegriff.

a) Unbeschränkte Lösungen

Im Folgenden bezeichnen wir für $G \subset \mathbb{R}^n$ mit $UC(G)$ die Menge aller gleichmäßig stetigen Funktionen $u\colon G \to \mathbb{R}$.

Wir betrachten die autonome Gleichung

$$u(x) + F(\nabla u(x), \nabla^2 u(x)) - f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{2-1}$$

Dabei seien $f \in UC(\mathbb{R}^n)$ und $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}$ stetig und degeneriert elliptisch, d.h. $F(p,\cdot)$ ist monoton fallend für alle $p \in \mathbb{R}^n$.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt höchstens linear wachsend, falls ein $L \geq 0$ existiert mit $u(x) \leq L(1+|x|)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

2.2 Satz (Vergleichsprinzip). *Seien $u \in USC(\mathbb{R}^n)$ und $v \in LSC(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\begin{aligned} u(x) + F(\nabla u(x), \nabla^2 u(x)) - f(x) &\leq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n),\\ v(x) + F(\nabla v(x), \nabla^2 v(x)) - f(x) &\geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Die Funktionen u und v seien höchstens linear wachsend. Dann gilt $u \leq v$ in $\mathbb{R}^n$.

Beweis. **(i)** Da $f \in UC(\mathbb{R}^n)$, existiert ein $K \geq 0$ mit

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^n} \big(f(x) - f(y) - K|x-y|\big) < \infty.$$

Um dies zu sehen, wählen wir $\delta > 0$ so, dass für alle x, y mit $|x-y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < 1$. Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ setzt man dann $x_k := x + \frac{k}{N}(y-x)$, $k = 0, \dots, N$, mit $\frac{|x-y|}{N} \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$ und erhält $f(x) - f(y) = \sum_{k=1}^N f(x_k) - f(x_{k-1}) \leq N \leq \frac{2}{\delta}|x-y|$.

Da u, v höchstens linear wachsen, existiert ein $L \geq 0$ mit

$$u(x) - v(y) \leq L(1 + |x| + |y|) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n). \tag{2-2}$$

Wir wählen nun eine Familie $\{\varphi_R : R \geq 1\} \subset C^2(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften

(i) $\varphi_R \geq 0$ $(R \geq 1)$,

(ii) $\liminf_{|x|\to\infty} \frac{\varphi_R(x)}{|x|} \geq 2L \quad (R \geq 1)$,

(iii) $|\nabla \varphi_R(x)| + \|\nabla^2 \varphi_R(x)\| \leq C \quad (R \geq 1,\, x \in \mathbb{R}^n)$,

(iv) $\lim_{R\to\infty} \varphi_R(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$.

(Dazu wählt man z.B. $\varphi_R \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_R(x) = 0$ falls $|x| \leq R$ und $\varphi_R(x) = 4L|x|$ falls $|x| \geq 2R$.)

Sei

$$\Phi(x, y) := u(x) - v(y) - 2K(1 + |x - y|^2)^{1/2} - \varphi_R(x) - \varphi_R(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Wegen (2-2) und (ii) gilt $\Phi(x, y) \to -\infty$ für $|(x, y)| \to \infty$, d.h. es gibt ein $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$ mit $\Phi(\hat{x}, \hat{y}) = \max_{x,y\in\mathbb{R}^n} \Phi(x, y)$.

(ii) Wir zeigen, dass

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^n} \big(u(x) - v(y) - 2K|x - y|\big) < \infty \tag{2-3}$$

gilt. Falls (2-3) nicht gilt, folgt für hinreichend großes R wegen (iv) $\Phi(\hat{x}, \hat{y}) > 0$ und damit

$$2K|\hat{x} - \hat{y}| \leq u(\hat{x}) - v(\hat{y}). \tag{2-4}$$

Für $\hat{p} := 2K\nabla_z(1 + |z|^2)^{1/2}\big|_{z=\hat{x}-\hat{y}}$ und $\hat{Z} := 2K\nabla_z^2(1 + |z|^2)^{1/2}\big|_{z=\hat{x}-\hat{y}}$ rechnet man nach, dass

$$\big(\hat{p} + \nabla\varphi_R(\hat{x}), \hat{Z} + \nabla^2\varphi_R(\hat{x})\big) \in J^+u(\hat{x}),$$
$$\big(\hat{p} - \nabla\varphi_R(\hat{y}), -\hat{Z} - \nabla^2\varphi_R(\hat{y})\big) \in J^-v(\hat{y}).$$

Da u bzw. v Sublösung bzw. Superlösung von (2-1) ist, gilt

$$u(\hat{x}) + F(p + \nabla\varphi_R(\hat{x}), \hat{Z} + \nabla^2\varphi_R(\hat{x})) - f(\hat{x}) \leq 0,$$
$$v(\hat{y}) + F(p - \nabla\varphi_R(\hat{y}), -\hat{Z} - \nabla^2\varphi_R(\hat{y})) - f(\hat{x}) \geq 0.$$

Da $\hat{p}$ und $\hat{Z}$ unabhängig von R beschränkt sind, folgt

$$u(\hat{x}) - v(\hat{y}) \leq f(\hat{x}) - f(\hat{y}) + F(\hat{p} - \nabla\varphi_R(\hat{y}), -\hat{Z} - \nabla^2\varphi_R(\hat{y}))$$

$$\begin{aligned} &- F(p + \nabla\varphi_R(\hat{x}), \hat{Z} + \nabla^2\varphi_R(\hat{y})) \\ &\le K|\hat{x} - \hat{y}| + C \le \tfrac{1}{2}(u(\hat{x}) - u(\hat{y})) + C, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Ungleichung (2-4) verwendet wurde.

Also gilt $u(\hat{x}) - u(\hat{y}) \le 2C$ mit einer von R unabhängigen Konstante C. Wegen

$$\Phi(x,y) \le \Phi(\hat{x},\hat{y}) \le u(\hat{x}) - v(\hat{y}) \le 2C \quad (x,y \in \mathbb{R}^n)$$

folgt für $R \to \infty$

$$u(x) - v(y) - 2K(1 + |x-y|^2)^{1/2} \le 2C \quad (x,y \in \mathbb{R}^n),$$

d.h. es gilt doch (2-3) im Widerspruch zur Annahme.

(iii) Angenommen, es existiert ein $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $u(\overline{x}) - v(\overline{x}) =: 2\delta > 0$. Wir definieren jetzt

$$\Phi(x,y) := u(x) - v(y) - \tfrac{k}{2}|x-y|^2 - \varepsilon(|x|^2 + |y|^2)$$

mit $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Für kleines ε gilt $\Phi(\overline{x},\overline{x}) \ge \delta$. Nach (2-3) gilt $\Phi(x,y) \to -\infty$ ($|(x,y)| \to \infty$), und damit besitzt Φ eine Maximalstelle $(\hat{x},\hat{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Für diese gilt mit (2-3) und der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} &\tfrac{k}{2}|\hat{x}-\hat{y}|^2 + \varepsilon(|\hat{x}|^2 + |\hat{y}|^2) \le u(\hat{x}) - v(\hat{y}) \\ &\qquad \le 2K|\hat{x}-\hat{y}| + C \le \tfrac{k}{4}|\hat{x}-\hat{y}|^2 + \tfrac{K^2}{k} + C. \end{aligned} \tag{2-5}$$

Wie im Beweis von Satz 1.13 folgt nun aus Lemma 1.12, dass $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ existieren mit

$$\begin{aligned} \big(k(\hat{x}-\hat{y}) + 2\varepsilon\hat{x}, X + 2\varepsilon\big) &\in \overline{J}^{+} u(\hat{x}), \\ \big(k(\hat{x}-\hat{y}) - 2\varepsilon\hat{y}, Y - 2\varepsilon\big) &\in \overline{J}^{-} u(\hat{y}), \\ -3k \le \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} &\le 3k \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2-6}$$

Da u und v Sub- bzw. Superlösungen sind, gilt

$$\begin{aligned} u(\hat{x}) - v(\hat{y}) \le f(\hat{x}) - f(\hat{y}) &+ F(k(\hat{x}-\hat{y}) - 2\varepsilon\hat{y}, Y - 2\varepsilon) \\ &- F(k(\hat{x}-\hat{y}) + 2\varepsilon\hat{x}, X + 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Andererseits gilt $u(\hat{x}) - v(\hat{y}) \ge \Phi(\overline{x},\overline{x}) \ge \delta$, und (mit der letzten Zeile von (2-6)) $X \le Y$. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \delta \le \omega_f(|\hat{x}-\hat{y}|) &+ F(k(\hat{x}-\hat{y}) - 2\varepsilon\hat{y}, X - 2\varepsilon) \\ &- F(k(\hat{x}-\hat{y}) + 2\varepsilon\hat{x}, X + 2\varepsilon), \end{aligned} \tag{2-7}$$

wobei ω_f der Stetigkeitsmodul von f ist. Dieser ist definiert durch

$$\omega_f(h) := \sup_{|x-y|\le h} |f(x) - f(y)| \quad (h \ge 0).$$

Aus (2-5) folgt $k|\hat{x}-\hat{y}|^2 \le C$ und $\varepsilon(|\hat{x}|^2+|\hat{y}|^2) \le C$ für alle (kleinen) $\varepsilon > 0$ und alle $k \ge 1$. Somit gilt $\varepsilon\hat{x}, \varepsilon\hat{y} \to 0$ ($\varepsilon \searrow 0$), $k|\hat{x}-\hat{y}| \le C$ und $|\hat{x}-\hat{y}| \to 0$ ($k \to \infty$). Wir nehmen zunächst $\liminf_{\varepsilon \searrow 0} \dots$ und dann $\liminf_{k\to\infty} \dots$ in (2-7) und erhalten

$$\delta \le \liminf_{k\to\infty} \liminf_{\varepsilon\searrow 0} \omega_f(|\hat{x}-\hat{y}|) = 0,$$

Widerspruch. □

2.3 Satz (Lösbarkeitssatz). *Sei $f \in UC(\mathbb{R}^n)$ und $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}$ stetig und degeneriert elliptisch. Dann besitzt (2-1) genau eine Viskositätslösung u mit höchstens linearem Wachstum. Es gilt $u \in UC(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Nach Satz 2.2 gilt das Vergleichsprinzip (in der Menge der höchstens linear wachsenden Funktionen) und damit insbesondere die Eindeutigkeit. Die Existenz folgt aus Satz 1.20, falls wir linear wachsende Sub- und Superlösungen finden.

Nach Voraussetzung existiert ein $K > 0$ mit $|f(x)| \le K(1+|x|)$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Wir setzen $u := a + L(1+|x|^2)^{1/2}$ ($x \in \mathbb{R}^n$) mit einem Parameter $a > 0$. Dann sind $\nabla u(x)$ und $\nabla^2 u(x)$ beschränkt, und da F stetig ist, gilt

$$c_1 := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |F(\nabla\overline{u}(x), \nabla^2\overline{u}(x))| < \infty.$$

Setzt man nun $a := c_1 + L$, so gilt

$$\overline{u}(x) + F(\nabla\overline{u}(x), \nabla^2\overline{u}(x)) - f(x) \ge 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

d.h. $\overline{u}$ ist eine (klassische) Superlösung. Analog zeigt man, dass $\underline{u} := -\overline{u}$ eine Sublösung ist. Nach Satz 1.20 existiert eine Viskositätslösung u von (2-1).

Da F nicht von x abhängt, ist $w := u(\cdot + y)$ für jedes feste $y \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von

$$w(x) + F(\nabla w(x), \nabla^2 w(x)) - f(x+y) = 0.$$

Wie im Beweis von Korollar 1.22 sieht man

$$|u(x+y) - u(x)| = |w(x) - u(x)| \le \sup_{z\in\mathbb{R}^n} |f(z+y) - f(z)| \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Da f gleichmäßig stetig ist, folgt auch die gleichmäßige Stetigkeit von u, d.h. $u \in UC(\mathbb{R}^n)$. □

b) Konvergenz von Viskositätslösungen

Im Folgenden seien wieder $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $F\colon G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}$ stetig und eigentlich.

2.4 Satz. *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset USC(G)$ eine Folge von Lösungen von $F \le 0$ in G. Definiere*

$$\overline{u}(x) := \limsup_{n\to\infty}{}^{*} u_n(x) := \lim_{n\to\infty} \sup\{u_k(y) : k \ge n,\, |y-x| < \tfrac{1}{n}\} \quad (x \in G).$$

Falls $\overline{u}(x) < \infty$ $(x \in G)$, so ist $\overline{u}$ ebenfalls eine Lösung von $F \le 0$ in G.

Beweis. Sei $z \in G$. Nach Definition von $\overline{u}$ existiert eine Teilfolge $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset G$ mit $z_j \to z$ und $u_{n_j}(z_j) \to \overline{u}(z)$. Weiter gilt für jede Folge $(x_n)_{j\in\mathbb{N}} \subset G$ und alle $x \in G$ mit $x_j \to x$ die Abschätzung $\limsup_{j\to\infty} u_{n_j}(x_j) \le \overline{u}(x)$. Somit erfüllt die Folge $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzung von Lemma 1.17, und zu $(p, X) \in J^+\overline{u}(z)$ existieren $(\hat{x}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset G$ und $(p_j, X_j) \in J^+u_{n_j}(\hat{x}_j)$ mit $(\hat{x}_j, u_{n_j}(\hat{x}_j), p_j, X_j) \to (z, \overline{u}(z), p, X)$ $(j \to \infty)$. Da F stetig ist und u_{n_j} eine Sublösung ist, folgt auch $F(z, \overline{u}(z), p, X) \le 0$, d.h. $\overline{u}$ ist auch eine Sublösung. □

2.5 Bemerkung. a) Wie üblich gilt auch die analoge Aussage für Superlösungen und

$$\underline{u}(x) := \liminf_{n\to\infty}{}_{*} u_n(x) := \lim_{n\to\infty} \inf\{u_k(y) : k \ge n,\, |y-x| < \tfrac{1}{n}\}.$$

b) Der Beweis zeigt, dass sogar folgende Variante gilt: Falls u_n eine Lösung von $F_n \le 0$ ist (wobei F_n für alle $n \in \mathbb{N}$ eigentlich ist), so ist $\overline{u}$ eine Lösung von $\underline{F} \le 0$ mit

$$\underline{F}(x, r, p, X) := \liminf_{n\to\infty}{}_{*} F_n(x, r, p, X).$$

Hier ist $\liminf_{n\to\infty *}$ analog zur Definition in Satz 2.4 definiert, bezieht sich aber auf alle Variablen $(x, r, p, X) \in G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$. Dies gilt sogar, falls F nicht stetig ist. Falls in dieser Situation $F_n = F$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einer unstetigen Funktion F gilt, so erhält man $\underline{F} = F_*$.

Die letzte Bemerkung ist die Motivation für folgende Verallgemeinerung der Definition einer Viskositätslösung.

2.6 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, $J(G) := G \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$. Sei $W \subset J(G)$ eine dichte Teilmenge, und $F\colon W \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definiert man die unterhalbstetige Hülle von F durch

$$F_*(z) := \lim_{\varepsilon\searrow 0} \inf\big\{F(z_0) : |z - z_0| \le \varepsilon,\, z_0 \in W\big\} \quad (z \in J(G)).$$

Eine Funktion $u\colon G \to \mathbb{R}$ heißt eine Viskositäts-Sublösung von

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0$$

in G, falls $u^* < \infty$ in G gilt und falls für alle $x \in G$ und alle $(p, X) \in J^+u^*(x)$ die Ungleichung $F_*(x, u^*(x), p, X) \leq 0$ gilt. Analog definiert man Viskositäts-Superlösungen.

2.7 Bemerkung. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf G, und sei $\overline{u} := \limsup\limits_{n\to\infty}{}^* u_n$ und $\underline{u} := \liminf\limits_{n\to\infty}{}_* u_n$. Es gelte $\overline{u} = \underline{u} =: u$ in G und $-\infty < u < \infty$ in G. Dann ist u stetig (da $\overline{u} \in USC(G)$ und $\underline{u} \in LSC(G)$) und u_n konvergiert auf kompakten Teilmengen von G gleichmäßig gegen u.

Denn sonst existiert eine kompakte Teilmenge $K \subset G$, ein $\varepsilon > 0$ und Folgen $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $|u_{n_j}(x_j) - u(x_j)| \geq \varepsilon$. O.E. gelte $x_j \to x$ $(j \to \infty)$. Da u stetig ist, folgt $u(x_j) \to u(x)$, d.h. für $j \to \infty$ erhalten wir den Widerspruch $|u(x) - u(x)| \geq \varepsilon$.

Das folgende Beispiel zeigt eine Anwendung der obigen Konvergenzaussagen. Man beachte, dass der Zusatzterm $\varepsilon\Delta$ eine Regularisierung darstellt. Dieser Term wird auch Viskosität genannt (was durch die Modellierung entsprechender physikalischer Vorgänge motiviert ist) und lieferte wohl die Basis für den Namen „Viskositätslösung“.

2.8 Satz. *a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $\varepsilon \in [0, 1]$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C(\overline{G})$. Betrachte das Randwertproblem*

$$\begin{aligned} u + g(\nabla u) - \varepsilon\Delta u &= f \quad \text{in } G,\\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial G. \end{aligned} \tag{2-8}$$

Seien $\underline{v} \in C(\overline{G})$ und $\overline{v} \in C(\overline{G})$ von ε unabhängige Sub- bzw. Superlösungen von (2-8) mit $\underline{v} = \overline{v} = 0$ auf ∂G. Dann hat (2-8) für jedes $\varepsilon \in [0, 1]$ eine eindeutige Lösung u_ε, und es gilt $u_\varepsilon \to u_0$ $(\varepsilon \searrow 0)$ gleichmäßig in $\overline{G}$.

Beweis. Nach Beispiel 1.15 a) ist Satz 1.13 anwendbar, d.h. es gilt das Vergleichsprinzip. Nach Satz 1.20 existiert für jedes $\varepsilon \in [0, 1]$ eine eindeutige Viskositätslösung u_ε. Nach Satz 2.4 ist $\overline{u} := \limsup\limits_{\varepsilon\searrow 0}{}^* u_\varepsilon$ eine Sublösung und $\underline{u} := \liminf\limits_{\varepsilon\searrow 0}{}_* u_\varepsilon$ eine Superlösung von (2-8) mit $\varepsilon = 0$.

Da alle u_ε die Randbedingung $u_\varepsilon = 0$ auf ∂G erfüllen, gilt dies auch für $\overline{u}$ und $\underline{u}$. Wir wenden das Vergleichsprinzip (mit $\varepsilon = 0$) an und erhalten $\overline{u} \leq \underline{u}$ in $\overline{G}$, während nach Definition von $\overline{u}$ und $\underline{u}$ auch $\overline{u} \geq \underline{u}$ in $\overline{G}$ gilt. Also folgt $\overline{u} = \underline{u} = u_0$ in $\overline{G}$, und nach Bemerkung 2.7 konvergiert u_ε gleichmäßig gegen u_0. $\square$

2.9 Bemerkung. Ähnlich wie im Beweis von Satz 1.23 kann man zeigen, dass die Voraussetzungen von Satz 2.8 erfüllt sind, falls $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^2-Gebiet ist, $f \in C(\overline{G})$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$ mit $g(p) \to \infty$ $(|p| \to \infty)$ und $g(0) \le \inf_{x\in G} f(x)$. Um dies zu sehen, muss man nach Satz 2.8 nur von $\varepsilon \in [0,1]$ unabhängige Sub- bzw. Superlösungen konstruieren. Wie im Beweis von Satz 2.8 kann man $\underline{v} = 0$ wählen und konstruiert sich $\overline{u}$ mit Hilfe der Abstandsfunktion $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial G)$.

c) Parabolische Gleichungen

Ausgehend von den obigen Konvergenzeigenschaften und im Hinblick auf spätere Anwendungen, verwenden wir den verallgemeinerten Lösungsbegriff aus Definition 2.6 speziell für parabolische Gleichungen. Wir betrachten die Gleichung

$$\partial_t u(t,x) + F(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x),\nabla^2 u(t,x)) = 0 \quad ((t,x) \in (0,T) \times J(G)) \tag{2-9}$$

mit entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen. Der Begriff einer Viskositätslösung ist dabei wie in Definition 2.6 definiert. Man beachte, dass ∇ und ∇^2 sich hier nur auf x beziehen.

Man beachte, dass es sich bei (2-9) um einen Spezialfall der allgemeinen Gleichung handelt, bei welchem die Zeitableitung in spezieller Form auftritt. Dementsprechend ergeben sich Modifikationen der allgemeinen Theorie für diesen Spezialfall, z.B. taucht bei Superjets die zweite Ableitung nach der Zeit nicht auf. Statt die allgemeine Theorie anzuwenden, ist es manchmal günstiger, auf die spezielle Form einzugehen. Als Beispiel wird hier die Definition des parabolischen Superjets genannt.

2.10 Definition. Sei $u\colon (0,T)\times G \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in G$ und $t_0 \in (0,T)$. Dann ist der parabolische Superjet $P^+u(t_0,x_0)$ definiert als die Menge aller $(a,p,X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ mit

$$\begin{aligned} u(t,x) \le{}& u(t_0,x_0) + a(t-t_0) + \langle p, x-x_0\rangle + \tfrac{1}{2}\langle X(x-x_0), x-x_0\rangle \\ &+ o(|t-t_0| + |x-x_0|^2) \quad ((t,x) \to (t_0,x_0)). \end{aligned}$$

Analog definiert man $P^-u(t_0,x_0)$ sowie die abgeschlossenen Super- und Subjets $\overline{P}^{\pm}u(t_0,x_0)$.

In gewisser Weise sind parabolische Gleichungen gutmütiger als elliptische Gleichungen. Setzt man etwa $u(t,x) = e^{\lambda t}v(t,x)$ in (2-9), so erhält man für v die Gleichung

$$\partial_t v(t,x) + \lambda v(t,x) + e^{-\lambda t}F(t,x,e^{\lambda t}\nabla v(t,x), e^{\lambda t}\nabla^2 v(t,x)).$$

Ist etwa $F(t,x,\cdot,p,X)$ monoton steigend und $\lambda > 0$, so erhält man bei der Gleichung für v eine streng monoton steigende Funktion.

Im Hinblick auf geometrische Anwendungen betrachten wir Funktionen F, welche in $J_0 := (0,T] \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}}$ definiert und dort stetig sind. Mit einigem technischen Aufwand erhält man folgendes Vergleichsprinzip:

2.11 Satz (Parabolisches Vergleichsprinzip)**.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und sei $F\colon J_0 \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(P1) F ist stetig und degeneriert elliptisch in J_0,

(P2) für alle $M > 0$ existiert eine Konstante $c_0(M)$ so, dass $r \mapsto c_0 r + F(t,r,p,X)$ für alle $(t,r,p,X) \in J_0$ mit $|r| \le M$ monoton wachsend ist,

(P3) es gilt $-\infty < F_*(t,r,0,0) = F^*(t,r,0,0) < \infty$ für alle $t \in [0,T]$ und $r \in \mathbb{R}$.

Seien u bzw. v eine Sub- bzw. Superlösung von (2-9) in $G_T := (0,T] \times G$. Es gelte $u^* \le v_*$ auf dem parabolischen Rand

$$\partial_p G_T := (\{0\} \times G) \cup ([0,T] \times \partial G).$$

Dann gilt $u^* \le v_*$ in G_T.

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen, der Beweis erfolgt im Wesentlichen analog zum Beweis von Satz 1.13. Am schwersten zu zeigen ist ein Analogon zu Lemma 1.12 (Lemma von Ishii). Aus dem Vergleichsprinzip erhält man sofort die Eindeutigkeit:

2.12 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.11 existiert zu jedem $g \in C(\partial_p G)$ höchstens eine Viskositätslösung u von (2-9) mit $u^* = u_* = g$ auf $\partial_p G$.*

Die Methode von Perron ist auch auf die parabolische Gleichung anwendbar (als Spezialfall der elliptischen Gleichung in $n+1$ Variablen). Man erhält damit folgendes Existenzresultat, mit identischem Beweis wie im elliptischen Fall.

2.13 Satz (Existenzsatz für parabolische Gleichungen)**.** *Sei G ein beschränktes Gebiet, und sei $F\colon J_0 \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften (P1)–(P3). Es gebe eine Sublösung $\underline{u}$ und eine Superlösung $\overline{u}$ von (2-9) mit $\underline{u} \le \overline{u}$ auf G_T und $\underline{u}_* = \overline{u}^*$ auf $\partial_p G_T$. Dann existiert eine Viskositätslösung $u \in C(G_T \cup \partial_p G_T)$ von (2-9) mit $\underline{u} \le u \le \overline{u}$ in $G_T \cup \partial_p G_T$.*

3. Anwendungen von Viskositätslösungen

3.1 Worum geht's? Hier sollen examplarisch zwei Klassen von Gleichungen diskutiert werden, bei welchen das Konzept der Viskositätslösung eine zentrale Rolle spielt: Bellman-Gleichung und geometrische Gleichungen. Dabei werden nur einige Ideen diskutiert, es wird weder ein allgemeiner Lösbarkeitssatz formuliert noch wird die allgemeine Form der Gleichung betrachtet. Beides würde technische Details benötigen. Bei den Bellman-Gleichungen verwenden wir deterministische Kontrollprobleme. In vielen Anwendungen werden stochastische Kontrollprobleme behandelt. Die dann entstehenden Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichungen können grundsätzlich mit denselben Ideen, aber technisch komplizierter behandelt werden.

a) Bellman-Gleichung

Im Folgenden seien $A \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{A} := \{\alpha\colon [0,\infty) \to A \,|\, \alpha \text{ messbar}\}$. Weiter seien $g\colon \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, $f\colon \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $\omega_f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine stetige Funktion mit $\omega_f(0) = 0$.

Zu $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathcal{A}$ sei $X(\cdot, x, \alpha)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} X'(t) &= g(X(t), \alpha(t)) \quad (t > 0), \\ X(0) &= x. \end{aligned} \tag{3-1}$$

Dabei werden wir Bedingungen an g stellen, welche die eindeutige Lösbarkeit von (3-1) implizieren. Das Kostenfunktional $J\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$J(x,\alpha) := \int_0^\infty e^{-\nu t} f(X(t,x,\alpha), \alpha(t))dt \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathcal{A}).$$

Dabei ist $\nu > 0$ der sogenannte Abzinsungsfaktor (Diskontfaktor), welcher bei geeigneten Bedingungen an f auch die Endlichkeit des Integrals garantiert. Ziel des Kontrollproblems ist es, das Kostenfunktional zu minimieren. Genauer sucht man das optimale Kostenfunktional (auch Wertfunktion genannt) $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$u(x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(x,\alpha) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Das folgende Resultat ist zentral für alle Kontrollprobleme. Es besagt, dass man das Kostenfunktional minimieren kann, indem man zunächst das Zielfunktional nur bis zur Zeit T betrachtet und dann die Wertfunktion u an der Stelle $X(T,x,\alpha)$ auswertet.

3.2 Satz (Prinzip der dynamischen Programmierung)**.** *Es gelte*

(A1) $\sup_{a\in A}\big(\|f(\cdot,a)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\|g(\cdot,a)\|_{W_1^\infty(\mathbb{R}^n)}\big)<\infty$,

(A2) $\sup_{a\in A}|f(x,a)-f(y,a)|\le\omega_f(|x-y|)$ $(x,y\in\mathbb{R}^n)$.

Dann gilt für alle $T>0$ und $x\in\mathbb{R}^n$

$$u(x)=\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\Big(\int_0^T e^{-\nu t}f(X(t,x,\alpha),\alpha(t))dt+e^{-\nu T}u(X(T,x,\alpha))\Big).$$

Beweis. Für festes $T>0$ sei $v(x)$ die rechte Seite in der obigen Formel.

(i) Wir zeigen $u(x)\ge v(x)$ $(x\in\mathbb{R}^n)$. Zu $\varepsilon>0$ wähle $\alpha_\varepsilon\in\mathcal{A}$ mit

$$u(x)+\varepsilon\ge\int_0^\infty e^{-\nu t}f(X(t,x,\alpha_\varepsilon),\alpha_\varepsilon(t))dt.$$

Wir verwenden, dass aus der eindeutigen Lösbarkeit von (3-1) die Identität $X(t+T,x,\alpha)=X(t,X(T,x,\alpha),\alpha(\cdot+T))$ folgt. Man erhält für $\hat{x}:=X(T,x,\alpha_\varepsilon)$ und $\hat{\alpha}_\varepsilon(t):=\alpha_\varepsilon(T+t)$ $(t\ge 0)$ die Gleichheit

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\nu t}f(X(t,x,\alpha_\varepsilon),\alpha_\varepsilon(t))dt&=\int_0^T e^{-\nu t}f(X(t,x,\alpha_\varepsilon),\alpha_\varepsilon(t))dt\\&\quad+e^{-\nu T}\int_0^\infty e^{-\nu t}f(X(t,\hat{x},\hat{\alpha}_\varepsilon),\hat{\alpha}_\varepsilon(t))dt\\&\ge\int_0^T e^{-\nu t}f(X(t,x,\alpha_\varepsilon),\alpha_\varepsilon(t))dt+e^{-\nu T}u(\hat{x}).\end{aligned}$$

Bei der letzten Abschätzung haben wir das Integral durch das Infimum über alle α ersetzt. Ersetzt man nun die rechte Seite wieder durch das Infimum über alle $\alpha\in\mathcal{A}$, erhält man $u(x)+\varepsilon\ge v(x)$ und damit $u(x)\ge v(x)$.

(ii) Für die Ungleichung $u(x)\le v(x)$ $(x\in\mathbb{R}^n)$ geht man ähnlich vor. Zu $\varepsilon>0$ wählt man $\alpha_\varepsilon\in\mathcal{A}$ mit

$$v(x)+\varepsilon\ge\int_0^T e^{-\nu t}f((X(t,x,\alpha_\varepsilon),\alpha_\varepsilon(t))dt+e^{-\nu T}u(\hat{x})$$

mit $\hat{x}:=X(T,x,\alpha_\varepsilon)$. Wir wählen noch $\alpha_1\in\mathcal{A}$ mit

$$u(\hat{x})+\varepsilon\ge\int_0^\infty e^{-\nu t}f((X(t,\hat{x},\alpha_1),\alpha_1(t))dt.$$

Dann gilt für α_0, definiert durch $\alpha_0(t):=\alpha_\varepsilon(t)$ $(t\in[0,T)$ und $\alpha_0(t):=\alpha_1(t-T)$ $(t\ge T)$, die Abschätzung

$$v(x)+2\varepsilon\ge\int_0^\infty e^{-\nu t}f(X(t,x,\alpha_0),\alpha_0(t))dt.$$

Wieder ersetzt man hier die rechte Seite durch das Infimum über alle $\alpha\in\mathcal{A}$ und nimmt dann $\varepsilon\to 0$. Man erhält $v(x)\ge u(x)$. □

3.3 Satz. *Falls die Voraussetzungen (A1) und (A2) gelten, so ist die Wertfunktion u eine Viskositätslösung der Bellman-Gleichung*

$$\sup_{a\in A}\Big(\nu u(x) - \langle g(x,a), \nabla u(x)\rangle - f(x,a)\Big) = 0 \quad (x\in\mathbb{R}^n). \tag{3-2}$$

Beweis. **(i)** Wir nehmen an, dass u keine Sublösung ist. Dann existieren $\hat{x}\in\mathbb{R}^n$, $\theta>0$ und $(p,X)\in J^+u^*(x_0)$ mit

$$\sup_{a\in A}\big(\nu u - \langle g(\hat{x},a),p\rangle - f(\hat{x},a)\big) \ge 2\theta.$$

Nach Bemerkung 1.7 a) existiert ein $\varphi\in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit $0=(u^*-\varphi)(\hat{x})\ge(u^*-\varphi)(x)$ $(x\in\mathbb{R}^n)$ und $p=\nabla\varphi(\hat{x})$. Nach Voraussetzung (A1), (A2) existiert ein $a_0\in A$ und ein $r>0$ mit

$$\nu\varphi(x) - \langle g(x,a_0),\nabla\varphi(x)\rangle - f(x,a_0)\ge\theta \quad (x\in B(\hat{x},2r)). \tag{3-3}$$

Nach Definition von u^* und wegen der Stetigkeit von φ existiert für große $k\in\mathbb{N}$ ein Punkt $x_k\in B(\hat{x},\frac1k)$ mit $u^*(\hat{x})\le u(x_k)+\frac1k$ und $|\varphi(\hat{x})-\varphi(x_k)|<\frac1k\le r$.

Wir definieren $\alpha_0(t):=a_0$ $(t\in[0,\infty))$ und $X_k(t):=X(t,x_k,\alpha_0)$. Dann gilt $X_k(t)\in B(\hat{x},2r)$ $(t\in[0,t_0])$ für hinreichend kleines t_0 und großes k. Nach Satz 3.2 gilt

$$u(x_k)\le\int_0^{t_0} e^{-\nu t}f(X_k(t),a_0)dt + e^{-\nu t_0}u(X_k(t_0)).$$

Dies ergibt mit $u(X_k(t_0))\le u^*(X_k(t_0))\le\varphi(X_k(t_0))$

$$\varphi(x_k)-\tfrac2k\le\varphi(\hat{x})-\tfrac1k\le u(x_k)\le\int_0^{t_0}e^{-\nu t}f(X_k(t),a_0)dt+e^{-\nu t_0}\varphi(X_k(t_0)). \tag{3-4}$$

Wir verwenden (3-3) und erhalten

$$\begin{aligned}
e^{-\nu t_0}\varphi(X_k(t_0))-\varphi(x_k) &= \int_0^{t_0}\tfrac{d}{dt}\big(e^{-\nu t}\varphi(X_k(t))\big)dt\\
&= \int_0^{t_0}\Big(-\nu e^{-\nu t}\varphi(X_k(t)) + e^{-\nu t}\langle g(X_k(t),a_0),\nabla\varphi(X_k(t))\rangle\Big)dt\\
&\le \int_0^{t_0} e^{-\nu t}\big(-\theta - f(X_k(t),a_0)\big)dt.
\end{aligned}$$

In Kombination mit (3-4) ergibt dies

$$-\tfrac2k\le-\int_0^{t_0}e^{-\nu t}\theta dt = -\tfrac{\theta}{\nu}(1-e^{-\nu t_0}).$$

Für $k\to\infty$ erhält man den Widerspruch $-\frac{\theta}{\nu}(1-e^{-\nu t_0})\ge 0$.

(ii) Analog zeigt man, dass u eine Superlösung ist. □

3.4 Bemerkung. Das Kostenfunktional hatte hier den Zusatzfaktor $e^{-\nu t}$. Im Beweis sieht man, dass beim Differenzieren nach t nur die Konstante ν entsteht und $e^{-\nu t}$ im Integral ausgeklammert werden kann. Dies bewirkt letztlich, dass die Bellman-Gleichung hier keine Zeitableitung enthält. In allgemeineren Fällen erhält man eine zeitabhängige Gleichung (Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung).

b) Geometrische parabolische Gleichungen

Wir betrachten nun geometrische Gleichungen. In der späteren Anwendung werden wir parabolische Gleichungen betrachten, d.h. Gleichungen in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit dem Gradienten $\binom{\nabla}{\partial_t}$. Wir verzichten aber auf eine Änderung der Schreibweise. Sei daher im Folgenden $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F\colon G \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten die Gleichung

$$F(x, \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0 \quad (x \in G). \tag{3-5}$$

Man beachte, dass F nicht von $u(x)$ abhängt.

3.5 Definition. Die Gleichung $F = 0$ heißt geometrisch, falls für alle $\lambda > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ Konstanten $C_1(\lambda, \mu), C_2(\lambda, \mu) > 0$ existieren so, dass

$$C_1(\lambda, \mu)F(x, p, X) \leq F(x, \lambda p, \lambda X + \mu p \otimes p) \leq C_2(\lambda, \mu)F(x, p, X)$$

gilt, falls alle auftretenden Terme existieren.

3.6 Bemerkung. a) Falls $F = 0$ geometrisch ist, so sind auch $F^* = 0$ und $F_* = 0$ geometrisch.

b) Sei $F = 0$ geometrisch, sei $u \in C^2(G)$ eine klassische Sublösung von (3-5), und sei $\theta \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\theta' > 0$. Dann gilt für $v := \theta \circ u$

$$\begin{aligned} (\nabla v)(x) &= \theta'(u(x))\nabla u(x), \\ (\nabla^2 v)(x) &= \theta''(u(x))\nabla u(x) \otimes \nabla u(x) + \theta'(u(x))\nabla^2 u(x). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$F(x, \nabla v(x), \nabla^2 v(x)) \leq C_2(\theta'(u(x)), \theta''(u(x)))F(x, \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) \leq 0.$$

Also ist auch v eine klassische Sublösung. Der wesentliche Schritt zur Behandlung geometrischer Gleichungen liegt in der Übertragung dieser Eigenschaft auf Viskositätslösungen. Dazu benötigen wir noch einige Aussagen über Approximationseigenschaften und über konvexe Funktionen.

Man schreibt $K \subset\subset G$, falls K eine kompakte Teilmenge von G ist.

3.7 Definition. Eine Funktion $u\colon G \to \mathbb{C}$ heißt konvex, falls für alle konvexen Teilmengen $U \subset G$ mit $\overline{U} \subset\subset G$ gilt:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y) \quad (x, y \in U,\ \alpha \in [0,1]).$$

Die Funktion u heißt semikonvex, falls ein $C > 0$ existiert, so dass $x \mapsto u(x) + \frac{C}{2}|x|^2$ konvex ist.

Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen. In diesem Lemma bezeichnet $\mathscr{B}(G)$ die σ-Algebra der Borelmengen auf G und $\mathscr{B}_0(G)$ die Menge aller Mengen $U \in \mathscr{B}(G)$ mit $\overline{U} \subset\subset G$.

3.8 Lemma. *Sei $u\colon G \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei*

$$\nabla^2 u := \big(\partial_{x_i}\partial_{x_j} u\big)_{i,j=1,\dots,n} \subset \big(\mathscr{D}'(G)\big)^{n\times n}$$

die Matrix mit den zweiten distributionellen Ableitungen.

a) Die Funktion u ist genau dann konvex, falls für alle $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top \in (\mathscr{D}(G))^n$ gilt

$$\varphi^\top \nabla^2 u(\varphi) := \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}\partial_{x_j} u(\varphi_i\varphi_j) \ge 0.$$

In diesem Fall existieren Mengenfunktionen $\mu_{ij}\colon \mathscr{B}_0(G) \to \mathbb{C}$, welche auf allen kompakten Teilmengen von G komplexe Borelmaße sind, mit

$$(\partial_{x_i}\partial_{x_j} u)(\varphi) = \int_G \varphi(x)\, d\mu_{ij}(x) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(G)).$$

b) Sei G beschränkt, sei u Lipschitz-stetig in $\overline{G}$ und semikonvex in G. Sei ferner $\theta \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\theta'(t) > 0$ $(t \in \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\nabla^2(\theta \circ u) = (\theta' \circ u)\nabla^2 u + (\theta'' \circ u)\nabla u \otimes \nabla u$$

als Gleichheit in $(\mathscr{D}'(G))^{n\times n}$, und $\theta \circ u$ semikonvex.

c) Sei G beschränkt, und sei u Lipschitz-stetig in $\overline{G}$ und semikonvex in G. Sei $\overline{x} \in G$ eine Maximalstelle von u. Dann existieren Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset G$ und $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_k \to x$, $|p_k| \le \frac{1}{k}$ so, dass $x \mapsto u(x) - \langle p, x\rangle$ an der Stelle x_k ein Maximum besitzt und dort zweimal differenzierbar ist.

3.9 Lemma. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $u \in \mathrm{Lip}(\overline{G})$ semikonvex, $\theta \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\theta' > 0$. Falls (3-5) geometrisch ist und u eine Sublösung von (3-5) ist, so ist auch $\theta \circ u$ eine Sublösung von (3-5).*

Beweis. Die Funktion $\theta \circ u$ ist ebenfalls Lipschitz-stetig und nach Lemma 3.8 b) auch semikonvex. Sei $\overline{x} \in G$, und sei $\varphi \in C^2(G)$ so, dass $\theta \circ u - \varphi$ an der Stelle $\overline{x}$ ein lokales Maximum besitzt. Durch Änderung außerhalb einer Umgebung von $\overline{x}$ kann man $\varphi \in C^2(\overline{G})$ annehmen.

Nach Lemma 3.8 c), angewendet auf $\theta \circ u - \varphi$, existieren Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $p_k \to 0$, $x_k \to \overline{x}$, wobei $\theta \circ u$ an der Stelle x_k zweimal differenzierbar ist sowie

$$(\theta \circ u)(x_k) - \varphi(x_k) - \langle p_k, x_k \rangle = \max_{x\in G} \big((\theta \circ u)(x) - \varphi(x) - \langle p_k, x_k \rangle\big). \tag{3-6}$$

Da $\theta \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\theta' > 0$, ist θ insbesondere bijektiv mit $\theta^{-1} \in C^2(\mathbb{R})$, und $u = \theta^{-1} \circ (\theta \circ u)$ ist an der Stelle x_k ebenfalls zweimal differenzierbar. Damit gilt

$$\begin{aligned} \nabla(\theta \circ u)(x_k) &= \theta'(u(x_k))\nabla u(x_k), \\ \nabla^2(\theta \circ u)(x_k) &= \theta''(u(x_k))\nabla u(x_k) \otimes \nabla u(x_k) + \theta'(u(x_k))\nabla^2 u(x_k). \end{aligned}$$

Da $F_* = 0$ geometrisch ist, folgt

$$F_*(x_k, \nabla(\theta \circ u)(x_k), \nabla^2(\theta \circ u)(x_k)) \le C_2 F_*(x_k, \nabla u(x_k), \nabla^2 u(x_k)) \le 0.$$

Nach (3-6) ist $\nabla(\theta \circ u)(x_k) = \nabla\varphi(x_k) + p_k$ und $\nabla^2(\theta \circ u)(x_k) \le \nabla^2\varphi(x_k)$. Da F_* degeneriert elliptisch ist, erhält man

$$F_*(x_k, \nabla\varphi(x_k) + p_k, \nabla^2\varphi(x_k)) \le 0.$$

Nach Bemerkung 1.7 b) ist $\theta \circ u$ ein Sublösung von (3-5). □

Durch Approximation kann man die Glattheitsvoraussetzungen des letzten Lemmas noch abschwächen.

3.10 Satz. *Sei F degeneriert elliptisch, und sei $F = 0$ geometrisch. Sei ferner u eine lokal beschränkte Sublösung von (3-5). Falls $\theta \in C(\mathbb{R})$ eine monoton wachsende Funktion ist, so ist auch $\theta \circ u$ eine Sublösung (analog für Superlösungen).*

Beweisskizze. O.E. sei G beschränkt und u damit beschränkt in G, da das Problem lokal ist.

(i) Zunächst approximiert man θ durch eine Folge $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^2(\mathbb{R})$ mit $\theta_k' > 0$. Dazu definiert man $a_j^{(k)} := \sup\{t \in \mathbb{R} : \theta(t) \le \frac{j}{k}\}$ für $j \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$. Da θ monoton wächst, besitzt die Folge $(a_j^{(k)})_{j\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ keinen endlichen Häufungspunkt, und es gilt $a_j^{(k)} < a_{j+1}^{(k)}$, falls beide Zahlen endlich sind.

Sei $\theta_k^{(1)}$ die stückweise lineare Funktion, deren Graph durch die Punkte $(a_j^{(k)}, \theta(a_j^{(k)})$, $j \in \mathbb{Z}$ geht. Dann ist $\theta^{(k)}$ stetig, monoton wachsend und glatt bis auf die Stellen $a_j^{(k)}$,

$j \in \mathbb{Z}$. Durch Glätten an diesen Stellen erhält man eine Funktion $\theta_k^{(2)} \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\|\theta_k^{(2)} - \theta\|_\infty \to 0$ $(k \to \infty)$.

Sei $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$ beschränkt mit $\alpha' > 0$. Definiert man $\theta_k(t) := \theta_k^{(2)}(t) + \frac{\alpha(t)}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$, so gilt $\theta_k \in C^2(\mathbb{R})$, $\theta_k' > 0$ und $\|\theta_k - \theta\|_\infty \to 0$ $(k \to \infty)$.

(ii) Für $\varepsilon > 0$ approximieren wir u durch

$$u^\varepsilon(x) := \sup_{y \in G} \Big(u^*(y) - \frac{|x-y|}{\varepsilon} \Big) \quad (y \in \overline{G}).$$

Man kann zeigen, dass $u^\varepsilon \in \operatorname{Lip}(\overline{G})$ gilt und u^ε semikonvex ist. Für $\lambda_0 := (2\|u\|_\infty)^{1/2}$ ist das Supremum über alle $y \in G$ gleich dem Supremum über alle $y \in G$ mit $|x-y| < \sqrt{\varepsilon}\lambda_0$.

Definiert man

$$F_\varepsilon(x,p,X) := \inf\{F(y,p,X) : |y-x| \le \sqrt{\varepsilon}\lambda_0,\ y \in G\},$$

so ist u^ε eine Sublösung von

$$F_\varepsilon(x, \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0 \tag{3-7}$$

in $G^\varepsilon := \{x \in G : \operatorname{dist}(x, \partial G) > \sqrt{\varepsilon}\lambda_0\}$.

(iii) Nach Lemma 3.9 ist $\theta_k \circ u_\varepsilon$ ebenfalls eine Sublösung von (3-7). Es gilt $u^\varepsilon(x) \searrow u^*(x)$ $(x \in \overline{G})$ (monotone Konvergenz), und $u^* \in USC(\overline{G})$. Nach dem Satz von Dini folgt sogar gleichmäßige Konvergenz von u^ε gegen u^* in $\overline{G}$ und damit auch gleichmäßige Konvergenz von $\theta_k \circ u^\varepsilon$ gegen $\theta \circ u$ für $k \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$. Wie in Satz 2.4 folgt, dass $\theta \circ u^*$ eine Sublösung von (3-5) ist, und wegen $\theta \circ u^* = (\theta \circ u)^*$ ist $\theta \circ u$ eine Sublösung von (3-5) (wobei Sublösung hier jeweils im Sinne von Definition 2.6 zu verstehen ist). □

Wir spezialisieren nun die obigen Aussagen auf parabolische Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} u_t(t,x) + F(t, \nabla u(t,x), \nabla^2 u(t,x)) = 0 \quad ((t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n), \\ u(0,x) = a(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{3-8}$$

Dabei sei im Folgenden $F\colon (0,T] \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}$ stetig und degeneriert elliptisch, $a \in C_{c,\alpha}(\mathbb{R}^n) := \{a \in C(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(a-\alpha) \text{ kompakt}\}$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.11 Bemerkung. a) Die Gleichung (3-8) ist genau dann geometrisch, falls für alle $\lambda > 0$ und $\sigma \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(t, \lambda p, \lambda X + \sigma p \otimes p) = \lambda F(t,p,X).$$

b) Aus Satz 3.10 folgt: Sei (3-8) geometrisch, und sei u eine lokal beschränkte Sublösung von (3-8) in $(0,T] \times \mathbb{R}^n$. Falls $\theta \in C(\mathbb{R})$ monoton wachsend ist, so ist auch $\theta \circ u$ eine Sublösung von (3-8).

3.12 Beispiele. a) Sei $u\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten die Nullstellenmenge $\Gamma_t := \{x\in\mathbb{R}^n : u(t,x)=0\}$ (oder allgemeinere Niveaumengen $\{x\in\mathbb{R}^n : u(t,x)=c\}$). Dann ist $\frac{\nabla u(t,x)}{|\nabla u(t,x)|}$ der Normalenvektor an Γ_t und $\operatorname{div}(\frac{\nabla u(t,x)}{|\nabla u(t,x)|})$ beschreibt die mittlere Krümmung, sowie $\frac{\partial_t u(t,x)}{|\nabla u(t,x)|}$ die Normalengeschwindigkeit von Γ_t. Damit lässt sich der mittlere Krümmungsfluss für Γ_t in der Form

$$\partial_t u(t,x) - |\nabla u(t,x)|\operatorname{div}\big(\tfrac{\nabla u(t,x)}{|\nabla u(t,x)|}\big) = 0 \quad ((t,x)\in\mathbb{R}^n_T)$$

schreiben. Hier ist die linke Seite definiert, falls $\nabla u(t,x)\neq 0$. Man kann zeigen, dass dies eine geometrische Gleichung ist.

b) Allgemeiner betrachtet man etwa die geometrische Gleichung

$$\partial_t u(t,x) - |\nabla u(t,x)|\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_i}\Big(\frac{\nabla u(t,x)}{|\nabla u(t,x)|}\Big)\Big) - \beta\Big(\frac{\nabla u(t,x)}{|\nabla u(t,x)|}\Big)|\nabla u(t,x)| = 0,$$

wobei $H\in C^2(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ konvex und positiv homogen vom Grad 1 und β stetig auf der Einheitssphäre sind. Dies ist eine anisotrope Version des mittleren Krümmungsflusses und wird etwa verwendet, um anisotrope Phasenübergänge wie Kristallwachstum zu beschreiben.

3.13 Lemma. *Die Gleichung (3-8) sei geometrisch, und es gelte*

$$\begin{aligned} F_*(t,p,-I) &\le c_-(|p|),\\ F^*(t,p,I) &\ge -c_+(|p|) \end{aligned} \tag{3-9}$$

mit Funktionen $c_\pm\in C^1([0,\infty))$, $c_\pm(s)\ge c_0>0$.

a) Definiere $u^\pm(t,x) := \pm(t+w_\pm(|x|))$ mit $w_\pm(s) := \int_0^s \frac{r}{c_\pm(r)}dr$. Dann ist u^- eine Sublösung von (3-8) und u^+ eine Superlösung von (3-8).

b) Zu $x_0\in\mathbb{R}^n$ und $h\in C(\mathbb{R})$, h monoton wachsend, definiere

$$U^\pm_{x_0,h}(t,x) := (h\circ u^\pm)(t,x-x_0) \quad ((t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n).$$

Dann sind $U^-_{x_0,h}$ und $U^+_{x_0,h}$ Sub- und Superlösungen von (3-8).

c) Zu $a\in C(\mathbb{R}^n)$ existiert eine Sublösung $v^-\in LSC(\mathbb{R}^n)$ und eine Superlösung $v^+\in USC(\mathbb{R}^n)$ von (3-8) mit $v^-(t,x)\le a(x)\le v^+(t,x)$ $((t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n)$ und $v^-(0,x)=a(x)=v^+(0,x)$ $(x\in\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) Wir beweisen die Aussage nur für $u:=u^-$ und setzen $\rho := |x|$. Nach Definition von u ist u stetig. Es gilt

$$\nabla w_-(\rho) = w_-'(\rho)\nabla\rho,$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 w_-(\rho) &= w_-''(\rho)\nabla\rho\otimes\nabla\rho + w_-'(\rho)\nabla^2\rho,\\
\nabla\rho &= \frac{x}{\rho},\\
\nabla^2\rho &= \frac{1}{\rho}(I-\nabla\rho\otimes\nabla\rho).
\end{aligned}$$

Da (3-8) geometrisch ist, folgt

$$F_*(t,\nabla u,\nabla^2 u) = F_*(t,-w_-'(\rho)\nabla\rho,-\tfrac{w_-'(\rho)}{\rho}I) = \tfrac{w_-'(\rho)}{\rho}F_*(t,-\rho\nabla\rho,-I).$$

Verwendet man $w_-(s) = \frac{s}{c_-(s)}$ und $\rho\nabla\rho = x$, erhält man

$$u_t + F_*(t,\nabla u,\nabla^2 u) = -1 + \tfrac{1}{c_-(\rho)}F_*(t,-x,-I).$$

Nach (3-9) folgt $u_t + F_*(t,\nabla u,\nabla^2 u)\le 0$, d.h. u ist eine Sublösung.

b) Da F nicht von x abhängt, ist auch $(t,x)\mapsto u_-(t,x-x_0)$ eine Sublösung, und nach Satz 3.10 ist auch $(t,x)\mapsto U_{x_0,h}(t,x) = (h\circ u_-)(t,x-x_0)$ eine Sublösung.

c) Nach Konstruktion ist u^- eine monoton fallende Funktion von t und $|x|$ mit $u^-(0,0)=0$. Damit existiert für jedes $x_0\in\mathbb{R}^n$ eine monoton wachsende Funktion $h_{x_0}\in C(\mathbb{R})$ mit $h_{x_0}\in C(\mathbb{R})$ mit $h_{x_0}(0)=a(x_0)$ und $U^-_{x_0,h_{x_0}}(t,x) = (h_{x_0}\circ u^-)(t,x-x_0)\le a(x)$ für alle $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$. Man definiert

$$v^-(t,x) := \sup\Big\{U^-_{x_0,h_{x_0}}(t,x) : x_0\in\mathbb{R}^n\Big\}$$

und erhält $v^-(t,x)\le a(x)$ $((t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n)$ sowie $v^-(0,x)\ge U_{x,h_x}(0,x) = a(x)$ und damit $v^-(0,\cdot)=a(\cdot)$. Da U^-_{x,h_x} stetig ist, gilt $v^-\in LSC(\mathbb{R}^n)$, und nach Satz 2.4 ist auch v^- eine Sublösung von (3-8). □

3.14 Lemma. *Sei (3-8) geometrisch, und es gelte (3-9). Definiere*

$$\psi^\pm(t,x) := \begin{cases} \mp(|x|-\omega t)^4, & \text{falls } |x|>\omega t,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dann sind ψ^- für $\omega > c_-(1)$ eine C^2-Sublösung und ψ^+ für $\omega > c_+(1)$ eine C^2-Superlösung von (3-8).

Beweis. Nach (3-9) gilt

$$F(t,p,0) = |p|F(t,\tfrac{p}{|p|},0)\le |p|F(t,\tfrac{p}{|p|},-I)\le |p|c_-(1).$$

Da $\psi^-\in C^2((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ konvex ist, gilt $\nabla^2\psi^-\le 0$ und damit

$$F_*(t,\nabla\psi^-,\nabla^2\psi^-)\le F_*(t,\nabla\psi^-,0)\le |\nabla\psi^-|c_-(1).$$

Man rechnet direkt nach, dass $\psi_t^- + \omega|\nabla\psi^-| = 0$ gilt und damit

$$\psi_t^- + F_*(t, \nabla\psi^-, \nabla^2\psi^-) \le \psi_t^- + c_-(1)|\nabla\psi^-| = (c_-(1) - \omega)|\nabla\psi^-| \le 0.$$

$\square$

3.15 Satz (Vergleichsprinzip). *Sei $F\colon (0,T] \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}} \to \mathbb{R}$ stetig und degeneriert elliptisch, und sei (3-8) geometrisch. Es gelte (3-9) und*

$$-\infty < F_*(t,0,0) = F^*(t,0,0) < \infty \quad (t \in [0,T]).$$

Seien $a \in C_{c,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $b \in C_{c,\beta}(\mathbb{R}^n)$ mit $a(x) \le b(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, und seien u_α und u_β Lösungen von (3-8) mit den Anfangswerten $u_\alpha(0,\cdot) = a$ und $u_\beta(0,\cdot) = b$. Dann gilt $u_\alpha(t,x) \le u_\beta(t,x)$ $((t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n)$.

Beweis. Mit den Funktionen $\psi^\pm$ aus Lemma 3.14 und einem Parameter $R > 0$ definiert man

$$\begin{aligned} f_R(t,x) &:= \min\{\psi^-(t,x) - R^4, \alpha\} \quad ((t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n),\\ g_R(t,x) &:= \max\{\psi^+(t,x) + R^4, \beta\} \quad ((t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Für großes R gilt dann $f_R(0,x) \le a(x) \le b(x) \le g_R(0,x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Da ψ^- und ψ^+ Sub- bzw. Superlösungen von (3-8) sind und die Funktionen

$$\begin{aligned} &\theta_-\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s \mapsto \min\{s - R^4, \alpha\},\\ &\theta_+\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s \mapsto \max\{s + R^4, \beta\} \end{aligned}$$

stetige monoton wachsende Funktionen sind, sind nach Satz 3.10 auch $f_R = \theta_- \circ \psi^-$ und $g_R = \theta_+ \circ \psi^+$ Sub- bzw. Superlösungen. Wähle nun $R_1 > 0$ so groß, dass

$$\operatorname{supp}(f_R - \alpha),\ \operatorname{supp}(g_R - \beta),\ \operatorname{supp}(a - \alpha),\ \operatorname{supp}(b - \beta) \subset B(0, R_1).$$

Nach Satz 2.11, angewendet auf das Gebiet $B(0,R_1)$, gilt $u_\alpha(t,x) \le u_\beta(t,x)$ für alle $(t,x) \in [0,T] \times \overline{B(0,R_1)}$ und damit für alle $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. $\square$

3.16 Satz (Lösbarkeitssatz). *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.15 existiert zu jedem $a \in C_{c,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ genau eine Lösung $u_a \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ von (3-8) mit dem Anfangswert $u(0,\cdot) = a$.*

Beweis. Wir setzen $b := a$ und $\beta := \alpha$. O.E. sei $\alpha = 0$. Wie im Beweis von Satz 3.15 sind f_R und g_R Sub- bzw. Superlösungen von (3-8) mit $f_R(0,x) \le a(x) \le g_R(0,x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Seien nun $v^\pm$ wie in Lemma 3.13 c) definiert, und sei

$$f(t,x) := \max\{f_R(t,x), v^-(t,x)\}, \quad g(t,x) := \min\{g_R(t,x), v^+(t,x)\}$$

für $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. Dann sind f und g Sub- bzw. Superlösungen mit $f(0,\cdot) = a(\cdot) = g(0,\cdot)$ und $\operatorname{supp} f$, $\operatorname{supp} g \subset B(0,R_1)$ für hinreichend großes R_1. Wir wenden Satz 2.13 im Gebiet $B(0,R_1)$ and und erhalten die Existenz einer Lösung u_a in $B(0,R_1)$. Setzt man nun noch $u_a(t,x) := 0$ $((t,x) \in [0,T] \times (\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_1)))$, so ist u_a eine Lösung von (3-8) in $\mathbb{R}^n$ mit $u(0,\cdot) = a$. □

3.17 Beispiel (Mittlerer Krümmungsfluss)**.** Wir betrachten wieder die Gleichung des Mittleren Krümmungsflusses

$$\partial_t u(t,x) - |\nabla u(t,x)| \operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u(t,x)}{|\nabla u(t,x)|}\Big) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{3-10}$$

(siehe Beispiel 3.12). Diese Gleichung ist von der Form $\partial_t u + F(\nabla u, \nabla^2 u) = 0$ mit $F(p,X) := -\operatorname{tr}\big((I - \frac{p}{|p|} \otimes \frac{p}{|p|})X\big)$.

Für $c_\pm(s) := \sup_{|p|=1} \operatorname{tr}(I - p \otimes p)$ (unabhängig von s) gilt dann die Bedingung (3-9), so ist z.B.

$$F(t,p,-I) = \operatorname{tr}(I - \tfrac{p}{|p|} \otimes \tfrac{p}{|p|}) \le c_-(|p|) \quad (p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Sei $D(0) \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^n \setminus D(0)$ eine kompakte Menge mit $\Gamma(0) \supset \partial D(0)$. Man definiert für beliebiges $\alpha < 0$ die Funktion $a \in C(\mathbb{R}^n)$ durch

$$a(x) := \begin{cases} d(x,\Gamma(0)), & \text{falls } x \in D(0), \\ \max\{-d(x,\Gamma(0),\alpha\}, & \text{falls } x \notin D(0). \end{cases}$$

Dann gilt $a \in C_{c,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 3.16 existiert eine eindeutige Lösung u_a von (3-10) mit $u_a(0,\cdot) = a$. Die zeitliche Evolution der Fläche $\Gamma(0)$ unter dem mittleren Krümmungsfluss ist dann gegeben durch die Fläche $\Gamma(t) := \{x \in \mathbb{R}^n : u_a(t,x) = 0\}$.

4. Maximale Regularität

4.1 Worum geht's? In den bisherigen Abschnitten wurden Viskositätslösungen betrachtet, welche sich dadurch auszeichnen, dass die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für eine große Klasse von Gleichungen gegeben ist, welche andererseits aber nur sehr geringe Glattheitseigenschaften besitzen. Nun wird in gewisser Weise der entgegengesetzte Standpunkt eingenommen: Wir suchen von Anfang die Lösungen in gewissen Räumen und fragen uns, wann die höchste zu erwartende Regularität der Lösung garantiert ist (maximale Regularität). Dieses Konzept wurde in den letzten Jahrzehnten sehr erfolgreich und wird heute vor allem in Hölder- und Sobolevräumen (bzgl. der Zeitvariablen) angewendet. Wir diskutieren hier insbesondere die Sobolevraumtheorie.

a) Der Begriff der maximalen Regularität und die Lösung quasilinearer Gleichungen

Im Folgenden werden wir semilineare und quasilineare Gleichungen betrachten, welche abstrakt geschrieben werden können in der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u - A(u)u &= F(u) \quad \text{in } (0, T_0), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{4-1}$$

Dabei ist $T_0 \in (0, \infty]$. Wir fixieren folgende Situation: Es sei $p \in (1, \infty)$, X_0 und X_1 seien Banachräume mit $X_1 \subset X_0$, d.h. die Identität auf X_1 ist stetig. Weiter sei X_1 dicht in X_0. Für festes $T \in (0, T_0]$ wählen wir als Grundraum

$$\mathbb{F} := \mathbb{F}_T(X_0) := L^p((0,T); X_0).$$

Der passende Raum für die Lösung wird dann

$$\mathbb{E} := \mathbb{E}_T(X_1, X_0) := L^p((0,T); X_1) \cap W_p^1((0,T); X_0).$$

4.2 Definition. Wir definieren den Spurraum $\gamma_0\mathbb{E} := \{\gamma_0 u : u \in \mathbb{E}\}$, wobei $\gamma_0 \colon u \mapsto u(0)$ die Zeitspur von u an der Stelle 0 bezeichne. Der Raum $\gamma_0\mathbb{E} = \gamma_0\mathbb{E}(X_1, X_0)$ wird mit der kanonischen Norm

$$\|u_0\|_{\gamma_0\mathbb{E}} := \inf\{\|u\|_{\mathbb{E}} : u \in \mathbb{E},\, u(0) = u_0\}$$

versehen. Wir setzen noch

$${}_0\mathbb{E} := {}_0\mathbb{E}_T(X_1, X_0) := \{u \in \mathbb{E}_T(X_1, X_0) : \gamma_0 u = 0\},$$

das ist der Raum aller Lösungen, welche an der Stelle $t = 0$ den Wert 0 annehmen.

4.3 Lemma. *a) Der Spurraum ist gleich dem reellen Interpolationsraum mit Parametern* $1-\frac{1}{p}$ *und* p*, d.h. es gilt* $\gamma_0\mathbb{E} = (X_0, X_1)_{1-1/p,p}$*. Es gilt die stetige Inklusion* $\mathbb{E} \subset BUC([0,T]; \gamma_0\mathbb{E})$*. Insbesondere ist die Spur* $\gamma_0\colon \mathbb{E} \to \gamma_0\mathbb{E}$*,* $u \mapsto u(0)$ *wohldefiniert, und* $\gamma_0\mathbb{E}$ *ist unabhängig von* T*.*

b) Die Norm der stetigen Einbettung $\mathbb{E} \subset BUC([0,T]; \gamma_0\mathbb{E})$ *hängt von* T *ab, sie wird im Allgemeinen größer für kleinere Zeitintervalle. Auf dem Teilraum* ${}_0\mathbb{E}$ *kann diese Norm jedoch unabhängig von* $T > 0$ *abgeschätzt werden, d.h. es existiert eine von* $T > 0$ *unabhängige Konstante* C_1 *mit*

$$\|u(0)\|_{C([0,T];\gamma_0\mathbb{E})} \le C_1 \|u\|_{\mathbb{E}_T(X_1,X_0)} \quad (u \in {}_0\mathbb{E}_T(X_1, X_0)).$$

Dies sieht man, indem man u *durch* 0 *auf das Intervall* $t \in (-1, 0)$ *fortsetzt und damit mindestens die Intervalllänge* 1 *erzielt.*

b) Der Spurraum ist ein Banachraum mit $X_1 \subset \gamma_0\mathbb{E} \subset X_0$ *(jeweils stetige Inklusion).*

Beweis. Diese Aussage ist Teil der Interpolationstheorie von Banachräumen. □

Für den zentralen Begriff der maximalen Regularität betrachten wir eine lineare Version von (4-1):

$$\begin{aligned} \partial_t u + Bu &= f \quad \text{ in } (0,T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{4-2}$$

Dabei sei $B \in L^\infty((0,T); L(X_1, X_0))$. Wir identifizieren die Funktion $B\colon (0,T) \to L(X_1, X_0)$ mit einer Funktion auf $\mathbb{E}$ vermöge der Definition

$$(Bu)(t) := B(t)u(t) \quad (t \in (0,T),\ u \in \mathbb{E}).$$

Wir werden diese beiden Interpretationen von B nicht in der Notation unterscheiden.

4.4 Definition. a) Seien $f \in \mathbb{F}$ und $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$. Dann heißt eine Funktion $u\colon (0,T) \to X_0$ eine starke (L^p)-Lösung von (4-2), falls $u \in \mathbb{E}$ gilt und falls (4-2) für fast alle $t \in (0,T)$ als Gleichheit in $L^p((0,T); X_0)$ gilt.

b) Die Abbildung $B \in L^\infty((0,T); L(X_1, X_0))$ besitzt maximale (L^p-)Regularität auf $(0,T)$, falls für alle $f \in \mathbb{F}$ und $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$ genau eine starke Lösung $u \in \mathbb{E}$ von (4-2) existiert. Man definiert $\mathrm{MR}_T(X_1, X_0)$ als die Menge aller $B \in L^\infty((0,T); L(X_1, X_0))$, welche maximale Regularität in $(0,T)$ besitzen. Der Raum $\mathrm{MR}_T(X_1, X_0)$ wird mit der Spurtopologie von $L^\infty((0,T); L(X_1, X_0))$ versehen.

c) Man definiert $\mathrm{MR}(X_1, X_0)$ als die Menge aller Operatoren $C \in L(X_1, X_0)$, für welche die konstante Abbildung $(0,T) \to L(X_1, X_0)$, $t \mapsto C$ maximale Regularität besitzt. Der Raum $\mathrm{MR}(X_1, X_0)$ wird wieder mit der Spurtopologie, d.h. mit der Norm auf $L(X_1, X_0)$ versehen.

4.5 Bemerkung. Sei $T < \infty$, und sei $H(X_1, X_0)$ die Menge aller abgeschlossener Operatoren $B\colon X_0 \supset D(B) = X_1 \to X_0$, für welche $-B$ eine holomorphe C_0-Halbgruppe in X_0 erzeugt.

Falls $B \in H(X_1, X_0)$ und $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$, dann ist $u(t) := e^{-tB}u_0$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) + Bu(t) &= 0 \quad (t \in (0,T)), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Es gilt $u \in \mathbb{E}$.

4.6 Lemma. *Sei $T < \infty$, und es gelte $H(X_1, X_0) \neq \emptyset$. Für $B \in L^\infty((0,T); L(X_1, X_0))$ sind äquivalent:*

(i) $B \in \mathrm{MR}_T(X_1, X_0)$,

(ii) $\partial_t + B \in L_{\mathrm{Isom}}({}_0\mathbb{E}, \mathbb{F})$,

(iii) $(\partial_t + B, \gamma_0) \in L_{\mathrm{Isom}}(\mathbb{E}, \mathbb{F} \times \gamma_0\mathbb{E})$.

Beweis. (i)⇒(ii). Nach Definition von $\mathrm{MR}_T(X_1, X_0)$ ist die Abbildung $\partial_t + B\colon {}_0\mathbb{E} \to \mathbb{F}$ eine Bijektion von Banachräumen. Da $B \in L^\infty((0,T); L(X_1, X_0))$ und $\partial_t \in L({}_0\mathbb{E}, \mathbb{F})$, ist diese Abbildung stetig. Nach dem Satz vom stetigen Inversen ist $(\partial_t + B)^{-1}$ ebenfalls stetig, d.h. $\partial_t + B$ ist ein Isomorphismus von Banachräumen.

(ii)⇒(iii). Sei $(f, u_0) \in \mathbb{F} \times \gamma_0\mathbb{E}$. Wir wählen einen festen Operator $B_0 \in H(X_1, X_0)$ und setzen $v := e^{-tB_0}u_0$. Dann gilt $v \in \mathbb{E}$ und damit $(\partial_t + B)v \in \mathbb{F}$. Eine Funktion $u \in \mathbb{E}$ ist genau dann eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} (\partial_t + B(t))u(t) &= f(t) \quad (t \in (0,T)), \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

wenn $w := u - v$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} (\partial_t + B(t))w(t) &= f(t) - (\partial_t + B(t))v(t) \quad (t \in (0,T)), \\ w(0) &= 0 \end{aligned}$$

ist. Nach (ii) existiert aber eine eindeutige Lösung $w \in \mathbb{E}$ dieser Gleichung. Also ist auch die Abbildung

$$(\partial_t + B, \gamma_0)\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F} \times \gamma_0\mathbb{E}$$

eine stetige Bijektion von Banachräumen und damit wie oben ein Isomorphismus von Banachräumen.

(iii)⇒(i). Diese Richtung ist trivial. □

Die beiden folgenden Sätze sind die wichtigsten Beispiele maximaler Regularität, werden hier aber nicht bewiesen. Im Folgenden sei stets $T \in (0,\infty)$, d.h. wir betrachten nur ein endliches Zeitintervall.

4.7 Satz. *Sei $B \in C([0,T], L(X_1,X_0))$. Dann gilt $B \in \mathrm{MR}_T(X_1,X_0)$ genau dann, wenn $B(t) \in \mathrm{MR}(X_1,X_0)$ für alle $t \in [0,T]$ gilt.*

Ein Beweis findet sich z.B. in [2], Theorem 7.1. Hier werden insbesondere Störungsargumente für Erzeuger holomorpher Halbgruppen verwendet.

4.8 Satz. *Sei $V \subset H \subset V'$ ein Gelfand-Tripel reeller Hilberträume, und sei $B \in L^\infty((0,T); L(V,V'))$. Es gelte mit Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta \ge 0$*

$$\langle v, B(t)v\rangle_{V\times V'} + \beta\|v\|_H^2 \ge \alpha\|v\|_V^2$$

für fast alle $t \in (0,T)$ und für alle $v \in V$. Für $p = 2$ gilt dann $A \in \mathrm{MR}_T(V,V')$.

Der Beweis verwendet das Ritz-Galerkin-Verfahren, siehe Skript zur Theorie partieller Differentialgleichungen II.

Wir wollen nun mit der Methode der maximalen Regularität quasilineare Evolutionsgleichungen behandeln. Wir betrachten Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) + A(t,u(t))u(t) &= F(t,u(t)) \quad (t \in (0,T_0)),\\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{4-3}$$

Dabei sei $T_0 \in (0,\infty)$, $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$. An die Nichtlinearitäten A und F wird folgendes vorausgesetzt:

(A1) Es gilt $A \in C([0,T_0] \times \gamma_0\mathbb{E}, L(X_1,X_0))$, und für alle $R > 0$ existiert eine Lipschitz-Konstante $L(R) > 0$ mit

$$\|A(t,u)v - A(t,\overline{u})v\|_{X_0} \le L(R)\|u-\overline{u}\|_{\gamma_0\mathbb{E}}\|v\|_{X_1}$$

für alle $t \in [0,T_0]$, $v \in X_1$ und alle $u, \overline{u} \in \gamma_0\mathbb{E}$ mit $\|u\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \le R$ und $\|\overline{u}\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \le R$.

(A2) Für die Abbildung $F\colon [0,T_0] \times \gamma_0\mathbb{E} \to X_0$ gilt:

(i) $F(\cdot,u)$ ist messbar für jedes $u \in \gamma_0\mathbb{E}$,

(ii) $F(t,\cdot) \in C(\gamma_0\mathbb{E}, X_0)$ für fast jedes $t \in [0,T_0]$,

(iii) $f(\cdot) := F(\cdot,0) \in L^p((0,T_0);X_0)$,

(iv) für jedes $R > 0$ existiert ein $\varphi_R \in L^p((0,T_0))$ mit

$$\|F(t,u) - F(t,\overline{u})\|_{X_0} \le \varphi_R(t)\|u-\overline{u}\|_{\gamma_0\mathbb{E}}$$

für fast alle $t \in [0,T_0]$ und alle $u, \overline{u} \in \gamma_0\mathbb{E}$ mit $\|u\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \le R$, $\|\overline{u}\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \le R$.

Bis auf kanonische Messbarkeits- und Stetigkeitsbedingungen, die die Wohldefiniertheit der Terme in der Gleichung sicherstellen, bedeuten diese Bedingungen im Wesentlichen, dass die Funktionen $F(t,\cdot)$ und $F(t,\cdot)$ auf beschränkten Teilmengen von $\gamma_0\mathbb{E}$ Lipschitz-stetig sind.

4.9 Satz. *Es gelte (A1) und (A2) sowie* $A_0 := A(0,u_0) \in \mathrm{MR}(X_1,X_0)$. *Dann existiert ein* $T \in (0,T_0]$ *so, dass* (4-3) *im Intervall* $(0,T)$ *eine eindeutige Lösung* $u \in \mathbb{E}_T(X_1,X_0)$ *besitzt.*

Beweis. **(i)** Im Zeitintervall $(0,T)$ mit $T \le T_0$ verwenden wir die maximale Regularität von $A_0 := A(0,u_0)$, um Lösungen der linearisierten Gleichung abzuschätzen. Dabei betrachten wir zum einen die Gleichung mit Anfangswert 0,

$$\begin{aligned} \partial_t w(t) + A_0 w(t) &= g(t) \quad (t \in (0,T)),\\ w(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4-4}$$

Wir setzen wieder $\mathbb{E} := \mathbb{E}_T(X_1,X_0)$ und $\mathbb{F} := \mathbb{F}_T(X_0)$.

Da $A_0 \in \mathrm{MR}(X_1,X_0)$, existiert zu jedem $g \in \mathbb{F}$ genau eine Lösung $w \in \mathbb{E}$, und es existiert ein von T und w unabhängiges $C_0 > 0$ mit

$$\|w\|_{\mathbb{E}} \le C_0 \|g\|_{\mathbb{F}}$$

(Lemma 4.6). Nach Lemma 4.3 b) existiert eine ebenfalls von $T > 0$ und w unabhängige Konstante $C_1 > 0$ mit

$$\|w\|_{C([0,T],\gamma_0\mathbb{E})} \le C_1 \|w\|_{\mathbb{E}}$$

(beachte, dass $w(0) = 0$ gilt).

Zum anderen definiert man die Referenzlösung $u^* \in \mathbb{E}$ als eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t w(t) + A_0 w(t) &= f(t) \quad (t \in (0,T)),\\ w(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{4-5}$$

Dabei ist $f := F(\cdot,0) \in \mathbb{F}$ nach Bedingung (A2) (iii).

(ii) Zu $r \in (0,1]$ setze

$$B_r := \{v \in \mathbb{E} : v - u^* \in {}_0\mathbb{E},\ \|v - u^*\|_{\mathbb{E}} \le r\}.$$

Zu $v \in B_r$ sei $\Phi(v) := u$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) + A_0 u(t) &= F(t,v(t)) + \big(A(0,u_0) - A(t,v(t))\big)v(t) \quad (t \in (0,T)),\\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{4-6}$$

Wir werden zeigen, dass $\Phi(B_r) \subset B_r$ gilt und Φ in B_r eine Kontraktion ist, falls sowohl T als auch r hinreichend klein sind.

(iii) Wir zeigen $\Phi(B_r) \subset B_r$ für hinreichend kleines T und r. Dazu schreiben wir

$$\|\Phi(v) - u^*\|_{\mathbb{E}} = \|u - u^*\|_{\mathbb{E}} \leq C_0\Big(\|F(\cdot, v) - f(\cdot)\|_{\mathbb{F}} + \|(A(0, u_0) - A(\cdot, v))v\|_{\mathbb{F}}\Big). \tag{4-7}$$

Wir setzen $\gamma_T := \sup_{t\in[0,T]} \|A(0, u_0) - A(t, u_0)\|_{L(X_1,X_0)}$ und erhalten mit Voraussetzung (A1) für festes $R := C_1 + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})}$

$$\begin{aligned}
\|A(0, u_0)v - A(\cdot, v)v\|_{\mathbb{F}} &= \|A(0, u_0)v - A(\cdot, v)v\|_{L^p((0,T);X_0)}\\
&\leq \|A(0, u_0) - A(\cdot, v)\|_{L^\infty((0,T);L(X_1,X_0))}\|v\|_{L^p((0,T);X_1)}\\
&\leq \Big(\|A(0, u_0) - A(\cdot, u_0)\|_{L^\infty((0,T);L(X_1,X_0))}\\
&\qquad + \|A(\cdot, u_0) - A(\cdot, v(\cdot))\|_{L^\infty((0,T);L(X_1,X_0))}\Big)\|v\|_{\mathbb{E}}\\
&\leq \Big(\gamma_T + L(R)\|v - u_0\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})}\Big)\|v\|_{\mathbb{E}}\\
&\leq \Big(\gamma_T + L(R)C_1\|v - u_0\|_{\mathbb{E}}\Big)\|v\|_{\mathbb{E}}.
\end{aligned}$$

Wir verwenden für $r \leq 1$ die Abschätzungen

$$\|v - u_0\|_{\mathbb{E}} \leq \|v - u^*\|_{\mathbb{E}} + \|u^* - u_0\|_{\mathbb{E}} \leq r + \|u^* - u_0\|_{\mathbb{E}}$$

und

$$\|v\|_{\mathbb{E}} \leq \|v - u^*\|_{\mathbb{E}} + \|u^*\|_{\mathbb{E}} \leq r + \|u^*\|_{\mathbb{E}}.$$

Damit erhält man

$$\|A(0, u_0)v - A(\cdot, v)v\|_{\mathbb{F}} \leq \Big(\gamma_T + L(R)C_1(r + \|u^* - u_0\|_{\mathbb{E}})\Big)(r + \|u^*\|_{\mathbb{E}}).$$

Ähnlich folgt mit (A2)

$$\begin{aligned}
\|F(\cdot, v) - f\|_{\mathbb{F}} &\leq \|F(\cdot, v) - F(\cdot, u^*)\|_{\mathbb{F}} + \|F(\cdot, u^*) - F(\cdot, 0)\|_{\mathbb{F}}\\
&\leq \|\varphi_R\|_{L^p((0,T))}\Big(\|v - u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})} + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})}\Big)\\
&\leq \|\varphi_R\|_{L^p((0,T))}\Big(C_1\|v - u^*\|_{\mathbb{E}} + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})}\Big)\\
&\leq \|\varphi_R\|_{L^p((0,T))}C_1\big(r + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})}\big).
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (4-7) erhält man

$$\begin{aligned}
\|\Phi(v) - u^*\|_{\mathbb{E}} &\leq C_0\Big[\|\varphi_R\|_{L^p((0,T))}\big(C_1 r + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})}\big)\\
&\qquad + \big(\gamma_T + L(R)C_1(r + \|u^* - u_0\|_{\mathbb{E}})\big)(r + \|u^*\|_{\mathbb{E}})\Big]\\
&\leq C_0(C_1 + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})})\|\varphi_R\|_{L^p((0,T))}\\
&\qquad + C_0(r + \|u^*\|_{\mathbb{E}})\big(\gamma_T + L(R)C_1 r + L(R)C_1\|u^* - u_0\|_{\mathbb{E}}\big).
\end{aligned} \tag{4-8}$$

Für $T \to 0$ gilt

- $\gamma_T \to 0$, da $A(\cdot, u_0)$ stetig ist,
- $\|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} \to 0$, da $\varphi_R \in L^p((0,T_0))$,
- $\|u^* - u_0\|_{\mathbb{E}} \to 0$, da $u^* - u_0 \in \mathbb{E}_{T_0}(X_1, X_0)$,
- $\|u^*\|_{\mathbb{E}} \to 0$, da $u^* \in \mathbb{E}_{T_0}(X_1, X_0)$.

Man wählt zunächst $r > 0$ so klein, dass

$$C_0 L(R) C_1 r < \tfrac{1}{8}$$

gilt. Danach wählt man $T > 0$ so klein, dass die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} \|u^*\|_{\mathbb{E}} &< r \\ C_0(C_1 + \|u^*\|_{L^\infty((0,T);\gamma_0\mathbb{E})})\|\varphi_R\|_{L^p((0,T))} &< \tfrac{r}{2}, \\ C_0\big(\gamma_T + L(R)C_1\|u^* - u_0\|_{\mathbb{E}}\big) &< \tfrac{1}{8}. \end{aligned}$$

Dies in (4-8) eingesetzt, ergibt

$$\|\Phi(v) - u^*\|_{\mathbb{E}} \le \tfrac{r}{2} + (r + r)(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}) = r,$$

d.h. $\Phi(B_r) \subset B_r$.

(iv) Genauso wie in (iii) zeigt man, dass für hinreichend kleines $r > 0$ und $T > 0$ die Abschätzung

$$\|\Phi(v) - \Phi(\overline{v})\|_{\mathbb{E}} \le \tfrac{1}{2}\|v - \overline{v}\|_{\mathbb{E}}$$

für alle $v, \overline{v} \in B_r$ gilt. Damit ist $\Phi\colon B_r \to B_r$ eine Kontraktion, und nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau ein Fixpunkt u von Φ. Nach Definition von Φ sind die Fixpunkte von Φ genau die Lösungen der nichtlinearen Gleichung (4-3), woraus die Behauptung folgt. $\square$

4.10 Satz. *Es gelte (A1) und (A2), und $A(t, v) \in \mathrm{MR}(X_1, X_0)$ für alle $t \in [0, T_0)$ mit $T_0 \in (0, \infty]$. Dann existiert zu jedem $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$ genau eine maximale Lösung von (4-3) mit dem maximalen Existenzintervall $[0, T^+(u_0)) \subset [0, T_0)$. Falls $T^+(u_0) < T_0$, d.h. falls keine globale Lösung existiert, so ist $T^+(u_0)$ charakterisiert durch eine der beiden äquivalenten Bedingungen*

(i) $\lim_{t \nearrow T^+(u_0)} u(t)$ *existiert nicht in* $\gamma_0\mathbb{E}$,

(ii) $\int_0^{T^+(u_0)} \big(\|u(t)\|_{X_1}^p + \|\partial_t u(t)\|_{X_0}^p\big)\,dt = \infty.$

Beweis. Falls $u \in \mathbb{E}_T(X_1, X_0)$ eine lokale Lösung auf dem Intervall $(0, T)$ ist, so gilt $u \in BUC([0,T]; \gamma_0\mathbb{E})$. Daher kann man Satz 4.9 anwenden im Intervall (T, T_0) mit der Anfangsbedingung $u_1 = u(T) \in \gamma_0\mathbb{E}$. Dies zeigt die Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lösung.

Falls $\lim_{t\nearrow T^+(u_0)} u(t) \in \gamma_0\mathbb{E}$ existiert, kann man dies als Anfangswert nehmen und wie oben u für ein kleines Zeitintervall $(T^+(u_0), T^+(u_0) + \varepsilon)$ fortsetzen, was der Maximalität von $T^+(u_0)$ widerspricht. Also ist $T^+(u_0)$ durch die Bedingung (i) charakterisiert.

Zu $T < T^+(u_0)$ gilt nach Definition einer Lösung $\int_0^T (\|u(t)\|_{X_1}^p + \|\partial_t u(t)\|_{X_0}^p) dt < \infty$. Falls dies auch noch für $T = T^+(u_0)$ gelten würde, wäre wieder $u \in \mathbb{E}_{T^+(u_0)}(X_1, X_0) \subset BUC([0, T^+(u_0)]; \gamma_0\mathbb{E})$, d.h. $\lim_{t\nearrow T^+(u_0)} u(t)$ existiert in $\gamma_0\mathbb{E}$ im Widerspruch zu (i). □

Als Anwendung der obigen Sätze erhalten wir ein Resultat über Störungen niedrigerer Ordnung (die Abbildung B im nachfolgenden Lemma).

4.11 Lemma. *Sei $A \in C([0,T], L(X_1, X_0))$ mit $A(t) \in MR(X_1, X_0)$ $(t \in [0,T])$, und sei $B \in L^p((0,T); L(\gamma_0\mathbb{E}, X_0))$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) + A(t)u(t) &= B(t)u(t) + f(t) \quad (t \in [0,T]), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

für jedes $f \in \mathbb{F}$ und $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}$ genau eine Lösung $u \in \mathbb{E}$.

Beweis. Hier ist $A(t, u(t)) = A(t)$ und $F(t, u(t)) = B(t)u(t) + f(t)$. Offensichtlich sind die Bedingungen (A1), (A2) erfüllt mit $\varphi_R(t) := \|B(t)\|_{L(\gamma_0\mathbb{E}, X_0)}$. Der Beweis von Satz 4.9 zeigt, dass die Länge des Existenzintervalls nur von u_0 und den Konstanten $L(R)$, C_0, C_1 und γ_T abhängt. Da $A \in C([0,T], L(X_1, X_0))$ und $A \mapsto \|(\partial_t + A)^{-1}\|_{L(\mathbb{F},\mathbb{E})} = C_0(A)$ stetig ist, können alle Konstanten global im Intervall $[0,T]$ gewählt werden, d.h. die Lösung existiert global. □

b) Höhere Regularität

Wir betrachten dieselbe Situation wie im letzten Abschnitt und untersuchen die autonome quasilineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) + A(u(t))u(t) &= F(u(t)) \quad (t \in (0,T)), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{4-9}$$

Dabei sei $T \in (0, \infty)$, $u_0 \in \gamma_0\mathbb{E}(X_1, X_0)$, $A\colon \gamma_0\mathbb{E} \to L(X_1, X_0)$ sowie $F\colon \gamma_0\mathbb{E} \to \mathbb{F}$.

Parabolische Gleichungen sind „glättend“, wobei in vielen Anwendungen auch reell analytische Funktionen auftreten. Dazu zunächst eine Definition.

4.12 Definition. Seien X, Y Banachräume, $U \subset X$ offen und $T\colon U \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt T reell analytisch, falls für alle $u_0 \in U$ ein $r > 0$ existiert mit $B(u_0, r) \subset U$ und

$$T(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k T(u_0)}{k!} \underbrace{(u - u_0, \dots, u - u_0)}_{k-\text{mal}} \quad (u \in B(u_0, r)).$$

Dabei ist $D^k T(u_0) \in L(X \times \ldots \times X, F)$ die k-fache Fréchetableitung von T and der Stelle u_0. In diesem Fall schreibt man $T \in C^\omega(U, Y)$.

Eine wesentliche Zutat im Beweis der Glättungseigenschaft ist der Satz über implizite Funktionen, der analog zum endlich-dimensionalen Fall bewiesen werden kann.

4.13 Satz (Satz über implizite Funktionen)**.** *Seien X, Y, Z Banachräume, $U \subset X \times Y$ offen und $T \in C^1(U, Z)$. Sei ferner $(x_0, y_0) \in U$ mit $T(x_0, y_0) = 0$ und $D_y T((x_0, y_0)) \in L_{\text{Isom}}(Y, Z)$, wobei $D_y T$ die Fréchet-Ableitung nach der zweiten Komponente bezeichnet. Dann existieren Umgebungen U_X von x_0 und U_Y von y_0 mit $U_X \times U_Y \subset U$ und eine eindeutige Abbildung $\psi \in C^1(U_X, U_Y)$ so, dass*

$$T(x, \psi(x)) = 0 \quad (x \in U_X)$$

und $\psi(x_0) = y_0$ gilt. Somit ist die Gleichung $T(x, y) = 0$ lokal nach y auflösbar. Dabei hat die Funktion ψ die gleiche Regularität wie T, d.h. gilt $T \in C^k(U, Z)$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, so gilt auch $\psi \in C^k(U_X, U_Y)$.

Damit können wir folgende Glättungseigenschaft bezüglich der Zeit beweisen:

4.14 Satz. *Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, und seien $A \in C^k(\gamma_0\mathbb{E}; L(X_1, X_0))$ und $F \in C^k(\gamma_0\mathbb{E}, X_0)$. Sei $u \in \mathbb{E}_T(X_1, X_0)$ eine Lösung von (4-9), und es gelte $A(u(t)) \in \mathrm{MR}(X_1, X_0)$ für alle $t \in [0, T]$. Dann gilt*

$$t \mapsto t^j \partial_t^j u(t) \in W_p^1(J; X_0) \cap L^p(J; X_1)$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \le k$. Insbesondere folgt

$$u \in W_p^{k+1}((\varepsilon, T); X_0) \cap W_p^k((\varepsilon, T); X_1)$$

für jedes $\varepsilon > 0$ sowie

$$u \in C^k((0, T); \gamma_0\mathbb{E}) \cap C^{k+1-1/p}((0, T); X_0) \cap C^{k-1/p}((0, T); X_1).$$

Hier bezeichnet $C^{k+1-1/p}$ und $C^{k-1/p}$ den entsprechenden Hölderraum. Falls $k = \infty$, so ist $u \in C^\infty((0, T); X_1)$, und falls $k = \omega$, so ist $u \in C^\omega((0, T); X_1)$.

Beweis. Wir fixieren $\varepsilon \in (0,1)$ und setzen $T(\varepsilon) := \frac{T}{1+\varepsilon}$. Zu $\lambda \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ betrachten wir die Funktion $u_\lambda\colon [0,T(\varepsilon)] \to \gamma_0\mathbb{E}$, definiert durch $u_\lambda(t) := u(\lambda t)$ $(t \in [0,T(\varepsilon)])$. Dann gilt $\partial_t u_\lambda(t) = \lambda(\partial_t u)(\lambda t)$ und damit

$$\begin{aligned} \partial_t u_\lambda(t) + \lambda A(u_\lambda(t))u_\lambda(t) &= \lambda F(u_\lambda(t)) \quad (t \in (0,T(\varepsilon))),\\ u_\lambda(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Man definiert sich die Abbildung

$$H\colon (1-\varepsilon,1+\varepsilon) \times \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0) \to \mathbb{F}_{T(\varepsilon)}(X_0) \times \gamma_0\mathbb{E}(X_1,X_0)$$

durch

$$H(\lambda,w)(t) := \begin{pmatrix} \partial_t w(t) + \lambda A(w(t))w(t) - \lambda F(w(t)) \\ w(0) - u_0 \end{pmatrix} \quad (t \in (0,T(\varepsilon)))$$

für $\lambda \in (1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ und $w \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0)$. Da A und F von Klasse C^k sind, gilt dies auch für H. Weiter gilt $H(1,u) = 0$ und

$$\begin{aligned} D_\lambda H(\lambda,w) &= \begin{pmatrix} A(w)w - F(w) \\ 0 \end{pmatrix},\\ D_w H(\lambda,w)h &= \begin{pmatrix} \partial_t h + \lambda A(w)h + \lambda A'(w)hw - \lambda F'(w)h \\ h(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $h \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0)$. Dabei ist $A'(u)$ die Fréchet-Ableitung von A an der Stelle u. Insbesondere erhalten wir für $\lambda = 1$ und $w = u$

$$D_w H(1,u)h = \begin{pmatrix} \partial_t h + A(u)h + A'(u)hu - F'(u)h \\ h(0) \end{pmatrix}.$$

Für $t \in [0,T(\varepsilon)]$ und $v \in \gamma_0\mathbb{E}$ definieren wir $B(t)v := A'(u(t))vu(t) - F'(u(t))v$. Da $A \in C^1(\gamma_0\mathbb{E}, L(X_1,X_0))$ und $F \in C^1(\gamma_0\mathbb{E}, X_0)$, folgt $B \in L^p((0,T); L(\gamma_0\mathbb{E},X_0))$. Wir sind daher in der Situation von Lemma 4.11 (wobei hier $A(t)$ durch $A(u(t))$ zu ersetzen ist). Man beachte, dass $t \mapsto A(u(t)) \in C([0,T], L(X_1,X_0))$ gilt, da $t \mapsto u(t) \in C([0,T(\varepsilon)]; \gamma_0\mathbb{E})$. Nach Voraussetzung gilt $A(u(t)) \in \mathrm{MR}(X_1,X_0)$ für jedes $t \in [0,T]$, und damit gilt $t \mapsto A(u(t)) \in \mathrm{MR}_T(X_1,X_0)$ nach Satz 4.7. Wir wenden Lemma 4.11 an und sehen, dass $t \mapsto A(u(t)) + B(t) \in \mathrm{MR}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0)$ gilt. Somit ist

$$D_w H(1,u) \in L_{\mathrm{Isom}}(\mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0), \mathbb{F}_{T(\varepsilon)}(X_0) \times \gamma_0\mathbb{E}(X_1,X_0)).$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen, Satz 4.13, existiert ein $\delta > 0$ und eine C^k-Abbildung $\psi\colon (1-\delta,1+\delta) \to \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0)$ mit $H(\lambda,\psi(\lambda)) = 0$ $(\lambda \in (1-\delta,1+\delta))$ und $\psi(1) = u$.

Nach Definition von H und wegen der Eindeutigkeit der Lösung gilt $\psi(\lambda) = u_\lambda$, d.h. $\lambda \mapsto u_\lambda \in C^k((1-\delta,1+\delta), \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0))$. Wegen $\mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0) \subset C([0,T(\varepsilon)], \gamma_0\mathbb{E})$ ist $\lambda \mapsto u_\lambda(t) = u(\lambda t) \in C^k((1-\delta,1+\delta), \gamma_0\mathbb{E})$. Dies heißt aber $u \in C^k((0,T(\varepsilon)), \gamma_0\mathbb{E})$.

Wir verwenden nun $\frac{\partial}{\partial\lambda}u_\lambda(t)|_{\lambda=1} = t\partial_t u(t)$ $(t \in (0,T(\varepsilon))$. Wegen $\psi \in C^k((1-\delta,1+\delta),\mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0)$ ist $t \mapsto t\partial_t u(t) \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0)$. Iterativ sieht man $t \mapsto t^k\partial_t^k u(t) \in \mathbb{E}_{T(\varepsilon)}(X_1,X_0)$ und damit

$$u \in W_p^{k+1}((\delta,T(\varepsilon));X_0) \cap W_p^k((\delta,T(\varepsilon));X_1)$$

für jedes $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$. Unter Verwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes $W_p^k((\delta,T(\varepsilon)) \subset C^{k-1/p}([\delta,T(\varepsilon)])$ erhält man, da $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ beliebig sind,

$$u \in C^{k+1-1/p}((0,T);X_0) \cap C^{k-1/p}((0,T);X_1).$$

Im Fall $k = \infty$ erhält man $u \in C^\infty((0,T);X_1)$. Falls $k = \omega$, ist die Funktion ψ reell analytisch. Da die oben genannten Einbettungen als lineare Abbildungen ebenfalls reell analytisch sind, ist auch $u \in C^\omega((0,T),X_1)$. □

4.15 Bemerkung. Diese Beweismethode ist als „Parametertrick“ oder auch „Methode von Angenent“ bekannt. Man beachte die beiden wesentlichen Zutaten dieses Beweises, der in ähnlicher Form bei vielen nichtlinearen Differentialgleichungen verwendet werden kann: Zum einen der Satz über implizite Funktionen in Banachräumen, zum anderen (um diesen Satz anwenden zu können) die Tatsache, dass $D_wH(1,u)$ ein Isomorphismus ist. Dies ist aber gerade die maximale Regularität dieser Linearisierung.

Als Beispiel betrachten wir die quasilineare autonome Gleichung zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) - \operatorname{tr}\big(a(u(t,x),\nabla u(t,x))\nabla^2 u(t,x)\big) &= f(u(t,x),\nabla u(t,x)) \\ &\quad ((t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^n), \quad (4\text{-}10) \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

Für die Behandlung des nichtlinearen Problems verwenden wir folgendes Resultat aus der linearen Theorie:

4.16 Lemma. *Sei $b \in BUC(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n}_{\text{sym}})$ mit $b(x) \geq cI_n$ für eine Konstante $c > 0$. Definiere den Operator B durch $D(B) := W_p^2(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$(Bu)(x) := -\operatorname{tr}\big(b(x)\nabla^2 u(x)\big) = -\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ u \in D(B)).$$

Dann gilt $B \in \mathrm{MR}(W_p^2(\mathbb{R}^n),L^p(\mathbb{R}^n))$.

Wir erhalten folgenden Satz.

4.17 Satz. *Seien $p \in (n+2,\infty)$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Es gelte $a \in C^k(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}})$, $f \in C^k(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$. Für alle $(r,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sei die Matrix $a(r,p)$ positiv definit. Dann besitzt die Gleichung (4-10) für alle $u_0 \in W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n)$ eine eindeutige maximale Lösung $u \in L^p((0,T^+); W_p^2(\mathbb{R}^n_+)) \cap W_p^1((0,T^+); L^p(\mathbb{R}^n))$ im Intervall $J = (0,T^+)$ mit $T^+ = T^+(u_0) > 0$. Weiter gilt*

$$u \in C^k(J; W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n)) \cap C^{k+1-1/p}(J; L^p(\mathbb{R}^n)) \cap C^{k-1/p}(J; W_p^2(\mathbb{R}^n)).$$

Beweis. Für $X_0 := L^p(\mathbb{R}^n)$ und $X_1 := W_p^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\gamma_0\mathbb{E}(X_0,X_1) = (X_0,X_1)_{1-1/p,p} = W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n)$. Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz gilt

$$\gamma_0\mathbb{E} = W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n) \subset C_0^1(\mathbb{R}^n) := \big\{u \in C^1(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} |\partial^\alpha u(x)| = 0 \; (|\alpha| \le 1)\big\}.$$

Wir definieren die Abbildungen $A\colon \gamma_0\mathbb{E} \to L(X_0,X_1)$ und $F\colon \gamma_0\mathbb{E} \to X_0$ durch

$$\begin{aligned} (A(v)w)(x) &:= -\operatorname{tr}\big(a(v(x), \nabla v(x))\nabla^2 w(x)\big),\\ (F(v))(x) &:= f(v(x), \nabla v(x)) \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \gamma_0\mathbb{E}$, $w \in W_p^2(\mathbb{R}^n)$.

Sei $v \in \gamma_0\mathbb{E}$. Wegen $v \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge $\{(v(x), \nabla v(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ beschränkt. Da a nach Voraussetzung stetig ist, ist

$$b_v := a(v(\cdot), \nabla v(\cdot)) \in BUC(\mathbb{R}^n)$$

sowie $b_v(x) \ge c_v I_n$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ mit $c_v > 0$. Nach Lemma 4.16 folgt $A(v) \in \mathrm{MR}(X_1,X_0)$ für alle $v \in \gamma_0\mathbb{E}$.

Um die Voraussetzungen (A1) und (A2) nachzuweisen, verwenden wir, dass a als C^1-Funktion auf beschränkten Mengen Lipschitz ist. Wir erhalten für $v, \overline{v} \in \gamma_0\mathbb{E}$ und $w \in X_1$ mit $\|v\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \le R$, $\|\overline{v}\|_{\gamma_0\mathbb{E}} \le R$

$$\begin{aligned} \|A(v)w - A(\overline{v})w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \big\|\operatorname{tr}\big(a(v,\nabla v)w - a(\overline{v},\nabla\overline{v})w\big)\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\le C\big\|a(v,\nabla v) - a(\overline{v},\nabla\overline{v})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n})}\|\nabla^2 w\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n\times n})}\\ &\le CL(R)\|v-\overline{v}\|_{C^1(\mathbb{R}^n)}\|w\|_{X_1}\\ &\le CL(R)\|v-\overline{v}\|_{\gamma_0\mathbb{E}}\|w\|_{X_1}. \end{aligned}$$

Dies zeigt Voraussetzung (A1), insbesondere auch die Stetigkeit von $A\colon \gamma_0\mathbb{E} \to L(X_0,X_1)$. Ähnlich zeigt man Voraussetzung (A2), wobei die Stetigkeit von $F\colon \gamma_0\mathbb{E} \to X_0$ verwendet wird, dass F eine Variante eines sogenannten Nemyckii–Operators ist, d.h.

$$F\colon W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n),\ F(v) := f(v(\cdot), \nabla v(\cdot)) \quad (v \in W_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^n)).$$

Hier wird auch $f(0) = 0$ verwendet. Die Theorie von Nemyckii-Operatoren zeigt auch $A \in C^k(\gamma_0\mathbb{E}, L(X_1,X_0))$ und $F \in C^k(\gamma_0\mathbb{E}, X_0)$. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.14 erfüllt, und wir erhalten die höhere Regularität der Lösung u. □

Literatur

[1] H. Amann. *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I*, volume 89 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995. Abstract linear theory.

[2] H. Amann. Maximal regularity for nonautonomous evolution equations. *Adv. Nonlinear Stud.*, 4(4):417–430, 2004.

[3] H. Amann. Maximal regularity and quasilinear parabolic boundary value problems. In *Recent advances in elliptic and parabolic problems*, pages 1–17. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.

[4] H. Amann. Quasilinear parabolic problems via maximal regularity. *Adv. Differential Equations*, 10(10):1081–1110, 2005.

[5] Y. G. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geom.*, 33(3):749–786, 1991.

[6] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1):1–67, 1992.

[7] Y. Giga and S. Goto. Motion of hypersurfaces and geometric equations. *J. Math. Soc. Japan*, 44(1):99–111, 1992.

[8] H. Ishii. On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDEs. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(1):15–45, 1989.

[9] H. Ishii and P.-L. Lions. Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations. *J. Differential Equations*, 83(1):26–78, 1990.

[10] A. Lunardi. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 16. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[11] J. Prüss. Maximal regularity for evolution equations in L_p-spaces. *Conf. Semin. Mat. Univ. Bari*, (285):1–39 (2003), 2002.

[12] L. Wang. On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(1):27–76, 1992.

[13] L. Wang. On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(2):141–178, 1992.