# Skript zur Vorlesung

# Funktionalanalysis

**Sommersemester 2011**


**Robert Denk**

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik


Stand: 20. 6. 2011

# Inhaltsverzeichnis


1 Topologische und metrische Räume, Kompaktheit . . . . . . . . . . . 1
a) Topologie und Metrik . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
b) Kompaktheit . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
2 Normierte Räume und Hilberträume . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
a) Normierte Räume und Banachräume . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
b) Hilberträume . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
c) Der Approximationssatz und der Satz von Riesz für Hilberträume . 19
d) Orthonormalbasen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
3 Lineare Operatoren: Grundbegriffe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29
a) Operatoren und Spektrum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29
b) Eigenschaften der Resolventenabbildung . . . . . . . . . . . . . . . 32
4 Dualräume und adjungierte Operatoren . . . . . . . . . . . . . . . . 35
a) Hahn–Banach-Sätze . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
b) Dualräume und Reflexivität, adjungierte Operatoren . . . . . . . . 37
5 Distributionen und Sobolevräume . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
a) Distributionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
b) Sobolevräume: Definition und erste Eigenschaften . . . . . . . . . . 45
c) Wichtige Sätze aus der Theorie der Sobolevräume . . . . . . . . . . 49
6 Klassische Sätze der Funktionalanalysis . . . . . . . . . . . . . . . . 52
7 Nützliches über das Spektrum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
8 Der Spektralsatz für selbstadjungierte beschränkte Operatoren . . . . 67
a) Stetiger und messbarer Funktionalkalkül . . . . . . . . . . . . . . . 67
b) Orthogonale Projektionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77
c) Projektorwertige Maße und der Spektralsatz . . . . . . . . . . . . . 79
Literatur . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93
A Index . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 94

# 1. Topologische und metrische Räume, Kompaktheit

## a) Topologie und Metrik

Wir starten mit der Definition einiger grundlegender Begriffe der Topologie. Eine Topologie ist ähnlich wie eine $\sigma$-Algebra ein Mengensystem.

**1.1 Definition.** Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge; $\mathscr{P}(X)$ bezeichne die Potenzmenge von $X$.

a) Ein Mengensystem $\mathcal{T} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt eine Topologie auf $X$, falls gilt

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(ii) Falls $A, B \in \mathcal{T}$, so ist auch $A \cap B \in \mathcal{T}$,

(iii) Falls $I$ eine Indexmenge ist und $A_i \in \mathcal{T} \quad (i \in I)$, so ist auch $\bigcup_{i\in\, I} A_i \in \mathcal{T}$.

In diesem Falls heißt $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

b) Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ stetig, falls $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$. Die Abbildung $f$ heißt offen, falls für alle $U \in \mathcal{T}_1$ gilt $f(U) \in \mathcal{T}_2$. Die Abbildung $f$ heißt ein Homöomorphismus, falls $f$ bijektiv ist und $f$ und $f^{-1}$ beide stetig sind.

c) Sei $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann heißt die kleinste Topologie, die $\mathscr{U}$ enthält, die von $\mathscr{U}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}(\mathscr{U})$.

d) Sei $I$ eine Menge und $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ topologischer Raum für $i \in I$. Sei $F = \{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen. Dann heißt die kleinste (gröbste) Topologie auf $X$, für die alle $f \in F$ stetig sind, die $F$-schwache Topologie $\mathcal{T}(F)$ auf $X$.

e) Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ das kartesische Produkt, wobei $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ein topologischer Raum für $i \in I$ ist. Sei $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$ die Projektion auf die $i$-te Komponente. Dann heißt $\mathcal{T}(\{\mathrm{pr}_i\colon i \in I\})$ die Produkttopologie auf $X$.

f) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Das Mengensystem $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\} \subset \mathscr{P}(Y)$ heißt Spurtopologie auf $Y$ (auch Teilraumtopologie oder relative Topologie oder induzierte Topologie genannt). Dies ist die gröbste Topologie auf $Y$, für die die Inklusionsabbildung $Y \to X$, $y \mapsto y$, stetig ist.

**1.2 Bemerkung.** a) Die kleinste (gröbste Topologie) auf einer Menge $X$ ist gegeben durch $\mathcal{T}_1 := \{\emptyset, X\}$. Die größte (feinste Topologie) ist gegeben durch $\mathcal{T}_2 := \mathcal{P}(X)$.

b) In der Situation von 1.1 d) gilt

$$\mathcal{T}(F) = \mathcal{T}\Big(\big\{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\big\}\Big).$$

[[Sei $\mathscr{U} := \{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \mathcal{T}_i,\ i \in I\}$.

$\mathcal{T}(F) \supset \mathcal{T}(\mathscr{U})$: Da jedes $f_i$ stetig ist, gilt $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}(F)$ $(U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I)$, d.h. $\mathscr{U} \subset \mathcal{T}(F)$. Da $\mathcal{T}(F)$ eine Topologie ist, welche $\mathscr{U}$ enthält, gilt $\mathcal{T}(F) \supset \mathcal{T}(\mathscr{U})$.

$\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}(\mathscr{U})$: Wegen $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}(\mathscr{U})$ ist jedes $f_i$ stetig. Damit ist $\mathcal{T}(\mathscr{U})$ eine Obermenge der kleinsten Topologie, in welcher jedes $f_i$ stetig ist.]]

c) Die erzeugte Topologie $\mathcal{T}(\mathscr{U})$ ist das System aller Mengen der Form $\bigcup_{i\in I} \bigcap_{n=1}^{N_i} U_{in}$ mit $U_{in} \in \mathscr{U}$, $N_i \in \mathbb{N}_0$, $I$ eine Indexmenge. Dabei ist $\bigcap_{n=1}^{0} U_{in} = \bigcap_{n\in\emptyset} U_{in} = X$.

[[Jede Menge dieser Form muss nach Definition einer Topologie in $\mathcal{T}(\mathscr{U})$ enthalten sein. Zu zeigen ist daher, dass das System all dieser Mengen eine Topologie ist. Sei $\mathscr{B} := \{\bigcap_{n=1}^{N} U_n : U_n \in \mathscr{U}, N \in \mathbb{N}_0\}$. Dann gilt $X \in \mathscr{B}$ und zu $V_1, V_2 \in \mathscr{B}$ und $x \in V_1 \cap V_2$ existiert ein $V \in \mathscr{B}$ mit $x \in V \subset V_1 \cap V_2$ (denn man kann $V := V_1 \cap V_2$ wählen). Nach Übungsaufgabe 2.1 ist $\mathscr{B}$ Basis einer Topologie, und (nach Definition einer Basis) das oben angegebene System ist gleich $\mathcal{T}(\mathscr{B})$, also insbesondere eine Topologie. ]]

d) Zur Erinnerung: das kartesische Produkt $X$ einer (eventuell überabzählbaren) Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Mengen $X_i$ ist definiert als die Menge aller Abbildungen $f : I \to \cup_{i\in I} X_i$ mit $f(i) \in X_i$ für jedes $i \in I$. Falls jedes $X_i$ nichtleer ist, dann ist auch das kartesische Produkt nichtleer — dies ist äquivalent zum Auswahlaxiom, welches wir in dieser Vorlesung immer annehmen wollen.

e) Man beachte die Ähnlichkeit zur Definition einer $\sigma$-Algebra. Bei einer $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ gilt statt a) (iii) nur

$$A_n \in \mathcal{A} \quad (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A},$$

dafür ist mit einer Menge $A$ auch $X \setminus A$ in der $\sigma$-Algebra. Viele Begriffe wie die erzeugte $\sigma$-Algebra und die Produkt-$\sigma$-Algebra sind analog definiert. Es gibt allerdings keine so einfache Darstellung der erzeugten $\sigma$-Algebra wie in a).

**1.3 Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.

a) Eine Menge $U \subset X$ heißt genau dann offen, falls $U \in \mathcal{T}$, und genau dann abgeschlossen, falls $X \setminus U \in \mathcal{T}$. Das Innere $\mathring{A}$ einer Menge $A \subset X$ ist definiert als die größte offene Menge $U$ mit $U \subset A$. Der Abschluss $\overline{A}$ ist definiert als die kleinste abgeschlossene Menge $V$ mit $A \subset V$.

b) Seien $A \subset B \subset X$. Dann heißt $A$ dicht in $B$, falls $\overline{A} \supset B$ gilt.

c) Der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt separabel, falls eine abzählbare Teilmenge $A \subset X$ existiert, welche dicht in $X$ ist.

d) Ein Mengensystem $\mathscr{U} \subset \mathcal{T}$ heißt eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, falls sich jedes Element von $\mathcal{T}$ als Vereinigung von Elementen aus $\mathscr{U}$ schreiben lässt. Ein Mengensystem $\mathscr{U}$ heißt eine Subbasis von $\mathcal{T}$, falls $\mathcal{T}$ die von $\mathscr{U}$ erzeugte Topologie ist.

e) Eine (nicht notwendig offene) Menge $V \subset X$ heißt eine Umgebung eines Punktes $x \in X$, falls eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ existiert mit $x \in U \subset V$. Eine Familie $\mathscr{N}$ von Teilmengen von $X$ heißt eine Umgebungsbasis des Punktes $x \in X$, wenn jedes $N \in \mathscr{N}$ eine Umgebung von $x$ ist und für jede Umgebung $M$ von $x$ ein $N \in \mathscr{N}$ existiert mit $N \subset M$.

f) $(X, \mathcal{T})$ heißt Hausdorff-Raum (oder $T_2$-Raum), falls für jedes $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ existieren mit $x \in U_x$, $y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$.

g) $(X, \mathcal{T})$ heißt normal (oder $T_4$-Raum), falls $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffsch ist und für alle abgeschlossenen Mengen $A_1, A_2$ mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ offene Mengen $U_1 \supset A_1$, $U_2 \supset A_2$ existieren mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Die beiden folgenden Sätze werden hier nicht bewiesen.

**1.4 Satz** (Lemma von Urysohn). *Sei $(X, \mathcal{T})$ normaler topologischer Raum, und seien $A_1, A_2 \subset X$ abgeschlossen mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dann existiert ein $f \in C(X; \mathbb{R})$ mit $0 \leq f \leq 1$ und $f|_{A_1} = 0$, $f|_{A_2} = 1$.*

**1.5 Satz** (Erweiterungslemma von Tietze). *Sei $(X, \tau)$ ein normaler topologischer Raum. Sei $M \subset X$ abgeschlossen, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon M \to [a, b]$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $F\colon X \to [a, b]$ von $f$.*

Um hierbei die Stetigkeit der Abbildung $f$ erklären zu können, wird $M$ mit der Spurtopologie ausgestattet.

Bei topologischen Räumen kann man einige Begriffe definieren, die schon aus dem ersten Studienjahr bekannt sind. Hier einige Beispiele:

**1.6 Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge.

a) Ein Element $x \in X$ heißt Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls in jeder offenen Menge, die $x \in X$ enthält, unendlich viele Folgenglieder liegen.

b) Ein Element $x \in X$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls in jeder offenen Menge, die $x$ enthält, alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen. Man schreibt $\lim_{n \to \infty} x_n := x$, oder $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

Und auch für die Stetigkeit einer Abbildung $f\colon X \to Y$ gibt es eine Beschreibung, die dem bereits bekannten $\varepsilon$–$\delta$–Zugang entspricht:

**1.7 Lemma.** *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Dann ist eine Abbil-*

*dung $f\colon X \to Y$ stetig genau dann, wenn zu jedem $x_0 \in X$ und jeder Umgebung $V_Y$ von $y_0 := f(x_0)$ eine Umgebung $U_X$ von $x_0$ existiert mit $f(U_X) \subset V_Y$.*

[[ (i) Sei $f$ stetig. Wähle $W \subset Y$ offen mit $y_0 \in W \subset V_Y$ (Definition Umgebung). Dann ist $U_X := f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_X$ mit $f(U_X) \subset W \subset V_Y$.

(ii) Es gelte die Bedingung des Lemmas, und sei $B \subset Y$ offen. Für jedes $x \in f^{-1}(B)$ ist $B$ eine Umgebung von $f(x)$, und nach Voraussetzung existiert eine Umgebung $V_x$ von $x$ mit $f(V_x) \subset B$. Damit existiert eine offene Menge $U_x$ mit $x \in U_x \subset V_x$ und $f(U_x) \subset B$, also ist $f^{-1}(B) = \bigcup_{x\in f^{-1}(B)} U_x$ offen. ]]

**1.8 Definition.** Sei $X$ eine Menge und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann heißt $d$ eine Metrik und $(X, d)$ ein metrischer Raum, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(i) $d(x, y) = d(y, x)$

(ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

**1.9 Beispiele.** Einige Beispiele von metrischen Räumen sind:

a) Sei $X$ beliebig und

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & : x \neq y \\ 0 & : x = y \end{cases}$$

(diskrete Metrik).

b) Die Standardmetrik auf $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist gegeben durch $d(x, y) = |x - y|$.

c) Sei $X = C([0, 1]; \mathbb{R})$. Dann sind

$$d_1(f, g) := \|f - g\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|,$$
$$d_2(f, g) := \|f - g\|_{L^1} := \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

zwei Metriken auf $X$.

**1.10 Definition.** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum.

a) Die (offene) Kugel um $x_0$ mit Radius $r > 0$ ist definiert als $B(x_0, r) := \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$.

b) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt offen, falls für alle $u \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(u, \varepsilon) \subset U$. Dies definiert die Topologie $\mathcal{T}_d$, d.h. jeder metrische Raum ist damit ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T}_d)$.

c) Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt metrisierbar, falls es eine Metrik $d$ gibt mit $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}$.

[[Zu b): Man sieht direkt aus der Definition, dass

$$\mathcal{T}_d := \{U\subset X:\ \forall\, u\in U\ \exists\, \varepsilon>0:\ B(u,\varepsilon)\subset U\}$$

eine Topologie ist: Offensichtlich ist $\emptyset, X\in\mathcal{T}_d$. Für $U_1,U_2\in\mathcal{T}_d$ und $u\in U_1\cap U_2$ existieren $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ mit $B(u,\varepsilon_1)\subset U_1$ und $B(u,\varepsilon_2)\subset U_2$. Damit ist $B(u,\varepsilon)\subset U_1\cap U_2$ für $\varepsilon:=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.

Falls $U_\lambda\in\mathcal{T}_d$ für $\lambda\in\Lambda$ und $u\in\bigcup_\lambda U_\lambda$, so existiert ein $\lambda_0$ mit $u\in U_{\lambda_0}$. Damit existiert ein $\varepsilon>0$ mit $B(u,\varepsilon)\subset U_{\lambda_0}$ und damit $B(u,\varepsilon)\subset\bigcup_\lambda U_\lambda$. ]]

**1.11 Beispiel.** Das folgende Beispiel zeigt, dass nicht jeder topologischer Raum metrisierbar ist: Sei $X$ ein Menge mit mindestens zwei Elementen und $\mathcal{T}:=\{\emptyset,X\}$. Falls $(X,\mathcal{T})$ metrisierbar mit Metrik $d$ wäre, so wäre für zwei Elemente $x\neq y\in X$ der Abstand $\gamma:=d(x,y)$ positiv und es folgt $B(x,\frac{\gamma}{2})\in\mathcal{T}_d$. Wegen $\emptyset\subsetneq B(x,\frac{\gamma}{2})\subsetneq X$ erhalten wir einen Widerspruch.

Metrische Räume sind zwar weniger allgemein als topologische Räume, aber sie verfügen über einige nützliche Eigenschaften, wie in den beiden folgenden Bemerkungen ausgeführt:

**1.12 Bemerkung.** Sei $X$ ein metrischer Raum und $A\subset X$. Dann sind äquivalent:

(i) Die Menge $A$ enthält alle ihre Häufungspunkte.

(ii) Es gilt $A=\overline{A}$.

(iii) Die Menge $A$ ist abgeschlossen.

**1.13 Bemerkung.** Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum: Betrachte

$$U_x = B\Big(x,\frac{d(x,y)}{2}\Big),\quad U_y = B\Big(y,\frac{d(x,y)}{2}\Big).$$

**1.14 Beispiel.** Wir greifen das Beispiel 1.9 c) noch einmal auf. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X\colon f\mapsto f$ ist zwar bijektiv, aber die Stetigkeit hängt von der gewählten Metrik ab:

So ist $\mathrm{id}\colon (C([0,1]),d_1)\to(C([0,1]),d_2)$ stetig, denn es gilt

$$d_2(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x\le\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)| = d_1(f,g).$$

Hingegen ist $\mathrm{id}\colon (C([0,1]),d_2)\to(C([0,1]),d_1)$ nicht stetig: Definiere zu $n\in\mathbb{N}$ die Funktion $f_n$ wie in folgender Abbildung:

Dann gilt

$$d_2(f_n, 0) = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \longrightarrow 0,$$

aber: $d_1(f_n, 0) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1$.

**1.15 Definition.** Seien $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ metrische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ eine Isometrie, falls

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y) \quad (x, y \in X) \tag{1-1}$$

gilt. Eine bijektive Isometrie heißt isometrischer Isomorphismus.

**1.16 Beispiel.** Versieht man $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik, so sind die durch orthogonale Matrizen gegebenen Abbildungen Isometrien von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$.

**1.17 Definition.** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum.

a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt eine Cauchyfolge, falls gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n, m \geq n_0\colon d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Der Raum heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergent ist.

b) Eine Menge $A \subset X$ heißt beschränkt, falls ein $r > 0$ und ein $x_0 \in X$ existieren mit $A \subset B(x_0, r)$.

**1.18 Beispiel.** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum mit diskreter Metrik, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Dann existiert ein $x_0 \in X$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $x_n = x_0$.

**1.19 Satz.** *Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum.*

*a) Es existiert ein beschränkter metrischer Raum $(X, d')$, welcher homöomorph zu $(X, d)$ ist.*

*b) Es existiert ein vollständiger metrischer Raum $(Y, d_Y)$ und ein dichter Teilraum $Y_0 \subset Y$ so, dass $(X, d)$ und $(Y_0, d_Y)$ isometrisch isomorph sind.*

*Beweis.* a) Siehe Übung (man wählt $d' = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$).

b) wird hier nicht bewiesen. $\square$

Auch der folgende Satz, der aus der Analysis bekannt sein sollte, wird hier nicht bewiesen.

**1.20 Satz** (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, und $T\colon X \to X$ eine Kontraktion, d.h. es existiere ein $k \in [0, 1)$ mit*

$$d(Tx, Ty) \leq k \cdot d(x, y) \quad (x, y \in X).$$

*Dann existiert genau ein Fixpunkt von $T$, d.h. genau ein $x^* \in X$ mit $Tx^* = x^*$. Für alle $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x^*$, und es gilt die Abschätzung*

$$d(x^*, T^n x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot d(Tx_0, x_0).$$

## b) Kompaktheit

**1.21 Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$.

a) Eine offene Überdeckung von $A$ ist eine Familie $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (wobei $\Lambda$ eine beliebige Indexmenge ist) mit $U_\lambda \in \mathcal{T}$ und $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Eine endliche Teilüberdeckung der offenen Überdeckung $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist eine Überdeckung der Form $A \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\lambda_j}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_j \in \Lambda$.

b) Die Menge $A \subset X$ heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von $A$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

**1.22 Satz.** *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Falls $X$ kompakt ist und $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, so ist der Wertebereich $f(X)$ kompakt.*

*Beweis.* Sei $f(X) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ mit $V_\lambda \in \mathcal{T}_Y$. Setze $U_\lambda := f^{-1}(V_\lambda)$. Da $f$ stetig ist, folgt $U_\lambda \in \mathcal{T}_X$, und $X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ ist eine offene Überdeckung von $X$. Wegen der Kompaktheit von $X$ existiert eine endliche Teilüberdeckung $X \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\lambda_j}$. Dann ist aber $f(X) \subset \bigcup_{j=1}^n V_{\lambda_j}$ ebenfalls eine endliche Teilüberdeckung, und $f(X)$ ist kompakt. $\square$

**1.23 Bemerkung.** In $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ gilt: Eine Teilmenge $A$ ist genau dann kompakt, wenn $A$ beschränkt und abgeschlossen ist. In beliebigen metrischen Räumen $(X, d)$ gilt nur eine Richtung: Jede kompakte Teilmenge $A$ ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht umgekehrt, wie das unten stehende Beispiel 1.24 b) zeigt.

**1.24 Beispiele.** a) Sei $X$ eine unendliche Menge mit diskreter Metrik. Dann ist $X$ beschränkt und abgeschlossen, aber $X = \bigcup_{x\in X} B(x, \frac{1}{2})$ ist eine offene Überdeckung von $X$, zu welcher keine endliche Teilüberdeckung existiert.

b) Sei

$$X := \ell^2 := \Big\{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots)\colon \xi_j \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 < \infty \Big\}.$$

Durch

$$d(x,y) := \Big( \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

wird eine Metrik auf $\ell^2$ definiert. Für die Einheitsvektoren

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots)$$

gilt $x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j$ und $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$ $(i \neq j)$. Die Einheitssphäre $S := \{x\colon d(x,0) = 1\}$ ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt.

Denn $S \subset \bigcup_{x \in S} B(x, \frac{1}{2})$ ist eine offene Überdeckung von $S$. Angenommen, es gäbe eine endliche Teilüberdeckung $S \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \frac{1}{2})$. Dann kann jede Umgebung $B(x_j, \frac{1}{2})$ höchstens einen Einheitsvektor $e_k$ enthalten, wegen $1 < \sqrt{2}$. Es gibt aber unendlich viele solche Einheitsvektoren. Widerspruch. Also ist $S$ nicht kompakt.

c) Wäre in einem metrischen Raum jede abgeschlossene, beschränkte Menge automatisch kompakt, so wäre jeder metrische Raum kompakt, da jeder metrische Raum homöomorph zu einem beschränkten, metrischen Raum ist.

**1.25 Definition.** Sei $(X, d)$ metrischer Raum.

a) Dann heißt $X$ folgenkompakt, wenn jede Folge in $X$ einen Häufungspunkt besitzt.

b) Der Raum $X$ heißt totalbeschränkt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $E \subset X$ gibt mit:

$$X = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon).$$

$E$ heißt (endliches) $\varepsilon$-Netz für $X$.

**1.26 Bemerkung.** Entsprechendes gilt auch für Teilmengen $A \subset X$, wobei $E \subset X$ ausreicht. Daraus ist $\widetilde{E} \subset A$ konstruierbar (Dreiecksungleichung).

**1.27 Satz.** *$(X, d)$ sei metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) *$X$ ist kompakt.*

(ii) *$X$ ist folgenkompakt.*

(iii) *$X$ ist totalbeschränkt und $X$ vollständig.*

*Beweis.* **(i)$\Longrightarrow$(ii):**

Angenommen, es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche keinen Häufungspunkt besitzt. Dann existiert zu jedem $x \in X$ ein $\varepsilon_x > 0$ so, dass die Menge $\{n \in \mathbb{N} \,|x_n \in B(x, \varepsilon_x)\}$ endlich ist. Durch $X \subset \bigcup_{x\in X} B(x, \varepsilon_x)$ ist eine offene Überdeckung von $X$ gegeben, und da $X$ kompakt ist, existieren ein $m \in \mathbb{N}$ und $\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_m \in X$ mit

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} B(\widetilde{x}_j, \varepsilon_{x_j}).$$

Insbesondere sind alle (unendlich vielen) $x_n$ in den endlich vielen Kugeln enthalten. Dies ist ein Widerspruch zur Endlichkeit der Menge $\bigcup_{j=1}^{m}\{n \in \mathbb{N}\colon x_n \in B(\widetilde{x}_j, \varepsilon_{x_j})\} < \infty$.

**(ii)$\Longrightarrow$(iii):**

Als folgenkompakter Raum ist $X$ vollständig. Angenommen, $X$ ist nicht totalbeschränkt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon) \subsetneq X$ für alle endlichen Mengen $\{x_1, \dots, x_n\}$. Wähle $x_1 \in X$ beliebig, $x_2 \in X \backslash B(x_1, \varepsilon)$, $x_3 \in X \backslash (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$ usw. Dann gilt $x_{n+1} \in X \backslash \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$. Für alle $x \in X$ liegt maximal ein Element der Folge in $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$, da $d(x_n, x_{n+1}) \geq \varepsilon$. Also besitzt die Folge $(x_n)_n$ keinen Häufungspunkt in $X$, Widerspruch.

**(iii)$\Longrightarrow$(i):**

Wir nehmen an, es gibt eine offene Überdeckung $\mathcal{A}$ von $X$, welche keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Da $X$ totalbeschränkt ist, existieren $n \in \mathbb{N}$ und $y_1, \dots, y_n \in X$ mit $X = \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \frac{1}{2})$. Wären alle $B(y_j, \frac{1}{2})$, $j = 1, \dots, n$, endlich überdeckbar, so auch $X$. Also gibt es $x_1 \in \{y_1, \dots, y_n\}$ so, dass $B(x_1, \frac{1}{2})$ nicht endlich überdeckbar ist.

Wir konstruieren induktiv eine Folge $(x_n)_n$: Seien $x_1, \dots, x_n$ gegeben und so konstruiert, dass $B(x_{n-1}, \frac{1}{2^{n-1}})$ nicht endlich überdeckbar ist, d.h. es gibt $x_n \in B(x_{n-1}, \frac{1}{2^{n-1}})$ mit $B(x_n, \frac{1}{2^n})$ nicht endlich überdeckbar. Da die Abschätzung $d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ für $m \geq n$ gilt, ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit von $X$ existiert der Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Da $\mathcal{A}$ eine offene Überdeckung ist, gibt es ein $V \in \mathcal{A}$ mit $B(x, \varepsilon) \subset V$. Dazu existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $B(x_{n_0}, 2^{-n_0}) \subset B(x, \varepsilon)$, denn für $y \in B(x_n, 2^{-n})$ gilt

$$d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

für hinreichend großes $n$. Somit ist $y \in B(x, \varepsilon)$ und damit $B(x_{n_0}, 2^{-n_0}) \subset V$, Widerspruch. □

**1.28 Bemerkung.** a) Eine andere Bezeichnung für „totalbeschränkt“ ist auch „präkompakt“.

b) Eine Menge $A \subset X$ heißt relativ kompakt, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

Der folgende Satz ist einer der wichtigsten Sätze der Topologie; der Beweis (der etwa mit Hilfe von Ultrafiltern geführt werden kann) ist aber zu aufwändig für diese Vorlesung.

**1.29 Satz** (Tychonov). *Sei $I$ eine Menge und $X = \prod_{i \in I} X_i$ das kartesische Produkt der topologischen Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Falls jedes $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt ist, dann ist auch $X$ in der Produkttopologie kompakt.*

# 2. Normierte Räume und Hilberträume

Im folgenden sei $X$ ein $\mathbb{K}$-VR, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

## a) Normierte Räume und Banachräume

**2.1 Definition.** Eine Norm ist eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ $(x \in X)$,
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $(\alpha \in \mathbb{K},\ x \in X)$
(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ $(x, y \in X)$

In diesem Fall heißt $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Falls in (i) nur die Richtung „$\Leftarrow$“ gilt, so heißt $\|\cdot\|$ eine Halbnorm oder Seminorm.

**2.2 Bemerkung.** a) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ wird mit $d(x, y) := \|x - y\|$ zu einem metrischen Raum $(X, d)$. Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

b) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, so ist $\widehat{d}\colon X \to \mathbb{R},\ \widehat{d}(x) := d(x, 0)$ eine Norm genau dann, wenn gilt

(i) $d(x + z, y + z) = d(x, y),\ \forall x, y, z \in X$
(ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y),\ \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$

Wenn dies gilt, dann ist die von der Norm $\widehat{d}$ induzierte Metrik wieder $d$.

**2.3 Definition.** Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Raum.

**2.4 Beispiele.** a) Der Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $\|\cdot\| = |\cdot|$ ist ein Banachraum.

b) Sei $A$ kompakter, metrischer Raum und $Y$ Banachraum. Dann ist der Raum $C(A; Y)$ aller stetigen Funktionen von $A$ nach $Y$, versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{a \in A} \|f(a)\|_Y$, ein Banachraum.

**2.5 Definition und Satz.** *a) Sei $p\colon X \to [0, \infty)$ eine Seminorm. Dann ist das System*

$$\Big\{ U \subset X : \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon\ B(x, \varepsilon) \subset U \Big\}$$

*eine Topologie auf $X$ und heißt die von $p$ erzeugte Topologie (vgl. Definition 1.10). Dabei ist $B(x, \varepsilon) := \{y \in X : p(x - y) < \varepsilon\}$.*

*b) Diese von einer Seminorm $p$ erzeugte Topologie ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Seminorm sogar eine Norm ist. Die Menge $\{B(x, \varepsilon) : x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ bildet* *eine Basis der Topologie. Die von $p$ erzeugte Topologie ist die gröbste Topologie auf $X$, bezüglich der alle Abbildungen $x \mapsto p(x - x_0)$ mit $x_0 \in X$ stetig sind.*

[[Das das System $\mathcal{T}_p := \{U \subset X : \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon\ B(x, \varepsilon) \subset U\}$ eine Topologie ist, sieht man sofort wie in 1.10. Falls die Seminorm eine Norm ist, ist $X$ Hausdorffsch nach Bem. 1.13. Ansonsten existiert ein $x \in X \setminus \{0\}$ mit $p(x) = 0$, und für die Punkte 0 und $x$ ist die Bedingung eines Hausdorff-Raums verletzt.

Aufgrund der Dreiecksungleichung ist $B(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_p$ für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Andererseits lässt sich jedes $U \in \mathcal{T}_p$ in der Form $U = \bigcup_{x \in U} B(x, \varepsilon_x)$ schreiben, d.h. die Menge aller $B(x, \varepsilon)$ bildet eine Basis der Topologie.

Sei $\mathcal{T}_1$ die von allen Abbildungen $p_{x_0} : x \mapsto p(x - x_0)$ erzeugte Topologie auf $X$. Dann gilt $B(x_0, \varepsilon) = p_{x_0}^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) \in \mathcal{T}_1$ und damit $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_1$.

Für die Richtung $\mathcal{T}_p \supset \mathcal{T}_1$ ist zu zeigen, dass jedes $p_{x_0}\colon (X, \mathcal{T}_p) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Dazu verwendet man Lemma 1.7: Sei $x \in X$ und $W \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von $p_{x_0}(x) = p(x - x_0)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $V := (p_{x_0}(x) - \varepsilon, p_{x_0}(x) + \varepsilon) \subset W$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung sieht man, dass $U := B(x, \varepsilon)$ eine Umgebung von $x$ ist mit $p_{x_0}(U) \subset V \subset W$. ]]

Der Beweis des folgenden Satzes sollte aus der Analysis bekannt sein.

**2.6 Satz.** *Seien $X, Y$ normierte Räume, $T\colon X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) *$T$ ist beschränkt, d.h. $\exists\, c > 0\colon\ \|Tx\|_Y \le c\,\|x\|_X \quad (x \in X)$.*

(ii) *$T\colon X \to Y$ ist stetig.*

(iii) *$T\colon X \to Y$ ist stetig an der Stelle $0 \in Y$.*

**2.7 Definition.** Seien $X, Y$ Vektorräume, ausgestattet mit Topologien. Der Raum

$$L(X, Y) := \{T\colon X \to Y \ :\ T \text{ linear, stetig}\}$$

heißt der Raum der linearen stetigen Operatoren von $X$ nach $Y$ (im Falle von normierten Räumen $X$ und $Y$ sind diese Operatoren dann auch beschränkt). Wir setzen $L(X) := L(X, X)$. Der Raum $X' := L(X, \mathbb{K})$ heißt der (topologische) Dualraum von $X$. Oft schreibt man $Tx$ statt $T(x)$.

Für $T \in L(X, Y)$ (mit normierten Räumen $X$ und $Y$) definiert man

$$\|T\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X,\ \|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y\,.$$

$\|T\|$ heißt die Operatornorm von $T$. Sei

$$\begin{aligned} \ker T &:= N(T) := \{x \in X\colon Tx = 0\}, \\ \operatorname{Im} T &:= R(T) := T(X) := \{Tx\colon x \in X\} \end{aligned}$$

der Kern (englisch „null space“) bzw. der Wertebereich (englisch „range“) von $T$.

**2.8 Bemerkung.** Es gilt

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X \quad (x \in X)$$

und

$$\|T\| = \inf \{C > 0\colon\ \forall\, x \in X\colon\ \|Tx\|_Y \leq C\,\|x\|_X\}\,.$$

**2.9 Definition und Satz.** *Sei $X$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $L = \{p_\lambda\colon \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von Seminormen $p_\lambda\colon X \to [0,\infty)$. Definiere $\mathcal{T}$ als das System aller Mengen $U \subset X$, für welche gilt*

$$\forall\, x \in U\ \exists\, r \in \mathbb{N}\ \exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_r \in \Lambda\ \exists\, \varepsilon > 0\colon\ B^{(\lambda_1)}(x,\varepsilon) \cap \dots \cap B^{(\lambda_r)}(x,\varepsilon) \subset U.$$

*Dabei sei $B^{(\lambda_j)}(x,\varepsilon) := \{y \in X : p_{\lambda_j}(x-y) < \varepsilon\}$ die Kugel um $x$ mit Radius $\varepsilon$ bzgl. der Seminorm $p_{\lambda_j}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $X$, die sog. lokalkonvexe Topologie zu $L$ auf $X$. Dies ist die gröbste Topologie auf $X$, für die jede der Abbildungen $p_\lambda(\cdot - x_0)$ mit $\lambda \in \Lambda$ und $x_0 \in X$ stetig von $X$ nach $\mathbb{R}$ ist, vgl. Definition 1.1. Eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist gegeben durch*

$$\{B^{(\lambda)}(x,r)\colon \lambda \in \Lambda,\ x \in X,\ r > 0\}.$$

[[Das zeigt man analog zum Beweis von Satz 2.5.]]

**2.10 Definition.** Sei $X$ $\mathbb{K}$-VR und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $X$. Dann heißt $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, falls die Abbildungen

$$\begin{aligned} s\colon X \times X &\to X, & (x_1,x_2) &\mapsto x_1 + x_2 \\ m\colon \mathbb{K} \times X &\to X, & (\alpha,x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

beide stetig sind.

**2.11 Bemerkung.** Normierte Räume sind topologische Vektorräume.

**2.12 Definition.** a) Sei $X$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $X^* := \{f\colon X \to \mathbb{K},\ f \text{ linear }\}$ der algebraische Dualraum von $X$. Für $Y \subset X^*$ bezeichnet man die $Y$-schwache Topologie $\mathcal{T}(Y)$ (vgl. Definition 1.1) auf $X$ auch mit $\sigma(X,Y)$.

b) Sei $X$ topologischer Vektorraum und $X' \subset X^*$ der topologische Dualraum. Dann heißt $\sigma(X,X')$ die schwache Topologie auf $X$ und $\sigma(X',X)$ die schwach-*-Topologie auf $X'$. (Wir werden später sehen, dass man $X$ als Teilmenge von $X''$ auffassen kann.) Für die schwache Konvergenz schreibt man $x_n \rightharpoonup x$ oder $x_n \xrightarrow{w} x$, für die schwach-*-Konvergenz schreibt man $f_n \xrightarrow{w^*} f$ in $X'$.

Als Warnung vermerken wir, dass die schwache Topologie eines unendlichdimensionalen Raumes im Allgemeinen nicht metrisierbar ist. Wir können in Zukunft also nicht davon ausgehen, dass jeder von uns benötigte Raum eine Metrik besitzt, die zu seiner Topologie passt.

**2.13 Bemerkung.** Sei $X$ ein topologischer Vektorraum. Dann gilt:

a) Die Verschiebung einer in $X$ offenen Menge um einen konstanten Vektor ergibt in $X$ wieder eine offene Menge.

b) Wenn $A \subset X$ eine offene Teilmenge ist und $B \subset X$ eine beliebige Teilmenge, dann ist $A + B$ offen in $X$.

**2.14 Definition** (Quotientenraum für topologische Vektorräume)**.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum (nicht unbedingt Hausdorffsch), und $M \subset X$ ein Untervektorraum, sowie $X/M := \{[x] = x+M : x \in X\}$ der algebraische Quotientenraum. Wir schreiben $\Phi$ für die (lineare) Quotientenabbildung,

$$\Phi\colon x \mapsto [x], \qquad \Phi\colon X \to X/M,$$

und wir statten $X/M$ mit der feinsten Topologie aus, für die $\Phi\colon X \to X/M$ stetig ist.

**2.15 Bemerkung.** Die oben definierte Topologie auf $X/M$ ist gegeben durch

$$\mathcal{T}_M := \{V \subset X/M : \Phi^{-1}(V) \subset X \text{ offen}\}.$$

Somit besteht diese Topologie aus genau jenen Mengen $H + M \subset X/M$, für die $H + M$ eine in $X$ offene Menge ist. Und aus Bemerkung 2.13 bekommen wir dann: wenn $H \subset X$ offen in $X$ ist, dann ist $\Phi(H)$ offen in $X/M$, d.h. die Abbildung $\Phi$ ist offen.

[[Man sieht direkt aus der Definition, dass $\mathcal{T}_M$ eine Topologie auf $X/M$ ist und dass $\Phi$ bzgl. dieser Topologie stetig ist. Falls andererseits $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (X/M, \mathcal{T}')$ für eine beliebige Topologie $\mathcal{T}'$ stetig ist, so folgt für alle $V \in \mathcal{T}'$ schon $\Phi^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ und damit $V \in \mathcal{T}_M$, d.h. $\mathcal{T}_M$ ist die maximale Topologie mit dieser Eigenschaft.]]

Wie benötigen noch eine Eigenschaft dieser Quotientenräume, welche hier nicht bewiesen wird.

**2.16 Bemerkung.** Sei $X$ ein Vektorraum mit einer Seminorm $p(\cdot)$, ausgestattet mit der davon gemäß Definition 2.5 erzeugten Topologie; und es sei $M \subset X$ ein Untervektorraum. Dann ist der Quotientenraum $X/M$ Hausdorffsch genau dann, wenn $M$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X$ ist.

**2.17 Definition und Satz** (Quotientenraum für normierte Räume)**.** *Sei $X$ normierter Raum, $M \subset X$ ein Untervektorraum, und $X/M$ der Quotientenraum. Dann ist*

$$\|[x]\| := \operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

*eine Seminorm auf $X/M$. Falls $M$ abgeschlossen ist, so ist $\|[\cdot]\|$ eine Norm und $(X/M, \|[\cdot]\|)$ ein normierter Raum. Falls $X$ Banachraum ist und $M$ abgeschlossen ist, so ist auch $X/M$ Banachraum.*

*Beweis.* Nur die letzte Aussage folgt nicht durch direktes Nachrechnen. Sei $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $X/M$.

(i) Übergang zur Teilfolge: Da $\|([x_n]) - ([x_m])\| \longrightarrow 0 \quad (n, m \to \infty)$, existiert eine Teilfolge $([x_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$ von $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\| < 2^{-(k+1)}$. Schreibe wieder $[x_k]$ statt $[x_{n_k}]$.

(ii) Wahl einer Cauchyfolge in $X$: Induktiv sieht man, dass nach Definition der Norm in $X/M$ eine Folge $(z_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset X$ existiert mit $z_\ell \in [x_\ell]$ und

$$\|z_{\ell+1} - z_\ell\| \le \|[x_{\ell+1}] - [x_\ell]\|_{X/M} + 2^{-\ell} \quad (\ell \in \mathbb{N}).$$

Damit

$$\begin{aligned}
\|z_{k+m} - z_k\|_X &\le \sum_{\ell=k+1}^{k+m} \|z_\ell - z_{\ell-1}\|_X \\
&\le \sum_{\ell=k+1}^{k+m} \Big(\|[x_\ell] - [x_{\ell-1}]\|_{X/M} + 2^{-\ell}\Big) \\
&\le \sum_{\ell=k+1}^{k+m} 2^{-\ell+1} \le 2^{-k+1},
\end{aligned}$$

d.h. $(z_k)_k \subset X$ ist eine Cauchyfolge. Setze $z := \lim_k z_k$. Wegen

$$\|[x_k] - [z]\|_{X/M} = \|[z_k] - [z]\|_{X/M} \le \|z_k - z\|_X \to 0$$

gilt $[x_k] \to [z]$ in $X/M$. □

**2.18 Definition und Satz** (direkte Summe)**.** *Seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Dann wird durch*

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 \quad ((x_1, x_2) \in X_1 \times X_2)$$

*eine Norm auf $X = X_1 \times X_2$ definiert. Mit dieser Norm heißt $X$ die direkte Summe von $X_1$ und $X_2$, Schreibweise $X = X_1 \oplus X_2$. Falls $X_1$ und $X_2$ beide Banachräume sind, so ist auch $X_1 \oplus X_2$ ein Banachraum.*

*Beweis.* Nur die letzte Aussage ergibt sich nicht durch Nachrechnen. Falls die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $X_1 \oplus X_2$ ist, so sind auch die einzelnen Komponenten Cauchyfolgen und damit, falls $X_1$ und $X_2$ Banachräume sind, konvergent gegen $x_1$ bzw. $x_2$. Damit ist aber auch die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset X_1 \oplus X_2$ konvergent gegen $x := (x_1, x_2)$. □

**2.19 Definition** ($\mathscr{L}^p$-Räume)**.** Sei $(Z, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

a) Sei $1 \leq p < \infty$. Definiere $\mathscr{L}^p(\mu)$ als die Menge aller messbaren Funktionen $f\colon Z \to \mathbb{C}$ mit

$$\|f\|_p := \Big(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} < \infty.$$

b) Für $p = \infty$ wird $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ definiert als die Menge aller messbarer Funktionen $f\colon Z \to \mathbb{C}$, für welche es ein $C_f > 0$ gibt mit $\mu(\{z \in Z\colon |f(z)| > C_f\}) = 0$. Man spricht von $\mu$-fast überall beschränkten Funktionen. Für $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ definiert man

$$\|f\|_\infty := \inf\Big\{C \in \mathbb{R}\colon \mu(\{z \in Z\colon |f(z)| > C\}) = 0\Big\}.$$

c) Für Funktionen $f\colon Z \to \mathbb{R}$ werden die entsprechenden Funktionenräume mit $\mathscr{L}^p(\mu; \mathbb{R})$ bezeichnet. Manchmal schreiben wir auch $\mathscr{L}^p(\mu; \mathbb{C})$ statt $\mathscr{L}^p(\mu)$.

Der folgende Satz aus der Analysis wird hier nicht bewiesen.

**2.20 Satz.** *a)* **(Höldersche Ungleichung)** *Für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (f \in \mathscr{L}^p(\mu),\ g \in \mathscr{L}^q(\mu)).$$

*b)* **(Minkowskische Ungleichung)** *Für $1 \leq p \leq \infty$ gilt*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)).$$

*c) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist der Raum $\mathscr{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum, und $\|\cdot\|_p$ definiert eine Seminorm (Halbnorm) auf $\mathscr{L}^p(\mu)$.*

**2.21 Definition und Satz** ($L^p$-Räume)**.** *Sei $(Z, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, und sei $1 \leq p \leq \infty$. Den Vektorraum $X := \mathscr{L}^p(\mu)$ versehen wir mit der Seminorm $\|\cdot\|_p$ und anschließend mit der sich daraus ergebenden Topologie. Definiere eine Menge $M \subset \mathscr{L}^p(\mu)$, bestehend aus all jenen Funktionen, für die die Seminorm den Wert Null annimmt. Dann ist $M$ ein Untervektorraum, und auch eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathscr{L}^p(\mu)$, denn $\{0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|_p : \mathscr{L}^p(\mu) \to \mathbb{R}$ ist stetig per Definition.*

*Dann definieren wir*

$$L^p(\mu) := \mathscr{L}^p(\mu)/M$$

*als Quotientenraum. Dieser besteht aus Äquivalenzklassen von Funktionen, die $\mu$–fast überall übereinstimmen.*

*Mit dieser Konstruktion wird $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ zu einem Banachraum.*

*Falls das Maß durch das Lebesgue–Maß $\lambda|_\Omega$ auf einer messbaren Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gegeben ist, schreibt man auch $L^p(\Omega)$ statt $L^p(\lambda|_\Omega)$.*

**2.22 Beispiele.** Die folgenden Beispiele sind Spezialfälle der oberen Definition.

a) Der Raum $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ wird mit jeder der Normen

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < \infty),$$
$$\|x\|_\infty := \max\Big\{|\xi_j|, j = 1, \dots, n\Big\}$$

zu einem Banachraum.

b) Definiere für $1 \le p < \infty$ die $\ell^p$-Räume durch

$$\ell^p := \Big\{x = (\xi_1, \xi_2, \dots) | \xi_j \in \mathbb{C}, \|x\|_p := \Big(\sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^p\Big)^{1/p} < \infty\Big\},$$

und für $p = \infty$ den Raum $\ell^\infty$ durch

$$\ell^\infty := \Big\{x = (\xi_1, \xi_2, \dots) | \xi_j \in \mathbb{C}, \|x\|_\infty := \sup\{|\xi_j|, j \in \mathbb{N}\} < \infty\Big\}.$$

Dann ist $\ell^p$ für alle $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum. Hier ist jeweils $Z = \mathbb{N}$ und $\mu$ das Zählmaß.

## b) Hilberträume

Im folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**2.23 Definition.** a) Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $X$, versehen mit einer Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$, heißt ein Vektorraum mit Skalarprodukt oder ein Prähilbertraum, falls gilt:

(i) Für alle $y \in X$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle x, y \rangle$ linear.
(ii) Für alle $x, y \in X$ gilt $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
(iii) Für alle $x \in X$ gilt $\langle x, x \rangle \ge 0$. Es gilt $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

b) Zwei Vektoren $x, y \in X$ heißen orthogonal (in Zeichen $x \perp y$), falls $\langle x, y\rangle = 0$ gilt. Eine Familie $\{x_i\}_{i\in I}$ von Vektoren heißt orthonormal, falls gilt:

$$\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) In einem Prähilbertraum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ wird durch $\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2}$ die kanonische Norm definiert. Ein vollständiger Prähilbertraum heißt Hilbertraum.

**2.24 Beispiele.** a) Mit dem Skalarprodukt $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}$ werden $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ zu einem Hilbertraum.

b) Der Raum $C([0,1])$ wird mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

zu einem Prähilbertraum.

c) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann wird $L^2(\mu)$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_X f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\mu(x) \quad (f, g \in L^2(\mu))$$

zu einem Hilbertraum. Insbesondere ist $L^2(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Hilbertraum.

Auch die folgenden elementaren Eigenschaften von Prähilberträumen werden als bekannt vorausgesetzt, sie können aber auch leicht direkt nachgerechnet werden.

**2.25 Satz.** *Sei $X$ Prähilbertraum.*

a) (Satz von Pythagoras) *Seien $x, y \in X$ orthogonal. Dann gilt*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

b) *Sei $\{x_n\}_{n=1}^N$ orthonormal. Dann gilt*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n\rangle|^2 + \Big\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle\, x_n \Big\|^2 .$$

c) (Besselsche Ungleichung). *Sei $\{x_n\}_{n=1}^N$ orthonormal. Dann ist*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n\rangle|^2 \quad (x \in X).$$

d) (Cauchy–Schwarz-Ungleichung). *Es gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in X).$$

e) (Parallelogramm-Identität) *Für* $x, y \in X$ *gilt*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

f) (Polarisationsformel) *Für* $x, y \in X$ *gilt*

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), & \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\,\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\,\|x-\mathrm{i}y\|^2), & \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Die Bedeutung der Polarisationsformel liegt daran, dass Identitäten nur für die Norm nachgerechnet werden müssen und dann automatisch für die Skalarprodukte gelten.

Die Summe von zwei Hilberträumen $X$ und $Y$ ist wieder ein Hilbertraum, wenn man das Skalarprodukt auf $X \oplus Y$ durch

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_{X\oplus Y} := \langle x_1, x_2\rangle_X + \langle y_1, y_2\rangle_Y$$

definiert. Man beachte, dass die zugehörige Norm gegeben ist durch

$$\|(x, y)\|_{X\oplus Y} = \Big( \|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2 \Big)^{1/2}.$$

Diese Norm ist äquivalent zur Norm aus Satz 2.18.

## c) Der Approximationssatz und der Satz von Riesz für Hilberträume

Im folgenden sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum.

**2.26 Definition.** a)$M \subset X$ heißt konvex, falls gilt

$$\forall\, x, y \in M \;\forall\, \alpha \in [0, 1]\colon \alpha x + (1-\alpha)y \in M.$$

b) Zu $M \subset X$ heißt

$$M^\perp := \{x \in X : \;\forall\, y \in M\colon \langle x, y\rangle = 0\}$$

das orthogonale Komplement von $M$ in $X$.

**2.27 Lemma.** *Es ist $M^\perp$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $X$.*

*Beweis.* Die Teilraumeigenschaft ist klar. Für die Abgeschlossenheit vermerken wir

$$M^\perp = \bigcap_{y^* \in M} \{y^*\}^\perp,$$

sodass es genügt nachzuweisen, dass jede Menge $\{y^*\}^\perp$ abgeschlossen ist. Wir definieren eine lineare Abbildung

$$T_{y^*} \colon X \to \mathbb{K}, \qquad T_{y^*} \colon x \mapsto \langle x, y^* \rangle \,.$$

Dann ist $\{y^*\}^\perp = \ker T_{y^*}$. Wegen der Ungleichung von Cauchy–Schwarz ist $T_{y^*}$ eine beschränkte Abbildung vom normierten Raum $X$ in den normierten Raum $\mathbb{K}^1$, und aufgrund von Satz 2.6 ist $T_{y^*}$ stetig. Bei jeder stetigen Abbildung ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen. Nun ist aber $\{0\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{K}^1$, also ist auch $\ker T_{y^*} = T_{y^*}^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen in $X$. □

**2.28 Bemerkung.** a) Es ist $M^\perp = \overline{M}^\perp = (\mathrm{span} M)^\perp$.

b) Es gilt $M \cap M^\perp \subset \{0\}$. Denn sei $x \in M \cap M^\perp$. Dann ist $\langle x, x \rangle = 0$, d.h. $x = 0$. Insbesondere gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$, falls $0 \in M$ (z.B. falls $M$ ein Untervektorraum von $X$ ist).

**2.29 Satz** (Approximationssatz)**.** *Sei $X$ ein Hilbertraum, $M \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen, sowie $z_0 \in X$. Dann existiert genau ein $x \in M$ mit $\|x - z_0\| = \mathrm{dist}(z_0, M) := \inf\{\|y - z_0\| : y \in M\}$.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$ (betrachte die verschobene Menge $M - z_0$). Sei $d := \inf\{\|y\| : y \in M\}$. Wähle eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\|y_n\| \longrightarrow d$.

Unter Verwendung der Parallelogrammgleichung folgt

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4 \cdot \Big\| \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in M} \Big\|^2 \\ &\le 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4d^2 \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

da $\|y_n\| \longrightarrow d$. Daher ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Da $M$ vollständig ist, existiert $x := \lim_n y_n \in M$. Es gilt $\|x\| = \lim_n \|y_n\| = d$. Damit folgt $\|x\| \le \|y\|$ für alle $y \in M$.

Eindeutigkeit: Sei $\|x_1\| \le \|y\|, \|x_2\| \le \|y\|$ für jedes $y \in M$. Dann ist

$$\|x_1 - x_2\|^2 = 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2$$

$$= 2\Big(\underbrace{\|x_1\|^2 - \Big\|\frac{x_1+x_2}{2}\Big\|^2}_{\le 0}\Big) + 2\Big(\underbrace{\|x_2\|^2 - \Big\|\frac{x_1+x_2}{2}\Big\|^2}_{\le 0}\Big) \le 0.$$

□

**2.30 Satz** (Projektionssatz). *Sei $M = \overline{M} \subset X$ linearer Teilraum. Dann existiert für alle $x \in X$ eine eindeutige Zerlegung $x = m + m'$ mit $m \in M, m' \in M^\perp$. Somit ist $X = M \oplus M^\perp$. Es ist $\|x - m\| = \min_{y\in M} \|x - y\|$.*

*Beweis.* Nach dem Approximationssatz existiert genau ein $m \in M$ mit $\|m - x\| = \inf\{\|y - x\| : y \in M\}$. Setze $m' := x - m$. Für alle $y \in M$ ist dann $\|m'\| \le \|y - x\| = \|m' - (y - m)\|$.

(i) Wir zeigen $m' \in M^\perp$. Es gilt $\|m'\|^2 \le \|m' + ty\|^2 \quad (t \in \mathbb{K}, y \in M)$. Andererseits ist

$$\|m' + ty\|^2 = \|m'\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle m', ty\rangle + |t|^2 \|y\|^2 .$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt somit

$$|t|^2 \|y\|^2 + 2t \operatorname{Re}\langle m', y\rangle \ge 0,$$

also $\operatorname{Re}\langle m', y\rangle = 0$.

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ersetzt man $t$ durch $it$ und erhält

$$|t|^2 \|y\|^2 + 2t \operatorname{Im}\langle m', y\rangle \ge 0,$$

also $\operatorname{Im}\langle m', y\rangle = 0$.

(ii) Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $x = m + m' = z + z'$ mit $m, z \in M, m', z' \in M^\perp$. Dann ist $m - z = z' - m' \in M \cap M^\perp = \{0\}$, d.h. $m = z, m' = z'$. □

**2.31 Satz** (von Riesz). *Sei $X$ Hilbertraum und $T \in X'$. Dann existiert genau ein $x_T \in X$ mit*

$$Tx = \langle x, x_T\rangle \quad (x \in X).$$

*Es gilt $\|T\|_{X'} = \|x_T\|_X$. Die Abbildung $I_{\text{Riesz}}\colon X' \to X,\ T \mapsto x_T$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear.*

*Beweis.* **Schritt 1: Konstruktion von $x_T$:**

$M := \ker T = T^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter der stetigen Abbildung $T$. Damit ist $X = M \oplus M^\perp$ nach Satz 2.30.

Falls $M = X$, so folgt $T = 0$, und wir wählen $x_T = I_{\text{Riesz}}(T) := 0$.

Sei jetzt $M \neq X$. Wähle $y \in M^\perp \setminus \{0\}$. Wegen $M \cap M^\perp = \{0\}$ ist dann $Ty \neq 0$. Setze $x_T = I_{\text{Riesz}}(T) := \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot y$. Dann gilt $\|x_T\| = \frac{|Ty|}{\|y\|}$, und wir merken uns, dass

$$Tx_T = \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot Ty = \|x_T\|^2 .$$

Um zu zeigen, dass $Tx = \langle x, x_T \rangle$ für jedes $x \in X$ gilt, zerlegen wir $x$ gemäß $X = M^\perp \oplus M$:

$$x = \frac{Tx}{Tx_T} x_T + \left( x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T \right) =: x_\perp + x_\|.$$

Dies ist tatsächlich die angestrebte Zerlegung von $x$, denn es ist $x_\perp$ ein Vielfaches von $x_T \in M^\perp$, und es ist

$$Tx_\| = T \left( x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T \right) = Tx - \frac{Tx}{Tx_T} Tx_T = 0,$$

also $x_\| \in \ker T = M$.

Damit haben wir dann tatsächlich

$$\begin{aligned} \langle x, x_T \rangle &= \langle x_\perp, x_T \rangle + \langle x_\|, x_T \rangle = \frac{Tx}{Tx_T} \langle x_T, x_T \rangle + 0 = \frac{Tx}{Tx_T} \|x_T\|^2 \\ &= Tx, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

**Schritt 2: $I_{\text{Riesz}}$ ist Isometrie:**

Nach Cauchy–Schwarz ist $\|T\|_{X'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, x_T \rangle| \leq \|x_T\|$. Andererseits haben wir $\|T\|_{X'} \geq |T(\frac{x_T}{\|x_T\|})| = \|x_T\|$.

**Schritt 3: $I_{\text{Riesz}}(T)$ ist eindeutig:**

Angenommen, es gäbe zusätzlich zu $x_T$ noch ein $\widetilde{x}_T$ mit $Tx = \langle x, x_T \rangle = \langle x, \widetilde{x}_T \rangle \quad (x \in X)$. Dann gilt

$$0 = \langle x, x_T - \widetilde{x}_T \rangle \quad (x \in X).$$

Wähle $x = x_T - \widetilde{x}_T$ und erhalte $\|x_T - \widetilde{x}_T\| = 0$.

**Schritt 4: $I_{\text{Riesz}}$ ist konjugiert linear:**

Sei $T = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$. Dann ist einerseits $Tx = \langle x, x_T \rangle$, und andererseits

$$\begin{aligned} Tx &= \alpha_1 T_1 x + \alpha_2 T_2 x = \alpha_1 \langle x, x_{T_1} \rangle + \alpha_2 \langle x, x_{T_2} \rangle \\ &= \langle x, \overline{\alpha}_1 x_{T_1} \rangle + \langle x, \overline{\alpha}_2 x_{T_2} \rangle = \langle x, \overline{\alpha}_1 x_{T_1} + \overline{\alpha}_2 x_{T_2} \rangle , \end{aligned}$$

also $I_{\text{Riesz}}(T) = x_T = \overline{\alpha_1} x_{T_1} + \overline{\alpha_2} x_{T_2} = \overline{\alpha_1} I_{\text{Riesz}}(T_1) + \overline{\alpha_2} I_{\text{Riesz}}(T_2)$.

**Schritt 5: $I_{\text{Riesz}}$ ist surjektiv:**

Zu $y \in X$ sei $T_y x := \langle x, y\rangle$. Dann ist $|T_y x| \leq \|y\| \cdot \|x\|$, d.h. $T_y$ stetig und damit $T_y \in X'$.

**Schritt 6: $I_{\text{Riesz}}$ ist injektiv:**

Aus $\|T\|_{X'} = \|x_T\|_X$ ergibt sich direkt, dass der Kern der linearen Abbildung $I_{\text{Riesz}} \colon T \mapsto x_T$ nur das Nullfunktional enthalten kann. $\square$

## d) Orthonormalbasen

**2.32 Definition.** (i) Sei $\mathcal{M}$ eine Menge. Eine Relation $\prec$ auf $\mathcal{M}$ heißt Halbordnung, falls für $A$, $B$, $C \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\begin{gathered} A \prec A, \\ A \prec B,\; B \prec A \Longrightarrow A = B, \\ A \prec B,\; B \prec C \Longrightarrow A \prec C. \end{gathered}$$

Beachte, dass $A \prec B$ oder $B \prec A$ nicht für alle $A, B \in M$ gelten muss.

(ii) Eine Menge $Q \subset \mathcal{M}$ heißt total geordnet oder eine Kette, falls für alle $A, B \in Q$ gilt: $A \prec B$ oder $B \prec A$.

(iii) Ein Element $A \in \mathcal{M}$ heißt obere Schranke für $S \subset \mathcal{M}$, falls $B \prec A$ für alle $B \in S$.

(iv) Ein Element $M \in \mathcal{M}$ heißt maximal, falls aus $M \prec A$ folgt $M = A$.

**2.33 Beispiel.** Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, und $\mathcal{M}$ eine nichtleere Teilmenge der Potenzmenge von $X$. Dann definieren wir, dass $A \prec B$ genau dann gilt, wenn $A$, $B \in \mathcal{M}$ und $A \subset B$.

**2.34 Lemma** (von Zorn). *Sei $\mathcal{M}$ eine nichtleere Menge mit Halbordnung, für welche jede Kette eine obere Schranke in $\mathcal{M}$ besitzt. Dann besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element.*

Dieses Lemma ist eigentlich ein Axiom und äquivalent zum Wohlordnungssatz, welcher wiederum äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Die Formulierung dieser Axiome und der Beweis der Äquivalenz werden hier aber weggelassen.

**2.35 Definition.** Sei $X$ ein Hilbertraum. Eine Teilmenge $S \subset X$ heißt Orthonormalbasis oder vollständiges orthonormales System, falls $S$ eine maximale orthonormale Teilmenge von $X$ ist (maximal bezüglich Mengeninklusion). Man spricht auch von Hilbertraumbasis.

**2.36 Satz.** *Jeder nichttriviale Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

*Beweis.* Sei $\mathscr{S}$ die Menge aller orthonormalen Teilmengen des Hilbertraumes $X$. Dann ist $\mathscr{S} \neq \emptyset$ da $\{\frac{x}{\|x\|}\} \in \mathscr{S}$ für jedes $x \in X \setminus \{0\}$.

Sei $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ eine Kette in $\mathscr{S}$, d.h. für $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ gilt $S_\alpha \subset S_\beta$ oder $S_\beta \subset S_\alpha$. Setze $S_0 := \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} S_\alpha \subset X$. Dann ist $S_0 \supset S_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$. Zu $x, y \in S_0$ existiert ein $\alpha \in \mathcal{A}$ mit $x, y \in S_\alpha$, d.h. $S_0$ ist orthonormal, also $S_0 \in \mathscr{S}$. Damit ist $S_0$ eine obere Schranke zu $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Nach dem Lemma von Zorn existieren maximale Elemente in $\mathscr{S}$. □

**2.37 Lemma.** *Seien $X$ ein Prähilbertraum und $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}| < \infty \quad (x, y \in X).$$

*Beweis.* Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt nach der Cauchy–Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{R}^N$ und der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}| \leq \Big(\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{n=1}^{N} |\langle y, e_n\rangle|^2\Big)^{1/2} \leq \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

Mit $N \longrightarrow \infty$ erhält man die Behauptung. □

Im folgenden werden auch Hilberträume auftreten, welche eine überabzählbare Hilbertraumbasis besitzen, d.h. man muss grundsätzlich auch Summen mit überabzählbarer Indexmenge $\mathcal{A}$ betrachten. Dazu dient die folgende Definition.

**2.38 Definition.** a) Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine Menge und $p_\alpha \geq 0 \quad (\alpha \in \mathcal{A})$. Definiere

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha := \sup\Big\{\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} p_\alpha : \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A} \text{ endlich}\Big\} \in [0, \infty].$$

b) Sei $X$ Hilbertraum, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine Menge und $y_\alpha \in X$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$. Dann heißt die Reihe $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} y_\alpha$ unbedingt konvergent gegen ein Element $y \in X$, falls die Menge $\mathcal{A}_0 := \{\alpha \in \mathcal{A} : y_\alpha \neq 0\}$ abzählbar ist und für jede Aufzählung $\mathcal{A}_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ die Gleichheit $\sum_{n=1}^{\infty} y_{\alpha_n} = y$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} y_\alpha = y.$$

**2.39 Bemerkung.** a) Für $X = \mathbb{K}^n$ ist eine Reihe mit abzählbarer Indexmenge genau dann unbedingt konvergent, falls sie absolut konvergent ist (vgl. großer Umordnungssatz).

b) Seien $\mathcal{A} \neq \emptyset$ und $p_\alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha \in \mathcal{A})$ mit $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |p_\alpha| < \infty$. Dann ist $\mathcal{A}_0 := \{\alpha \in \mathcal{A} \colon p_\alpha \neq 0\}$ abzählbar, denn

$$\{\alpha \in \mathcal{A} \colon p_\alpha \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{\alpha \in \mathcal{A} \colon |p_\alpha| > \frac{1}{n}\right\}}_{\text{endlich}}.$$

Da die Reihe absolut konvergent ist, ist $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha$ unbedingt konvergent nach dem großen Umordnungssatz.

**2.40 Satz.** *Seien $X$ ein Hilbertraum und $S \subset X$ ein Orthonormalsystem.*

*a) Für alle $x \in X$ konvergiert die Reihe $\sum_{e\in S} \langle x, e\rangle\, e$ unbedingt.*

*b) Sei $c_e \in \mathbb{C}$ für $e \in S$ mit $\sum_{e\in S} |c_e|^2 < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{e\in S} c_e\, e$ unbedingt in $X$.*

*c) $x - \sum_{e\in S} \langle x, e\rangle\, e \in S^\perp$.*

*Beweis.* a) Nach der Besselschen Ungleichung (Satz 2.25 c)) gilt für alle endlichen $\widetilde{S} \subset S$

$$\sum_{e\in\widetilde{S}} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Also ist $\sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle|^2 < \infty$, und nach Bemerkung 2.39 b) ist $S_0 := \{e \in S \colon \langle x, e\rangle \neq 0\}$ abzählbar. Sei $S_0 = \{e_1, e_2, \dots\}$.

Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$\left\| \sum_{n=N}^{M} \langle x, e_n\rangle\, e_n \right\|^2 = \sum_{n=N}^{M} |\langle x, e_n\rangle|^2 \longrightarrow 0 \quad (N, M \longrightarrow \infty).$$

Also ist $\left(\sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle\, e_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und $y := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n \in X$ existiert.

Analog existiert für jede Permutation $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die umgeordnete Reihe $y_\sigma := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{\sigma(n)}\rangle\, e_{\sigma(n)}$. Wir zeigen $y = y_\sigma$. Für $z \in X$ gilt

$$\langle y, z\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n, z \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \cdot \overline{\langle z, e_n\rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_{\sigma(n)}\rangle\, \overline{\langle z, e_{\sigma(n)}\rangle} = \langle y_\sigma, z\rangle .$$

Dabei wurde die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, \overline{\langle z, e_n\rangle}$ nach Lemma 2.37 benutzt. Es folgt $y - y_\sigma \in X^\perp = \{0\}$.

b) wurde im Beweis von a) mitbewiesen.

c) Für $e \in S$ gilt mit der Bezeichnung aus a)

$$\Big\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n, e \Big\rangle = \langle x, e\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\, \langle e_n, e\rangle = 0.$$

(Betrachte die Fälle $e \in S_0$, d.h. $e = e_{n_0}$ und $e \notin S_0$, d.h. $\langle x, e\rangle = 0$.) □

**2.41 Satz.** *Seien $X$ ein Hilbertraum und $S \subset X$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:*

(i) *$S$ ist Orthonormalbasis.*

(ii) $S^\perp = \{0\}$.

(iii) *Für alle $y \in X$ gilt $y = \sum_{e\in S} \langle y, e\rangle\, e$.*

(iv) *Für alle $x, y \in X$ gilt $\langle x, y\rangle = \sum_{e\in S} \langle x, e\rangle\, \overline{\langle y, e\rangle}$.*

(v) *(Parsevalsche Gleichung) Es gilt*

$$\|x\|^2 = \sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle|^2 \quad (x \in X).$$

*Beweis.* (i)$\Longrightarrow$(ii). Falls ein $x \in S^\perp \setminus \{0\}$ existiert, so ist $S \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ ein Orthonormalsystem.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Satz 2.40 c).

(iii)$\Longrightarrow$(iv). Die Reihen erstrecken sich nur über einen abzählbaren Indexbereich und konvergieren absolut nach Lemma 2.37 und Satz 2.40 a), man darf also einsetzen.

(iv)$\Longrightarrow$(v). Setze $x = y$.

(v)$\Longrightarrow$(i). Falls $S$ nicht maximal ist, wählen wir ein $x \in S^\perp$ mit $\|x\| = 1$. Es ergibt sich $\sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle|^2 = 0$, Widerspruch zu (v). □

**2.42 Bemerkung.** Ein topologischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Hierbei ist „dicht“ definiert im topologischen Sinne (vgl. Definition 1.17). Da ein metrischer Raum vorliegt, ergibt sich der topologische Abschluss einer Menge durch Hinzufügen aller Häufungspunkte (vgl. Bemerkung 1.12), was in der Anwendung häufig praktischer ist.

Ein normierter Raum $X$ ist genau dann separabel, wenn es ein abzählbares linear unabhängiges $S \subset X$ gibt mit $\overline{\operatorname{span} S} = X$. Insbesondere ist ein Hilbertraum genau dann separabel, wenn er eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

Um das zu sehen, betrachtet man alle Linearkombinationen der Form $\sum_{k=1}^n a_k s_k$, $a_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, $s_k \in S$.

**2.43 Satz.** *Sei $X$ ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum mit Hilbertraumbasis $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dann ist die Abbildung $X \to \ell^2$, $x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}}$ ein isometrischer Isomorphismus von Hilberträumen (d.h. linear, bijektiv und isometrisch).*

*Beweis.* Die Linearität ist klar, Isometrie und damit Injektivität nach Satz 2.41 (v), die Surjektivität nach Satz 2.40 b). □

**2.44 Beispiele** (Hilbertraumdimension). a) Der Raum $L^2(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist ein separabler Hilbertraum. Speziell ist durch $e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ eine Hilbertraumbasis des Hilbertraums $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$ gegeben (Fourierreihen).

b) Es gibt auch Prähilberträume mit überabzählbaren Orthonormalsystemen.

[[Dies zeigt das folgende Beispiel: Sei $Y$ die Menge aller Funktionen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f|_{(-T,T)} \in L^2(-T,T)$ für alle $T>0$, für welche

$$\|f\|_1 := \Big(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$$

existiert. Dann ist $\|\cdot\|_1$ eine Halbnorm auf $Y$, aber keine Norm (so gilt etwa für die charakteristische Funktion $f := \chi_{(-1,1)}$ zwar $\|f\|_1 = 0$, aber $f \neq 0$).

Sei $N := \{f\in Y\colon \|f\|_1 = 0\}$. Dann ist $N$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $X := Y/N$ der Quotientenraum mit induzierter Norm $\|[f]\|_2 := \inf_{g\in N}\|f-g\|_1$ $(f\in Y)$. Durch

$$\langle [f],[g]\rangle_2 := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_1(x)g_1(x)\,\mathrm{d}x \quad (f_1\in[f], g_1\in[g])$$

wird $X$ zu einem Prähilbertraum, und es gilt $\langle [f],[f]\rangle_2 = \|[f]\|_2$.

Zu $\alpha>0$ definiere $v_\alpha(x) := \sin(\alpha x)(x\in\mathbb{R})$. Wegen

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} v_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\Big(T - \frac{\sin(s\alpha T)}{2\alpha}\Big) \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

gilt $v_\alpha \in Y$ und $\|v_\alpha\|_1 = \|[v_\alpha]\|_2 = 1$. Andererseits erhält man für $\alpha\neq\beta$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\sin(\alpha r)\sin(\beta r)\,\mathrm{d}r &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos((\alpha-\beta)r) - \cos((\alpha+\beta)r)\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{2T}\Big[\frac{\sin((\alpha-\beta)r)}{\alpha-\beta} - \frac{\sin((\alpha+\beta)r)}{\alpha+\beta}\Big]_{r=-T}^{r=T}\\ &= \frac{1}{T}\Big[\frac{\sin((\alpha-\beta)T)}{\alpha-\beta} - \frac{\sin((\alpha+\beta)T)}{\alpha+\beta}\Big] \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Daher gilt $\langle [v_\alpha],[v_\beta]\rangle_2 = 0$ für $\alpha\neq\beta$, d.h. $\{v_\alpha\}_\alpha$ ist ein überabzählbares Orthonormalsystem in $X$.]]

**2.45 Beispiele** (Separabilität). a) Der Raum $C([a,b])$ mit $\|\cdot\|_\infty$-Norm ist ein separabler Banachraum, denn die Polynome mit rationalen Koeffizienten liegen dicht.

Die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\ell^2$ sind separabel nach Bemerkung 2.42. Ebenso separabel ist der Raum $L^2(\Omega)$ für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

b) Der Banachraum $\ell^\infty$ ist ein Beispiel für einen nicht separablen Raum: Angenommen es existiert eine dichte Teilmenge $\{x^{(k)} \colon k \in \mathbb{N}\} \subset \ell^\infty$. Schreibe $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ und betrachte

$$y_k := \begin{cases} x_k^{(k)} + 1, & : |x_k^{(k)}| < 1, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $|y_k| \leq 2$ und damit $y := (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Aber für alle $k \in \mathbb{N}$ haben wir $|y_k - x_k^{(k)}| \geq 1$ und damit $\|y - x^{(k)}\|_\infty \geq 1$, Widerspruch zur Dichtheit von $\{x^{(k)} \colon k \in \mathbb{N}\}$.

c) Auch der Raum $L^\infty(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist ein Beispiel für einen nicht separablen Banachraum.

# 3. Lineare Operatoren: Grundbegriffe

## a) Operatoren und Spektrum

Im folgenden sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

**3.1 Beispiel** (Shift-Operatoren)**.** a) Definiere den Rechtsshift $S_R \in L(\ell^2)$ durch

$$S_R\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad y_n := \begin{cases} 0 & : n = 1, \\ x_{n-1} & : n > 1. \end{cases}$$

Dann ist $S$ stetig mit Norm 1 (sogar eine Isometrie, d.h. es gilt $\|Sx\|_2 = \|x\|_2 \quad (x \in \ell^2)$), injektiv aber nicht surjektiv. Analog ist der Linksshift

$$S_L\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

stetig mit Norm 1, surjektiv aber nicht injektiv.

b) Sei $\ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{K}) := \{x \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \|x\|_2 := (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2)^{1/2} < \infty\}$ und $S_R$ der Rechtsshift

$$S_R\big((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) := (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Dann ist $S_R$ ein Norm-Isomorphismus, d.h. $S_R$ ist bijektiv, linear, $S_R$ und $S_R^{-1}$ sind stetig, und $S_R$ ist eine Isometrie.

**3.2 Beispiel** (Ableitungsoperator)**.** a) Sei $X := C^1([0,1])$ mit Norm $\|f\|_X := \sup\{|f(t)| + |f'(t)| \colon t \in [0,1]\}$ und $Y := C([0,1])$, versehen mit der Norm $\|f\|_Y := \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| \colon t \in [0,1]\}$. Dann sind $X, Y$ Banachräume, und der Ableitungsoperator

$$T \colon X \to Y,\ f \mapsto f'$$

ist ein linearer stetiger Operator mit Norm 1.

b) Wählt man in a) für $X$ die Supremumsnorm $\|f\|_\infty$, so ist der Ableitungsoperator $T$ nicht mehr stetig, denn für $f_n(t) := t^n$ gilt $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\|Tf_n\|_\infty = n$, d.h. $\|T\| = \infty$. Jetzt ist $X$ nur noch normierter Vektorraum, aber nicht mehr vollständig.

Das letzte Beispiel (Teil b)) ist typisch: Hier ist der Definitionsbereich $D(T)$ des Operators $T$ ein linearer dichter Teilraum eines Banachraums $X$, und $T$ bildet nach $X$ ab. In diesem Sinn ist $T$ ein Operator „in“ $X$.

**3.3 Definition.** Seien $X, Y$ normierte Räume.

a) Ein linearer Operator $T \colon X \supset D(T) \to Y$ ist eine lineare Abbildung vom Definitionsbereich $D(T) \subset X$ nach $Y$, wobei $D(T)$ ein linearer Unterraum von $X$ ist. Die Menge $G(T) := \{(x, Tx) \colon x \in D(T)\}$ heißt der Graph von $T$.

b) Der Operator $T$ heißt abgeschlossen, wenn $G(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \oplus Y$ ist.

c) Der Operator $T$ heißt abschließbar, wenn es einen abgeschlossenen linearen Operator $\overline{T}$ gibt mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Der Operator $\overline{T}$ heißt Abschließung oder der Abschluss von $T$.

**3.4 Bemerkung.** a) Wie üblich bei Abbildungen, ist die Stetigkeit eines linearen Operators $T\colon X \supset D(T) \to Y$ unter Verwendung der Relativtopologie auf $D(T)$ erklärt. Damit ist $T$ genau dann stetig, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \longrightarrow 0$ gilt $Tx_n \longrightarrow 0$ (hierbei haben wir benutzt, dass eine Abbildung zwischen metrischen Räumen genau dann stetig ist, wenn sie folgenstetig ist).

b) Seien nun $X, Y$ Banachräume. Ein linearer Operator $T$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \longrightarrow x \in X$ und $Tx_n \longrightarrow y \in Y$ gilt $x \in D(T)$ und $Tx = y$.

**3.5 Lemma.** *Seien $X, Y$ Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Dann ist $T$ abgeschlossen.*

*Beweis.* Wir verwenden Bemerkung 3.4 b). Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \longrightarrow x$ in $X$ und $Tx_n \longrightarrow y$ in $Y$. Dann gilt trivialerweise $x \in D(T) = X$, und da $T$ stetig ist, folgt $Tx_n \longrightarrow Tx$, d.h. $Tx = y$. □

**3.6 Lemma.** *Seien $X, Y$ Banachräume und $T\colon X \supset D(T) \to Y$ ein linearer Operator. Dann definiert*

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y \quad (x \in D(T))$$

*eine Norm auf $D(T)$, die sog. Graphennorm. Der normierte Raum $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist genau dann ein Banachraum, wenn der Operator $T$ abgeschlossen ist.*

*Beweis.* (i) Sei $T$ abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ eine Cauchyfolge bzgl. der Norm $\|\cdot\|_T$. Dann ist nach Definition der Norm $\|\cdot\|_T$ sowohl die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_X$ als auch die Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_Y$ eine Cauchyfolge. Da $X$ und $Y$ Banachräume sind, existieren $x \in X$ und $y \in Y$ mit $\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0$ und $\|Tx_n - y\|_Y \longrightarrow 0$. Da $T$ abgeschlossen ist, folgt nach Bemerkung 3.4 b) $x \in D(T)$ und $Tx = y$. Insbesondere folgt $\|x_n - x\|_T \longrightarrow 0$. Also ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum.

(ii) Die andere Richtung der Äquivalenz zeigt man analog. □

Im folgenden schreiben wir für einen Operator $T\colon X \to X$ statt $T - \lambda\,\mathrm{id}_X$ einfach $T - \lambda$.

**3.7 Definition.** Sei $X$ ein Banachraum und $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein linearer Operator.

a) $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda\colon D(T) \to X \text{ ist bijektiv}, (T-\lambda)^{-1}\colon X \to X \text{ ist stetig}\}$ heißt die Resolventenmenge von $T$.

b) $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt das Spektrum von $T$.

c) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon T - \lambda \text{ nicht injektiv}\}$ heißt das Punktspektrum von $T$ (die Menge aller Eigenwerte von $T$).

d) $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon T - \lambda \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} = X, (T-\lambda)^{-1}\colon R(T-\lambda) \to X \text{ nicht stetig}\}$ heißt das kontinuierliche Spektrum von $T$.

e) $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon T - \lambda \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} \neq X\}$ heißt das residuelle Spektrum (oder Restspektrum) von $T$.

**3.8 Bemerkung.** a) Falls $\rho(T) \neq \emptyset$, so ist $T$ abgeschlossen. Denn $(T-\lambda)^{-1}$ ist abgeschlossen nach Lemma 3.5, und damit ist auch $T - \lambda$ abgeschlossen (wie man z.B. mit Bemerkung 3.4 b) sieht). Somit ist auch $T$ abgeschlossen (wieder mit Bemerkung 3.4 b)).

b) Nach Definition gilt

$$\mathbb{C} = \rho(T) \,\dot{\cup}\, \sigma(T) = \rho(T) \,\dot{\cup}\, \sigma_p(T) \,\dot{\cup}\, \sigma_c(T) \,\dot{\cup}\, \sigma_r(T),$$

wobei $\dot{\cup}$ die disjunkte Vereinigung bezeichnet.

Nach dem Satz vom stetigen Inversen (wird später bewiesen) folgt für abgeschlossene Operatoren $T$ aus der Bijektivität von $(T-\lambda)\colon D(T) \to X$ bereits die Stetigkeit von $(T-\lambda)^{-1}\colon X \to X$. Somit gilt für $T$ abgeschlossen

$$\begin{aligned}
\rho(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, T - \lambda\colon D(T) \to X \text{ bijektiv}\},\\
\sigma_c(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, T - \lambda\colon D(T) \to X \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} = X,\ R(T-\lambda) \neq X\}.
\end{aligned}$$

c) Falls $\dim X < \infty$, so ist $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$.

**3.9 Definition.** Sei $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein linearer Operator.

a) Für $\lambda \in \rho(T)$ heißt $R_\lambda(T) := (T-\lambda)^{-1}$ die Resolvente von $T$. Die Abbildung $\rho(T) \to L(X), \lambda \mapsto R_\lambda(T)$, heißt Resolventenabbildung.

b) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ heißt $\ker(T-\lambda)$ der geometrische Eigenraum von $T$ zu $\lambda$ und

$$\{x \in D(T) : \exists\, n \in \mathbb{N}\colon (T-\lambda)^n x = 0\}$$

der algebraische Eigenraum von $T$ zu $\lambda$.

Hierbei haben wir den Definitionsbereich für die Verknüpfung von Operatoren (insbesondere den Definitionsbereich von $(T-\lambda)^n$) auf naheliegende Weise definiert:

**3.10 Definition.** Seien $X, Y, Z$ normierte Räume. Seien ferner $S, \widetilde{S}$ lineare Operatoren von $X$ nach $Y$ und $T$ ein linearer Operator von $Y$ nach $Z$.

a) Der Operator $S + \widetilde{S}$ ist definiert durch

$$D(S+\widetilde{S}) := D(S) \cap D(\widetilde{S}) \text{ und } (S+\widetilde{S})x := Sx + \widetilde{S}x \quad (x \in D(S+\widetilde{S})).$$

b) Der Operator $TS\colon X \to Z$ ist definiert durch

$$D(TS) := \{x \in D(S)\colon Sx \in D(T)\} \text{ und } (TS)x := T(Sx) \quad (x \in D(TS)).$$

c) Wir schreiben $S \subset \widetilde{S}$, falls $D(S) \subset D(\widetilde{S})$ und $\widetilde{S}|_{D(S)} = S$ gilt.

**3.11 Beispiel.** Sei $X = \ell^2$ und $S = S_R \in L(X)$ der Rechts-Shift aus Beispiel 3.1, d.h. $S(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$. Dann ist $D(S) = \ell^2$, $\ker S = \{0\}$ und $\|e_1 - y\| \geq 1$ für alle $y \in R(S)$, wobei $e_1 := (1, 0, 0, \dots)$. Daher ist $\overline{R(S)} \neq X$ und damit $0 \in \sigma_r(S)$.

## b) Eigenschaften der Resolventenabbildung

**3.12 Lemma** (Neumannsche Reihe)**.** *Sei $X$ ein Banachraum und $T \in L(X)$ mit $\|T\| < 1$. Dann existiert $(1-T)^{-1} \in L(X)$, und es gilt $(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty T^n$ und $\|(1-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.*

*Beweis.* Es gilt

$$\sum_{n=0}^N \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^N \|T\|^n \leq \sum_{n=0}^\infty \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|},$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut. Damit existiert $S := \sum_{n=0}^\infty T^n \in L(X)$, und es gilt $\|S\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.

Es gilt $ST = TS = \sum_{n=0}^\infty T^{n+1} = S - 1$, d.h. $S(1-T) = (1-T)S = 1$ und damit $S = (1-T)^{-1}$. □

**3.13 Satz.** *Sei $X$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann ist $\rho(T)$ offen und somit $\sigma(T)$ abgeschlossen.*

*Beweis.* Falls $\rho(T) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\lambda_0 \in \rho(T)$. Es gilt

$$T - \lambda = T - \lambda_0 - (\lambda - \lambda_0) = (T - \lambda_0)\big[1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}\big].$$

Weil $T - \lambda_0$ ein abgeschlossener invertierbarer Operator ist, ist $(T - \lambda_0)^{-1}$ beschränkt, siehe Bemerkung 3.8. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| \cdot \|(T - \lambda_0)^{-1}\| < 1$ existiert

$$\big[1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}\big]^{-1} \in L(X)$$

nach Lemma 3.12. Damit existiert

$$(T - \lambda)^{-1} = \big[1 - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0)^{-1}\big]^{-1}(T - \lambda_0)^{-1} \in L(X).$$

Somit gilt

$$\Big\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda - \lambda_0| < \big\|(T - \lambda_0)^{-1}\big\|^{-1}\Big\} \subset \rho(T),$$

also ist $\rho(T)$ offen. □

**3.14 Korollar.** a) *Für $\lambda_0 \in \rho(T)$ gilt*

$$\|R_{\lambda_0}(T)\| \geq \big[\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T))\big]^{-1}.$$

b) *Für $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ gilt*

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(T)^{n+1}.$$

*Beweis.* a) folgt aus der letzten Zeile im Beweis von Satz 3.13, b) aus der Darstellung von $R_\lambda(T)$ im Beweis von Satz 3.13 und der Neumann–Reihe. □

**3.15 Satz.** *Sei $X$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T \in L(X)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer.*

*Beweis.* Hier wird nur die Kompaktheit von $\sigma(T)$ bewiesen. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ ist $T - \lambda = (-\lambda)(1 - \lambda^{-1}T)$ nach Lemma 3.12 in $L(X)$ invertierbar, d.h. $\lambda \in \rho(T)$. Also ist $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| \leq \|T\|\}$ und damit kompakt. □

**3.16 Bemerkung.** Der Beweis von $\rho(T) \neq \emptyset$ für $T \in L(X)$ verwendet die Holomorphie der Resolventenabbildung und den Satz von Liouville aus der Funktionentheorie. Dabei heißt eine Banachraum-wertige Funktion $f\colon U \to X$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, holomorph, falls für alle $z_0 \in U$ der Grenzwert $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert, wobei die Konvergenz in der Norm von $X$ zu verstehen ist. Mit Hilfe der Reihendarstellung von $R_\lambda(T)$ aus Korollar 3.14 b) kann man zeigen, dass die Resolventenabbildung eine holomorphe Abbildung von $\rho(T)$ in den Banachraum $L(X)$ ist. Wäre $\rho(T) = \mathbb{C}$, so würde aus $\|R_\lambda(T)\| \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$ und dem Satz von Liouville folgen, dass diese Abbildung unabhängig von $\lambda$ ist.

**3.17 Beispiel.** Die folgenden Beispiele zeigen, dass für unbeschränkte Operatoren sehr wohl die Fälle $\sigma(T) = \mathbb{C}$ und $\sigma(T) = \emptyset$ auftreten können.

a) Sei $X = C([0,1])$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := C^1([0,1])$. Dann ist $T$ unbeschränkt, da $\|Tf_n\| = n$ und $\|f_n\| = 1$ gilt für $f_n(t) := t^n$.

Wir zeigen, dass $T$ abgeschlossen ist: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit Konvergenzen $f_n \longrightarrow f$ in $X$ und $Tf_n = f_n' \longrightarrow g$ in $X$. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergieren, gilt $f \in C^1([0,1])$ und $f_n' \longrightarrow f'$. Somit ist $f \in D(T)$ und $g = f' = Tf$.

Weil für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion $f(t) := e^{\lambda t}$ in $\ker(T - \lambda)$ liegt, gilt gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$.

b) Sei $X := C_0([0,1]) := \{f \in C([0,1])\colon f(0) = 0\}$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := \{f \in X\colon f' \in X\}$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, und seien $f, g \in X$. Betrachte die Gleichung $(T - \lambda)f = g$, d.h. $f' - \lambda f = g$. Versehen mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ hat diese gewöhnliche Differentialgleichung die eindeutige Lösung

$$f(t) = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Es gilt $f'(0) = g(0) + \lambda f(0) = 0$, d.h. $f' \in X$ und damit $f \in D(T)$. Somit ist $T - \lambda\colon D(T) \to X$ bijektiv für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $\rho(T) = \mathbb{C}$.

Der Vergleich von a) und b) zeigt, dass eine kleine Änderung des Grundraums $X$ das Spektrum eines unbeschränkten Operators erheblich beeinflussen kann.

# 4. Dualräume und adjungierte Operatoren

## a) Hahn–Banach-Sätze

**4.1 Satz** (Fortsetzungssatz von Hahn–Banach, reelle Version)**.** *Sei $X$ ein $\mathbb{R}-$ Vektorraum und $p\colon X \to \mathbb{R}$ konvex, d.h. es gelte*

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) \quad (\alpha \in [0,1], x, y \in X).$$

*Sei ferner $L \subset X$ ein linearer Teilraum und $\lambda\colon L \to \mathbb{R}$ linear mit*

$$\lambda(x) \le p(x) \quad (x \in L).$$

*Dann existiert ein lineares $\Lambda\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\Lambda|_L = \lambda$ und $\Lambda(x) \le p(x) \quad (x \in X)$.*

*Beweis.*

### Schritt 1: Fortsetzung auf $L \oplus \mathbb{R}z$:

Sei $z \in X \setminus L$ fest gewählt, und definiere $\widetilde{L} := \operatorname{span}\{L, z\} = L \oplus \mathbb{R}z$. Wir setzen jetzt $\lambda$ auf $\widetilde{L}$ fort.

Für $y_1, y_2 \in L$ und $\alpha, \beta > 0$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned}\beta\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2) &= \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) = (\alpha+\beta)\cdot\lambda\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y_1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, y_2\Big)\\ &\le (\alpha+\beta)p\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(y_2 + \beta z)\Big)\\ &\le \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{\alpha}\,[\lambda(y_1) - p(y_1 - \alpha z)] \le \frac{1}{\beta}\,[p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)] \tag{4-1}$$

Wähle

$$\widetilde{\lambda}(z) := \alpha_0 \in \Big[\sup_{y_1 \in L,\, \alpha > 0} \frac{\lambda(y_1) - p(y_1 - \alpha z)}{\alpha},\ \inf_{y_2 \in L,\, \beta > 0} \frac{p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)}{\beta}\Big]$$

und definiere $\widetilde{\lambda}(\mu z + y) := \mu\widetilde{\lambda}(z) + \lambda(y)$ auf $\widetilde{L} = L \oplus \mathbb{R}\cdot z$.

$\widetilde{\lambda}$ ist linear auf $\widetilde{L}$ nach Definition, und es gilt

$$\widetilde{\lambda}(\mu z + y) = \mu\alpha_0 + \lambda(y) \le p(\mu z + y).$$

Denn für $\mu > 0$ gilt nach Wahl von $\alpha_0$ die Abschätzung

$$p\,(y_2 + \beta z) \ge \lambda(y_2) + \beta\alpha_0.$$

Setze nun $y_2 := y$ und $\beta := \mu$. Den Fall $\mu < 0$ sieht man analog.

**Schritt 2: Fortsetzung auf $X$:**

Sei $\mathscr{M}$ die Menge aller Abbildungen $m\colon M \to \mathbb{R}$ auf einem linearen Unterraum $M \supset L$, welche linear sind und für welche gilt $m|_L = \lambda$ und $m \le p|_M$.

Durch
$$m_1 \prec m_2 :\Longleftrightarrow M_1 \subset M_2,\ m_2|_{M_1} = m_1$$
wird $\mathscr{M}$ partiell geordnet. Sei $\{m_k\}$ eine Kette in $\mathscr{M}$. Deshalb ist dann $M := \bigcup_k M_k$ ein linearer Unterraum, und durch
$$m(x) := m_k(x) \quad (x \in M_k)$$
wird eine obere Schranke $m \in \mathscr{M}$ der Kette definiert. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element $\Lambda \in \mathscr{M}$.

Da $\Lambda$ maximal ist, ist $\Lambda$ auf ganz $X$ definiert. Sonst existierte nach Schritt 1 eine Fortsetzung auf $D(\Lambda) \oplus \mathbb{R} \cdot z$ mit $z \in X \setminus D(\Lambda)$. □

**4.2 Satz** (Hahn–Banach, komplexe Version)**.** *Sei $X$ ein $\mathbb{C}-$ Vektorraum und $p\colon X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit*
$$p(\alpha x + \beta y) \le |\alpha|\, p(x) + |\beta|\, p(y) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\alpha| + |\beta| = 1).$$
*Sei $L \subset X$ linearer Teilraum und $\lambda\colon L \to \mathbb{C}$ sei $\mathbb{C}$–linear mit $|\lambda(x)| \le p(x)$ $(x \in L)$. Dann existiert ein $\mathbb{C}$–lineares $\Lambda\colon X \to \mathbb{C}$ mit $\Lambda|_L = \lambda$ und $|\Lambda(x)| \le p(x) \quad (x \in X)$.*

*Beweis.* Setze $\ell(x) := \operatorname{Re} \lambda(x)$. Dann ist $\ell\colon X \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung mit
$$\ell(x) \le |\lambda(x)| \le p(x) \quad (x \in L).$$
Weil $\lambda$ $\mathbb{C}$–linear ist, haben wir $\ell(\mathrm{i}x) = -\operatorname{Im} \lambda(x)$, und somit ist $\lambda(x) = \ell(x) - \mathrm{i}\ell(\mathrm{i}x)$. Setze $\ell$ nach Satz 4.1 fort zu einem $\mathbb{R}-$linearen $\mathcal{L}\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{L}(x) \le p(x) \quad (x \in X)$. Dann ist
$$\Lambda(x) := \mathcal{L}(x) - \mathrm{i}\mathcal{L}(\mathrm{i}x)$$
$\mathbb{R}$–linear. Wegen
$$\Lambda(\mathrm{i}x) = \mathcal{L}(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}\mathcal{L}(-x) = \mathcal{L}(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\mathcal{L}(x) = \mathrm{i}\Lambda(x)$$
ist $\Lambda$ tatsächlich $\mathbb{C}$–linear.

Für $\theta := \arg \Lambda(x)$ gilt:
$$|\Lambda(x)| = e^{-\mathrm{i}\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-\mathrm{i}\theta}x) = \mathcal{L}(e^{-\mathrm{i}\theta}x) \le p(e^{-\mathrm{i}\theta}x) = p(x).$$
Hier wurde $\operatorname{Re}\Lambda = \mathcal{L}$ und $\Lambda(e^{-\mathrm{i}\theta}x) = |\Lambda(x)| \in \mathbb{R}$ verwendet. □

**4.3 Korollar.** *Sei $X$ normiert, $L \subset X$ linearer Teilraum und $\lambda \in L'$. Dann existiert ein $\Lambda \in X'$ mit $\|\Lambda\|_{X'} = \|\lambda\|_{L'}, \Lambda|_L = \lambda$.*

*Beweis.* Sei $p(x) := \|\lambda\|_{L'} \cdot \|x\|$. Dann ist $|\lambda(x)| \le p(x) \quad (x \in L)$.

Nach Satz 4.2 existiert eine Fortsetzung $\Lambda$ mit

$$|\Lambda(x)| \le \|\lambda\|_{L'} \cdot \|x\| \quad (x \in X),$$

d.h. $\Lambda \in X'$ und $\|\Lambda\|_{X'} \le \|\lambda\|_{L'}$. Wegen $\Lambda|_L = \lambda$ ist $\|\Lambda\|_{X'} = \|\lambda\|_{L'}$. □

**4.4 Korollar.** *Sei $X$ normiert, $x_0 \in X \setminus \{0\}$ fest. Dann existiert ein $\Lambda \in X'$ mit $\Lambda(x_0) = \|x_0\|$ und $\|\Lambda\|_{X'} = 1$.*

*Beweis.* Definiere $L := \operatorname{span}(x_0)$, $\lambda\colon L \to \mathbb{K}$, $\lambda(\alpha x_0) := |\alpha|\,\|x_0\|$, und setze nach Korollar 4.3 fort. □

**4.5 Korollar.** *Sei $X$ normiert, $M \subset X$ linearer Teilraum und $x_0 \in X$. Sei*

$$d := \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| > 0.$$

*Dann existiert ein $\Lambda \in X'$ mit $\|\Lambda\| = 1$, $\Lambda(x_0) = d$ und $\Lambda|_M = 0$.*

*Beweis.* Definiere $\lambda$ auf $L := M \oplus \operatorname{span}(x_0)$ durch $\lambda(y + \alpha x_0) := \alpha d$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\lambda\|_{L'} &= \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{K} \\ y \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0 \ne \alpha \in \mathbb{K} \\ y \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|} \\
&= \sup_{\substack{0 \ne \alpha \in \mathbb{K} \\ z \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|-\alpha z + \alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0 \ne \alpha \in \mathbb{K} \\ z \in M}} \frac{d}{\|x_0 - z\|} = \frac{d}{\inf_{z \in M} \|x_0 - z\|} = \frac{d}{d} = 1.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Korollar 4.3. □

## b) Dualräume und Reflexivität, adjungierte Operatoren

**4.6 Satz.** *Seien $X$ normierter Raum und $Y$ Banachraum. Dann ist $L(X, Y)$ Banachraum. Insbesondere ist $X'$ Banachraum.*

*Beweis.* Nur die Vollständigkeit ist nichttrivial. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L(X,Y)$. Dann ist $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $Y$ für jedes $x \in X$, wie man sich überlegt. Aus den Analysisvorlesungen ist bekannt, dass Cauchyfolgen in normierten Räumen beschränkte Folgen sind, also existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit $\|A_n\| \le C$ für jedes $n$.

Setze $Ax := \lim_n A_n x \in Y$. Dann ist $A$ offensichtlich linear. Wegen

$$\|Ax\|_Y = \lim_n \|A_n x\|_Y \le \lim_n \|A_n\| \cdot \|x\|_X \le C\,\|x\|_X$$

ist $A \in L(X,Y)$. Da $\|(A-A_n)x\|_Y = \lim_{m\to\infty} \|(A_m - A_n)x\|_Y$, erhalten wir

$$\|A - A_n\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A-A_n)x\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\neq 0} \lim_{m\to\infty} \frac{\|(A_m-A_n)x\|_Y}{\|x\|_X} \le \lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\| < \varepsilon$$

für $n \ge n_0$, d.h. es gilt $A_n \longrightarrow A$ in $L(X,Y)$. □

**4.7 Lemma.** *Sei $X$ ein normierter Raum. Die Abbildung $X \to X''$, $x \mapsto \widetilde{x}$ mit*

$$\widetilde{x}(\lambda) := \lambda(x) \quad (\lambda \in X')$$

*ist linear und isometrisch.*

*Beweis.* Es gilt

$$(\widetilde{\alpha x + \beta y})(\lambda) = \lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda(x) + \beta\lambda(y) = \alpha\widetilde{x}(\lambda) + \beta\widetilde{y}(\lambda),$$

d.h. die Abbildung $x \mapsto \widetilde{x}$ ist linear. Weiter ist

$$\|\widetilde{x}\|_{X''} = \sup_{\|\lambda\|\le 1} |\widetilde{x}(\lambda)| = \sup_{\|\lambda\|\le 1} |\lambda(x)| \le \sup_{\|\lambda\|\le 1} \|\lambda\| \cdot \|x\|_X \le \|x\|_X\,.$$

Nach Lemma 4.4 existiert zu jedem $x \in X$ ein $\lambda_0 \in X'$ mit $\|\lambda_0\|_{X'} = 1$ und $\lambda_0(x) = \|x\|_X$. Damit gilt $\|\widetilde{x}\|_{X''} = \sup_{\|\lambda\|_{X'}\le 1} |\lambda(x)| \ge |\lambda_0(x)| = \|x\|_X$. □

**4.8 Definition.** Ein normierter Raum $X$ heißt reflexiv, falls die kanonische Einbettung $X \hookrightarrow X''$ aus Lemma 4.7 surjektiv ist.

**4.9 Beispiele.** a) Jeder Hilbertraum ist reflexiv nach dem Satz von Riesz.

b) Sei $1 < p < \infty$ und $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Nach einem Satz von Riesz ist die Abbildung

$$T\colon L^q(\mu) \to (L^p(\mu))', \quad (Tg)(f) := \int fg\,d\mu \tag{4-2}$$

ein isometrischer Isomorphismus von Banachräumen, wobei $q \in (1, \infty)$ definiert ist durch $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Damit ist $L^p(\mu)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv.

[[Sei $\Lambda \in (L^p(\mu))''$. Definiere das Funktional $\Lambda_1 := \Lambda \circ T \in (L^q(\mu))'$. Nach dem Satz von Riesz, angewendet auf den Raum $(L^q(\mu))'$, existiert genau eine Funktion $h \in L^p(\mu)$, so dass für alle $g \in L^q(\mu)$ der Wert $\Lambda_1(g)$ gegeben ist durch

$$\Lambda_1(g) = \int g \cdot h \, \mathrm{d}\mu. \tag{4-3}$$

Somit gilt für jedes $\lambda \in (L^p(\mu))'$

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda) &= \Lambda_1(T^{-1}\lambda) && \Big|\quad \Lambda = \Lambda_1 \circ T^{-1} \\ &= \int (T^{-1}\lambda) \cdot h \, \mathrm{d}\mu && \Big|\quad \text{wegen (4-3)} \\ &= \lambda(h) && \Big|\quad \text{wegen (4-2)} \\ &= \widetilde{h}(\lambda). \end{aligned}$$

Wir haben gesehen, dass $\Lambda = \widetilde{h}$ gilt, d.h. dass die Abbildung $h \mapsto \widetilde{h},\ X \to X''$, surjektiv ist. Die $L^p(\mu)$-Räume sind für $1 < p < \infty$ also reflexiv.]]

c) In der Situation von b) gilt die Isomorphie $\big(L^1(\mu)\big)' \equiv L^\infty(\mu)$, aber andererseits $L^1(\mu) \subsetneq \big(L^\infty(\mu)\big)'$, d.h. $L^1(\mu)$ ist nicht reflexiv. Diese Aussage wird nicht bewiesen.

**4.10 Definition und Satz** (Adjungierte beschränkter Operatoren). *Seien $X, Y$ Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Für jedes $f \in Y'$ wird durch $f_1(x) := f(Tx)$ ein beschränktes lineares Funktional $f_1 \in X'$ definiert. Die Abbildung $T' : Y' \to X',\ f \mapsto f_1$ heißt (Banachraum-)adjungierter Operator zu $T$. Es gilt $T' \in L(Y', X')$. Die Abbildung $T \mapsto T',\ L(X, Y) \to L(Y', X')$ ist eine Isometrie.*

*Wenn wir für die Anwendung eines Funktionals $S \in U'$ auf ein Element $u$ eine Banachraums $U$ die alternative Schreibweise $\langle u, S\rangle_{U \times U'} := S(u)$ vereinbaren, dann wird die Identität $f(Tx) = f_1(x)$ zu*

$$\langle Tx, f\rangle_{Y \times Y'} = \langle x, T'f\rangle_{X \times X'} .$$

*Beweis.* Wegen $f_1 = f \circ T$ ist die Linearität und die Stetigkeit von $f_1$ klar. Wegen

$$|f_1(x)| = |f(Tx)| \le \|f\|_{Y'} \cdot \|T\| \cdot \|x\| , \qquad x \in X,$$

ist $\|f_1\|_{X'} \le \|T\| \cdot \|f\|_{Y'}$, d.h. $\|T'\| \le \|T\|$. Der Operator $T'$ ist linear wegen

$$T'(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(Tx) = \alpha f(Tx) + \beta g(Tx).$$

Ebenso ist die Abbildung $T \mapsto T'$ linear.

Zu zeigen ist noch, dass $\|T\| \le \|T'\|$ gilt. Nach Lemma 4.4 a) existiert zu $x \in X$ ein $f_x \in Y'$ mit $\|f_x\|_{Y'} = 1$ und $f_x(Tx) = \|Tx\|_Y$. Damit ist

$$\|Tx\|_Y = |f_x(Tx)| = |(T'f_x)(x)| \le \|T'\| \cdot \|x\|_X .$$

□

**4.11 Bemerkung.** a) Für $T \in L(X, Y)$ ist $T'' \in L(X'', Y'')$ und $T''|_X = T$. Denn es gilt $(T''\widetilde{x})(f) = \widetilde{x}(T'f) = (T'f)(x) = f(Tx) = \widetilde{Tx}(f)$. In der alternativen Schreibweise lautet diese Rechnung

$$\langle f, T''\widetilde{x}\rangle_{Y'\times Y''} = \langle T'f, \widetilde{x}\rangle_{X'\times X''} = \langle x, T'f\rangle_{X\times X'} = \langle Tx, f\rangle_{Y\times Y'} = \left\langle f, \widetilde{Tx}\right\rangle_{Y'\times Y''},$$

also tatsächlich $T''\widetilde{x} = \widetilde{Tx}$ für jedes $x \in X$, wie behauptet.

b) Falls $T \in L(X, Y)$ und $S \in L(Y, Z)$, so ist $(ST)' = T'S'$. Denn $((ST)'f)(x) = f(STx) = (S'f)(Tx) = [T'(S'f)](x)$, beziehungsweise

$$\langle x, (ST)'f\rangle_{X\times X'} = \langle STx, f\rangle_{Z\times Z'} = \langle Tx, S'f\rangle_{Y\times Y'} = \langle x, T'S'f\rangle_{X\times X'},$$

also $(ST)'f = T'S'f$ für jedes $f \in Z'$.

c) Falls $T \in L(X, Y)$ invertierbar ist, so gilt $(T^{-1})' = (T')^{-1}$. Dies gilt wegen $(T^{-1})'T' = (TT^{-1})' = \mathrm{id}_Y' = \mathrm{id}_{Y'}$ und $(T'(T^{-1}))' = (T^{-1}T)' = \mathrm{id}_X' = \mathrm{id}_{X'}$.

**4.12 Definition** (Adjungierte unbeschränkter Operatoren)**.** Seien $X, Y$ Banachräume und $T\colon X \to Y$ ein linearer dicht definierter Operator (d.h. $\overline{D(T)} = X$). Definiere

$$D(T') := \{f \in Y' \colon \exists\, f_1 \in X' \text{ mit } f(Tx) = f_1(x) \quad (x \in D(T))\}$$

und

$$T'f := f_1 \quad (f \in D(T')).$$

Kurz kann man auch schreiben: $D(T') = \{f \in Y' \colon x \mapsto f(Tx) \in X'\}$. Die Abbildung $T'\colon Y' \to X'$ mit Definitionsbereich $D(T')$ heißt (Banachraum-)Adjungierte von $T$.

**4.13 Bemerkung.** a) $T'f$ ist eindeutig definiert. Denn seien $f_1, f_2 \in X'$ mit $f_1(x) = f(Tx) = f_2(x) \quad (x \in D(T))$. Da $\overline{D(T)} = X$ und $f_1, f_2$ stetig sind, folgt $f_1 = f_2$ auf ganz $X$. Aus der Eindeutigkeit von $T'f$ folgt dann auch die Linearität von $T'$.

b) Es gilt $(f, g) \in G(T')$ genau dann, wenn $g(x) = f(Tx)$ $(x \in D(T))$.

c) Der Operator $T'$ ist abgeschlossen. Denn sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T')$ mit Konvergenzen $f_n \longrightarrow f$ in $Y'$ und $T'f_n \longrightarrow g$ in $X'$. Dann gilt für $x \in D(T)$:

$$f(Tx) = \lim_{n\to\infty} f_n(Tx) = \lim_{n\to\infty} (T'f_n)(x) = g(x).$$

Damit haben wir $f \in D(T')$ und $(f, g) \in G(T')$ nach b).

Hilberträume sind Spezialfälle von Banachräumen, daher übertragen sich die obigen Definitionen auch auf Hilberträume. Man verwendet aber meistens den Begriff der Hilbertraum-Adjungierten. Grundlage dafür ist die Beschreibung des Dualraums durch den Satz von Riesz (Satz 2.31).

**4.14 Definition und Satz.** *Seien $X, Y$ Hilberträume, und $T \in L(X, Y)$. Dann existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x^* \in X$ mit*

$$\langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, x^*\rangle \quad (x \in X).$$

*Setze $T^*y := x^*$. Die Abbildung $T^* \in L(Y, X)$ heißt (Hilbertraum-)Adjungierte zu $T$.*

*Beweis.* Das folgt sofort aus Satz 4.10 und dem Satz von Riesz. Man beachte, dass die Abbildung aus dem Satz von Riesz

$$i_X\colon X \to X',\ x \mapsto \langle \cdot, x\rangle$$

isometrisch aber konjugiert linear ist. Damit hängen Hilbertraum- und Banachraum-adjungierte über $T^* = i_X^{-1} \circ T' \circ i_Y$ zusammen. □

**4.15 Definition.** Seien $X, Y$ Hilberträume und $T\colon X \to Y$ ein linearer dicht definierter Operator. Definiere

$$D(T^*) := \{y \in Y\colon\ x \mapsto \langle Tx, y\rangle \text{ ist stetiges lineares Funktional auf } D(T)\}.$$

Für $y \in D(T^*)$ existiert ein eindeutiges $x^* \in X$ mit

$$\langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, x^*\rangle_X \quad (x \in D(T)).$$

Definiere $T^*\colon Y \to X$ durch $T^*y := x^* \quad (y \in D(T^*))$. Der Operator $T^*$ heißt (Hilbertraum-)Adjungierte von $T$.

**4.16 Definition.** a) Seien $X, Y$ Hilberträume und $T \in L(X, Y)$. Dann heißt $T$ unitär, falls $TT^* = \mathrm{id}_Y$ und $T^*T = \mathrm{id}_X$ gilt.

b) Sei $X$ ein Hilbertraum und $T$ ein linearer dicht definierter Operator in $X$. Dann heißt $T$

(i) selbstadjungiert, falls $T = T^*$,

(ii) normal, falls $TT^* = T^*T$,

(iii) wesentlich selbstadjungiert, falls $T$ abschließbar ist und $\overline{T}$ selbstadjungiert ist,

(iv) symmetrisch, falls $T \subset T^*$ gilt.

Bei dieser Definition ist zu beachten, dass zwei Operatoren genau dann gleich sind, falls sie gleiche Definitionsbereiche haben und darauf gleiche Werte annehmen.

# 5. Distributionen und Sobolevräume

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist es oftmals sinnvoll, den Begriff der bekannten klassischen Differenzierbarkeit aufzulockern. Dies ermöglicht es etwa, Lösungsbegriffe zu definieren, die zwar schwächer sind als bereits bekannte, trotzdem aber für viele Anwendungen ausreichend sind. Die Theorie der Distributionen stellt nun Begriffsbildungen zur Verfügung, die es uns im Folgenden erlauben werden gewisse Sachverhalte elegant zu beschreiben. Insbesondere werden wir in der Lage sein, der Diracschen $\delta$-„Funktion“ einen präzisen Sinn zu geben. Dies wiederum wird von großer Wichtigkeit für die darauf folgende Potentialtheorie sein. Zu erwähnen ist, dass der Name „Distributionen“ von Laurent Schwartz eingeführt wurde.

## a) Distributionen

**5.1 Definition.** Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen.

a) Für eine Funktion $\varphi\colon G \to \mathbb{C}$ heißt $\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x \in G\colon \varphi(x) \neq 0\}}$ der Träger von $\varphi$.

b) Die Menge $C_0^\infty(G) := \{\varphi \in C^\infty(G)\colon \operatorname{supp}\varphi \subset G, \operatorname{supp}\varphi \text{ kompakt}\}$ heißt die Menge der Testfunktionen auf $G$ (oder die Menge der $C^\infty$-Funktionen mit kompaktem Träger). Manchmal sieht man auch die Bezeichnung $C_c^\infty(G) := C_0^\infty(G)$.

c) Wir schreiben $K \Subset G$, falls $K$ eine kompakte Teilmenge von $G$ ist. Sei nun $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(G)$, dann definieren wir die Konvergenz wie folgt:

$$\varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0 :\Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & \exists K \Subset G\colon \forall \ell \in \mathbb{N}\colon \operatorname{supp}\varphi_\ell \subset K \\ (ii) & \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\colon \sup\limits_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi_\ell(x)| \longrightarrow 0 \text{ für } \ell \longrightarrow \infty \end{cases}$$

Versieht man den Raum der Testfunktionen mit der zu dieser Konvergenz gehörenden Topologie, so schreibt man $\mathscr{D}(G)$. Dies bedeutet, dass $C_0^\infty(G)$ mit der feinsten Topologie ausgestattet wird, für die folgendes gilt: eine Folge $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(G)$ konvergiert genau dann nach Null, wenn es für jede Nullumgebung $U$ ein $N_0(U)$ gibt, sodass $\varphi_\ell \in U$ für jedes $\ell \geq N_0(U)$.

In obiger Definition wurde die praktische Multiindex-Schreibweise verwendet.

**5.2 Definition** (Multiindex-Schreibweise)**.** Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann definieren wir

$$x\xi := \sum_{j=1}^n x_j \xi_j,$$

$$|x| := \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{1/2},$$
$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n},$$
$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Für $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(x).$$

**5.3 Bemerkung.** a) Eine Topologie für $\mathscr{D}(G)$, zu welcher obiger Konvergenzbegriff gehört, lässt sich als lokalkonvexe Topologie definieren. Die Definition der zur lokalkonvexen Topologie zugehörigen Familie von Halbnormen ist jedoch relativ kompliziert, was an Bedingung (i) in obiger Definition liegt.

b) Es existieren ausreichend viele Testfunktionen; ein Beispiel für eine Testfunktion wird in den Übungen konstruiert. Tatsächlich liegen die Testfunktionen sogar dicht in $L^p(G)$ für $1 \le p < \infty$ (aber nicht im $L^\infty(G)$). Der Beweis dieser Aussage verwendet etwa den sogenannten Friedrichsschen Glättungsoperator.

Da die Menge der Testfunktionen offensichtlich einen $\mathbb{C}$-Vektorraum bildet, sind wir in der Lage, die Menge der linearen Funktionale, d.h. der linearen Abbildungen $T\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}$, zu betrachten. Eine stetige lineare Abbildung heißt eine Distribution auf $G$. Dabei entspricht die obige Topologie auf $\mathscr{D}(G)$ der Stetigkeit in folgender Definition.

**5.4 Definition.** $\mathscr{D}'(G)$ bezeichnet die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathscr{D}(G)$ nach $\mathbb{C}$, welche stetig sind. Es gilt:

$$f \in \mathscr{D}'(G) :\Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & f\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C} \text{ linear, und} \\ (ii) & \text{für } (\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(G) \text{ mit } \varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0 \text{ gilt} \\ & f(\varphi_\ell) \longrightarrow 0 \text{ für } \ell \longrightarrow \infty. \end{cases}$$

$\mathscr{D}'(G)$ heißt Menge der Distributionen von $G$.

**5.5 Beispiel** (reguläre Distributionen)**.** Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(G) := \{u\colon G \to \mathbb{C}\colon \forall K \subset G,$ $K$ kompakt: $u|_K \in L^1(K)\}$. Dann definiert

$$[u]\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi \mapsto [u](\varphi) := \int_G u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Distribution, denn

(*i*) $[u]$ ist offensichtlich linear.

(*ii*) Sei $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{D}(G)$ mit $\varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0$ für $\ell \longrightarrow \infty$, dann folgt:

$$|[u]\varphi_\ell| \leq \int_G |u\varphi_\ell| \, \mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^1(K)} \cdot \sup_{x\in K} |\varphi_\ell(x)| \longrightarrow 0$$

für $\ell \longrightarrow \infty$ und ein passendes $K \Subset G$. In diesem Zusammenhang spricht man auch davon, dass $[u]$ eine von $u$ erzeugte Distribution ist. Eine von einer $L^1_{\mathrm{loc}}$-Funktion erzeugte Distribution heißt *reguläre* Distribution.

**5.6 Beispiel** (Dirac-Distribution)**.** Ein Beispiel für eine nicht-reguläre Distribution ist die sog. Dirac-Distribution (Diracsche „Deltafunktion"). Sei $x_0 \in G$ fest.

$$\delta_{x_0} \colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi \mapsto \delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0)$$

(*i*) Linearität ist klar.

(*ii*) Sei $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{D}(G)$ mit $\varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0$ für $\ell \longrightarrow \infty$, dann folgt:

$$|\delta_{x_0}(\varphi_\ell)| = |\varphi_\ell(x_0)| \leq \sup_{x\in K} |\varphi_\ell(x)| \longrightarrow 0$$

für $\ell \longrightarrow \infty$ und ein $K \Subset G$.

(*iii*) $\delta_{x_0}$ ist nicht regulär
Beweis: Sei angenommen, dass ein $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$ existiert, so dass für alle $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ gilt

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \int_G u(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Es gibt nun sicher ein $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset G$ und $\int_{B(x_0,\varepsilon)} |u(x)| \, \mathrm{d}x < 1$ gilt. Weiter finden wir eine Testfunktion $\varphi$, für die einerseits $\operatorname{supp} \varphi \subset B(x_0, \varepsilon)$ und andererseits $\forall x \in G \colon \varphi(x_0) \geq \varphi(x) \geq 0$ sowie $\varphi(x_0) > 0$ gilt. Damit ergibt sich dann aber

$$\begin{aligned}\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = |\varphi(x_0)| = \left| \int_G u(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x \right| &\leq \varphi(x_0) \int_{B(x_0,\varepsilon)} |u(x)| \, \mathrm{d}x \\ &< \varphi(x_0),\end{aligned}$$

was im Widerspruch zur Annahme steht.

Wie zu Anfang dieses Kapitels bereits erwähnt wurde, haben wir das Ziel, den klassischen Ableitungsbegriff aufzulockern oder zu verallgemeinern. Das bedeutet aber, dass sich dieser Ableitungsbegriff bei klassisch differenzierbaren Funktionen nicht von dem klassischen Begriff unterscheiden sollte. Es sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $[f]$

die von $f$ erzeugte reguläre Distribution. Offenbar gilt dann für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$

$$[\partial^\alpha f](\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)\varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f \partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}[f](\partial^\alpha \varphi).$$

Dies motiviert die folgende

**5.7 Definition.** Für beliebiges $f \in \mathscr{D}'(G)$ sei für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\partial^\alpha f \colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \varphi).$$

$\partial^\alpha f$ heißt Ableitung der Distribution $f$ vom Grad $|\alpha|$.

Es ist klar, dass $\partial^\alpha f \in \mathscr{D}'(G)$ ist, da mit $\varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0$ auch $\partial^\alpha \varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0$ gilt. Also ist jede Distribution beliebig oft differenzierbar.

**5.8 Beispiele.** Sei $x_0 \in G := \mathbb{R}$ und

$$h_{x_0}(x) := \begin{cases} 1 & : x \geq x_0, \\ 0 & : x < x_0 \end{cases}$$

für $x \in G$, dann gilt $[h_{x_0}]' = \delta_{x_0}$.
Ist $\varphi \in C_0^\infty(G)$, so folgt:

$$[h_{x_0}]'(\varphi) = -\int_a^b h_{x_0}(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^b \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(x_0) = \delta_{x_0}(\varphi).$$

## b) Sobolevräume: Definition und erste Eigenschaften

Im folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $1 \leq p < \infty$.

Für eine Distribution $u \in \mathscr{D}'(G)$ und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ schreiben wir

$$\partial^\alpha u \in L^p(G),$$

falls eine Funktion $f \in L^p(G)$ existiert mit $\partial^\alpha u = [f]$ in $\mathscr{D}'(G)$. Hier ist $[f]$ wieder die zu $f$ gehörige reguläre Distribution.

**5.9 Definition** (Sobolevräume)**.** a) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere

$$W^{s,p}(G) := \{u \in \mathscr{D}'(G) \colon \partial^\alpha u \in L^p(G) \quad (0 \leq |\alpha| \leq s)\}.$$

Als Norm in $W^{s,p}(G)$ definiert man

$$\|u\|_{W^{s,p}(G)} := \|u\|_{s,p,G} := \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(G)}^p \right)^{1/p}.$$

b) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere $H^{s,p}(G)$ als die Vervollständigung von $\{u \in C^s(G)\colon \|u\|_{s,p,G} < \infty\}$. Im Falle $p = 2$ schreiben wir auch $H^s(G)$ statt $H^{s,2}(G)$.

c) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere $H_0^{s,p}(G)$ als den Abschluss von $C_0^\infty(G)$ im Raum $H^{s,p}(G)$.

**5.10 Bemerkung.** a) In der Definition von $W^{s,p}(G)$ wird insbesondere $u \in L^p(G)$ gefordert. Daher kann man auch schreiben

$$W^{s,p}(G) = \{u \in L^p(G)\colon \partial^\alpha u \in L^p(G) \quad (0 \le |\alpha| \le s)\}.$$

b) Die Vervollständigung eines metrischen Raums kann abstrakt definiert werden. Im Fall von $H^{s,p}(G)$ ist aber wegen $\|\cdot\|_{L^p(G)} \le \|\cdot\|_{s,p,G}$ offensichtlich $H^{s,p}(G) \subset L^p(G)$, d.h. ein Element der abstrakten Vervollständigung kann mit einer Funktion in $L^p(G)$ identifiziert werden.

c) Im Fall $p = 2$ erhält man das Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{H^s(G)} := \sum_{|\alpha| \le s} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L^2(G)}\,.$$

**5.11 Lemma.** *Die Räume $H^{s,p}(G)$ und $W^{s,p}(G)$ sind Banachräume.*

*Beweis.* Der Raum $H^{s,p}(G)$ ist als Vervollständigung eines normierten Raumes konstruktionsgemäß ein Banachraum. Sei also $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset W^{s,p}(G)$ eine Cauchyfolge. Nach Definition der Norm ist für $0 \le |\alpha| \le s$ auch $(\partial^\alpha u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset L^p(G)$ eine Cauchyfolge, daher existiert ein $u_\alpha \in L^p(G)$ mit $\partial^\alpha u_\ell \longrightarrow u_\alpha$ in $L^p(G)$. Setze $u := u_{(0,\dots,0)}$.

Für die zugehörigen regulären Distributionen gilt mit der Hölder-Ungleichung für alle $\varphi \in \mathscr{D}(G)$

$$\begin{aligned}|[\partial^\alpha u_\ell](\varphi) - [u_\alpha](\varphi)| &= \left|\int_G (\partial^\alpha u_\ell - u_\alpha)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \|\partial^\alpha u_\ell - u_\alpha\|_{L^p(G)} \cdot \|\varphi\|_{L^q(G)} \longrightarrow 0 \quad (\ell \longrightarrow \infty),\end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Also gilt

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha[u])(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}[u](\partial^\alpha\varphi) = \lim_{\ell\to\infty}(-1)^{|\alpha|}[u_\ell](\partial^\alpha\varphi) = \lim_{\ell\to\infty}[\partial^\alpha u_\ell](\varphi) \\ &= \lim_{\ell\to\infty}[\partial^\alpha u_\ell](\varphi) = [u_\alpha](\varphi)\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(G)$. Somit ist $\partial^\alpha u = u_\alpha$ in $\mathscr{D}'(G)$, d.h. $u \in W^{s,p}(G)$.

Es folgt

$$\|u_\ell - u\|_{s,p,G}^p \le \sum_{0\le|\alpha|\le s} \|\partial^\alpha u_\ell - \partial^\alpha u\|_{L^p(G)}^p \longrightarrow 0 \quad (\ell \longrightarrow \infty),$$

also haben wir $u_\ell \longrightarrow u$ in $W^{s,p}(G)$, und $W^{s,p}(G)$ ist ein Banachraum. □

**5.12 Lemma.** *Für $1 \le p < \infty$ und $s \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$H^{s,p}(G) \subset W^{s,p}(G).$$

*Beweis.* Sei $u \in H^{s,p}(G)$ und $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C^s(G)$ eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_{s,p,G}$, welche gegen $u$ konvergiert. Nach Definition der $\|\cdot\|_{s,p,G}$-Norm gilt wieder $\partial^\alpha u_\ell \longrightarrow u_\alpha$ mit $u_\alpha \in L^p(G)$. Wie im letzten Beweis sieht man $\partial^\alpha u = u_\alpha$ in $\mathscr{D}'(G)$ und damit $u \in W^{s,p}(G)$. □

Tatsächlich sind die beiden Definitionen von Sobolevräumen für allgemeine Gebiete äquivalent. Der folgende Satz wurde erst 1964 bewiesen (während die ersten Definitionen bereits 1938 formuliert wurden).

**5.13 Satz.** *Für $1 \le p < \infty$ und $s \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$W^{s,p}(G) = H^{s,p}(G).$$

*Beweisskizze.* Wir müssen nur noch $W^{s,p}(G) \subset H^{s,p}(G)$ zeigen, d.h. zu zeigen ist, dass $C^m(G) \cap H^{s,p}(G)$ dicht in $W^{s,p}(G)$ liegt. Unter Verwendung des Friedrichsschen Glättungsoperators kann man sogar zeigen, dass

$$\{\varphi \in C^\infty(G) \colon \ \|\varphi\|_{s,p,G} < \infty\}$$

dicht in $W^{s,p}(G)$ liegt. Dies geschieht über eine kompakte Ausschöpfung von $G$ und eine zugehörige Partition der Eins. Die Details sind z.B. im Buch von Adams [1] beschrieben. □

Die Räume $H^{s,p}(G)$ und $W^{s,p}(G)$ sind typische Sobolevräume, benannt nach Sergei L'vovich Sobolev (6.10.1908 – 3.1.1980). Wir gehen jetzt noch kurz auf den Raum $H_0^{s,p}(G)$ ein, wobei wir uns auf $p = 2$ beschränken. Im folgenden bezeichne

$$\langle u, v \rangle_2 := \int_G u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$$

das $L^2$-Skalarprodukt. Für vektorwertige Abbildungen $F, G \in L^2(G)^n := L^2(G; \mathbb{C}^n)$ wird ebenfalls die Bezeichnung

$$\langle F, G \rangle_2 := \int_G \sum_{i=1}^n F_i(x)\overline{G_i(x)}\,\mathrm{d}x$$

verwendet. Für $F \in C^1(G)^n$ war $\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_i$ die Divergenz.

Analog zur Definition von $W^{s,p}(G)$ betrachtet man

$$W_0^{1,2}(G) := \big\{u \in H^{1,2}(G) \colon \forall F \in (L^2(G))^n,\ \operatorname{div} F \in L^2(G) \colon$$

$$\langle u, \operatorname{div} F\rangle_2 = -\langle \nabla u, F\rangle_2\} .$$

Der Raum $W_0^{1,2}(G)$ verallgemeinert die Bedingung $u|_{\partial G} = 0$. Ist nämlich $\partial G$ glatt und $u$ ebenfalls glatt, so können wir zunächst

$$0 = \int_G u \overline{\operatorname{div} F} \,\mathrm{d}x + \int_G \nabla u \overline{F} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial G} u \left\langle \vec{n}, \overline{F} \,\mathrm{d}S(x)\right\rangle \quad (F \in C^1(\overline{G}))$$

und somit $u|_{\partial G} = 0$ schließen.

**5.14 Satz.** *Es gilt $H_0^{1,2}(G) = W_0^{1,2}(G)$.*

[[ *Beweis:*

Schritt 1: $H_0^{1,2}(G) \subset W_0^{1,2}(G)$:

Zu $u \in H_0^{1,2}(G)$ existiert nach Definition eine Folge $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(G)$ mit $u_\ell \longrightarrow u$ bezüglich der $H^{1,2}$-Norm. Es ergibt sich für alle $F \in (L^2(G))^n$ mit $\operatorname{div} F \in L^2(G)$:

$$\langle u, \operatorname{div} F\rangle_2 = \lim_{\ell\to\infty} \langle u_\ell, \operatorname{div} F\rangle_2 = -\lim_{\ell\to\infty} \langle \nabla u_\ell, F\rangle_2 = -\langle \nabla u, F\rangle_2 \,,$$

d.h. es gilt $u \in W_0^{1,2}(G)$. Hier wurde die Hölder-Ungleichung für $p = 2$ in der Form

$$|\langle (u - u_\ell), \operatorname{div} F\rangle_2| \le \|u - u_\ell\|_{L^2} \cdot \|\operatorname{div} F\|_{L^2}$$

verwendet.

Schritt 2: $W_0^{1,2}(G) \subset H_0^{1,2}(G)$:

Zunächst ist offensichtlich, dass $W_0^{1,2}(G)$ ein Hilbertraum mit dem $H^{1,2}$-Skalarprodukt ist. Weiter ist nun $H_0^{1,2}(G)$ ein abgeschlossener Unterraum. Wir werden zeigen, dass das orthogonale Komplement

$$\left(H_0^{1,2}(G)\right)^\perp := \{u \in W_0^{1,2}(G) \colon\; \langle u, \varphi\rangle_{W^{1,2}(G)} = 0 \quad (\varphi \in H_0^{1,2}(G))\}$$

nur die Nullfunktion enthält. Da der Raum $W_0^{1,2}(G)$ in der Form $W_0^{1,2}(G) = H_0^{1,2}(G) \oplus \left(H_0^{1,2}(G)\right)^\perp$ direkt zerlegt werden kann (hierfür benutzen wir die Abgeschlossenheit von $H_0^{1,2}(G)$ als Unterraum von $W_0^{1,2}(G)$), folgt daraus die Behauptung.

Sei also $u \in \left(H_0^{1,2}(G)\right)^\perp$. Offenbar gilt dann für alle $\varphi \in \mathscr{D}(G) \subset H_0^{1,2}(G)$

$$\langle u, \varphi\rangle_{W^{1,2}(G)} = \langle u, \varphi\rangle_2 + \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle_2 = 0.$$

Damit gilt

$$(\Delta[u])(\varphi) = \operatorname{div}[\nabla u](\varphi) = -\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle = [u](\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(G)),$$

d.h. $\Delta u = u \in L^2(G)$. Daraus folgt nun wiederum

$$0 \le \|u\|_2^2 = \langle u, u\rangle_2 = \langle u, \Delta u\rangle_2 = -\langle \nabla u, \nabla u\rangle_2 = -\|\nabla u\|^2 \le 0$$

also $u = 0$, und das war zu zeigen. ]]

## c) Wichtige Sätze aus der Theorie der Sobolevräume

Die folgenden Ergebnisse aus der Theorie der Sobolevräume werden nicht bewiesen.

**5.15 Satz** (Sobolevscher Einbettungssatz)**.** *Seien $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$, und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein $C^1$-Gebiet.*

*Falls $s > \frac{n}{p} + k$, dann gilt*

$$W^{s,p}(G) \hookrightarrow C_b^k(G).$$

*Insbesondere existiert ein $C > 0$, so dass für alle $u \in W^{s,p}(G)$ die Abschätzung*

$$\|u\|_{C_b^k G)} \leq C \, \|u\|_{W^{s,p}(G)}$$

*gilt.*

**5.16 Definition.** Seien $X$ und $Y$ normierte Räume und $K \colon X \longrightarrow Y$ eine (nicht unbedingt lineare) Abbildung. Man spricht davon, dass $K$ kompakt ist, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$, welche dort beschränkt ist, gilt: $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt in $Y$ eine konvergente Teilfolge.

**5.17 Definition.** Sei $G \subset \mathbb{R}^n$.

($i$) Für eine beliebige Indexmenge $I$ sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $G$. Sie heißt lokal-endlich, falls gilt:

$$\forall x \in G \colon \exists \varepsilon > 0 \colon \#\{U_i \colon U_i \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset, i \in I\} < \infty$$

($ii$) $G$ besitzt die Segmenteigenschaft genau dann, wenn es eine lokal endliche offene Überdeckung $\{U_i, i \in I\}$ des Randes $\partial G$ mit

$$\forall i \in I \colon \exists \xi_i \in \mathbb{R}^d \colon \forall x \in U_i \cap \overline{G} \;\; \forall t \in (0,1) \colon x + t\xi_i \in G$$

gibt.

**5.18 Satz** (Rellich–Kondrachov)**.** *a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $1 \leq p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Einbettung*

$$W_0^{m,p}(G) \hookrightarrow L^p(G)$$

*kompakt.*

*b) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, welches die Segmenteigenschaft besitzt. Für $1 \leq p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$ ist die Einbettung*

$$W^{m,p}(G) \hookrightarrow L^p(G)$$

*kompakt.*

*c) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, welches die Segmenteigenschaft besitzt. Für $1 \le p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $mp > d$ ist die Einbettung*

$$W^{m,p}(G) \hookrightarrow C_b(\overline{G})$$

*kompakt.*

Die folgende Ungleichung ist sehr wichtig, um Abschätzungen beweisen zu können.

**5.19 Satz** (Erste Poincarésche Ungleichung). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, welches in eine Richtung beschränkt ist. Dann existiert eine Konstante $b > 0$ so, dass*

$$\|u\|_{L^2(G)} \le b\,\|\nabla u\|_{L^2(G)^n} \quad (u \in H_0^1(G)).$$

*Damit ist durch*

$$|u|_{H^1(G)} := \Big(\sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(G)}\Big)^{1/2}$$

*auf $H_0^1(G)$ eine Norm gegeben, welche zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(G)}$ äquivalent ist.*

*Beweis.* Es sei $G$ ohne Einschränkung in $x_n$-Richtung beschränkt, d.h. es gelte

$$G \subset \{x \in \mathbb{R}^n \colon 0 \le x_n \le b\}$$

für ein $b > 0$. Wir beweisen die Aussage zunächst für $u \in \mathscr{D}(G)$. Offenbar gilt nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung:

$$u(x) = \int_0^{x_n} 1 \cdot \partial_d u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)\, \mathrm{d}t.$$

Damit können wir unter Verwendung der Cauchy–Schwarz–Ungleichung wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\le b \int_0^{x_n} |\partial_n u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|^2\, \mathrm{d}t \\ &\le b \int_0^{b} |\nabla u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|^2\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L^2} &\le b \int_0^{x_n} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^b |\nabla u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|^2\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \Big\}\, \mathrm{d}x_n \\ &\le b^2\, \|\nabla u\|^2_{L^2}, \end{aligned}$$

und das war zu zeigen. Da $\mathscr{D}(G) \subset H_0^1(G)$ dicht liegt, folgt die Abschätzung für beliebige $u \in H_0^1(G)$ durch Approximation in der $\|\cdot\|_{H^1(G)}$-Norm. □

**5.20 Satz** (Zweite Poincarésche Ungleichung)**.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Segmenteigenschaft. Dann existiert ein $c > 0$ mit*

$$\|u\|_{L^2(G)} \le c\left(\|\nabla u\|_{L^2(G)^n} + \left|\int_G u(x)\,\mathrm{d}x\right|\right) \quad (u \in H^1(G)).$$

*Damit ist durch*

$$\|u\|_{H^1_*(G)} := \Big( \|\nabla u\|^2_{L^2(G)^n} + \big|\,\langle u, 1\rangle_{L^2(G)}\big|^2\Big)^{1/2}$$

*eine Norm auf $H^1(G)$ gegeben, welche zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(G)}$ äquivalent ist.*

*Beweis.* Wir nehmen indirekt an, dass eine Folge $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset H^1(G)$ existiert mit $\|u_\ell\|_{L^2(G)} = 1$ und

$$\|\nabla u_\ell\|_{L^2} + \left|\langle u_\ell, 1\rangle_{L^2(G)}\right| < \frac{1}{\ell} \quad (\ell \in \mathbb{N}).$$

Nach dem Satz von Rellich–Kondrachov existiert eine Teilfolge $(\widetilde{u}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, die etwa gegen $u_0 \in L^2(G)$ konvergiert. Wegen $\|\nabla\widetilde{u}_\ell\|_{L^2} \longrightarrow 0$ folgt, dass $(\widetilde{u}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset H^1(G)$ eine Cauchyfolge ist. Da $H^1(G)$ vollständig ist, existiert ein $\overline{u}_0 \in H^1(G)$ mit $\|\widetilde{u}_\ell - \overline{u}_0\|_{H^1(G)} \longrightarrow 0$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes ist $u_0 = \overline{u}_0$. Wegen $\langle \widetilde{u}_\ell, 1\rangle \longrightarrow 0$ folgt $\langle u_0, 1\rangle = 0$. Andererseits gilt $\nabla u_0 = \lim_{n\to\infty} \nabla\widetilde{u}_\ell = 0$, also $u_0 = \text{const}$. Insgesamt folgt also $u_0 = 0$, was im Widerspruch zu

$$\|u_0\|_{L^2} = \lim_{\ell\to\infty} \|\widetilde{u}_\ell\|_{L^2} = 1$$

steht. □

# 6. Klassische Sätze der Funktionalanalysis

Zu den klassischen Sätzen der Funktionalanalysis gehören der Satz von Baire mit seinen Folgerungen und der Satz von Hahn–Banach. Die Folgerungen aus diesen Sätzen werden von entscheidender Bedeutung für die ganze Operatortheorie sein.

Das Prinzip der offenen Abbildung ist eine Folgerung aus dem Satz von Baire und erlaubt recht schnell wichtige Aussagen über das Spektrum unbeschränkter Operatoren. Hier werden auch die ersten Begriffe der Operatortheorie studiert, wie etwa die Abgeschlossenheit eines unbeschränkten Operators.

Sei $(X, d)$ metrischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt nirgends dicht, falls $\overline{A}$ keine inneren Punkte enthält, d.h. $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\overline{A}$ keine offene Kugel enthält.

**6.1 Satz** (Bairescher Kategoriensatz)**.** *Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, $A_n \subset X$ abgeschlossen. Falls $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine offene Kugel enthält, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $A_{n_0}$ (schon) eine offene Kugel enthält.*

*Beweis.* Sei $B(x_0, r) \subset A$ eine offene Kugel. Angenommen, kein $A_n$ enthält eine offene Kugel (also: jede offene Kugel $B(x, \varepsilon)$ „ragt über jedes $A_n$ hinaus“), d.h.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \forall\, \varepsilon > 0\, \forall\, x \in X : (X \setminus A_n) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Dann ist einerseits $(X \setminus A_1) \cap B(x_0, r)$ nichtleer (enthält also ein $x_1$), andererseits offen (als Durchschnitt zweier offener Mengen), also gibt es ein $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ mit

$$B(x_1, \varepsilon_1) \subset (X \setminus A_1) \cap B(x_0, r).$$

Wähle nun im nächsten Schritt erst ein $x_2$ und danach ein $\varepsilon_2$, sodass $B(x_2, \varepsilon_2) \subset (X \setminus A_2) \cap B(x_1, \varepsilon_1)$ (offen, nicht leer) und $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{4}$.

Allgemein wähle $x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}$ mit $B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset (X \setminus A_{n+1}) \cap B(x_n, \varepsilon_n)$ und $0 < \varepsilon_{n+1} < 2^{-n-1}$. Zusätzlich können wir $\varepsilon_{n+1}$ so klein wählen, daß $B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset B(x_n, \gamma_n \varepsilon_n)$ gilt, mit einer geeigneten Konstanten $\gamma_n < 1$.

Wegen $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ und $x_{n+1} \in B(x_n, \varepsilon_n)$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, d.h. $x_n \longrightarrow x \in X$. Hier verwenden wir, dass $X$ vollständig ist. Wegen

$$d(x, x_n) = \lim_{m\to\infty} \underbrace{d(x_m, x_n)}_{<\gamma_n\varepsilon_n \text{ falls } m>n} \leq \gamma_n \varepsilon_n < \varepsilon_n$$

haben wir dann auch $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon_n)$.

Aber es gilt sowohl

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,\varepsilon_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X\setminus A_n) = X\setminus A$$

als auch

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,\varepsilon_n) \subset B(x_1,\varepsilon_1) \subset B(x_0,r) \subset A.$$

Somit ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,\varepsilon_n) = \emptyset$ im Widerspruch zu $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,\varepsilon_n)$. □

Satz 6.1 heißt aus folgendem Grund Kategoriensatz: Eine Menge $A \subset X$ heißt von erster Kategorie (mager) in $X$, falls $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit nirgends dichten Mengen $A_n$ gilt. Gibt es keine solche Darstellung, heißt $A$ von zweiter Kategorie.

Damit erhalten wir folgende Formulierung des Satzes von Baire: Sei $(X,d)$ vollständiger metrischer Raum. Dann ist $X$ von zweiter Kategorie in sich.

**6.2 Bemerkung.** Aus dem Satz von Baire folgt leicht folgende Aussage: Sei $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist der Durchschnitt einer abzählbaren Familie von dichten offenen Teilmengen von $X$ wieder dicht in $X$.

**6.3 Satz** (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). *Sei $(X,d)$ vollständiger metrischer Raum, $\mathcal{T}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f\colon X\to\mathbb{K}$. Die Familie $\mathcal{T}$ sei punktweise gleichmäßig beschränkt, d.h. es gilt*

$$\forall\, x\in X\ \exists\, c_x>0\ \forall\, f\in\mathcal{T}\colon\ |f(x)|\le c_x.$$

*Dann existiert eine offene Kugel $K$ und ein $c>0$ mit*

$$\forall\, x\in K\ \forall\, f\in\mathcal{T}\colon\ |f(x)|\le c.$$

*Beweis.* Die Menge

$$A_n := \{x\in X\colon\ \forall\, f\in\mathcal{T}\colon |f(x)|\le n\} = \bigcap_{f\in\mathcal{T}} \{x\in X\colon |f(x)|\le n\}$$

ist (als Durchschnitt abgeschlossener Mengen) abgeschlossen. Für $x\in X$ existiert nach Voraussetzung ein $c_x>0$ mit $|f(x)|\le c_x \quad (f\in\mathcal{T})$, d.h. es existiert eine natürliche Zahl $n$ mit $x\in A_n$. Somit ist $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Nach dem Satz von Baire existiert ein $n_0\in\mathbb{N}$ und eine offene Kugel $K\subset A_{n_0}$. Damit ist $|f(x)|\le n_0 \quad (x\in K, f\in\mathcal{T})$. □

**6.4 Satz** (von Banach–Steinhaus). *Sei $X$ Banachraum und $Y$ normierter Raum. Sei $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ eine punktweise gleichmäßig beschränkte Familie, d.h. es gelte*

$$\forall\, x \in X\ \exists\, c_x > 0\ \forall\, T \in \mathcal{T}\colon\ \|Tx\|_Y \le c_x.$$

*Dann existiert ein $c > 0$ mit $\|T\| \le c \quad (T \in \mathcal{T})$.*

*Beweis.* Definiere $\mathcal{T}' := \{f_T : T \in \mathcal{T}\}$ als Familie stetiger Abbildungen $f_T\colon X \to \mathbb{K}$ durch $f_T(x) := \|Tx\|_Y$. Nach Voraussetzung ist diese Familie $\mathcal{T}'$ punktweise gleichmäßig beschränkt.

Nach Satz 6.3 existieren $B(x_0, r_0)$ und $c' > 0$ mit

$$\forall\, x \in B(x_0, r_0)\ \forall\, T \in \mathcal{T}\colon\ \|Tx\|_Y \le c'.$$

Sei nun $x \in X$, $\|x\| = 1$ und $T \in \mathcal{T}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|Tx\|_Y &= \frac{2}{r_0}\left\|T\Big(\frac{r_0}{2}x - x_0 + x_0\Big)\right\|_Y \le \\ &\le \frac{2}{r_0}\left(\Big\|T\big(\underbrace{\frac{r_0}{2}x - x_0}_{\in B(x_0,r_0)}\big)\Big\|_Y + \Big\|\underbrace{Tx_0}_{\in B(x_0,r_0)}\Big\|_Y\right) \le \frac{4}{r_0}c' =: c.\end{aligned}$$

Somit gilt $\|T\| \le c \quad (T \in \mathcal{T})$. □

Für eine Anwendung dieses Satzes verweisen wir auf den Beweis von Satz 7.11. Und eine Variation des Satzes von Banach–Steinhaus ist folgendes Ergebnis, dessen Beweis sich ideal zum Selbststudium eignet:

**6.5 Satz** (von Banach–Steinhaus). *Seien $X$, $Y$ Banachräume. Dann konvergiert eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ genau dann punktweise gegen eine Abbildung $T \in L(X,Y)$, wenn gilt:*

(i) *die Folge der Normen $\|T_n\|$ ist beschränkt,*

(ii) *die Folge $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für alle Elemente $x$ einer in $X$ dichten Teilmenge $A$.*

**6.6 Lemma** (offene Abbildung). *Seien $X$ und $Y$ normierte Räume, und es sei $T\colon X \to Y$ linear. Dann ist $T$ eine offene Abbildung (gemäß Definition 1.1) genau dann, wenn ein positives $\delta$ existiert mit $B(0_Y, \delta) \subset T(B(0_X, 1))$.*

*Beweis.* Lediglich die Rückrichtung ist nicht-trivial. Sei $U \subset X$ offen und $x \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset U$. Wegen der Linearität von $T$ ist $B(0_Y, \delta\varepsilon) \subset T(B(0_X, \varepsilon))$, nach Verschiebung also auch $B(Tx, \delta\varepsilon) \subset T(B(x, \varepsilon)) \subset T(U)$, und somit ist $T(U)$ offen in $Y$. □

**6.7 Satz** (Prinzip der offenen Abbildung). *Seien $X, Y$ Banachräume und $T \in L(X,Y)$.*

*Dann ist $T$ genau dann eine offene Abbildung, wenn $T$ surjektiv ist.*

*Beweis.* Die Surjektivität folgt schnell aus der Offenheit: jedes $y \in Y$ ist enthalten in einer passenden offenen Kugel $B(0_Y, r)$, und diese ist nach Lemma 6.6 enthalten in $T(B(0_X, \varrho))$ für ein geeignetes $\varrho$.

Es bleibt also die Rückrichtung zu zeigen. Wir führen einige Schreibweisen ein:

$$B_r^{(X)} := B(0_X, r) \subset X, \qquad B_r^{(Y)} := B(0_Y, r) \subset Y.$$

**Schritt 1: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^{(Y)} \subset \overline{T(B_1^{(X)})}$:**

Da $T$ surjektiv ist, gilt $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(B_n^{(X)})}$. Nach dem Satz von Baire ist das Innere von $\overline{T(B_n^{(X)})}$ für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ nichtleer, d.h. es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $y_0 \in Y$ mit $B(y_0, \varepsilon_0) \subset \overline{T(B_n^{(X)})}$.

Da $T$ surjektiv ist, existiert ein $x_0 \in X$ mit $Tx_0 = y_0$. Es ist $B(y_0, \varepsilon_0) = Tx_0 + B_{\varepsilon_0}^{(Y)}$ und damit

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon_0}^{(Y)} &\subset \overline{T(B_n^{(X)})} - Tx_0 = \overline{T(B_n^{(X)}) - Tx_0} \\ &= \overline{T(nB_1^{(X)}) - Tx_0} = \overline{T(nB_1^{(X)} - x_0)} \subset \overline{T(mB_1^{(X)})} = m\,\overline{T(B_1^{(X)})} \end{aligned}$$

für ein $m \in \mathbb{N}$. Beachte dabei, dass $nB_1^{(X)} - x_0 \subset mB_1^{(X)}$ für großes $m$ gilt. Wir erhalten

$$B_{\varepsilon_0/m}^{(Y)} \subset \overline{T(B_1^{(X)})}.$$

Wähle $\varepsilon := \varepsilon_0/m$.

**Schritt 2: Es gilt $\overline{T(B_1^{(X)})} \subset T(B_2^{(X)})$:**

Dazu sei $y \in \overline{T(B_1^{(X)})}$ und $\varepsilon$ wie im Schritt 1. Nach Definition des topologischen Abschluss gibt es ein $x_1 \in B_1^{(X)}$ mit $y - Tx_1 \in B_{\varepsilon/2}^{(Y)}$.

Nach Schritt 1 ist $B_{\varepsilon/2}^{(Y)} \subset \overline{T(B_{1/2}^{(X)})}$. Wähle nun $x_2 \in B_{1/2}^{(X)}$ mit $y - Tx_1 - Tx_2 \in B_{\varepsilon/4}^{(Y)} \subset \overline{T(B_{1/4}^{(X)})}$.

Wir erhalten iterativ eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in B_{2^{-n+1}}^{(X)}$ mit $y - \sum_{i=1}^n Tx_i \in B_{2^{-n}\varepsilon}^{(Y)}$. Nach Wahl der $x_n$ ist $x := \sum_{n=1}^\infty x_n$ absolut konvergent. Es gilt $x \in B_2^{(X)}$ wegen $\|x\| \le \sum_n \|x_n\| < 2$.

Aus der Stetigkeit von $T$ erhalten wir $y = \sum_{i=1}^\infty Tx_i = T(\sum_{i=1}^\infty x_i) = Tx \in T(B_2^{(X)})$.

**Schritt 3: $T$ ist eine offene Abbildung:**

Wir haben $B_\varepsilon^{(Y)} \subset T(B_2^{(X)})$, also auch $B_{\varepsilon/2}^{(Y)} \subset T(B_1^{(X)})$. Nun wende man Lemma 6.6 an. □

**6.8 Korollar.** *Seien $X, Y$ Banachräume, $T\colon X \to Y$ abgeschlossener linearer Operator mit Definitionsbereich $D(T)$. Sei $R(T)$ abgeschlossen. Dann ist $T$ offen als Abbildung von $D(T)$ nach $R(T)$ (wobei sowohl $D(T)$ als auch $R(T)$ mit der Spurtopologie versehen werden).*

*Also: wenn $X$ und $Y$ Banachräume sind, $\hookrightarrow$ die Teilmengenbeziehung benennt, und*

$$\begin{tikzcd} X & Y \\ T : D(T) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\text{linear}", "\text{abgeschlossen}"'] & R(T) \arrow[u, hook, "\text{(abgeschlossen)}"'] \end{tikzcd}$$

*dann ist*

$$T\colon (D(T), \|\cdot\|_X) \xrightarrow[\text{offen}]{\text{linear}} (R(T), \|\cdot\|_Y)$$

*Beweis.* Betrachte die Graphennorm $\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y \quad (x \in D(T))$.

Dann ist $\|\cdot\|_T$ eine Norm auf $D(T)$, und $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist ein Banachraum (laut Lemma 3.6, da $T$ abgeschlossen ist). Der Operator $\widetilde{T}\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to R(T)$, $x \mapsto Tx$, ist surjektiv per Definition, und er ist beschränkt mit Operatornorm $\leq 1$, also ist er stetig. Der lineare Raum $R(T)$ ist (als abgeschlossener Unterraum des Banachraums $Y$) ein Banachraum.

Gemäß Satz 6.7 bildet $\widetilde{T}$ offene Mengen $U$ in $(D(T), \|\cdot\|_T)$ auf offene Mengen in $(R(T), \|\cdot\|_Y)$ ab.

Nun sei $U$ eine offene Teilmenge von $(D(T), \|\cdot\|_X)$. Dann ist $U$ auch eine offene Teilmenge von $(D(T), \|\cdot\|_T)$ (wie wir gleich zeigen werden). Also ist dann auch $TU = \widetilde{T}U$ offen in $R(T)$.

Es bleibt zu beweisen, dass $U$ offen in $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist, wenn $U \subset D(T)$ offen in $(D(T), \|\cdot\|_X)$ ist. Sei $u \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\{v \in D(T)\colon \|u - v\|_X < \varepsilon\} \subset U$. Dann gilt aber erst recht $\{v \in D(T)\colon \|u - v\|_T < \varepsilon\} \subset U$. Das wollten wir zeigen. □

**6.9 Beispiel.** Sei $X = Y = L^2((0,1))$, $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ mit $D(T) = W^{1,2}((0,1))$ und $R(T) = Y$. Das Ausstatten von $D(T)$ mit der Spurtopologie bedeutet hier, dass wir $W^{1,2}((0,1))$ mit der $L^2((0,1))$–Norm versehen, was einen normierten Raum ergibt, der kein Banachraum ist.

**6.10 Satz** (Stetigkeit des Inversen)**.** *Seien $X, Y$ Banachräume und $T\colon X \to Y$ ein abgeschlossener linearer Operator mit* $\ker T = \{0\}$ *und $R(T)$ abgeschlossen. Dann ist $T^{-1}\colon R(T) \to X$ stetig.*

*Also: wenn $X$ und $Y$ Banachräume sind und*

$$\begin{tikzcd} X & Y \\ T : D(T) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\textit{linear, injektiv}", "\textit{abgeschlossen}"'] & R(T) \arrow[u, hook, "\textit{(abgeschlossen)}"'] \end{tikzcd}$$

*dann ist*

$$T^{-1}\colon (R(T), \|\cdot\|_Y) \xrightarrow[\textit{stetig}]{\textit{linear}} (D(T), \|\cdot\|_X)$$

*Beweis.* Weil $T$ injektiv ist, existiert $T^{-1}\colon R(T) \to D(T)$ als lineare Bijektion. Die Stetigkeit von $T^{-1}$ ist per Definition äquivalent zur Offenheit von $T$. Nun wende man Korollar 6.8 an. □

**6.11 Beispiel.** Wir setzen $X = Y = L^2((0,1))$, und wir wählen einen Operator $T\colon X \to Y$ mit $D(T) = X$ gemäß

$$(T\varphi)(t) := \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad 0 \le t \le 1, \quad \varphi \in X.$$

Es gilt $R(T) = \{u \in H^1((0,1))\colon u(0) = 0\}$. Diese Menge besteht wegen des Sobolevschen Einbettungssatzes aus Funktionen, die auf $[0,1]$ stetig sind, weshalb die Bedingung $u(0) = 0$ sinnvoll ist. Aus dem Satz von Rellich–Kondrachov folgt, dass die Identität $\mathrm{id}\colon H^1((0,1)) \to C([0,1])$ sogar kompakt ist. Aus der Cauchy–Schwarz–Ungleichung erhalten wir auf elementarem Wege

$$\begin{aligned} |T\varphi(t)| &\le \sqrt{t}\,\|\varphi\|_{L^2((0,1))}, && 0 \le t \le 1, \\ |T\varphi(t_2) - T\varphi(t_1)| &\le \sqrt{|t_2 - t_1|}\,\|\varphi\|_{L^2((0,1))}, && 0 \le t_1, t_2 \le 1, \end{aligned}$$

und dies sagt uns, dass $T\colon X \to Y$ ein stetiger Operator ist, also auch abgeschlossen. Offenkundig ist $\ker T = \{0\}$. Andererseits verrät uns ein Test mit Funktionen $u_n \in R(T)$, gegeben durch $u_n(t) := t^n$, dass $T^{-1}\colon (R(T), \|\cdot\|_Y) \to X$ nicht stetig sein kann (siehe auch Beispiel 3.2 für eine sehr ähnliche Situation). Dann liefert uns der Satz über die Stetigkeit des Inversen, dass $R(T)$ eine nicht-abgeschlossene Teilmenge von $Y$ ist.

Aus diesem Beispiel erkennen wir, dass der Wertebereich eines linearen stetigen Operators keine abgeschlossene Teilmenge des Bildraumes sein braucht.

**6.12 Beispiel.** Wir wählen $X$ und $T$ wie im vorigen Beispiel, aber jetzt ist $Y = H^1((0,1))$. Dann ist immer noch $\ker T = \{0\}$, und $T$ ist stetig, also abgeschlossen. Man kann zeigen, dass $R(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $Y$ ist, und tatsächlich ist $T^{-1}\colon (R(T), \|\cdot\|_Y) \to X$ stetig. Siehe auch Beispiel 3.2.

**6.13 Satz** (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien $X, Y$ Banachräume, $T\colon X \to Y$ abgeschlossener linearer Operator. Falls $D(T)$ abgeschlossen ist, so ist $T$ stetig.*

*Also: wenn $X$, $Y$ Banachräume sind und*

$$\begin{tikzcd} & X & & Y \\ T: & D(T) \arrow[u, hook, "\text{(abgeschlossen)}"] \arrow[rr, "\text{linear}", "\text{abgeschlossen}"'] & & R(T) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

*dann ist*

$$T\colon (D(T), \|\cdot\|_X) \xrightarrow[\text{stetig}]{\text{linear}} (R(T), \|\cdot\|_Y)$$

*Beweis.* Da $T$ abgeschlossen ist, ist $G(T)$ mit $\|(x,Tx)\|_G := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ als abgeschlossener Unterraum von $X \oplus Y$ ein Banachraum. Die Projektion $\pi_1\colon G(T) \to X$, $(x, Tx) \mapsto x$, ist injektiv und hat Operatornorm $\leq 1$, ist also stetig, und damit ein abgeschlossener linearer Operator. Der Wertebereich $R(\pi_1) = D(T)$ ist abgeschlossen in $X$. Nach Satz 6.10 ist $\pi_1^{-1}$ stetig als Abbildung von $(D(T), \|\cdot\|_X)$ nach $(G(T), \|\cdot\|_G)$. Ebenso ist $\pi_2\colon G(T) \to Y$, $(x, Tx) \mapsto Tx$, stetig als Abbildung von $(G(T), \|\cdot\|_G)$ nach $(R(T), \|\cdot\|_Y)$. Damit ist $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ stetig. □

**6.14 Korollar.** *Seien $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ und $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume mit*

$$\|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2 \quad (x \in X)$$

*für eine Konstante $c > 0$.*

*Dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d.h. es gibt eine Konstante $c' > 0$ mit $c'\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2 \quad (x \in X)$.*

*Beweis.* Satz 6.10, angewandt auf $\mathrm{id}\colon (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$, $x \mapsto x$. □

**6.15 Korollar** (Satz von Hellinger–Toeplitz)**.** *Sei $X$ Hilbertraum und $T\colon X \to X$ linearer Operator mit $D(T) = X$ und*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad (x, y \in X).$$

*Dann ist $T$ stetig.*

*Beweis.* Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit von $G(T)$ in $X \oplus X$.

Sei $(x, y) = \lim_n (x_n, Tx_n)$, d.h. $x = \lim_n x_n$ und $y = \lim_n Tx_n$, jeweils mit Konvergenz in $\|\cdot\|_X$. Für $z \in X$ gilt

$$\begin{aligned}\langle y, z\rangle &= \left\langle \lim_n Tx_n, z\right\rangle = \lim_n \langle Tx_n, z\rangle = \lim_n \langle x_n, Tz\rangle = \left\langle \lim_n x_n, Tz\right\rangle = \langle x, Tz\rangle \\ &= \langle Tx, z\rangle .\end{aligned}$$

Damit folgt $\langle y - Tx, z\rangle = 0$ für alle $z \in X$. Also ist $y - Tx = 0$, d.h. $(x, y) \in G(T)$. □

**6.16 Bemerkung.** Sei $X$ Banachraum, $Y$ normierter Raum und $T\colon X \to Y$ ein Isomorphismus normierter Räume, d.h. $T$ linear, bijektiv und $T, T^{-1}$ stetig. Dann ist auch $Y$ ein Banachraum. Denn falls $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchyfolge ist, so auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := T^{-1}y_n$. Damit existiert $x := \lim_n x_n \in X$, und für $y := Tx \in Y$ gilt $y_n \longrightarrow y$.

Man beachte, dass hier die Linearität entscheidend ist, vergleiche $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$.

**6.17 Lemma.** *Seien $X, Y$ Banachräume und $T\colon X \to Y$ abgeschlossener linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es existiert ein $C > 0$ mit $\|Tx\|_Y \geq C\,\|x\|_X \quad (x \in D(T))$.*

(ii) *$T$ ist injektiv und $R(T)$ ist abgeschlossen.*

*Beweis.* (i)$\Longrightarrow$(ii). Der Operator $T\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (R(T), \|\cdot\|_Y)$ ist surjektiv per Definition und offensichtlich injektiv. Weiterhin ist er beschränkt mit Operatornorm $\leq 1$, also stetig. Sein Inverses ist ebenfalls ein beschränkter Operator, wegen (i).

Also ist $T\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (R(T), \|\cdot\|_Y)$ ein Isomorphismus von normierten Räumen. Da $(D(T), \|\cdot\|_T)$ Banachraum ist (denn $T$ ist abgeschlossener Operator), ist $R(T)$ abgeschlossen nach Bemerkung 6.16.

(ii)$\Longrightarrow$(i) folgt direkt aus dem Satz vom stetigen Inversen. □

# 7. Nützliches über das Spektrum

In vielen Anwendungen ist es wichtig, das Spektrum eines Operators gut zu kennen. So kann man etwa am Spektrum ablesen, ob die Lösung einer Differentialgleichung für große Zeiten gegen Null konvergiert (Stabilität). Es gibt eine ganze Reihe kleiner Aussagen über das Spektrum, welche bei der Bestimmung des Spektrum helfen können. Am einfachsten (aus der Sicht des Spektrums gesehen) sind selbstadjungierte Operatoren. Zum Glück sind das auch die Operatoren, welche am häufigsten vorkommen. Für Anwendungen sehr nützlich ist auch der Begriff des approximativen Spektrums.

Im folgenden seien $X$ und $Y$ $\mathbb{C}$-Hilberträume.

**7.1 Satz.** *Sei $T\colon X \supset D(T) \to Y$ ein dicht definierter Operator. Dann gilt*

a) $R(T)^\perp = \overline{R(T)}^\perp = \ker T^*$.

b) $\overline{R(T)} = (\ker T^*)^\perp$.

*Beweis.* a) Es gilt $y \in R(T)^\perp$ genau dann, wenn für alle $x \in D(T)$ gilt $\langle Tx, y\rangle = 0$. Dies ist äquivalent zu $y \in D(T^*)$ und $T^*y = 0$, also zu $y \in \ker T^*$.

b) Nach a) gilt $\overline{R(T)} = (R(T))^{\perp\perp} = (\ker T^*)^\perp$.

□

**7.2 Bemerkung.** Falls $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein dicht definierter und abgeschlossener Operator ist, so ist $T^*$ ebenfalls abgeschlossen und dicht definiert, und es gilt $T^{**} = T$. Wendet man Satz 7.1 auf $T^*$ an, so erhält man

$$R(T^*)^\perp = \ker T, \quad \overline{R(T^*)} = (\ker T)^\perp.$$

**7.3 Lemma.** *a) Sei $T \in L(X)$. Dann ist $T$ genau dann selbstadjungiert, falls $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in X$.*

*b) Sei $T\colon X \subset D(T) \to X$ dicht definiert. Dann ist $T$ genau dann symmetrisch, falls $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ $(x \in D(T))$.*

*Beweis.* a) (i) Sei $T = T^*$. Dann ist $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Nach Voraussetzung ist

$$\langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle = \overline{\langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle}$$

und damit
$$\alpha \langle Ty, x\rangle + \overline{\alpha} \langle Tx, y\rangle = \alpha \langle y, Tx\rangle + \overline{\alpha} \langle x, Ty\rangle .$$
Für $\alpha = 1$ erhält man
$$\langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle .$$
Für $\alpha = \mathrm{i}$ erhält man
$$\langle Ty, x\rangle - \langle Tx, y\rangle = \langle y, Tx\rangle - \langle x, Ty\rangle .$$
Somit folgt
$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad (x, y \in X).$$
Nach Definition von $T^*$ gilt also $T = T^*$.

b) Die Rechnung unter a) zeigt, dass $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $(x \in D(T))$ gilt. Dies ist äquivalent zu $T \subset T^*$, d.h. zur Symmetrie von $T$. □

**7.4 Satz** (Spektrum selbstadjungierter Operatoren)**.** *Sei $T$ ein selbstadjungierter linearer (nicht notwendig beschränkter) Operator mit dichtem Definitionsbereich $D(T)$. Dann gilt*

(i) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(ii) $\|(T-\lambda)^{-1}\| \le |\operatorname{Im}\lambda|^{-1} \quad (\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$.

(iii) *Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ sind geometrischer und algebraischer Eigenraum identisch.*

(iv) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

(v) $\sigma_r(T) = \emptyset$.

*Beweis.* (i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ und $x \in D(T)$. Wie in Lemma 7.3 zeigt man $\operatorname{Im}\langle Tx, x\rangle = 0$. Dann ist mit Cauchy–Schwarz
$$\|(T-\lambda)x\| \cdot \|x\| \ge |\langle (T-\lambda)x, x\rangle| \ge |\operatorname{Im}\langle (T-\lambda)x, x\rangle| = |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|x\|^2 . \tag{7-1}$$
Nach Lemma 6.17 ist $T-\lambda$ injektiv und $R(T-\lambda)$ abgeschlossen. Weiterhin ist auch $T-\overline{\lambda}$ injektiv wegen $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

$T-\lambda$ ist surjektiv, denn mit Satz 7.1 a) haben wir
$$\begin{aligned} R(T-\lambda) &= \overline{R(T-\lambda)} = \big((R(T-\lambda))^\perp\big)^\perp = (\ker((T-\lambda)^*))^\perp = \big(\ker(T-\overline{\lambda})\big)^\perp \\ &= \{0\}^\perp = X. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ der Operator $T-\lambda$ bijektiv ist.

(ii) Setze $y := (T-\lambda)x$ in (7-1) und erhalte

$$\|y\| \geq |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \left\|(T-\lambda)^{-1}y\right\|.$$

(iii) Sei $N_\lambda^{(a)}(T)$ der algebraische Eigenraum zum Eigenwert $\lambda$ von $T$. Die Inklusion $\ker(T-\lambda) \subset N_\lambda^{(a)}(T)$ gilt immer. Sei also $x \in N_\lambda^{(a)}(T) \setminus \ker(T-\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x \in D((T-\lambda)^n)$ und $(T-\lambda)^n x = 0$ für ein $n \geq 2$, aber $(T-\lambda)x \neq 0$. Wegen $T = T^*$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\left\|(T-\lambda)^{n-1}x\right\|^2 = \left\langle (T-\lambda)^n x, (T-\lambda)^{n-2}x \right\rangle = 0.$$

Induktiv folgt $(T-\lambda)^{n-2}x = 0, \ldots, (T-\lambda)x = 0$, Widerspruch.

(iv) Das folgt wie in der linearen Algebra. Seien $x_1, x_2$ Eigenvektoren zu $\lambda_1 \neq \lambda_2$ mit $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle Tx_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Tx_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

(v) Angenommen, es existiert ein $\lambda \in \sigma_r(T)$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$ wegen (i), sowie $T-\lambda$ injektiv und $\overline{R(T-\lambda)} \neq X$ wegen der Definition von $\sigma_r$. Schließlich ist dann

$$\overline{R(T-\lambda)} = \left((R(T-\lambda))^\perp\right)^\perp = (\ker((T-\lambda)^*))^\perp = (\ker(T-\lambda))^\perp = \{0\}^\perp = X.$$

Widerspruch. □

Der folgende Satz wird genauso wie Satz 7.4 bewiesen.

**7.5 Satz** (Spektrum unitärer Operatoren). *Sei $X$ ein Hilbertraum und $T \in L(X)$ unitär. Dann gilt*

(i) $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = 1\}$.

(ii) $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\left||\lambda|-1\right|}$ *für* $|\lambda| \neq 1$.

*Die Aussagen* (iii)–(v) *von Satz 7.4 gelten analog.*

**7.6 Beispiel.** Sei $T$ ein selbstadjungierter (nicht unbedingt beschränkter) Operator in $X$. Dann heißt $U := (T-\mathrm{i})(T+\mathrm{i})^{-1}$ die Cayley–Transformierte des Operators $T$. Dieser Operator $U$ ist unitär. Die Cayley–Transformation ist umkehrbar: sei $U \in L(X)$ ein unitärer Operator, für den $I-U$ injektiv ist. Dann ist der Operator $T := \mathrm{i}(I+U)(I-U)^{-1}$ selbstadjungiert mit Definitionsbereich $R(I-U)$, und seine Cayley–Transfomierte ist wieder gleich $U$. Der Nutzen dieser Transformation besteht darin, dass sich einige Aussagen über unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren gewinnen lassen, wenn man ihre Cayley–Transformierten studiert, welche den Vorteil haben, beschränkt zu sein.

**7.7 Definition** (numerischer Wertebereich)**.** Für $T \in L(X)$ ist der numerische Wertebereich definiert durch

$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle : \|x\| = 1\}.$$

**7.8 Lemma.** *Sei $X$ ein Hilbertraum und $T \in L(X)$. Dann gilt $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.*

*Beweis.* Sei $\lambda \notin \overline{W(T)}$. Wir wollen zeigen, dass $\lambda \in \rho(T)$. Für $\|x\| = 1$ gilt nun

$$\begin{aligned} 0 < d := \operatorname{dist}(\lambda, \overline{W(T)}) &\leq |\lambda - \langle Tx, x\rangle\,| = |\,\langle(\lambda - T)x, x\rangle\,| \\ &\leq \|(T-\lambda)x\| \cdot \|x\| = \|(T-\lambda)x\|\,. \end{aligned}$$

Damit haben wir $\|(T-\lambda)x\| \geq d\,\|x\| \quad (x \in X)$. Also ist nach Lemma 6.17 der Operator $T - \lambda$ injektiv und $R(T-\lambda)$ abgeschlossen. Falls $T - \lambda$ nicht surjektiv ist, dann existiert ein $x_0 \in R(T-\lambda)^\perp$ mit $\|x_0\| = 1$, und es ist

$$0 = \langle (T-\lambda)x_0, x_0\rangle = \langle Tx_0, x_0\rangle - \lambda,$$

was im Widerspruch steht zu $\lambda \notin \overline{W(T)}$. □

**7.9 Lemma** (approximative Eigenwerte)**.** *Sei $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator. Die Menge der approximativen Eigenwerte ist definiert als*

$$\sigma_{\text{app}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ \exists\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T),\ \|x_n\| = 1 :\ \|(T-\lambda)x_n\| \longrightarrow 0\}.$$

*Dann gilt*

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{\text{app}}(T) \subset \sigma(T).$$

*Beweis.* (i) Sei $\lambda \in \sigma_{\text{app}}(T)$. Falls $\lambda \in \rho(T)$, so wäre $(T-\lambda)^{-1}$ stetig, d.h. für alle $x_n \in D(T)$ ist

$$\frac{\|x_n\|}{\|(T-\lambda)x_n\|} \leq \left\|(T-\lambda)^{-1}\right\| < \infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Definition der approximativen Eigenwerte.

(ii) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ setze $x_n := x$ mit einem normierten Eigenvektor $x$ zum Eigenwert $\lambda$.

Sei $\lambda \in \sigma_c(T)$. Dann ist $T - \lambda$ injektiv und $R(T-\lambda)$ nicht abgeschlossen. Nach Lemma 6.17 existiert kein $C > 0$ mit $\|(T-\lambda)x\| \geq C\,\|x\|$. Somit existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(T-\lambda)x_n\| \longrightarrow 0$. □

**7.10 Lemma.** *Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert. Für $m := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$ und $M := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$ gilt $\sigma(T) \subset [m, M]$ und $m, M \in \sigma(T)$.*

*Beweis.* Die Inklusion $\sigma(T) \subset \overline{W(T)} \subset [m, M]$ gilt nach Lemma 7.8.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\langle Tx_n, x_n\rangle \longrightarrow m$. Nach Definition von $m$ ist die Bilinearform $[x, y] := \langle (T-m)x, y\rangle$ positiv semidefinit, und nach Cauchy–Schwarz (angewandt auf $[\cdot,\cdot]$) gilt

$$\begin{aligned}\|(T-m)x_n\|^2 &= [x_n, (T-m)x_n] \le [x_n, x_n]^{1/2}[(T-m)x_n, (T-m)x_n]^{1/2}\\ &= \langle (T-m)x_n, x_n\rangle^{1/2} \cdot \big\langle (T-m)^2 x_n, (T-m)x_n\big\rangle^{1/2} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),\end{aligned}$$

da $\langle (T-m)x_n, x_n\rangle \longrightarrow 0$ und $\langle (T-m)^2 x_n, (T-m)x_n\rangle$ beschränkt ist. Also ist $m \in \sigma_{\text{app}}(T) \subset \sigma(T)$. Genauso zeigt man $M \in \sigma(T)$. □

**7.11 Definition und Satz.** *Sei $T \in L(X)$. Für den Spektralradius*

$$r(T) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$$

*gilt*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

*Beweis.* **(i)** Wir zeigen folgende Aussage: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $0 \le a_{n+m} \le a_n a_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(a_n)^{1/n} \longrightarrow a := \inf_n (a_n)^{1/n} \quad (n \longrightarrow \infty)$.

Um dies zu beweisen, sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $(a_N)^{1/N} < a + \varepsilon$ und setze $b(\varepsilon) := \max\{a_1, \dots, a_N\}$. Schreibe nun $n \in \mathbb{N}$ in der Form $n = kN + r$ mit $0 \le r < N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(a_n)^{1/n} &= (a_{kN+r})^{1/n} \le (a_N^k a_r)^{1/n}\\ &\le (a+\varepsilon)^{kN/n} b^{1/n} = (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^{-r/n} b^{1/n}\\ &= (a+\varepsilon)\Big(\frac{b}{(a+\varepsilon)^r}\Big)^{1/n}\\ &< a + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

falls $n$ hinreichend groß ist.

**(ii)** Setzt man $a_n := \|T^n\|$, so gilt $0 \le a_{n+m} \le a_n a_m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ wegen der Submultiplikativität der Operatornorm, und mit (i) folgt $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$. □

**7.12 Satz.** *Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert. Dann gilt*

$$r(T) = \|T\| = \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(T)\} = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \colon \|x\| = 1\}.$$

*Beweis.* **(i)** Es gilt

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{x\in X,\,\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\in X,\,\|x\|=1} (\langle Tx, Tx\rangle)^{1/2} \\ &= \sup_{x\in X,\,\|x\|=1} \big(\langle T^2x, x\rangle\big)^{1/2} \le \big\|T^2\big\|^{1/2},\end{aligned}$$

d.h. $\|T\|^2 \le \|T^2\|$. Aus der Submultiplikativität der Operatornorm folgt die andere Ungleichung, d.h. es gilt $\|T^2\| = \|T\|^2$. Iterativ folgt damit $\|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \|T\|$.

**(ii)** Sei $M(T) := \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(T)\} \le r(T)$. Nach Lemma 7.10 gilt $M(T) = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \colon \|x\| = 1\}$.

**(iii)** Für $|\lambda| > \|T\|$ ist $\lambda \in \rho(T)$ (Neumann-Reihe, vgl. Satz 3.15). Somit gilt $M(T) \le \|T\|$.

**(iv)** Zeige $\|T\| \le \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \colon \|x\| = 1\}$: Für $x, y \in X$ gilt

$$\langle T(x \pm y), x \pm y\rangle = \langle Tx, x\rangle \pm 2\,\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle &= \frac{1}{4}\big(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\big) \\ &\le \frac{M(T)}{4}\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) \\ &= \frac{M(T)}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big),\end{aligned}$$

wobei die Parallelogrammgleichung verwendet wurde. Wählt man $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und setzt $y := \frac{Tx}{\|Tx\|}$, so erhält man

$$\|Tx\| = \mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle \le \frac{M(T)}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) = M(T)$$

und damit $\|T\| \le M(T)$. □

**7.13 Bemerkung.** a) Für nicht selbstadjungierte Operatoren gilt die Aussage von Satz 7.12 i. allg. nicht, wie man an folgendem Beispiel sieht. Sei $X = L^2([0,1])$ und

$$(Ax)(t) := \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Der Operator $A$ ist ein Beispiel eines Volterra–Operators. Es gilt $\sigma(A) = \{0\}$.

b) Es gibt selbstadjungierte Operatoren, welche keinen Eigenwert besitzen. Betrachte dazu wieder $X = L^2([0,1])$ und $(Ax)(t) := tx(t)$ (Multiplikationsoperator). Dann ist $\sigma_p(A) = \emptyset$.

**7.14 Bemerkung.** Die meisten obigen Aussagen und Beweise gelten nicht nur für beschränkte Operatoren in Hilbert- bzw. Banachräumen, sondern allgemein für Elemente von Banachalgebren bzw. $C^*$-Algebren. Die sog. Gelfand–Theorie von $C^*$-Algebren ermöglicht es, einen abstrakten Zugang zu Spektrum und Spektralsatz zu finden.

# 8. Der Spektralsatz für selbstadjungierte beschränkte Operatoren

Der Spektralsatz ist einer der wichtigsten Sätze der Operatortheorie. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes aus der Linearen Algebra, nach welchem selbstadjungierte Matrizen orthogonal diagonalisierbar sind, also zunächst einmal um eine Strukturaussage. Diese Darstellung linearer selbstadjungierter Operatoren kann nun verwendet werden, um etwa Funktionen von Operatoren zu definieren, was wichtige Anwendungen z.B. für partielle Differentialgleichungen besitzt. Man erhält einen Funktionalkalkül für Operatoren.

## a) Stetiger und messbarer Funktionalkalkül

**8.1 Definition.** a) Eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ ist ein $\mathbb{C}$-Banachraum, auf der eine bilineare, assoziative Abbildung $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (x, y) \mapsto x \circ y$ definiert ist (die Multiplikation), wobei

$$\|x \circ y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in \mathcal{A}).$$

Wir schreiben wieder $xy := x \circ y$. Die Banachalgebra $\mathcal{A}$ heißt kommutativ, falls $xy = yx \quad (x, y \in \mathcal{A})$. Ein Element $e \in \mathcal{A}$ heißt Einheit von $\mathcal{A}$, falls $xe = ex = x \quad (x \in \mathcal{A})$ und $\|e\| = 1$.

b) Eine Abbildung $\mathcal{A} \to \mathcal{A},\ x \mapsto x^*$ heißt Involution, falls gilt

(i) $(x + y)^* = x^* + y^* \quad (x, y \in \mathcal{A})$,

(ii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^* \quad (\lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathcal{A})$,

(iii) $x^{**} = x \quad (x \in \mathcal{A})$,

(iv) $(xy)^* = y^* x^* \quad (x, y \in \mathcal{A})$.

c) Falls $\mathcal{A}$ eine Involution mit

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \quad (x \in \mathcal{A})$$

besitzt, so heißt $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra. Wegen $\|x^*\|^2 = \|x^{**} x^*\| = \|x x^*\| = \|x\|^2$ ist diese Involution eine Isometrie auf $\mathcal{A}$. Ein Algebrenhomomorphismus $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von $C^*$-Algebren heißt ein $*$-Homomorphismus, falls $\Phi(x^*) = (\Phi(x))^* \quad (x \in \mathcal{A})$.

**8.2 Bemerkung.** Eine Algebra $\mathcal{A}$ ist also gleichzeitig ein Vektorraum $(\mathcal{A}, +, \mathbb{C})$ und ein Ring $(\mathcal{A}, +, \circ)$. Beide Strukturen sind verknüpft über die Bilinearität von $\circ$.

**8.3 Beispiele.** a) Sei $X$ ein $\mathbb{C}$-Banachraum. Dann sind $\mathcal{A} = L(X)$ und $\mathcal{A} = K(X) := \{T \in L(X) \colon T \text{ kompakt}\}$ nichtkommutative Banachalgebren. Dabei hat $L(X)$ die Einheit $\mathrm{id}_X$, während $K(X)$ nur dann eine Einheit hat (nämlich ebenfalls $\mathrm{id}_X$), falls $X$ endlich-dimensional ist.

b) Sei $T$ ein kompakter Hausdorffraum. Dann ist $C(T)$ eine Banachalgebra mit der konstanten Funktion 1 als Einheit.

c) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L^\infty(\mu; \mathbb{C})$ eine Banachalgebra mit der konstanten Funktion 1 als Einheit.

d) Wir statten den Lebesgueraum $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit dem Faltungsprodukt aus,

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y \quad (u, v \in L^1(\mathbb{R}^n))$$

und erhalten eine kommutative Banachalgebra ohne Einheit.

**8.4 Bemerkung.** Wir diskutieren noch die Algebren $\mathcal{A} = L(X)$ und $\mathcal{B} = K(X)$. Weil die Komposition einer linearen stetigen Abbildung mit einer linearen kompakten Abbildung wieder eine lineare kompakte Abbildung ergibt, ist $\mathcal{B}$ nicht nur ein Unterring von $\mathcal{A}$, sondern sogar ein Ideal. Wir statten die Vektorräume $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wie üblich mit der Operatornorm aus. Dann kann man zeigen, dass $\mathcal{B}$ nicht nur ein Untervektorraum von $\mathcal{A}$ ist, sondern sogar ein abgeschlossener Teilraum.

Aus der Algebra ist bekannt, dass dann der Quotientenring $\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{B}$ wieder ein Ring ist. Und aus Satz 2.17 folgt, dass $\mathcal{C}$ ein Banachraum ist. Also ist $\mathcal{C}$ eine Banachalgebra, die sogenannte Calkin–Algebra, die in der Theorie der Fredholmoperatoren eine wichtige Rolle spielt.

Ab jetzt sei stets $X$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum.

Wir wollen im folgenden Funktionen $f(T)$ eines selbstadjungierten Operators $T \in L(X)$ definieren. Die Definition ist noch klar, falls $f$ ein Polynom ist: Für $f(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ ist

$$f(T) := \sum_{n=0}^N a_n T^n \tag{8-1}$$

(mit $T^0 := \mathrm{id}_H$). Dieser sog. Funktionalkalkül kann mit Hilfe des Satzes von Weierstraß eindeutig auf stetige Funktionen ausgeweitet werden, wie wir später sehen werden. Zunächst eine Version eines Spektralabbildungssatzes.

**8.5 Lemma.** *Sei $T \in L(X)$ ein Operator (nicht unbedingt selbstadjungiert), und für ein Polynom $f$ (vom Grad $\geq 1$) sei $f(T)$ durch (8-1) definiert. Dann gilt*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))\Big( = \{f(\lambda) \colon \lambda \in \sigma(T)\}\Big).$$

*Beweis.* **Schritt 1:** $\sigma(f(T)) \subset f(\sigma(T))$

Sei $\mu \in \sigma(f(T))$. Wir faktorisieren

$$f(t) - \mu = \beta_N \cdot \prod_{i=1}^{N} (t - \gamma_i), \qquad \beta_N \neq 0,$$

und erhalten $f(T) - \mu = \beta_N \cdot \prod_{i=1}^{N} (T - \gamma_i)$. Falls $\gamma_i \in \rho(T)$ für jedes $i$ gälte, so wäre $f(T) - \mu$ bijektiv, d.h. also $\mu \in \rho(f(T))$, was nicht sein kann. Also existiert ein $i_0$, für das $T - \gamma_{i_0}$ nicht bijektiv ist. Das heißt aber $\gamma_{i_0} \in \sigma(T)$. Wegen $f(\gamma_{i_0}) - \mu = 0$ folgt $\mu \in f(\sigma(T))$.

**Schritt 2:** $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$

Sei nun $\mu \in f(\sigma(T))$, d.h. es ist $\mu = f(\gamma)$ mit einem $\gamma \in \sigma(T)$. Dann folgt $f(\gamma) - \mu = 0$, d.h.

$$f(t) - \mu = (t - \gamma)\widetilde{f}(t)$$

mit einem Polynom $\widetilde{f}$ von Grad gleich $N - 1$. Also gilt

$$f(T) - \mu = (T - \gamma)\widetilde{f}(T) = \widetilde{f}(T)(T - \gamma).$$

Da $\gamma \in \sigma(T)$, ist $T - \gamma$ nicht surjektiv und damit auch $f(T) - \mu$ nicht surjektiv, oder es ist $T - \gamma$ nicht injektiv und damit $f(T) - \mu$ nicht injektiv. In beiden Fällen folgt $\mu \in \sigma(f(T))$. □

Im folgenden sei $\mathbf{1}$ die konstante Funktion 1 und

$$P(\sigma(T)) := \{f \in C(\sigma(T)) \colon \exists \text{ Polynom } \widetilde{f} \text{ mit } \widetilde{f}_{|\sigma(T)} = f\}.$$

**8.6 Definition und Satz** (Stetiger Funktionalkalkül). *Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert. Dann existiert genau ein stetiger Homomorphismus von $C^*$-Algebren*

$$\Phi \colon C(\sigma(T)) \to L(X)$$

*mit $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T$ und $\Phi(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_X$. Die Abbildung $\Phi$ heißt der stetige Funktionalkalkül von $T$. Wir schreiben $f(T) := \Phi(f) \quad (f \in C(\sigma(T)))$.*

*Beweis.* **Schritt 1:** $P(\sigma(T))$ **ist dicht in** $C(\sigma(T))$**:**

Da $T = T^* \in L(H)$, existiert ein Intervall $[m, M] \supset \sigma(T)$. Zu $f \in C(\sigma(T))$ existiert nach dem Erweiterungslemma von Tietze (Satz 1.5) eine stetige Fortsetzung $\widetilde{f} \in C([m, M])$, denn $\sigma(T)$ ist abgeschlossen. Nach dem Satz von Weierstraß liegen die Polynome dicht in $C([m, M])$ und damit auch dicht in $C(\sigma(T))$.

**Schritt 2: $\Phi$ ist eindeutig:**

Da $\Phi$ stetig sein soll, ist $\Phi$ durch die Werte auf der Menge $P(\sigma(T))$ bereits festgelegt. Wegen $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ist $\Phi$ bereits durch die Werte $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)})$ und $\Phi(\mathbf{1})$ eindeutig bestimmt.

**Schritt 3: $\Phi$ existiert:**

Definiere zunächst eine Abbildung $\widetilde{\Phi}\colon P(\mathbb{R}) \to L(X)$, wobei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Polynome $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit komplexen Koeffizienten bezeichne. Für ein Polynom $f \in P(\mathbb{R})$, $f\colon t \mapsto \sum_{j=0}^N c_j t^j$, setze $\widetilde{\Phi}(f) := \sum_{j=0}^N c_j T^j$. Dann ist $\widetilde{\Phi}\colon P(\mathbb{R}) \to L(H)$ linear, multiplikativ und erfüllt $\widetilde{\Phi}(\overline{f}) = (\widetilde{\Phi}(f))^*$.

Für $f \in P(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{\Phi}(f)\right\|_{L(H)}^2 &= \left\|\widetilde{\Phi}(f)^*\widetilde{\Phi}(f)\right\|_{L(H)} = \left\|\widetilde{\Phi}(\overline{f}f)\right\|_{L(H)} && \Big|\quad L(H) \text{ ist } C^*\text{-Algebra} \\
&= \sup\{|\lambda|\colon \lambda \in \sigma(\widetilde{\Phi}(\overline{f}f))\} && \Big|\quad \text{Satz 7.12} \\
&= \sup\{(\overline{f}f)(\lambda)\colon \lambda \in \sigma(T)\} && \Big|\quad \text{Lemma 8.5} \\
&= \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |f(\lambda)|^2 = \|f\|_{C(\sigma(T))},
\end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|_{C(\sigma(T))}$ die $\|\cdot\|_\infty$ auf $C(\sigma(T))$ bezeichnet.

Insbesondere folgt für zwei Polynome $f_1, f_2 \in P(\mathbb{R})$ mit $f_1 = f_2$ auf $\sigma(T)$ die Gleichheit $\widetilde{\Phi}(f_1) = \widetilde{\Phi}(f_2)$ (betrachte die Differenz).

Damit ist für $f \in P(\sigma(T))$ der Operator $\Phi(f) := \widetilde{\Phi}(\widetilde{f})$, wobei $\widetilde{f} \in P(\mathbb{R})$ mit $\widetilde{f}|_{\sigma(T)} = f$, wohldefiniert. Die obige Rechnung zeigt, dass $\Phi\colon P(\sigma(T)) \to L(X)$ eine Isometrie ist, wobei $P(\sigma(T))$ mit der $\|\cdot\|_{C(\sigma(T))}$-Norm versehen wird. Somit existiert eine eindeutige (wieder isometrische) stetige Fortsetzung auf $C(\sigma(T))$. Diese Fortsetzung ist wieder linear, multiplikativ und erfüllt $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$. Zum Beispiel kann man die letzte Eigenschaft folgendermaßen zeigen: Falls $f$ der Limes von Polynomen $f_n$ ist, so gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(\overline{f}) &= \Phi\big(\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n\big) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\overline{f}_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)^* \\
&= \big[\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)\big]^* = \Phi(\lim_{n\to\infty} f_n)^* = \Phi(f)^*.
\end{aligned}$$ □

**8.7 Satz** (Eigenschaften des Funktionalkalküls)**.** *Sei $T \in L(X)$ ein selbstadjungierter Operator.*

*a) Der Funktionalkalkül $C(\sigma(T)) \to L(X)$, $f \mapsto f(T)$, ist isometrisch, das heißt $\|f(T)\|_{L(X)} = \|f\|_{C(\sigma(T))}$. Die Menge $\{f(T)\colon f \in C(\sigma(T))\} \subset L(X)$ ist kommutative Unteralgebra. Der Operator $f(T)$ ist normal.*

*b) (Spektralabbildungssatz). Es ist $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.*

*c) Es ist $(f(T))^* = f(T)$ genau dann, wenn $\overline{f} = f$.*

*d) Falls $Tx = \lambda x$, so ist $f(T)x = f(\lambda)x$ für $f \in C(\sigma(T))$.*

*e) Falls $f \geq 0$, so ist $f(T) \geq 0$ $(:\Longleftrightarrow\ \forall\, x \in H\colon \langle x, f(T)x\rangle \geq 0)$.*

*Beweis.* **Teil a):** Die Isometrie wurde bereits im Beweis von Satz 8.6 gezeigt (für Polynome, welche dicht liegen). Die anderen beiden Behauptungen folgen aus Satz 8.6.

**Teil b), Schritt 1: wenn $\mu \notin f(\sigma(T))$, dann $\mu \notin \sigma(f(T))$:**

Falls $\mu \notin f(\sigma(T))$, dann ist $g := \frac{1}{f-\mu} \in C(\sigma(T))$, und somit

$$g(T)(f(T)-\mu) = \Phi(g) \circ \Phi(f-\mu) = \Phi(g \cdot (f-\mu)) = \Phi(\mathbf{1}_{\sigma(T)}) = \mathrm{id}_H\,.$$

Genauso folgt $(f(T)-\mu)g(T) = \mathrm{id}_H$. Also ist $\mu \in \rho(f(T))$.

**Teil b), Schritt 2: wenn $\mu \in f(\sigma(T))$, dann $\mu \in \sigma(f(T))$:**

Sei nun $\mu \in f(\sigma(T))$, d.h. es gibt ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\mu = f(\lambda)$. Wähle Polynome $g_n \in P(\sigma(T))$ mit $\|f - g_n\|_{L^\infty(\sigma(T))} \leq 1/n$ (und damit $\|f(T) - g_n(T)\|_{L(X)} \leq 1/n$). Nach Lemma 8.5 ist $g_n(\lambda) \in \sigma(g_n(T))$. Es ist $g_n(T)$ ein normaler Operator, der also kein Restspektrum hat. Dann ist $\sigma(g_n(T)) = \sigma_p(g_n(T)) \cup \sigma_c(g_n(T)) = \sigma_{\mathrm{app}}(g_n(T))$, d.h. es existiert eine Folge $(x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_{n,m}\| = 1$ und $\|(g_n(T) - g_n(\lambda))x_{n,m}\| \leq 1/m$. Somit ist

$$\begin{aligned}\|(f(T) - f(\lambda))x_{n,n}\| \leq \|(f(T) - g_n(T))x_{n,n}\| + \|(g_n(T) - g_n(\lambda))x_{n,n}\| \\ + |g_n(\lambda) - f(\lambda)| \cdot \|x_{n,n}\| \leq \frac{3}{n},\end{aligned}$$

d.h. $f(\lambda) \in \sigma_{\mathrm{app}}(f(T)) \subset \sigma(f(T))$.

**Teil c):** Wenn nun $f = \overline{f}$, dann ist $(f(T))^* = (\Phi(f))^* = \Phi(\overline{f}) = \Phi(f) = f(T)$. Und wenn andererseits $(f(T))^* = f(T)$, dann ist $f(T)$ selbstadjungiert, also $\mathbb{R} \supset \sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ wegen Teil b), also nimmt $f$ auf $\sigma(T)$ nur reelle Werte an.

**Teil d):** Dies ist klar für Polynome und folgt für allgemeine Funktionen durch Approximation.

**Teil e):**

Wir haben $0 \leq f = g^2$ mit $g \in C(\sigma(T)),\ g \geq 0$. Dann ist

$$\langle f(T)x, x\rangle = \left\langle g^2(T)x, x\right\rangle = \|g(T)x\|^2 \geq 0,$$

wobei die Selbstadjungiertheit von $g(T)$ ausgenutzt wurde. □

Der stetige Funktionalkalkül liefert uns z.B. die Resolvente $R_\lambda(T) := (T-\lambda)^{-1} = f(T)$ mit $f(t) := \frac{1}{t-\lambda} \in C(\sigma(T))$ für $\lambda \in \rho(T)$. Aber eine gute Beschreibung von $T$ erhält man erst über Maße, und dafür brauchen wir noch die charakteristischen Funktionen von $T$, z.B. $\chi_{[a,b]}(T)$. Dazu reicht der stetige Funktionalkalkül nicht aus, wir benötigen eine messbare Version.

**8.8 Lemma** (Stetige Bilinearformen)**.** *Sei $X$ Hilbertraum, $B\colon X \times X \to \mathbb{K}$ mit*

(i) *$x \mapsto B(x,y)$ linear ($y \in X$),*

(ii) *$y \mapsto B(x,y)$ konjugiert linear ($x \in X$),*

(iii) *$|B(x,y)| \leq C\,\|x\| \cdot \|y\| \quad (x,y \in X)$.*

*Dann existiert genau ein $T \in L(X)$ mit*

$$B(x,y) = \langle x, Ty \rangle \quad (x,y \in X).$$

*Dabei ist $\|T\|_{L(X)}$ die kleinste Konstante $C$, für die (iii) gilt.*

*Beweis.* Da $x \mapsto B(x,y)$ stetig und linear ist, existiert nach Riesz genau ein $\widetilde{y}$ mit $B(x,y) = \langle x, \widetilde{y} \rangle$. Setze $Ty := \widetilde{y}$. Es ist

$$\begin{aligned}\left\langle x, \widetilde{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2} \right\rangle &= B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 B(x,y_1) + \overline{\alpha}_2 B(x,y_2) \\ &= \overline{\alpha}_1 \langle x, \widetilde{y}_1 \rangle + \overline{\alpha}_2 \langle x, \widetilde{y}_2 \rangle = \langle x, \alpha_1 \widetilde{y}_1 + \alpha_2 \widetilde{y}_2 \rangle .\end{aligned}$$

Also ist $T$ linear.

Wegen Eigenschaft (iii) ist $T$ stetig: $\|Ty\|^2 = B(Ty,y) \leq C \cdot \|Ty\| \cdot \|y\|$, d.h. $\|T\| \leq C$. □

**8.9 Definition.** a) Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ heißt ein signiertes[1] Maß, falls für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ gilt:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n),$$

wobei wir hier verlangen, dass die (unbedingt konvergente) Reihe für jede Folge von disjunkten $A_n$ einen endlichen Wert liefert.

Maße $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ mit dieser Eigenschaft heißen komplexe Maße. Die Menge aller $\mathbb{K}$-wertigen (also signierten bzw. komplexen) Maße wird mit $M(\Omega, \mathscr{A})$ bezeichnet. Falls $\Omega$ ein topologischer Raum mit der von der Familie der in $\Omega$ offenen Mengen erzeugten Borel–$\sigma$-Algebra $\mathscr{B}(\Omega)$ ist, so schreibt man $M(\Omega) := M(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$.

[1] Signum=Vorzeichen; das Maß einer Menge darf jetzt also auch negativ sein

b) Zu $\mu \in M(\Omega, \mathscr{A})$ definiert man die Variation (das Variationsmaß) $|\mu|$ durch

$$|\mu|(A) := \sup_{\mathscr{Z}} \sum_{E \in \mathscr{Z}} |\mu(E)|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathscr{Z}$ von $A$ in endlich viele paarweise disjunkte Mengen aus $\mathscr{A}$ gebildet wird. Die Totalvariation oder Variationsnorm von $\mu$ ist definiert durch $\|\mu\|_M := |\mu|(\Omega)$.

**8.10 Bemerkung.** Man kann zeigen, dass $|\mu|$ ein endliches (positives) Maß auf $\mathscr{A}$ ist. Es gilt ferner: $M(\Omega, \mathscr{A})$, versehen mit der Variationsnorm, ist ein Banachraum. Beweise finden sich z.B. in [14].

**8.11 Satz** (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Sei $\Omega$ ein kompakter topologischer Raum. Dann ist die Abbildung*

$$T\colon M(\Omega) \to C(\Omega)', \quad \mu \mapsto T\mu \ \ \textit{mit}\ (T\mu)(f) := \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$

*ein isometrischer Isomorphismus von Banachräumen.*

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen, siehe z.B. [14].

**8.12 Definition** (Punktweise und gleichmäßig beschränkte Konvergenz)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer, und sei $B(\Omega)$ der Raum der auf $\Omega$ beschränkten messbaren Funktionen. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\Omega)$ heißt punktweise und gleichmäßig beschränkt konvergent gegen ein $f \in B(\Omega)$, wenn $f_n \longrightarrow f \quad (n \longrightarrow \infty)$ punktweise gilt, sowie $\sup_n \|f_n\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$.

**8.13 Lemma.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer, sowie $C(\Omega) \subset U \subset B(\Omega)$. Es sei $U$ abgeschlossen bzgl. punktweiser und gleichmäßig beschränkter Konvergenz, d.h. falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ punktweise und gleichmäßig beschränkt gegen $f \in B(\Omega)$ konvergiert, so folgt $f \in U$. Dann gilt bereits $U = B(\Omega)$.*

*Beweis.* (a) Sei $V$ der Durchschnitt aller Mengen $S$ mit $C(\Omega) \subset S \subset B(\Omega)$, welche abgeschlossen sind bzgl. punktweiser und gleichmäßig beschränkter Konvergenz. Wir werden zeigen, dass $V = B(\Omega)$ gilt, damit folgt auch $U = B(\Omega)$. Wegen $C(\Omega) \subset S$ für alle genannten $S$ ist offensichtlich $C(\Omega) \subset V$.

Wir zeigen, dass $V$ ein Vektorraum ist. Sei zunächst $f \in C(\Omega)$ fest. Dann gelten für $V_f := \{h \in B(\Omega)\colon f+h \in V\}$ die Eigenschaften $C(\Omega) \subset V_f$, und $V_f$ ist abgeschlossen bzgl. obiger Konvergenz. Damit folgt $V_f \supset V$.

Für jedes $g \in V$ und jedes $f \in C(\Omega)$ gilt also $g \in V_f$, d.h. $f + g \in V$. Damit ist $V_g \supset C(\Omega)$, und da $V_g$ ebenfalls abgeschlossen ist bzgl. obiger Konvergenz, folgt

$V_g \supset V$. Insgesamt erhalten wir $f+g \in V$ für alle $f, g \in V$. Genauso zeigt man, dass $V$ bzgl. Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

(b) Wir zeigen, dass $V = B(\Omega)$ gilt: Da die Stufenfunktionen im Raum $B(\Omega)$ der beschränkten messbaren Funktionen dicht liegen (im Sinne der punktweisen und gleichmäßig beschränkten Konvergenz), reicht es zu zeigen, dass jede Stufenfunktion in $V$ enthalten ist. Und dafür wiederum reicht es zu zeigen, dass jede charakteristische Funktion einer messbaren Menge in $V$ enthalten ist, denn $V$ ist ein Vektorraum. Dazu zeigen wir, dass jede charakteristische Funktion durch stetige Funktionen approximiert werden kann.

Sei also $\mathscr{B}(\Omega)$ die $\sigma$-Algebra der Borelmengen von $\Omega$ und

$$\mathscr{F} := \{A \in \mathscr{B}(\Omega) \colon \chi_A \in V\}.$$

Falls $A$ offen ist, existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ mit $0 \le f_n \le 1$ und $f_n(t) \longrightarrow \chi_A(t) \quad (n \longrightarrow \infty)$ für alle $t \in \Omega$. Wegen der Abgeschlossenheit von $V$ unter der obigen Konvergenz sind also alle offenen Mengen in $\mathscr{F}$ enthalten, insbesondere auch $X$.

Wir zeigen, dass folgende Aussagen gelten:

(i) Falls $A, B \in \mathscr{F}$ mit $A \subset B$, so ist auch $B \setminus A \in \mathscr{F}$. Denn es gilt $\chi_{B\setminus A} = \chi_B - \chi_A$, und da $V$ ein Vektorraum ist, folgt $\chi_{B\setminus A} \in V$.

(ii) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ paarweise disjunkt. Dann ist auch $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$. Denn es gilt $\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$, d.h. $\chi_A$ ist punktweiser Limes einer gleichmäßig beschränkten Folge von Funktionen in $V$ und damit selbst in $V$.

Die Eigenschaften (i) und (ii) sagen, dass $\mathscr{F}$ ein Dynkinsystemist. Dieses enthält die in $\Omega$ offenen Teilmengen. Sei nun $\mathscr{L}$ das System dieser offenen Teilmengen. Dann ist

$$\mathscr{F} \supset \mathscr{D}(\mathscr{L}) = \sigma(\mathscr{L}) = \mathscr{B}(\Omega) \supset \mathscr{F},$$

woraus sich $\mathscr{F} = \mathscr{B}(\Omega)$ ergibt. Also liegt jede Stufenfunktion in $V$, was zu zeigen war. □

**8.14 Satz** (Messbarer Funktionalkalkül). *Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert. Dann gibt es genau eine Abbildung $\Phi \colon B(\sigma(T)) \to L(X)$ mit*

(i) $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T,\ \Phi(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_X$.

(ii) *$\Phi$ ist ein stetiger $*$-Homomorphismus von $C^*$-Algebren, und es ist $\|\Phi(f)\|_{L(X)} \le \|f\|_\infty := \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

(iii) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\sigma(T))$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n(t) \longrightarrow f(t) \quad (t \in \sigma(T))$. Dann folgt $\langle \Phi(f_n)x, y\rangle \longrightarrow \langle \Phi(f)x, y\rangle \quad (x, y \in X)$.*

*Beweis.* Wir reservieren für die Dauer diese Beweises die Schreibweise $f(T)$ für stetige $f$; für messbare beschränkte Funktionen $f$ schreiben wir hingegen $\Phi(f)$.

**Schritt 1: Eindeutigkeit von $\Phi$:**

Durch (i)–(ii) wird $\Phi(f)$ für $f \in C(\sigma(T))$ bereits festgelegt (siehe Satz 8.6). Nach (iii) ist $\Phi$ eindeutig bestimmt für alle Funktionen, welche punktweiser Limes von stetigen Funktionen sind. Nach Lemma 8.13 ist dies aber schon $B(\sigma(T))$.

**Schritt 2: Konstruktion von $\Phi$:**

Seien $x, y \in X$. Dann definiert

$$\ell_{x,y} \colon C(\sigma(T)) \to \mathbb{C},\; f \mapsto \langle f(T)x, y\rangle$$

eine stetige Linearform. Dabei ist die Linearität klar, die Stetigkeit folgt aus

$$|\ell_{x,y}(f)| \le \|f(T)x\| \cdot \|y\| = \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\| .$$

Hier wurde der stetige Funktionalkalkül Satz 8.7 verwendet. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz 8.11 existiert ein komplexes Maß $\mu_{x,y} \in M(\sigma(T))$ mit

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \quad (f \in C(\sigma(T))) \tag{8-2}$$

Ebenfalls nach Satz 8.11 gilt $\|\mu_{x,y}\|_M = \|\ell_{x,y}\|_{(C(\sigma(T)))'} \le \|x\| \cdot \|y\|$. Die rechte Seite ist aber nicht nur für stetige $f$, sondern auch für beschränkte messbare $f \in B(\sigma(T))$ definiert. Für $f \in B(\sigma(T))$ betrachte also die Abbildung

$$(x, y) \mapsto \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y}.$$

Diese Abbildung ist bilinear, und wegen

$$\Big|\int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y}\Big| \le \|f\|_\infty \cdot \|\mu_{x,y}\|_M \le \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

auch stetig. Nach Lemma 8.8 über stetige Bilinearformen existiert also ein eindeutiger Operator $\Phi(f) \in L(X)$ mit $\|\Phi(f)\|_{L(X)} \le \|f\|_\infty$ und

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \quad (x, y \in X). \tag{8-3}$$

**Schritt 3: $\Phi \colon B(\sigma(T)) \to L(X)$ ist stetige lineare Abbildung mit (i):**

Die Linearität von $\Phi$ folgt aus (8-3), denn dort ist die rechte Seite in $f$ linear. Die Stetigkeit ergibt sich aus $\|\Phi(f)\|_{L(X)} \le \|f\|_\infty$ und Satz 2.6. Weil $\Phi(f) = f(T)$ für stetige $f$ gilt, haben wir auch (i).

**Schritt 4: $\Phi$ erfüllt (iii):**

Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$\langle \Phi(f_n)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f_n \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \longrightarrow \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \langle \Phi(f)x, y\rangle\,,$$

wenn die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise und gleichmäßig beschränkt nach $f$ konvergiert.

**Schritt 5: $\Phi$ ist ein $C^*$-Algebren-Homomorphismus:**

Sei $g \in C(\sigma(T))$ fest. Setze

$$U_g := \{f \in B(\sigma(T))\colon \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)\}.$$

Nach Satz 8.7 gilt $C(\sigma(T)) \subset U_g$. Wir zeigen, dass $U_g$ bzgl. punktweiser und gleichmäßig beschränkter Konvergenz abgeschlossen ist. Seien $f_n \in U_g$ mit $\sup_n \|f_n\|_{L^\infty} < \infty$ und $f = \lim_n f_n$ punktweise. Dann gilt nach (iii)

$$\langle \Phi(fg)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(f_n g)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(f_n)\Phi(g)x, y\rangle = \langle \Phi(f)\Phi(g)x, y\rangle\,.$$

Somit ist $f \in U_g$. Nach Lemma 8.13 folgt $U_g = B(\sigma(T))$, und deshalb gilt $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$, wenn eine der beiden Funktionen $f$, $g$ stetig ist, und die andere beschränkt und messbar. Eine Wiederholung dieser Argumentation zeigt dann, dass $\Phi$ multiplikativ ist. Genauso zeigt man $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$. □

Wir schreiben wieder $f(T)$ statt $\Phi(f)$, wenn $f$ beschränkt und messbar ist. Das nächste Lemma zeigt, dass sogar Konvergenz in der starken Operatortopologie vorliegt.

**8.15 Lemma.** *Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert und $B(\sigma(T)) \to L(X)$, $f \mapsto f(T)$ der messbare Funktionalkalkül. Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\sigma(T))$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n \longrightarrow f$ punktweise, so gilt $f_n(T)x \longrightarrow f(T)x$ für alle $x \in X$.*

*Beweis.* In einem Hilbertraum gilt $z_n \longrightarrow z$ in der Normtopologie genau dann, wenn $z_n \longrightarrow z$ in der schwachen Topologie und $\|z_n\| \longrightarrow \|z\|$ gilt. Dies folgt sofort aus

$$\|z_n - z\|^2 = \|z_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle z_n, z\rangle + \|z\|^2\,.$$

In der Situation von Satz 8.14 haben wir die schwache Konvergenz von $f_n(T)x$ gegen $f(T)x$ nach (iii). Die Konvergenz der Norm folgt aus

$$\begin{aligned}\|f_n(T)x\|^2 &= \langle f_n(T)x, f_n(T)x\rangle = \langle f_n(T)^* f_n(T)x, x\rangle = \big\langle (\overline{f}_n f_n)(T)x, x\big\rangle \\ &\to \big\langle (\overline{f} f)(T)x, x\big\rangle = \|f(T)x\|^2\,.\end{aligned}$$

□

## b) Orthogonale Projektionen

Im Folgenden sei $X$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum.

**8.16 Definition.** Sei $M \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann heißt $P\colon X \to X$, $x \mapsto x_1$ mit $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$, die orthogonale Projektion von $X$ auf $M$.

**8.17 Lemma.** a) *Sei $P$ eine orthogonale Projektion. Dann ist $P$ stetig mit*

$$\|P\| = \begin{cases} 1 & : M \neq \{0\}, \\ 0 & : M = \{0\}. \end{cases}$$

*Es gilt* $\ker P = M^\perp$ *und* $R(P) = M$.

b) *Ein Operator $P \in L(X)$ ist genau dann orthogonale Projektion, wenn $P^2 = P = P^*$.*

*Beweis.* **Schritt 1: Teil a):**

Es gilt unter Verwendung des Satzes von Pythagoras

$$\|Px\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

d.h. $P \in L(X)$ und $\|P\|_{L(X)} \leq 1$. Für $M = \{0\}$ ist $P = 0$. Sonst gilt für $x \in M \setminus \{0\}$ die Gleichheit $x = Px$ und damit $\|P\|_{L(X)} = 1$.

**Schritt 2: Teil b). Sei $P \in L(X)$ orthogonale Projektion:**

Die Gleichheit $P^2 = P$ ist klar nach Definition von $P$. Seien $x, y \in X$ mit $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, wobei $x_1, y_1 \in M$ und $x_2, y_2 \in M^\perp$. Dann gilt

$$\langle Px, y \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1 + y_1 \rangle + \underbrace{\langle x_1, y_2 \rangle}_{=0} = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, Py \rangle,$$

d.h. es ist tatsächlich $P = P^*$.

**Schritt 3: Teil b). Sei $P^2 = P = P^* \in L(X)$:**

Setze $M := R(P)$. Für eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $y_n \longrightarrow y$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $y_n = Px_n$, und es ist

$$Py_n = P^2 x_n = Px_n = y_n, \tag{8-4}$$

und damit

$$\|y_n - Py\| = \|P(y_n - y)\| \leq \|P\|_{L(X)} \cdot \|y_n - y\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),$$

d.h. $Py = y$ wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes. Somit ist $M$ abgeschlossen. Aus Satz 7.1 und $P = P^*$ folgt dann $M^\perp = \ker P$.

Weil $M$ abgeschlossen ist, existiert die orthogonale Projektion $\widetilde{P}$ auf den Unterraum $M$, und diese erfüllt $\widetilde{P} = \widetilde{P}^2 = \widetilde{P}^*$ wegen Schritt 2.

Für $x, y \in X$ haben wir die Zerlegungen

$$x = x^{(1)} + x^{(2)}, \qquad y = y^{(1)} + y^{(2)}, \qquad x^{(1)}, y^{(1)} \in M, \quad x^{(2)}, y^{(2)} \in M^\perp,$$

und es folgt, für beliebige $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{P}x, y \right\rangle &= \left\langle x, \widetilde{P}y \right\rangle && \Big| \quad \widetilde{P} = \widetilde{P}^* \\
&= \langle x, y^{(1)} \rangle = \langle x, P(y^{(1)} + y^{(2)}) \rangle && \Big| \quad (8\text{-}4) \text{ und } y^{(2)} \in \ker P \\
&= \langle Px, y \rangle && \Big| \quad P = P^*.
\end{aligned}$$

Also gilt $\widetilde{P} = P$, und $P$ ist eine orthogonale Projektion. □

**8.18 Lemma.** *Seien $P_1, P_2$ orthogonale Projektionen auf abgeschlossene Unterräume $M_1$ bzw. $M_2$.*

a) *$P_1P_2$ ist genau dann orthogonale Projektion, falls $P_1P_2 = P_2P_1$ gilt. In diesem Fall ist $P_1P_2$ orthogonale Projektion auf den Unterraum $M_1 \cap M_2$.*

b) *Es sind äquivalent:*

(i) *$M_1 \subset M_2$.*

(ii) *Es gilt $\|P_1x\| \le \|P_2x\| \quad (x \in X)$.*

(iii) *Es gilt $P_1 \leqslant P_2$ im Sinne von $\langle P_1x, x\rangle \le \langle P_2x, x\rangle \quad (x \in X)$.*

(iv) *Es gilt $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.*

*Beweis.* a) (i). Es gelte $P_1P_2 = P_2P_1$. Dann erhalten wir

$$(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2$$

und

$$(P_1P_2)^* = (P_2P_1)^* = P_1^*P_2^* = P_1P_2.$$

Also ist $P_1P_2$ eine orthogonale Projektion.

(ii). Sei $P_1P_2$ orthogonale Projektion. Dann gilt für $x, y \in X$

$$\langle x, P_2P_1y\rangle = \langle x, P_2^*P_1^*y\rangle = \langle P_1P_2x, y\rangle = \langle x, P_1P_2y\rangle.$$

Daher ist $P_1P_2 = P_2P_1$.

In diesem Fall gilt $R(P_2P_1) \subset R(P_2) = M_2$ und $R(P_2P_1) = R(P_1P_2) \subset M_1$. Zu $x \in M_1 \cap M_2$ ist $x = P_1x = P_2x$, d.h. $(P_2P_1)x = x$. Insgesamt erhalten wir $R(P_2P_1) = M_1 \cap M_2$.

Der Beweis von Teil b) sei als Übungsaufgabe überlassen. $\square$

**8.19 Lemma.** *Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X)$ eine Folge orthogonaler Projektionen mit $P_m \leqslant P_n$ für $m \leq n$. Dann konvergiert $P_n$ stark gegen eine orthogonale Projektion $P \in L(X)$.*

*Beweis.* Für $x \in X$ ist $(\|P_nx\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, monoton steigend (Lemma 8.18 b)), also konvergent. Für $m \leq n$ ist

$$\|P_nx - P_mx\|^2 = \underbrace{\langle P_nx, P_nx\rangle}_{=\|P_nx\|^2} - \underbrace{\langle P_nx, P_mx\rangle}_{=\langle P_mP_nx,x\rangle=\langle P_mx,x\rangle=\|P_mx\|^2} - \langle P_mx, P_nx\rangle + \underbrace{\langle P_mx, P_mx\rangle}_{=\|P_mx\|^2}$$
$$= \|P_nx\|^2 + \|P_mx\|^2 - 2\|P_mx\|^2 \longrightarrow 0 \quad (m, n \longrightarrow \infty).$$

Also existiert $\lim_{n\to\infty} P_nx \quad (x \in X)$, und der Grenzwert hängt linear von $x$ ab; wir können ihn also $Px$ nennen, mit $P \in L(X)$.

Es gilt $\langle Px, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_nx, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, P_ny\rangle = \langle x, Py\rangle$ und

$$\left\langle P^2x, y\right\rangle = \langle Px, Py\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_nx, P_ny\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_nx, y\rangle = \langle Px, y\rangle .$$

Somit gilt $P^2 = P = P^*$ und $P_n \xrightarrow{s} P$. $\square$

## c) Projektorwertige Maße und der Spektralsatz

**8.20 Definition.** Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung $E\colon \mathscr{A} \to L(X)$ heißt ein projektorwertiges Maß (PV-Maß), falls gilt:

(i) $E(A)$ ist orthogonale Projektion $(A \in \mathscr{A})$.

(ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\Big[E\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\Big]\, x = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(A_n)x \quad (x \in X).$$

(iii) Es gilt $E(\Omega) = \mathrm{id}_X$.

Eine Menge $A \in \mathscr{A}$ heißt eine $E$-Nullmenge, falls $E(A) = 0$ (dabei ist die 0 auf der rechten Seite der Nulloperator in $X$).

Falls $\Omega$ topologischer Raum ist und $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\Omega)$ die Borel–$\sigma$–Algebra, so besitzt das PV-Maß kompakten Träger, falls eine kompakte Menge $K \in \mathscr{B}(\Omega)$ existiert mit $E(K) = \mathrm{id}_X$.

**8.21 Beispiel.** Sei $X = \mathbb{C}^n$, und $T = T^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Wir wählen $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ als Borel–$\sigma$–Algebra. Für $A \in \mathscr{A}$ wählen wir $E(A)$ als den Projektor auf $\operatorname{span}\{u_j : \lambda_j \in A\}$, wobei $u_j$ ein (jetzt beliebiger) Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j$ sei. Dann ist $E$ ein projektorwertiges Maß. Die $E$-Nullmengen sind genau diejenigen messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$, die kein $\lambda_j$ enthalten.

**8.22 Bemerkung.** Sei $E$ ein PV-Maß. Dann gilt

a) $E(\emptyset) = 0_{L(X)}$.

b) $E(A \cup B) + E(A \cap B) = E(A) + E(B) \quad (A, B \in \mathscr{A})$.

c) $E(B \setminus A) = E(B) - E(A)$ für $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \subset B$.

d) Seien $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$. Dann ist $E(\bigcup_n A_n) = \text{s-lim}_n E(A_n)$, also mit Konvergenz in der starken Operatortopologie auf der rechten Seite.

Analog gilt für $A_n \in \mathscr{A}$ mit $A_n \supset A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$ die Gleichheit $E(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \text{s-lim}_{n\to\infty} E(A_n)$.

e) $E(A \cap B) = E(A)E(B) = E(B)E(A) \quad (A, B \in \mathscr{A})$.

f) Seien $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $R(E(A)) \perp R(E(B))$.

g) Sei $x \in X$. Dann ist $E_x : \mathscr{A} \to [0, \infty)$ mit

$$E_x(A) := \langle E(A)x, x\rangle = \|E(A)x\|^2$$

ein endliches Maß mit $\|E_x\|_M = E_x(\Omega) = \|x\|^2$.

h) Seien $x, y \in X$. Dann ist $E_{x,y} : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ mit

$$E_{x,y}(A) := \langle E(A)x, y\rangle$$

ein komplexes Maß mit $\|E_{x,y}\|_M \le \|x\| \cdot \|y\|$.

**8.23 Definition.** Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum, $E$ ein PV-Maß. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Stufenfunktion, d.h. es existiert eine Darstellung der Form $f = \sum_{i=1}^n f_i \chi_{A_i}$ mit $f_i \in \mathbb{C}$ und $A_i \in \mathscr{A}$ disjunkt. Dann heißt

$$\int f \,\mathrm{d}E := \sum_{i=1}^n f_i E(A_i) \in L(X)$$

das Integral von $f$ bzgl. $E$.

**8.24 Lemma.** *Sei $E$ ein PV-Maß und seien $f, g$ Stufenfunktionen.*

*a) Die Abbildung $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}E$ ist linear.*

*b) Für $x \in X$ gilt $\left\|(\int f \,\mathrm{d}E)x\right\|^2 = \int |f|^2 \,\mathrm{d}E_x \le \|f\|^2_{L^\infty(X)} \|x\|^2$.*

*c) Es gilt $(\int f \,\mathrm{d}E) \circ (\int g \,\mathrm{d}E) = \int fg \,\mathrm{d}E$.*

*d) Es gilt $(\int f \,\mathrm{d}E)^* = \int \overline{f} \,\mathrm{d}E$.*

*Beweis.* a) ist klar.

b) Unter Verwendung des Satzes von Pythagoras erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left\|\Big(\int f \,\mathrm{d}E\Big)x\right\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^n f_i E(A_i)x\right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \|E(A_i)x\|^2 = \int |f|^2 \,\mathrm{d}E_x \\
&\le \|f\|^2_\infty \|E_x\|_M = \|f\|^2_\infty \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

c) Mit Bemerkung 8.22 gilt

$$\begin{aligned}
\Big(\int f \,\mathrm{d}E\Big)\Big(\int g \,\mathrm{d}E\Big) &= \Big(\sum_{i=1}^n f_i E(A_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^m g_j E(B_j)\Big) \\
&= \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i)E(B_j) = \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i \cap B_j) \\
&= \int fg \,\mathrm{d}E.
\end{aligned}$$

d) folgt direkt aus der Definition des Integrals. □

**8.25 Definition.** Sei $E$ ein PV-Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$ mit Werten in $L(X)$. Für $f \in B(\Omega)$ sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\Omega)$ eine Folge von Stufenfunktionen, welche gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Definiere das Integral

$$\int f \,\mathrm{d}E := \int f(\lambda) \,\mathrm{d}E(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}E \in L(X),$$

mit Konvergenz in der starken Operatortopologie. Für $A \in \mathscr{A}$ setzt man $\int_A f \,\mathrm{d}E := \int \chi_A f \,\mathrm{d}E$.

**8.26 Bemerkung.** a) Man beachte, dass das Integral wegen Lemma 8.24 b) wohldefiniert ist.

b) Die Eigenschaften von Lemma 8.24 übertragen sich in üblicher Weise auf messbare Funktionen.

c) Falls $K \in \mathscr{A}$ ist mit $E(K) = \mathrm{id}_X$, so ist $\int f \,\mathrm{d}E = \int_K f \,\mathrm{d}E$ für alle $f \in B(\Omega)$ (denn $E(\Omega \setminus K) = 0$).

**8.27 Satz.** *Sei $E\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to L(X)$ ein PV-Maß, und sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $E(K) = \mathrm{id}_X$.*

*a) Durch $T := \int \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda)$ wird ein selbstadjungierter Operator $T \in L(X)$ definiert.*

*b) Es gilt $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_X$.*

*c) Die Abbildung $\Psi\colon B(\sigma(T)) \to L(X)$, $f \mapsto \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}E$ ist der (nach Satz 8.14 eindeutig bestimmte) messbare Funktionalkalkül zu $T$.*

*Beweis.* a) ist klar nach Definition des Integrals und nach Lemma 8.24 d) (für messbare Funktionen).

b) Wähle ein Intervall $(a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $K \subset (a, b]$, d.h. $E((a, b]) = \mathrm{id}_X$.

(i) Wir zeigen zuerst: Zu $\mu \in \rho(T)$ existiert eine offene Umgebung $U_\mu$ von $\mu$ mit $E(U_\mu) = 0_{L(X)}$. Dazu approximieren wir $\mathrm{id}_{(a,b]}$ durch eine Treppenfunktion $f$ mit äquidistanten Stufen, $f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{(a_{k-1},a_k]}$, wobei $a_k := a + k\delta \quad (k = 0, \ldots, N)$ mit $\delta = \frac{b-a}{N}$. Wenn wir $N \in \mathbb{N}$ passend wählen, ist $a_k \neq \mu$ für jedes $k$. Damit ist

$$\Big\| T - \int f \,\mathrm{d}E \Big\|_{L(X)} \leq \big\| \mathrm{id}_{(a,b]} - f \big\|_{L^\infty((a,b])} \leq \delta.$$

Wegen $\int f \,\mathrm{d}E = \sum_{k=1}^N a_k E((a_{k-1}, a_k])$ und $\sum_{k=1}^N E((a_{k-1}, a_k]) = \mathrm{id}_X$ folgt

$$\Big\| (\mu - T) - \sum_{k=1}^N (\mu - a_k) E((a_{k-1}, a_k]) \Big\|_{L(X)} \leq \delta.$$

Falls $\delta$ hinreichend klein ist (d.h. $N$ genügend groß), so ist der Operator $S := \sum_{k=1}^N (\mu - a_k) E((a_{k-1}, a_k])$ invertierbar, denn es ist $\mu - T$ invertierbar, und

$$S = (\mu - T) - ((\mu - T) - S) = (\mu - T)\Big[I - (\mu - T)^{-1}((\mu - T) - S)\Big],$$

wobei der Ausdruck $[\ldots]$ wegen Satz 3.13 invertierbar ist, und für $S^{-1}$ haben wir dann (wieder mit Satz 3.13)

$$S^{-1} = \Big[I - (\mu - T)^{-1}((\mu - T) - S)\Big]^{-1} (\mu - T)^{-1},$$

$$\begin{aligned}\|S^{-1}\|_{L(X)} &\le \frac{1}{1-\|(\mu-T)^{-1}((\mu-T)-S)\|_{L(X)}}\|(\mu-T)^{-1}\|_{L(X)}\\ &\le \frac{1}{1-\|(\mu-T)^{-1}\|_{L(X)}\cdot\delta}\|(\mu-T)^{-1}\|_{L(X)}\\ &\le \|(\mu-T)^{-1}\|_{L(X)}+1,\end{aligned}$$

wenn $\delta$ sehr klein ist. Aus Lemma 8.24 c) ist andererseits

$$S^{-1}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\mu-a_k}E((a_{k-1},a_k]).$$

In der Summe sind nur diejenigen $k$ relevant, für die $E((a_{k-1},a_k])\neq 0_{L(X)}$. Wenn wir dann ein $x\in R(E((a_{k-1},a_k]))$ wählen und $S^{-1}x$ bestimmen, erkennen wir, dass

$$\|S^{-1}\|_{L(X)}=\max\left\{\frac{1}{|\mu-a_k|}: E((a_{k-1},a_k])\neq 0_{L(X)}\right\},$$

und somit ist $E((a_{k-1},a_k])=0_{L(X)}$ für alle $k$ mit

$$|\mu-a_k|<\frac{1}{\|(\mu-T)^{-1}\|_{L(X)}+1},$$

d.h. es ist $E(U_\mu)=0_{L(X)}$ für eine offene Umgebung $U_\mu$ von $\mu$.

(ii) Falls $K\subset\rho(T)$ kompakt ist, ist $K\subset\bigcup_{\mu\in K}U_\mu$ eine offene Überdeckung mit $E(U_\mu)=0_{L(X)}$ für alle $\mu$. Durch die Kompaktheit gibt es eine endliche Teilüberdeckung $K\subset\sum_{i=1}^n U_{\mu_i}$, und $0_{L(X)}\leqslant E(K)\leqslant\sum_{i=1}^n E(U_{\mu_i})=0_{L(X)}$, also $E(K)=0_{L(X)}$.

(iii) Schreibe $\rho(T)$ als abzählbare Vereinigung aufsteigender kompakter Mengen $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Dann folgt $E(\rho(T))x=\lim_{j\to\infty}E(K_j)x=0$ für alle $x\in X$, d.h. $E(\rho(T))=0_{L(X)}$ und damit $E(\sigma(T))=\mathrm{id}_X$.

c) Wir rechnen die Eigenschaften von Satz 8.14 nach. Dabei ist $\Psi(\mathrm{id}_{\sigma(T)})=T$ nach Definition von $T$, und $\Psi(\mathbf{1}_{\sigma(T)})=\mathrm{id}_X$ gilt nach b). Dass $\Psi$ stetiger Homomorphismus von C*-Algebren ist, ist klar nach Lemma 8.24 für messbare Funktionen.

Für die letzte Eigenschaft in Satz 8.14 benutzen wir das Maß $E_{x,y}$ aus Bemerkung 8.22 h). Es gilt

$$\Big\langle\Big(\int f\,\mathrm{d}E\Big)x,y\Big\rangle=\int f\,\mathrm{d}E_{x,y}.$$

Dies ist klar für Treppenfunktionen und folgt durch Approximation für messbare Funktionen. Nun folgt 8.14 (iii) aus dem Satz über majorisierte Konvergenz.

Damit erfüllt $\Psi$ alle Eigenschaften aus Satz 8.14 und stimmt daher mit dem messbaren Funktionalkalkül überein. □

An dieser Stelle einige Erklärungen zu unserer jetzigen Strategie. Der messbare Funktionalkalkül gemäß Satz 8.14 sagt uns, dass es einen selbstadjungierten Operator $f(T)$ gibt, wenn $f$ beschränkt und messbar ist, und $T$ ist selbstadjungiert und beschränkt. Wir haben aber noch keine „schöne“ Darstellung für diesen Operator $f(T)$. Eine erste Verbesserung dieser Situation ergibt sich aus Satz 8.27: Sei ein PV-Maß $E$ gegeben. Daraus wird gemäß Teil a) ein beschränkter selbstadjungierter Operator $T$ gebaut, und für diesen Operator bekommen wir dann in Teil c) eine explizite Darstellung von $f(T)$.

Im folgenden Beispiel gehen wir ein wenig anders vor: wir starten mit einem beschränkten selbstadjungierten Operator $T$, und zu diesem $T$ erraten wir ein PV-Maß $E$, welches den Operator $T$ dann erneut gemäß Satz 8.27 Teil a) erzeugt. In Satz 8.30 werden wir dann erkennen, dass dieses PV-Maß $E$ tatsächlich das einzige mit den gewünschten Eigenschaften ist.

**8.28 Beispiel** (Multiplikationsoperator)**.** Sei $X = L^2([0,1])$ und sei $T \in L(X)$ mit $(Tx)(t) := t \cdot x(t)$. Dann ist $T$ selbstadjungiert mit $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0,1]$.

Für $x, y \in L^2([0,1])$ gilt

$$\langle Tx, y\rangle = \int_0^1 (Tx)(t) \cdot \overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tx(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\sigma(T)} \lambda\,\mathrm{d}E_{x,y}(\lambda)$$

mit dem Maß $E_{x,y}(\lambda) = x(\lambda)\overline{y(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda$. Das Maß $E_{x,y}$ besitzt also eine Dichte bezüglich des Lebesgue–Maßes. Für das Maß erhalten wir somit

$$E_{x,y}(A) = \int_{[0,1]\cap A} x(\lambda)\overline{y(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda = \big\langle \chi_{[0,1]\cap A} \cdot x, y\big\rangle \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})),$$

d.h. $E(A)x = \chi_{[0,1]\cap A} \cdot x$. Die Projektion $E(A)$ ist damit gegeben als Multiplikationsoperator mit $\chi_{[0,1]\cap A}$.

**8.29 Satz** (Spektrum und Spektralmaß)**.** *Sei $E$ ein PV-Maß, sodass für ein kompaktes $K \subset \mathbb{R}$ die Beziehung $E(K) = \mathrm{id}_X$ gilt; und ein beschränkter selbstadjungierter Operator $T$ sei definiert als $T := \int \lambda\,\mathrm{d}E(\lambda)$, siehe Satz 8.27 Teil a).*

*Für das Spektrum dieses Operators $T$ gilt dann folgendes:*

*a) Für $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ist $\lambda_0 \in \rho(T)$ genau dann, falls eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von $\lambda_0$ existiert mit $E(U) = 0_{L(X)}$.*

*b) Es ist $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ genau dann, wenn $E(\{\lambda_0\}) \neq 0_{L(X)}$. Für alle $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gilt $R(E(\{\lambda_0\})) = \ker(T - \lambda_0)$.*

*c) Es ist $\lambda_0 \in \sigma_c(T)$ genau dann, wenn $E(\{\lambda_0\}) = 0_{L(X)}$ und $E((\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)) \neq 0_{L(X)}$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt.*

*Beweis.* **Teil a):**

Wir wissen bereits aus $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_X$, dass $E(\rho(T)) = 0_{L(X)}$. Dann ist auch $E(U) = 0_{L(X)}$ für alle offenen $U \subset \rho(T)$.

Sei andererseits $U \subset \mathbb{R}$ eine (o.E. offene) Umgebung von $\lambda_0$ mit $E(U) = 0_{L(X)}$. Definiere $f, g \in B(\sigma(T))$ durch $f(\lambda) := \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \cdot \chi_{\sigma(T)\setminus U}$ und $g(\lambda) := (\lambda - \lambda_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(T)(T-\lambda_0) &= f(T)g(T) = (f\cdot g)(T) = \chi_{\sigma(T)\setminus U}(T) \\ &= \int \chi_{\sigma(T)\setminus U}\,\mathrm{d}E = E(\sigma(T)\setminus U) = \mathrm{id}_X\,. \end{aligned}$$

Wegen $f(T)g(T) = g(T)f(T)$ folgt $g(T)f(T) = \mathrm{id}_X$, d.h. $f(T) = g(T)^{-1} = (T-\lambda_0)^{-1}$. Somit ist $\lambda_0 \in \rho(T)$.

**Teil b), sei $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$:**

Dann existiert ein $x \neq 0$ mit $(T-\lambda_0)x = 0$, und aus Satz 8.7 d) folgt dann $f(T)x = f(\lambda_0)x$ für alle $f \in C(\sigma(T))$, und nach Lemma 8.15 für alle $f \in B(\sigma(T))$. Wir wählen jetzt $f = \chi_{\{\lambda_0\}}$, was eine Stufenfunktion ist. Dann haben wir

$$x = 1\cdot x = f(\lambda_0)x = f(T)x = \left(\int f\,\mathrm{d}E\right)x = 1\cdot E(\{\lambda_0\})x \in R(E(\{\lambda_0\})),$$

und somit ist $\{0\} \neq \ker(T-\lambda_0) \subset R(E(\{\lambda_0\}))$, also $E(\{\lambda_0\}) \neq 0_{L(X)}$.

**Teil b), sei $E(\{\lambda_0\}) \neq 0_{L(X)}$:**

Dann existiert ein $x \neq 0$ mit $x \in R(E(\{\lambda_0\}))$. Weil $E(\{\lambda_0\})$ ein Projektor ist, haben wir dann $E(\{\lambda_0\})x = x$, für dieses spezielle $x$.

Falls $f$ eine Stufenfunktion ist, gilt

$$f(T)x = \left(\int f\,\mathrm{d}E\right)x = \sum_{i=1}^{N} f_i E(A_i)x = \sum_{i=1}^{N} f_i E(A_i)E(\{\lambda_0\})x = f(\lambda_0)x.$$

Daraus und aus Lemma 8.15 bekommen wir die Identität $f(T)x = f(\lambda_0)x$ dann für beliebiges $f \in B(\sigma(T))$.

Nun wählen wir $f = \mathrm{id}_{\sigma(T)}$ und erhalten

$$Tx = \mathrm{id}_{\sigma(T)}(T)x = \mathrm{id}_{\sigma(T)}(\lambda_0)x = \lambda_0 x,$$

also folgt $x \in \ker(T-\lambda_0)$, und demnach also $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ sowie $R(E(\{\lambda_0\})) \subset \ker(T-\lambda_0)$.

**Teil b), Abschluss:**

Wir haben gezeigt: es ist $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ genau dann, wenn $E(\{\lambda_0\}) \neq 0_{L(X)}$, sowie $\ker(T-\lambda_0) \subset R(E(\{\lambda_0\})) \subset \ker(T-\lambda_0)$. Also $R(E(\{\lambda_0\})) = \ker(T-\lambda_0)$.

**Teil c):**

Weil $T$ selbstadjungiert ist, gilt $\sigma_r(T) = \emptyset$, also $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \cap \rho(T)) \dot\cup \sigma_p(T) \dot\cup \sigma_c(T)$. Nun wende man a) und b) an. □

Der nächste Satz ist der Höhepunkt dieses Kapitels. Hierbei ist die Vorgehensweise im Vergleich zu Satz 8.27 und Satz 8.29 genau umgekehrt: wir starten mit einem beschränkten und selbstadjungierten Operator $T$. Anschließend ermitteln wir ein PV-Maß $E$, das diesen Operator $T$ erzeugt. Hierbei ist Satz 8.29 hilfreich, der uns (vom Spektrum $\sigma(T)$ ausgehend) einige Informationen darüber liefert, wie $E$ aussehen muss. Weiterhin gewinnen wir eine leistungsfähige Darstellung für den messbaren Funktionalkalkül zu $T$.

**8.30 Satz** (Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren)**.** *Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes PV-Maß $E$ auf $\mathscr{B}(\sigma(T))$ mit*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda).$$

*Die Abbildung $B(\sigma(T)) \to L(X)$, $f \mapsto f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)$ definiert den messbaren Funktionalkalkül zu $T$. Für $f \in B(\sigma(T))$ und $x, y \in X$ gilt*

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_{x,y}(\lambda),$$

*wobei $E_{x,y}(A) := \langle E(A)x, y\rangle$ für $x, y \in X$ und $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ das übliche komplexwertige Maß ist.*

*Beweis.* **Schritt 1: Konstruktion von $E$:**

Sei $f \mapsto f(T)$ der messbare Funktionalkalkül nach Satz 8.14. Für $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ definiere

$$E(A) := \chi_A(T).$$

**Schritt 2: $E$ ist PV-Maß:**

(i) Wegen $\chi_A = \chi_A^2 = \overline{\chi}_A$ gilt $E(A) = E(A)^2 = E(A)^*$, d.h. $E(A)$ ist eine orthogonale Projektion.

(ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}(\sigma(T))$ eine Familie paarweiser disjunkter Mengen. Die Funktionen $f_n := \sum_{j=1}^n \chi_{A_j}$ konvergieren punktweise und gleichmäßig beschränkt gegen $f := \sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j} = \chi_A$ mit $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_n$. Nach Lemma 8.15 folgt

$$\sum_{j=1}^\infty E(A_j)x = \sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j}(T)x = \chi_A(T)x = E(A)x \quad (x \in X).$$

(iii) Nach Satz 8.14 gilt $E(\sigma(T)) = \mathbf{1}_{\sigma(T)}(T) = \mathrm{id}_X$.

Nach (i)–(iii) ist $E\colon \mathscr{B}(\sigma(T)) \to L(X)$ ein PV-Maß.

**Schritt 3: $E$ erzeugt $T$:**

Definiere den Operator $S := \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$ nach Satz 8.27. Es ist zu zeigen, dass $S = T$. Sei $f \mapsto \Psi(f) := \int_{\sigma(T)} f \, \mathrm{d}E$ der diesem $S$ zugehörige messbare Funktionalkalkül nach Satz 8.27, und $f \mapsto f(T)$ der zu $T$ gehörige Funktionalkalkül nach Satz 8.14.

Wähle jetzt eine Treppenfunktion $f$ auf $\sigma(T)$ mit $\left\| f - \mathrm{id}_{\sigma(T)} \right\|_{L^\infty(\sigma(T))} \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$\|T - S\|_{L(X)} \leq \|T - f(T)\|_{L(X)} + \|f(T) - \Psi(f)\|_{L(X)} + \|\Psi(f) - S\|_{L(X)}.$$

Nach Satz 8.14 ist

$$\|T - f(T)\|_{L(X)} \leq \left\| \mathrm{id}_{\sigma(T)} - f \right\|_{L^\infty(\sigma(T))} \leq \varepsilon.$$

Ebenso ist nach Lemma 8.24 b)

$$\|S - \Psi(f)\|_{L(X)} = \left\| \int_{\sigma(T)} (\lambda - f(\lambda)) \, \mathrm{d}E(\lambda) \right\|_{L(X)} \leq \left\| \mathrm{id}_{\sigma(T)} - f \right\|_{L^\infty(\sigma(T))} \leq \varepsilon.$$

Schließlich ist

$$f(T) - \Psi(f) = \sum_{j=1}^{n} f_i \chi_{A_i}(T) - \sum_{j=1}^{n} f_i E(A_i) = 0_{L(X)}.$$

Insgesamt erhalten wir $\|T - S\|_{L(X)} \leq 2\varepsilon$, d.h. $T = S$.

**Schritt 4: $E$ ist eindeutig:**

Sei $\widetilde{E}$ ein weiteres PV-Maß auf $\mathscr{B}(\sigma(T))$ und $T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}\widetilde{E}(\lambda)$. Für jedes $f \in B(\sigma(T))$ ist dann (vgl. Satz 8.27 c))

$$\int_{\sigma(T)} f(\lambda) \, \mathrm{d}E = f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) \, \mathrm{d}\widetilde{E}.$$

Für $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ wählen wir die Stufenfunktion $f = \chi_A$, und es ergibt sich

$$E(A) = \chi_A(T) = \widetilde{E}(A),$$

also ist tatsächlich $E = \widetilde{E}$. □

**8.31 Lemma.** *Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert, $E$ das zugehörige PV-Maß, und $S \in L(X)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $ST = TS$,

(ii) *für alle $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ gilt $SE(A) = E(A)S$,*

(iii) *für alle $f \in B(\sigma(T))$ gilt $Sf(T) = f(T)S$.*

*Beweis.* **(i)⟹(ii):**

Aus $ST = TS$ folgt $ST^n = T^nS$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\langle ST^n x, y\rangle = \langle T^n Sx, y\rangle \quad (x, y \in X, n \geq 0). \tag{8-5}$$

Wir wissen bereits, dass $E$ durch die Familie komplexer Maße $E_{x,y}$ mit $x, y \in X$ eindeutig bestimmt ist, vermöge der Relation $\langle E(A)x, y\rangle = E_{x,y}(A)$. Wegen $\langle SE(A)x, y\rangle = \langle E(A)x, S^*y\rangle$ ist auch $A \mapsto \langle SE(A)x, y\rangle$ ein komplexes Maß. Für alle $x, y \in X$ und $n \in \mathbb{N}_0$ haben wir, mit $f(s) := s^n$, dem Spektralsatz und (8-5),

$$\begin{aligned}\int \lambda^n \,\mathrm{d}\,\langle SE(\lambda)x, y\rangle &= \int f(\lambda)\,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)x, S^*y\rangle = \int f(\lambda)\,\mathrm{d}E_{x,S^*y} \\ &= \langle f(T)x, S^*y\rangle = \langle ST^n x, y\rangle = \langle T^n Sx, y\rangle = \langle f(T)Sx, y\rangle \\ &= \int f(\lambda)\,\mathrm{d}E_{Sx,y} = \int \lambda^n \,\mathrm{d}\,\langle E(\lambda)Sx, y\rangle\,.\end{aligned} \tag{8-6}$$

Also stimmen die Maße $\mu^{(1)}_{x,y}(A) := \langle SE(A)x, y\rangle$ und $\mu^{(2)}_{x,y}(A) := \langle E(A)Sx, y\rangle$ als Funktionale überein auf den Polynomen $\lambda^n$ und damit auf den stetigen Funktionen $f \in C(\sigma(T))$ (Satz von Weierstraß). Nach dem Darstellungssatz von Riesz (Satz 8.11) sind die Maße gleich. Damit ergibt sich aus (8-6), dass

$$\langle SE(A)x, y\rangle = \langle E(A)Sx, y\rangle \quad (x, y \in X,\ A \in \mathscr{B}(\sigma(T))),$$

d.h. es gilt $SE(A) = E(A)S$ für alle $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$.

**(ii)⟹(iii):**

Folgt aus $\langle Sf(T)x, y\rangle = \int f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu^{(1)}_{x,y}(\lambda)$ und der Beziehung $\langle f(T)Sx, y\rangle = \int f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu^{(2)}_{x,y}(\lambda)$, vgl. die obige Rechnung. Wegen $SE(A) = E(A)S$ sind die beiden Maße gleich, also erhalten wir $\langle Sf(T)x, y\rangle = \langle f(T)Sx, y\rangle$.

**(iii)⟹(i):**

Setze $f := \mathrm{id}_{\sigma(T)}$. □

**8.32 Beispiel.** Sei $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine selbstadjungierte Matrix mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Sei $E(\{\mu_j\})$ die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum $\ker(\mu_j - T)$. Dann gilt

$$T = \sum_{j=1}^{m} \mu_j E(\{\mu_j\}) = \int_{\sigma(T)} \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda),$$

wobei das PV-Maß zu $T$ gegeben ist durch

$$E(A) = \sum_{j=1}^{m} E(A \cap \{\mu_j\}) = \sum_{\{j\colon \mu_j \in A\}} E(\{\mu_j\}) \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})).$$

**8.33 Lemma.** *Sei $A \in L(X)$ selbstadjungiert mit $A \geqslant 0_{L(X)}$. Dann existiert genau ein selbstadjungiertes $B \in L(X)$ mit $B \geqslant 0_{L(X)}$ und $B^2 = A$. Der Operator $B$ heißt die Wurzel von $A$. Insbesondere existiert zu jedem Operator $A \in L(X)$ der Absolutbetrag $|A| := \sqrt{A^*A}$.*

*Beweis.* Der Operator $B := \sqrt{A}$ erfüllt $B \geqslant 0_{L(X)}$ und $B^2 = A$ nach dem Spektralsatz. Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit. Sei also $\widetilde{B} \geqslant 0_{L(X)}$ mit $\widetilde{B}^2 = A$. Wähle $b \in \mathbb{R}$ mit $b > M := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$ und $b > \big\|\widetilde{B}\big\|_{L(X)}^2$. Sei weiterhin $m := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$.

Zur Funktion $g(t) := \sqrt{t}$ existiert nach dem Satz von Weierstraß eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen mit $\|p_n - g\|_{L^\infty} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$ im Intervall $[0, b] \supset [m, M]$. Damit gilt

$$\|p_n(A) - B\|_{L(X)} = \|p_n(A) - g(A)\|_{L(X)} \longrightarrow 0. \tag{8-7}$$

Setze $\widetilde{p}_n(t) := p_n(t^2)$ und $\widetilde{g}(t) := g(t^2)(= t)$. Dann ist

$$\|\widetilde{p}_n - \widetilde{g}\|_{L^\infty([0,\sqrt{b}])} = \|p_n - g\|_{L^\infty([0,b])} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Wir erinnern daran, dass

$$\big[0, \sqrt{b}\big] \supset \Big[0, \big\|\widetilde{B}\big\|_{L(X)}\Big].$$

Nach dem Funktionalkalkül gilt, für $n \longrightarrow \infty$,

$$\Big\|\widetilde{p}_n(\widetilde{B}) - \widetilde{B}\Big\|_{L(X)} = \Big\|\widetilde{p}_n(\widetilde{B}) - \widetilde{g}(\widetilde{B})\Big\|_{L(X)} = \|\widetilde{p}_n - \widetilde{g}\|_{L^\infty([0,\sqrt{b}])} \longrightarrow 0. \tag{8-8}$$

Aber es ist $\widetilde{p}_n(\widetilde{B}) = p_n(\widetilde{B}^2) = p_n(A)$. Somit folgt aus (8-7) und (8-8) die Gleichheit $\widetilde{B} = g(A) = B$. □

**8.34 Lemma.** *Seien $A, B \in L(X)$ selbstadjungiert mit $A \geqslant 0_{L(X)}$, $B \geqslant 0_{L(X)}$ und $AB = BA$. Dann ist $AB \geqslant 0_{L(X)}$.*

*Beweis.* Es ist $\sqrt{B}$ selbstadjungiert, und

$$AB = A\sqrt{B}\sqrt{B} = \sqrt{B}A\sqrt{B} \geqslant 0_{L(X)}$$

wegen

$$\left\langle \sqrt{B}A\sqrt{B}x, x\right\rangle = \left\langle A\sqrt{B}x, \sqrt{B}x\right\rangle \geq 0 \quad (x \in X).$$

Hier wurde verwendet, dass $A$ und $\sqrt{B}$ vertauschen (Lemma 8.31). □

**8.35 Bemerkung.** Aus dem Spektralsatz folgt eine ganze Reihe von Aussagen über Spektren und Normen von Operatoren. So gilt zum Beispiel:

a) Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert und $\lambda_0 \in \rho(T)$. Dann gilt

$$\left\|(T-\lambda_0)^{-1}\right\|_{L(X)} = \left[\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T))\right]^{-1}.$$

Denn die rechte Seite ist $\|f\|_{L^\infty}$ für die Funktion $f \in C(\sigma(T))$ mit $f(\lambda) := \frac{1}{\lambda-\lambda_0}$. Vergleiche dazu Satz 7.4.

b) Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert und $f \in C(\sigma(T))$. Dann ist $\|f(T)\|_{L(X)} = \max\{|\lambda|\colon \lambda \in \sigma(T)\} = \|f\|_{L^\infty}$. Denn das Maximum ist der Spektralradius von $T$ und $\|f(T)\|_{L(X)} = \|f\|_{L^\infty}$ nach dem stetigen Funktionalkalkül. (Vergleiche Satz 7.12.) Insbesondere folgt aus der Darstellung $T = \int_K \lambda\, \mathrm{d}E(\lambda)$ bereits $\|T\|_{L(X)} \leq \max\{|\lambda|\colon \lambda \in K\}$.

**8.36 Bemerkung.** Ein weiteres Ergebnis ist die folgende Zerlegung eines Operators, auch bekannt als polare Zerlegung (vgl. [16]).

Sei $T \in L(X)$. Dann gilt:

- es existiert eine partielle Isometrie $U \in L(X)$ mit $T = U\sqrt{T^*T}$.
- es existiert genau eine partielle Isometrie $U \in L(X)$ mit $T = U\sqrt{T^*T}$ und $\ker U = \ker T$.
- wenn $T$ normal ist, so gibt es ein unitäres $U$ mit $T = U\sqrt{T^*T}$.

Hierbei heißt ein Operator $U \in L(X)$ eine partielle Isometrie, wenn $U$ eine Isometrie auf dem Teilraum $(\ker U)^\perp$ ist.

Man denke an die Zerlegung $z = e^{\mathrm{i}\varphi}|z|$ für jede komplexe Zahl $z$.

**8.37 Bemerkung.** Der Spektralsatz wird häufig auch mit Hilfe von Spektralscharen formuliert. Dabei heißt eine Familie $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \subset L(X)$ eine Spektralschar, falls gilt:

(i) $F_\lambda$ ist orthogonaler Projektor für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $F_\mu F_\lambda = F_\lambda F_\mu = F_\mu$ für alle $\mu \leq \lambda$.

(iii) $F_\mu x \to F_\lambda x$ für $\mu \searrow \lambda$ $(x \in X)$ (Rechtsstetigkeit).

(iv) $F_\lambda x \longrightarrow 0$ für $\lambda \longrightarrow -\infty$ $(x \in X)$.

(v) $F_\lambda x \longrightarrow x$ für $\lambda \longrightarrow +\infty$ $(x \in X)$.

Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert und $E$ das zugehörige PV-Maß. Dann wird durch

$$F_\lambda := E((-\infty, \lambda]) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

eine Spektralschar definiert. Definiert man das Integral über Spektralscharen geeignet (etwa im Sinne eines Riemann–Stieltjes–Integrals), so gilt

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}F_\lambda.$$

Die Spektralscharen entsprechen den Verteilungsfunktionen in der Wahrscheinlichkeitstheorie, die Darstellung von $T$ durch Spektralscharen ist äquivalent zur Darstellung durch PV-Maße.

Der Spektralsatz wurde oben für beschränkte selbstadjungierte Operatoren formuliert. Tatsächlich gilt dieser Satz aber für allgemeinere Operatoren: Zum einen kann die Selbstadjungiertheit $T = T^*$ durch die Normalität $TT^* = T^*T$ des Operators $T$ ersetzt werden, zum anderen kann $T$ auch unbeschränkt sein. Man beachte, dass zwei unbeschränkte Operatoren genau dann gleich sind, wenn sie gleichen Definitionsbereich besitzen und auf diesem übereinstimmen. Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen, der wesentliche Teil des Beweises wurde aber oben schon durchgeführt.

**8.38 Definition und Satz** (Integral über PV-Maß für messbare Funktionen)**.** *Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum, $E\colon \mathscr{A} \to L(X)$ ein PV-Maß. Zu $x \in X$ sei wieder $E_x\colon \mathscr{A} \to [0,\infty)$ durch $E_x(A) := \|E(A)x\|^2$ definiert. Sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ messbar.*

*Definiere*

$$D\Big(\int f \, \mathrm{d}E\Big) := \Big\{ x \in X\colon \int |f|^2 \, \mathrm{d}E_x < \infty \Big\}.$$

*Dann existiert für alle $x \in D(\int f \, \mathrm{d}E)$ eine Folge von Stufenfunktionen $f_n\colon X \to \mathbb{C}$ mit $f_n \longrightarrow f$ punktweise und $\int |f_n - f|^2 \, \mathrm{d}E_x \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$, und der Operator*

$$\int f \, \mathrm{d}E\colon X \supset D\Big(\int f \, \mathrm{d}E\Big) \to X, \; x \mapsto \Big(\int f \, \mathrm{d}E\Big) x := \lim_{n\to\infty} \Big(\int f_n \, \mathrm{d}E\Big) x$$

*ist wohldefiniert.*

**8.39 Satz** (Spektralsatz, allgemeine Formulierung)**.** *Sei $X$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein normaler Operator in $X$. Dann existiert genau ein PV-Maß $E\colon \mathscr{B}(\sigma(T)) \to L(X)$ mit*

$$T = \int_{\sigma(T)} \mathrm{id}_{\sigma(T)} \, \mathrm{d}E.$$

*Für jede messbare Funktion* $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ *wird durch*

$$\begin{aligned} f(T) &:= \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}E, \\ D(f(T)) &:= \Big\{ x \in X\colon \int_{\sigma(T)} |f|^2 \,\mathrm{d}E_x < \infty \Big\} \end{aligned}$$

*ein normaler Operator definiert. Es gelten die üblichen Regeln für den Funktionalkalkül. Falls* $f$ *ein Polynom ist, stimmt* $f(T)$ *mit der üblichen Definition überein.*

# Literatur

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York 1975.

[2] Diestel, J., Uhl, J. J.: Vector measures. Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[3] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators. I. General Theory. Interscience Publishers, New York 1963.

[4] Edwards, R. E.: Functional analysis. Theory and applications. Dover, New York 1995.

[5] Gohberg, I., Goldberg, S.: Basic operator theory. Birkhäuser Boston 1981.

[6] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: Classes of linear operators. Vol. I. Birkhäuser Basel 1990.

[7] Halmos, P.: A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin 1974.

[8] Heuser, H.: Funktionalanalysis. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart 1986.

[9] Hirzebruch, F., Scharlau, W.: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibliogr. Inst. Mannheim 1971.

[10] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer Berlin 1976.

[11] Pazy, A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, Berlin et al. 1983.

[12] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Academic Press San Diego 1980.

[13] Rudin, W.: Functional analysis. McGraw-Hill New York 1973.

[14] Rudin, W.: Real and complex analysis. McGraw-Hill New York 1986.

[15] Schaefer, H.H., Wolff, M.P.: Topological vector spaces. Springer Berlin, 1999.

[16] Schröder, H.: Funktionalanalysis. Akademie Verlag Berlin, 1997.

[17] Werner, D.: Funktionalanalysis (5., erw. Aufl.). Springer Berlin 2005.

[18] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin et al. 1965.

# Index


$\varepsilon$-Netz, 8

Abbildung
    offene, 1
    stetige, 1
abgeschlossen (Menge), 2
abgeschlossen (Operator), 30
Ableitung einer Distribution, 45
abschließbar, 30
Abschließung (Operator), 30
Abschluss
    einer Menge, 2
adjungierter Operator
    beschränkte Operatoren, 39, 41
    unbeschränkte Operatoren, 40, 41

Banachalgebra, 67
Banachraum, 11
Banachscher Fixpunktsatz, 7
beschränkt, 6
Bilinearform, 72

$C^*$-Algebra, 67
Cauchyfolge, 6

direkte Summe von Banachräumen, 15
Distribution, 43
    Dirac-, 44
    reguläre, 43
Dualraum
    algebraischer, 13
    topologischer, 12
Dynkinsystem, 74

Eigenraum
    algebraischer, 31
    geometrischer, 31

folgenkompakt, 8
Funktionalkalkül
    messbarer, 74
    stetiger, 69

Gleichung
    Parsevalsche, 26
Graphennorm, 30
Grenzwert, 3

Häufungspunkt, 3
Halbnorm, 11
Halbordnung, 23
Hilbertraum, 18
Hilbertraumbasis, 23
Hilbertraumdimension, 27
Homöomorphismus, 1

Inneres einer Menge, 2
Integral bzgl. PV-Maß, 81, 91
Involution, 67
Isometrie, 6
Isomorphismus
    isometrischer, 6

Kern, 12
Kette, 23
kompakt, 7
    folgen-, 8
    prä-, 9
konvex, 19
Kugel, 4

Lemma
    von Urysohn, 3
    von Zorn, 23
lokal-endliche Überdeckung, 49
$L^p$-Raum, 17
$\ell^p$-Raum, 17

Maß
    komplexes, 72
    projektorwertiges, 79
    PV-, 79
    signiertes, 72
    Variations-, 73
maximales Element, 23

Metrik, 4
- diskrete, 4
- Standard-, 4

metrisierbar, 5
Multiindex-Schreibweise, 42

Neumannsche Reihe, 32
Norm, 11
numerischer Wertebereich, 63

obere Schranke, 23
offen (Menge), 2
- in metrischen Räumen, 4

offene Überdeckung, 7
Operator
- Ableitungs-, 29
- kompakter, 49
- linearer, 29
- Multiplikations-, 65, 84
- Shift-, 29
- Volterra-, 65

Operatornorm, 12
orthogonal, 18
orthogonale Projektion, 77
orthogonales Komplement, 19
Orthonormalbasis, 23

Parallelogramm-Identität, 19
Personen
- Banach, Stefan, 7
- Hausdorff, Felix, 3
- Hilbert, David, 18

Polarisationsformel, 19
Prähilbertraum, 17
präkompakt, 9
Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, 53
Prinzip der offenen Abbildung, 55
Produkttopologie, 1

Quotientenraum, 15

Raum
- Hausdorff-, 3
- Hilbert-, 18
- metrischer, 4
- normaler, 3
- normierter, 11
- Prä-Hilbert-, 18
- topologischer, 1

reflexiv, 38
Resolvente, 31
Resolventenabbildung, 31
Resolventenmenge, 31

Satz
- Approximations-, 20
- Banachscher Fixpunkt-, 7
- Projektions-, 21
- Rieszscher Darstellungs-, 73
- Sobolevscher Einbettungs-, 49
- Spektralabbildungs-, 68, 70
- vom abgeschlossenen Graphen, 58
- von Baire, 52
- von Banach–Steinhaus, 54
- von Hahn-Banach, komplex, 36
- von Hahn-Banach, reell, 35
- von Hellinger-Toeplitz, 58
- von Pythagoras, 18
- von Rellich-Kondrachov, 49
- von Riesz, 21
- von Tychonov, 10

Segmenteigenschaft, 49
Seminorm, 11
separabel, 2
Skalarprodukt, 17
Sobolevraum, 45
Spektralradius, 64
Spektralsatz
- beschränkte Operatoren, 86
- unbeschränkte Operatoren, 91

Spektralschar, 90
Spektrum, 31
- approximatives, 63
- kontinuierliches, 31
- Punkt-, 31
- Rest-, 31

stetig, 1
Supremumsnorm, 11

Testfunktion, 42
Topologie, 1
  $F$-schwache, 1
  erzeugte, 1
  lokalkonvexe, 13
  Produkt-, 1
  schwach-*-, 13
  schwache, 13
topologischer Vektorraum, 13
total geordnet, 23
totalbeschränkt, 8
Totalvariation, 73
Träger einer Funktion, 42

Umgebung, 3
Umgebungsbasis, 3
unbedingt konvergent, 24
Ungleichung
  Besselsche, 19
  Cauchy–Schwarz-, 19
  Erste Poincarésche, 50
  Höldersche, 16
  Minkowskische, 16
  Zweite Poincarésche, 51

vollständig, 6

Wertebereich, 12