Skript zur Vorlesung

Stochastische partielle Differentialgleichungen

Sommersemester 2019

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 24.06.2019

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

1.1 Worum geht's? In diesem kurzen Abschnitt werden einige Beispiele genannt, welche zu stochastischen partiellen Differentialgleichung (=SPDEs) führen. Die üblichen Schreibweise wird motiviert.

1.2 Bemerkung. Eine lineare partielle (parabolische) Differentialgleichung wird häufig als abstraktes Cauchyproblem geschrieben, d.h. in der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u - Au &= f \quad (t > 0), \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Hier ist A ein unbeschränkter Operator in einem Banachraum X. In vielen Anwendungen ist jedoch noch ein zufälliger Einfluss wesentlich („Rauschen"), z.B. kann eine Brownsche Molekularbewegung Zittern von Pollen in einem Wassertropfen verursachen. Dies führt zu SPDEs, welche man gerne in der Form

$$\partial_t u = Au + b\partial_t W$$

mit einer zufälligen Größe $W = W(t)$ schreiben würde. Es stellt sich aber heraus, dass typische stochastische Prozesse $(W(t))_{t\geq 0}$ nicht differenzierbar sind, d.h. $\partial_t W(t)$ ist nicht klassisch definierbar. Statt alles distributionell zu lesen, geht man traditionellerweise auf eine andere Schreibweise über und betrachtet

$$du_t = Au_t dt + b dW_t. \tag{1-1}$$

Hier wird $u_t := u(t)$ gesetzt. Achtung: Dies ist nicht die zeitliche Ableitung von u! Analog schreibt man $W_t := W(t)$. Die Gleichung (1-1) ist als Integralgleichung zu verstehen, in der Sprache der PDEs würde man also von einer milden Lösung sprechen.

1.3 Beispiel. Eine der berühmtesten SPDEs ist die stochastische Navier-Stokes-Gleichung

$$\begin{aligned} du_t &= (\mu\Delta u_t - (u_t \cdot \nabla)u_t - \nabla p_t)dt + f(u_t, \nabla u_t) dW_t, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Hier ist μ die Viskosität der Flüssigkeit, u die Geschwindigkeit, p der Druck, und b beschreibt den stochastischen Einfluss.

1.4 Bemerkung. Grundsätzlich lässt sich jede deterministische Gleichung der Form $\partial_t u = Au + F(u) + f$ durch Addition eines stochastischen Terms in eine SPDE umformulieren. Man erhält

$$du_t = \big(Au_t + F(u_t) + f_t\big)dt + b(u_t)dW_t.$$

Sinnvoll ist dies aber nur, wenn die Modellierung entsprechende Annahmen über Form und Größe der stochastischen Störung liefert.

1.5 Bemerkung. Die obigen Formulierungen zeigen, dass zur Analyse von SPDEs zunächst die Terme W_t und $\int_0^t b(s)dW_s$ verstanden werden müssen. Man beachte, dass $W_t \in X$ gilt, d.h. es handelt sich hier um einen Banachraum-wertigen stochastischen Prozess. In dieser Vorlesung werden daher zunächst Banachraum-wertige Brownsche Bewegungen und das stochastische Integral diskutiert, was einige Zeit in Anspruch nimmt. Ziel dieser Vorlesung ist es, einen ersten Eindruck in die Methoden der SPDEs zu vermitteln; für eine komplette Darstellung der Theorie wird die Zeit nicht reichen.

Teilweise wird auf einige Begriffe und Resultate der Stochastik zurückgegriffen. Neben elementaren Begriffen, die als bekannt vorausgesetzt werden, werden einige Konzepte in Form von Anhängen skizziert. Dies gilt auch für die Theorie von Spuroperatoren und Hilbert-Schmidt-Operatoren.

2. Unendlich-dimensionale Wiener Prozesse

2.1 Worum geht's? Wie oben erwähnt, treten bei SPDEs stochastische Terme der Form $b_t dW_t$ auf. Hier soll der Term W_t näher präzisiert werden. Es handelt sich dabei um einen Banachraum-wertigen Wiener Prozess (Brownsche Bewegung). Zunächst werden einige elementare Eigenschaften Banachraum-wertiger Zufallsvariablen benötigt. Ein wichtiges Hilfsmittel ist die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen.

a) Gauß-Maße in Banachräumen

Im Folgenden seien E ein separabler Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$ und H ein separabler reeller Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, jeweils versehen mit der Borel-σ-Algebra. Der topologische Dualraum von E wird mit E' bezeichnet.

2.2 Lemma. *Die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(E)$ ist die von*

$$\mathscr{F}_0 := \big\{\{x \in E : \varphi(x) \le \alpha\}, \varphi \in E',\, \alpha \in \mathbb{R}\big\}$$

erzeugte σ-Algebra.

Beweis. Da E separabel ist, existiert nach Lemma C.2 eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ mit $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)|$ $(x \in E)$. Für die Kugel $B(a,r) := \{x \in E : \|x-a\| < r\}$ erhält man damit

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{B(a, r(1-\tfrac{1}{m}))} \\ &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in E : |\varphi_n(x-a)| \le r(1-\tfrac{1}{m})\} \\ &\in \sigma(\mathscr{F}_0) \end{aligned}$$

und damit $\mathscr{B}(E) \subset \sigma(\mathscr{F}_0)$. Die andere Inklusion ist klar, da alle $\varphi \in E'$, $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, stetig und damit borel-messbar sind. □

2.3 Lemma. *Das System aller Zylindermengen auf E sei definiert als*

$$\mathscr{Z} := \big\{\{x \in E : (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in A\} : \varphi_1, \dots, \varphi_n \in E',\, A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Falls μ_1, μ_2 W-Maße auf $(E, \mathscr{B}(E))$ mit $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathcal{Z}$ sind, so gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{B}(E)$.

Beweis. Nach Lemma 2.2 ist $\mathscr{Z}$ ein Erzeugendensystem von $\mathscr{B}(E)$. Da $\mathscr{Z}$ durchschnittstabil ist, folgt die Aussage sofort aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße. □

2.4 Definition. Sei μ ein W-Maß auf $(H, \mathscr{B}(H))$. Dann heißt $\hat{\mu}\colon H \to \mathbb{R}$,

$$\hat{\mu}(h) := \int_H \exp(i\langle x, h\rangle) d\mu(x),$$

die charakteristische Funktion von μ.

2.5 Satz. *a) Sei μ ein W-Maß auf $(H, \mathscr{B}(H))$. Für $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in H^n$ definiere das Maß $\mu_\varphi\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$ durch*

$$\mu_\varphi(A) := \mu\big(\{x \in H : (\langle x, \varphi_1\rangle, \dots, \langle x, \varphi_n\rangle) \in A\}\big) \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)).$$

Dann gilt $\widehat{\mu_\varphi}(\xi) = \hat{\mu}\big(\sum_{j=1}^n \xi_j \varphi_j\big)$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$.

b) Seien μ_1, μ_2 Maße auf $(H, \mathscr{B}(H))$, und es gelte $\hat{\mu}_{1,\varphi} = \hat{\mu}_{2,\varphi}$ auf $\mathbb{R}^n$ für alle $\varphi \in H^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt bereits $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{B}(H)$.

Beweis. a) Sei $\varphi \in H^n$. Definiere $\Phi\colon H \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \big(\langle x, \varphi_1\rangle, \dots, \langle x, \varphi_n\rangle\big)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_\varphi(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi} d\mu_\varphi(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi} d(\mu \circ \Phi^{-1})(y) \\
&= \int_H e^{i\Phi(x)\cdot\xi} d\mu(x) \\
&= \int_H \exp\Big(i\Big\langle x, \sum_{j=1}^n \xi_j\varphi_j\Big\rangle\Big) d\mu(x) \\
&= \hat{\mu}\Big(\sum_{j=1}^n \xi_j\varphi_j\Big).
\end{aligned}$$

b) Nach dem Satz von Riesz ist

$$\Big\{\{x \in H : (\langle x, \varphi_1\rangle, \dots, \langle x, \varphi_n\rangle) \in A\} : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n),\ \varphi \in H^n,\ n \in \mathbb{N}\Big\}$$

bereits das System $\mathscr{Z}$ der Zylindermengen auf H. Nach Lemma A.7 c) gilt $\mu_{1,\varphi} = \mu_{2,\varphi}$ für alle $\varphi \in H^n$, $n \in \mathbb{N}$ und damit $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{Z}$. Nach Lemma 2.3 folgt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{B}(H)$. □

2.6 Definition. Ein W-Maß μ auf $(H, \mathscr{B}(H))$ heißt ein Gauß-Maß, falls für alle $\varphi \in H$ das Maß $\mu_\varphi = \mu \circ \langle \cdot, \varphi \rangle^{-1}$ ein reelles Gauß-Maß ist.

2.7 Bemerkung. Ein W-Maß μ auf $(H, \mathscr{B}(H))$ ist genau dann ein Gauß-Maß, falls gilt: Für alle $\varphi \in H$ existieren $\alpha_\varphi \in \mathbb{R}$ und $\sigma_\varphi \geq 0$ mit

$$\hat{\mu}_\varphi(\xi) = \exp(i\alpha_\varphi \xi - \tfrac{1}{2}\sigma_\varphi^2 \xi^2) \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Denn dies ist nach Lemma A.6 die charakteristische Funktion der Normalverteilung, und die charakteristische Funktion legt das Maß bereits fest.

2.8 Lemma. *Sei μ ein W-Maß auf $(H, \mathscr{B}(H))$. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit*

$$\int_H |\langle h, x \rangle|^k d\mu(x) < \infty \quad (h \in H).$$

Dann existiert ein $C > 0$ mit

$$\int_H \Big| \langle h_1, x \rangle \cdot \ldots \cdot \langle h_k, x \rangle \Big| d\mu(x) \leq C \|h_1\| \cdot \ldots \cdot \|h_k\| \quad (h_1, \ldots, h_k \in H).$$

Beweis. Sei $H_n := \{h \in H : \int_H |\langle h, x \rangle|^k d\mu(x) \leq n\}$. Dann ist $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$, und nach dem Satz von Baire existieren $n_0 \in \mathbb{N}$, $h_0 \in H$ und $r_0 > 0$ mit $B(h_0, 2r_0) \subset H_{n_0}$. Somit gilt für alle $h \in B(0,1)$

$$\begin{aligned}
\int_H \big| \langle h, x \rangle \big|^k d\mu(x) &= r_0^{-k} \int_H \big| \langle r_0 h, x \rangle \big|^k d\mu(x) \\
&\leq 2^{k-1} r_0^{-k} \Big[\int_H \big| \langle h_0, x \rangle \big|^k d\mu(x) + \int_H \big| \langle h_0 + r_0 h, x \rangle \big|^k d\mu(x) \Big] \\
&\leq 2^k r_0^{-k} n_0 =: C.
\end{aligned}$$

Für $h_1, \ldots, h_k \in B(0,1)$ folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\int_H \Big| \langle h_1, x \rangle \cdot \ldots \cdot \langle h_k, x \rangle \Big| d\mu(x) \leq \prod_{j=1}^k \Big(\int_H \big| \langle h_j, x \rangle \big|^k d\mu(x) \Big)^{1/k} \leq C.$$

$\square$

2.9 Satz. *Sei μ ein W-Maß auf $(H, \mathscr{B}(H))$. Dann sind äquivalent:*

(i) μ ist ein Gauß-Maß.

(ii) Es existiert ein Spurklasse-Operator $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ mit $Q = Q^*$, $Q \geq 0$, und ein $m \in H$ mit

$$\hat{\mu}(h) = \exp(-i\langle m, h\rangle - \tfrac{1}{2}\langle Qh, h\rangle) \quad (h \in H).$$

In diesem Fall sind Q und m durch μ eindeutig bestimmt; ebenso ist μ durch Q und m eindeutig bestimmt.

Beweis. *(ii)$\Longrightarrow$(i).* Für $\varphi \in H$ gilt nach Satz 2.5 und Bemerkung 2.7

$$\hat{\mu}_\varphi(\xi) = \hat{\mu}(\xi\varphi) = \exp(-i\langle m, \varphi\rangle\xi - \tfrac{1}{2}\langle Q\varphi, \varphi\rangle\xi^2) \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Damit gilt $\mu_\varphi = N(\langle m, \varphi\rangle, \langle Q\varphi, \varphi\rangle)$, d.h. μ_φ ist ein reelles Gauß-Maß. Nach Satz 2.5 b) ist μ durch alle $\hat{\mu}_\varphi$, $\varphi \in H^n$, und damit durch Q und m eindeutig bestimmt.

(i)$\Longrightarrow$(ii). Der Beweis folgt in mehreren Schritten.

(1) Für alle $h \in H$ gilt nach Voraussetzung $\mu_h = N(\alpha_h, \sigma_h^2)$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_h &= \int_{\mathbb{R}} y d\mu_h(y) = \int_H \langle h, x\rangle d\mu(x), \\ \sigma_h^2 &= \int_{\mathbb{R}} (y - \alpha_h)^2 d\mu_h(y) = \int_{\mathbb{R}} y^2 d\mu_h(y) - \alpha_h^2 \\ &= \int_H \langle h, x\rangle^2 d\mu(x) - \alpha_h^2. \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$H \to \mathbb{R},\ h \mapsto \int_H \langle h, x\rangle d\mu(x)$$

ist damit wohldefiniert, linear und nach Lemma 2.8 stetig. Nach dem Satz von Riesz existiert genau ein $m \in H$ mit

$$\int_H \langle h, x\rangle d\mu(x) = \langle m, h\rangle \quad (h \in H).$$

Analog ist die Abbildung

$$B\colon H \times H \to \mathbb{R},\ (h_1, h_2) \mapsto \int_H \langle x, h_1\rangle\langle x, h_2\rangle d\mu(x) - \langle m, h_1\rangle\langle m, h_2\rangle$$

wohldefiniert, und eine stetige symmetrische Bilinearform. Daher existiert genau ein $Q \in L(H)$ mit $Q = Q^*$ und

$$B(h_1, h_2) = \langle Qh_1, h_2\rangle \quad (h_1, h_2 \in H).$$

Für $h \in H$ gilt $\langle Qh, h\rangle = B(h, h) = \sigma_h^2 \geq 0$, d.h. es gilt $Q \geq 0$.

(2) Zu zeigen ist noch $Q \in \mathscr{S}_1(H)$. O.E. sei dabei $m = 0$, da die Varianz einer reellen Zufallsvariablen bei Verschiebung unverändert bleibt. Für $h \in H$ folgt dann

$$\begin{aligned}\exp(-\tfrac{1}{2}\langle Qh, h\rangle) &= \tfrac{1}{2}\exp(-\tfrac{1}{2}\langle Qh, h\rangle) + \tfrac{1}{2}\exp(-\tfrac{1}{2}\langle Q(-h), -h\rangle) \\ &= \tfrac{1}{2}\int_H \big(e^{i\langle x,h\rangle} + e^{-i\langle x,h\rangle}\big)d\mu(x) \\ &= \int_H \cos(\langle x, h\rangle)d\mu(x)\end{aligned}$$

und damit für alle $c \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned}1 - \exp(-\tfrac{1}{2}\langle Qh, h\rangle) &= \int_H (1 - \cos(\langle x, h\rangle)d\mu(x) \\ &\le \tfrac{1}{2}\int_{|x|\le c} \big|\langle x, h\rangle\big|^2 d\mu(x) + 2\mu\big(\{x \in H : \|x\| \ge c\}\big), \qquad \text{(2-1)}\end{aligned}$$

wobei $1 - \cos t \le \frac{t^2}{2}$ verwendet wurde.

Wir definieren zu $c \in (0, \infty)$ den Operator Q_c durch die stetige Bilinearform

$$\langle Q_c h_1, h_2\rangle := \int_{|x|\le c} \langle x, h_1\rangle\langle x, h_2\rangle d\mu(x) \quad (h_1, h_2 \in H).$$

Dann ist $Q_c = Q_c^*$, $Q_c \ge 0$, und für eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle Q_c e_n, e_n\rangle = \int_{\|x\|\le c}\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle^2 d\mu(x) \le \int_{\|x\|\le c} \|x\|^2 d\mu(x) \le c^2 < \infty.$$

Also ist $Q_c \in \mathscr{S}_1(H)$.

(3) Wir zeigen, dass ein $c_0 > 0$ und ein $M > 0$ existieren mit $Q \le MQ_{c_0}$. Daraus folgt dann

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle Qe_n, e_n\rangle \le M\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle Q_{c_0}e_n, e_n\rangle < \infty,$$

d.h. $Q \in \mathscr{S}_1(H)$.

Sei dazu $c_0 > 0$ mit $\mu(\{x \in H : \|x\| > c_0\}) \le \frac{1}{8}$. Für $h \in H$ mit $\langle Q_{c_0}h, h\rangle \le 1$ folgt aus (2-1)

$$1 - \exp\big(-\tfrac{1}{2}\langle Qh, h\rangle\big) \le \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4},$$

d.h. $\exp(-\frac{1}{2}\langle Qh, h\rangle) \ge \frac{1}{4}$ und damit $\langle Qh, h\rangle \le M := 2\ln 4$.

Sei nun $h \in H$ mit $\langle Q_c h, h\rangle \ne 0$. Wir setzen $\alpha := \sqrt{\langle Q_{c_0}h, h\rangle}$, $h_0 := \alpha^{-1}h$ und erhalten

$$\langle Qh, h\rangle = \alpha^2\langle Qh_0, h_0\rangle \le M\alpha^2 = M\langle Q_{c_0}h, h\rangle.$$

Falls $h \in H$ mit $\langle Q_{c_0}h, h\rangle = 0$, so gilt $\langle Q_{c_0}nh, nh\rangle = 0 \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt die obige Abschätzung $\langle Qnh, nh\rangle \le M$ und damit $\langle Qh, h\rangle \le \frac{M}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\langle Qh, h\rangle = 0$.

Insgesamt erhalten wir $Q \le MQ_{c_0}$ und damit $Q \in \mathscr{S}_1(H)$. □

2.10 Definition. a) Sei μ ein Gauß-Maß auf $(H, \mathscr{B}(H))$, und seien $m \in H$ und $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ wie in Satz 2.9. Dann schreibt man $\mu = N(m, Q)$ (Normalverteilung mit Erwartungswert $m \in H$ und Kovarianzoperator Q).

b) Eine Zufallsvariable $X\colon \Omega \to H$ heißt Gaußsche Zufallsvariable oder normalverteilt, falls $P \circ X^{-1}$ ein Gauß-Maß auf $(H, \mathscr{B}(H))$ ist.

2.11 Bemerkung. Sei $X\colon \Omega \to H$ eine Zufallsvariable mit $P \circ X^{-1} = N(m, Q)$. Seien $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in H$. Dann ist die Abbildung $\Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \langle X(\omega), \varphi\rangle$ normalverteilt mit Verteilung $N(\langle m, \varphi\rangle, \langle Q\varphi, \varphi\rangle)$, und es gilt

$$\mathbb{E}\big(\langle X - m, \varphi_1\rangle\langle X - m, \varphi_2\rangle\big) = \langle Q\varphi_1, \varphi_2\rangle$$

sowie $\mathbb{E}(\|X - m\|^2) = \operatorname{tr} Q$. Insbesondere ist $X \in L^2(\Omega; H)$.

2.12 Definition. Seien $X, Y \in L^2(\Omega; H)$ Zufallsvariablen. Dann werden der Kovarianzoperator $\operatorname{cov} X \in L(H)$ sowie der Korrelationsoperator $\operatorname{cor}(X, Y) \in L(H)$ definiert durch

$$\begin{aligned} \operatorname{cov} X &= \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X) \otimes (X - \mathbb{E}X)\big), \\ \operatorname{cor}(X, Y) &= \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X) \otimes (Y - \mathbb{E}Y)\big). \end{aligned}$$

Hierbei ist für zwei Vektoren $a, b \in H$ der Operator $h_1 \otimes h_2 \in L(H)$ definiert durch

$$(a \otimes b)(h) := a\langle b, h\rangle \quad (h \in H).$$

2.13 Bemerkung. In der Situation von Definition 2.12 gilt

$$\mathbb{E}\big(\langle (X - \mathbb{E}X), h_1\rangle \, \langle (X - \mathbb{E}X), h_2\rangle\big) = \langle (\operatorname{cov} X)h_1, h_2\rangle.$$

Es gilt $\operatorname{cov} X = (\operatorname{cov} X)^* \geq 0$ sowie $\operatorname{cov} X \in \mathscr{S}_1(H)$ mit

$$\operatorname{tr}(\operatorname{cov} X) = \mathbb{E}\big(\|X - \mathbb{E}X\|^2\big).$$

Denn für eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von H gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\operatorname{cov} X) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \operatorname{cov} X e_n, e_n\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\big|\langle X - \mathbb{E}X, e_n\rangle\big|^2 \\ &= \mathbb{E}\Big(\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle X, e_n\rangle|^2\Big) = \mathbb{E}(\|X - \mathbb{E}X\|^2) < \infty. \end{aligned}$$

2.14 Satz (Darstellung Gaußscher Zufallsvariablen)**.** *Seien $m \in H$, $0 \leq Q \in \mathscr{S}_1(H)$, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H mit $Qe_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$.*

Sei $X\colon \Omega \to H$ eine Zufallsvariable. Dann ist X genau dann eine Gaußsche Zufallsvariable mit $P \circ X^{-1} = N(m,Q)$, wenn

$$X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_n}\beta_n e_n + m \qquad \text{in } L^2(\Omega;H) \tag{2-2}$$

gilt, wobei $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ unabhängige, identisch verteilte (=i.i.d.) Zufallsvariablen sind, $\beta_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$, mit $P\circ\beta_n^{-1} = N(0,1)$ falls $\lambda_n > 0$. Die Reihe in (2-2) konvergiert in $L^2(\Omega;H)$.

Beweis. **(1)** Sei $P \circ X^{-1} = N(m,Q)$. Dann gilt für $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle X(\omega), e_n\rangle e_n \qquad \text{in } H,$$

und $\langle X, e_n\rangle$ ist nach Bemerkung 2.11 $N(\langle m, e_n\rangle, \lambda_n)$ normalverteilt. Wir definieren

$$\beta_n := \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\big(\langle X, e_n\rangle - \langle m, e_n\rangle\big),$$

falls $\lambda_n > 0$, und $\beta_n := 0$, falls $\lambda_n = 0$. Dann ist $P\circ\beta_n^{-1} = N(0,1)$ für alle n mit $\lambda_n > 0$ und $X(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_n}\beta_n(\omega)e_n + m$ in H für alle $\omega \in \Omega$.

Für $N \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N a_n\beta_n &= \sum_{\substack{n=1\\ \lambda_n\neq 0}}^N \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}}\big(\langle X, e_n\rangle - \langle m, e_n\rangle\big)\\
&= \Big\langle X, \sum_{\substack{n=1\\ \lambda_n\neq 0}}^N \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} e_n\Big\rangle - \sum_{\substack{n=1\\ \lambda_n\neq 0}}^N \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}}\langle m, e_n\rangle.
\end{aligned}$$

Da X eine Gaußsche Zufallsvariable ist, ist also $\sum_{n=1}^N a_n\beta_n$ normalverteilt, d.h. $\{\beta_1, \dots, \beta_N\}$ ist eine Gaußsche Zufallsvariable. Es gilt für alle i, j mit $\lambda_i, \lambda_j > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\beta_i\beta_j) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\mathbb{E}\big(\langle X - m, e_i\rangle\langle X - m, e_j\rangle\big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\langle Qe_i, e_j\rangle = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\langle e_i, e_j\rangle = 0,
\end{aligned}$$

falls $i \neq j$. Somit sind β_i, β_j unkorreliert, und $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist damit unabhängig.

Insbesondere folgt daraus

$$\Big\| \sum_{n=M}^N \sqrt{\lambda_n}\beta_n e_n\Big\|^2_{L^2(\Omega;H)} = \mathbb{E}\Big(\Big\|\sum_{n=M}^N \sqrt{\lambda_n}\beta_n e_n\Big\|^2\Big)$$

$$= \sum_{n=M}^{N} \mathbb{E}\big\| \sqrt{\lambda_n}\beta_n e_n \big\|^2 = \sum_{n=M}^{N} \lambda_n \mathbb{E}(|\beta_n|^2) = \sum_{n=M}^{N} \lambda_n.$$

Wegen $\operatorname{tr} Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n < \infty$ konvergiert daher die Reihe (2-2) in $L^2(\Omega; H)$, und die Gleichheit in (2-2) gilt in $L^2(\Omega; H)$.

(2) Sei $X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_n}\beta_n e_n + m$ wie angegeben. Dann konvergiert die Reihe in $L^2(\Omega; H)$, wie im Teil (1) des Beweises gezeigt wurde. Die Partialsummen $X_N := \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n}\beta_n e_n + m$ sind wegen

$$\Big\langle \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n}\beta_n e_n + m, h \Big\rangle = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n}\beta_n \langle e_n, h\rangle + \langle m, h\rangle \quad (h \in H)$$

Gaußsche Zufallsvariable. Daher ist auch X eine Gaußsche Zufallsvariable, und es gilt

$$\mathbb{E}(\langle X, h\rangle) = \lim_{N\to\infty} E(\langle X_N, h\rangle) = \langle m, h\rangle$$

und

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\big(\langle X, h_1\rangle - \langle m, h_1\rangle\big)\big(\langle X, h_2\rangle - \langle m, h_2\rangle\big) \Big) \\
&\quad = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big(\langle X_N - m, h_1\rangle \langle X_N - m, h_2\rangle \Big) \\
&\quad = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{n=1}^{N} \sqrt{\lambda_n}\beta_n \langle e_n, h_1\rangle \Big) \Big(\sum_{m=1}^{N} \sqrt{\lambda_m}\beta_m \langle e_m, h_2\rangle \Big) \Big] \\
&\quad = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle e_n, h_1\rangle \langle e_n, h_2\rangle \\
&\quad = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Q e_n, h_1\rangle \langle e_n, h_2\rangle \\
&\quad = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, Q h_1\rangle \langle e_n, h_2\rangle = \langle Q h_1, h_2\rangle.
\end{aligned}$$

Somit gilt $P \circ X^{-1} = N(m, Q)$. □

2.15 Korollar. *Seien $Q \in \mathscr{S}_1(H)$, $Q \geq 0$, und $m \in H$. Dann existiert das Gaußmaß $\mu = N(m, Q)$ auf $(H, \mathscr{B}(H))$.*

Beweis. Wir wählen $X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_n}\beta_n e_n + m$ mit $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ wie in Satz 2.14. Dann gilt $\mu := P \circ X^{-1} = N(m, Q)$. □

b) Stochastische Prozesse

Wir beginnen mit dem zentralen Begriff des stochastischen Prozesses. Im Folgenden seien $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum, $(S, \mathscr{S})$ ein Messraum und $J \neq \emptyset$ eine Menge.

2.16 Definition. Ein stochastischer Prozess mit Parameterbereich J, Zustandsraum $(S, \mathscr{S})$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ist eine Familie $X = (X_t)_{t\in J}$ von S-wertigen Zufallsvariablen $X_t \colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (S, \mathscr{S})$. Man schreibt auch $X(t) := X_t$.

Für $\omega \in \Omega$ heißt $t \mapsto X_t(\omega)$ ein Pfad des Prozesses. Die Abbildung $X_\bullet \colon \Omega \to S^J$, $\omega \mapsto X_\bullet(\omega)$, heißt die Pfadabbildung von X. Hier ist S^J die Menge aller Abbildungen von J nach S.

Für $J_0 \subset J$ definiert man die Projektion $\mathrm{pr}_{J_0} \colon S^J \to S^{J_0}$ durch $\mathrm{pr}_{J_0}(f) := f|_{J_0}$. Im Falle $J_0 = \{t\}$ schreibt man auch pr_t. Man definiert $X_{J_0} := \mathrm{pr}_{J_0} \circ X_\bullet$.

2.17 Bemerkung. Sei $\mathscr{S}^J := \bigotimes_{t\in J} \mathscr{S}$ die Produkt-σ-Algebra, d.h. die von $\{\mathrm{pr}_t : t \in J\}$ erzeugte σ-Algebra. Falls X ein stochastischer Prozess ist, so ist die Pfadabbildung $X_\bullet \colon (\Omega, \mathscr{F}, P) \to (S^J, \mathscr{S}^J)$ eine Zufallsvariable, und es gilt $X_t = \mathrm{pr}_t \circ X_\bullet$.

2.18 Definition. a) Zwei stochastische Prozesse X, Y auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ heißen ununterscheidbar, falls

$$P\Big(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ für alle } t \in J\}\Big) = 1.$$

Y heißt eine Modifikation von X, falls

$$P(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1 \quad (t \in J).$$

b) Seien X ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und Y ein stochastischer Prozess auf einem W-Raum $(\Omega', \mathscr{F}', P')$ mit demselben Zustandsraum. Dann heißen X und Y äquivalent, falls sie dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen besitzen, d.h. falls

$$P \circ X_{J_0}^{-1} = P' \circ Y_{J_0}^{-1} \quad (J_0 \subset J,\ J_0 \text{ endlich}).$$

c) Seien $J \subset [0, \infty)$ und S ein topologischer Raum. Dann heißt ein stochastischer Prozess X stetig, falls jeder Pfad von X stetig ist. Analog für linksseitig / rechtsseitig stetig.

Wir betrachten nun speziell stochastische Prozesse mit Werten in Hilberträumen. Dazu sei $Q \in \mathscr{S}_1(H)$, $Q \geq 0$, und $J = [0, T]$ mit $T > 0$ oder $J = [0, \infty)$, sowie H ein reeller separabler Hilbertraum und E ein separabler reeller Banachraum.

2.19 Definition. Ein H-wertiger stochastischer Prozess $(W_t)_{t\in J}$ mit $W_t\colon (\Omega,\mathscr{F},P)\to (H,\mathscr{B}(H))$ heißt (Standard-) Q-Wiener Prozess oder Q-Brownsche Bewegung, falls gilt:

(i) $W_0 = 0$ P-fast sicher.

(ii) W hat P-fast sicher stetige Pfade, d.h. es gilt

$$P\big(\{\omega\in\Omega : t\mapsto W_t(\omega) \text{ ist stetig}\}\big) = 1.$$

(iii) Für alle $0\le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le T$, $n\in\mathbb{N}$, sind die Zufallsvariablen

$$\{W_{t_1}, W_{t_2}-W_{t_1},\dots,W_{t_n}-W_{t_{n-1}}\}$$

unabhängig (man sagt, W_t besitzt unabhängige Zuwächse).

(iv) Es gilt

$$P\circ (W_t - W_s)^{-1} = N(0,(t-s)Q)\quad (0\le s\le t\le T).$$

Im Falle $H=\mathbb{R}$ und $Q=1$ spricht man von einer reellwertigen Brownschen Bewegung oder einem reellwertigen Gaußprozess.

Man beachte bei (ii), dass $(\Omega,\mathscr{F},P)$ als vollständig vorausgesetzt wurde.

2.20 Satz (Darstellung von Q-Wiener Prozessen). *Ein H-wertiger stochastischer Prozess $(W_t)_{t\in[0,T]}$ ist genau dann ein Q-Wiener Prozess, falls*

$$W_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_n}\beta_n(t)e_n \quad (t\in[0,T]) \tag{2-3}$$

(Gleichheit und Konvergenz der Reihe in $L^2(\Omega; C([0,T],H))$), wobei $\{\beta_n : n\in\{k\in\mathbb{N}:\lambda_k>0\}\}$ unabhängige reellwertige Brownsche Bewegungen sind. Für jedes $Q\in\mathscr{S}_1(H)$, $Q\ge 0$, existiert ein Q-Wiener Prozess.

Beweis. **(1)** Sei $(W_t)_{t\in[0,T]}$ ein Q-Wiener Prozess. Dann gilt $P\circ W_t^{-1} = N(0,tQ)$, und nach dem Beweis von Satz 2.14 ist

$$W_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_n}\beta_n(t)e_n \quad (t\in[0,T])$$

mit $\beta_n(t) := \frac{\langle W_t, e_n\rangle}{\sqrt{\lambda_n}}$, falls $\lambda_n>0$, und $\beta_n(t):=0$, falls $\lambda_n=0$. Es gilt $P\circ\beta_n(t)^{-1} = N(0,t)$, $n\in\mathbb{N}$, und für alle festen $t\in[0,T]$ ist $\{\beta_n(t):n\in\mathbb{N}\}$ unabhängig.

Sei $n\in\mathbb{N}$ fest. Wir zeigen, dass $(\beta_n(t))_{t\in[0,T]}$ eine Brownsche Bewegung ist. Sei dazu $k\in\mathbb{N}$, $0=t_0\le t_1\le\dots\le t_k\le T$. Dann gilt

$$\beta_n(t_j)-\beta_n(t_{j-1}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\langle W(t_j)-W(t_{j-1}), e_n\rangle, & \lambda_n>0,\\ 0, & \lambda_n = 0,\end{cases}$$

und nach Voraussetzung ist $\{W(t_j) - W(t_{j-1}) : j = 1, \dots, k\}$ und damit $\{\beta_n(t_j) - \beta_n(t_{j-1}) : j = 1, \dots, k\}$ unabhängig. Aus derselben Darstellung erhält man

$$P \circ (\beta_n(t) - \beta_n(s))^{-1} = N(0, t-s) \quad (0 \le s \le t \le T)$$

sowie die P-fast sichere Stetigkeit von $t \mapsto \beta_n(t)$.

Seien nun $N, k \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_N$ paarweise verschieden, $0 = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_k \le T$. Wir zeigen durch Induktion über k, dass die σ-Algebren

$$\sigma\big(\beta_{n_1}(t_1), \dots, \beta_{n_1}(t_k)\big), \dots, \sigma\big(\beta_{n_N}(t_1), \dots, \beta_{n_N}(t_k)\big)$$

unabhängig sind. Dabei ist der Induktionsanfang $k = 1$ klar, da $\{\beta_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$ unabhängig ist. Für den Induktionsschritt betrachte $0 = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_{k+1} \le T$. Es gilt für $i = 1, \dots, N$

$$\sigma\big(\beta_{n_i}(t_1), \dots, \beta_{n_i}(t_k), \beta_{n_i}(t_{k+1})\big) = \sigma\big(\beta_{n_i}(t_1), \dots, \beta_{n_i}(t_k), \beta_{n_i}(t_{k+1}) - \beta_{n_i}(t_k)\big). \tag{2-4}$$

Die Familie $\{\beta_{n_i}(t_{k+1}) - \beta_{n_i}(t_k) : i = 1, \dots, N\}$ von Zufallsvariablen ist unabhängig, da sie eine Gaußsche Familie bilden und unkorreliert sind. Beachte dazu die Darstellung

$$\beta_{n_i}(t_{k+1}) - \beta_{n_i}(t_k) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n_i}}} \langle W(t_{k+1}) - W(t_k), e_{n_i} \rangle$$

für $\lambda_{n_i} > 0$ und Bemerkung 2.11.

Seien $A_{ij} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ für $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, k+1$. Da $\sigma(W(s) : s \le t_k)$ und $\sigma(W(t_{k+1}) - W(t_k))$ unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned}
&P\Big(\bigcap_{i=1}^N \{\beta_{n_i}(t_1) \in A_{i1}, \dots, \beta_{n_i}(t_k) \in A_{im}, \beta_{n_i}(t_{k+1}) - \beta_{n_i}(t_k) \in A_{i,m+1}\}\Big) \\
&\quad = P\Big(\bigcap_{i=1}^N \bigcap_{j=1}^k \{\beta_{n_i}(t_j) \in A_{ij}\} \cap \bigcap_{i=1}^N \{\beta_{n_i}(t_{k+1}) - \beta_{n_i}(t_k) \in A_{i,k+1}\}\Big) \\
&\quad = P\Big(\bigcap_{i=1}^N \bigcap_{j=1}^k \{\beta_{n_i}(t_j) \in A_{ij}\}\Big) P\Big(\bigcap_{i=1}^N \{\beta_{n_i}(t_{k+1}) - \beta_{n_i}(t_k) \in A_{i,k+1}\}\Big) \\
&\quad = \prod_{i=1}^N P\Big(\bigcap_{j=1}^k \{\beta_{n_i}(t_j) \in A_{ij}\}\Big) \prod_{i=1}^N P(\{\beta_{n_i}(t_{k+1}) - \beta_{n_i}(t_k) \in A_{i,k+1}\}) \\
&\quad = \prod_{i=1}^N P\Big(\bigcap_{i=1}^k \{\beta_{n_i}(t_j) \in A_{ij}\} \cap \{\beta_{n_i}(t_{k+1}) - \beta_{n_i}(t_m) \in A_{i,k+1}\}\Big),
\end{aligned}$$

d.h. (2-4) ist unabhängig.

(2) Sei W_t durch (2-3) definiert. Für jedes feste $t \in [0, T]$ gilt $W_t \in L^2(\Omega; H)$, da die Reihe in $L^2(\Omega; H)$ konvergiert. Offensichtlich gilt $W_0 = 0$ P-fast sicher und

$$P \circ (W_t - W_s)^{-1} = N(0, (t-s)Q) \quad (0 \le s \le t \le T)$$

nach Satz 2.14. Die Unabhängigkeit der Zuwächse für W_t folgt ebenso aus der Unabhängigkeit der Zuwächse für $\beta_n(t)$. Zu zeigen ist noch die Konvergenz der Reihe in $L^2(\Omega; C([0,T],H))$. Sei dazu

$$W_N(t,\omega) := \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n}\beta_n(t,\omega)e_n \quad ((t,\omega)\in[0,T]\times\Omega,\ N\in\mathbb{N}).$$

Dann ist $W_N(\cdot,\omega)$ stetig für P-fast alle $\omega\in\Omega$, und für $M<N$ ist

$$\begin{aligned}
\|W_N - W_M\|^2_{L^2(\Omega;C([0,T],H))} \\
&= \mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \|W_N(t,\cdot)-W_M(t,\cdot)\|^2\Big)\\
&= \mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \sum_{n=M+1}^N \lambda_n\beta_n^2(t)\Big)\\
&\le \sum_{n=M+1}^N \lambda_n \mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]}\beta_n^2(t)\Big)\\
&\le 4\sum_{n=M+1}^N \lambda_n \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}(\beta_n(t)^2)\\
&= 4T\sum_{n=M+1}^N \lambda_n \to 0 \quad (N,M\to\infty).
\end{aligned}$$

Hier wurde die Doobsche Maximalungleichung, Satz A.10, verwendet. □

2.21 Definition. a) Eine Filtrierung (oder Filtration) von $(\Omega,\mathscr{F},P)$ ist eine Familie von σ-Algebren $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ mit $\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$ $(0\le s\le t)$. Eine Filtrierung heißt normal, falls $\{A\in\mathscr{F} : P(A)=0\}\subset\mathscr{F}_0$ und

$$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+} := \bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s \quad (t\in[0,T))$$

gilt.

b) Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ heißt adaptiert bzgl. des filtrierten Raums $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]},P)$, falls X_t $\mathscr{F}_t$-messbar ist.

c) Ein Q-Wiener Prozess W heißt Q-Wiener Prozess bzgl. der Filtrierung $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$, falls $(W_t)_{t\in[0,T]}$ adaptiert ist und W_t-W_s unabhängig von $\mathscr{F}_s$ für alle $0\le s\le t\le T$ ist.

2.22 Satz. *Sei $(W_t)_{t\in[0,T]}$ ein Q-Wiener Prozess. Definiere $\mathscr{N} := \{A\in\mathscr{F} : P(A)=0\}$ sowie*

$$\mathscr{F}_t^0 := \sigma(W_s : s\le t),$$

$$\widetilde{\mathscr{F}_t^0} := \sigma(\mathscr{F}_t^0 \cup \mathscr{N}),$$
$$\mathscr{F}_t := \bigcap_{s>t} \widetilde{\mathscr{F}_s^0} \; (t \in [0,T)), \quad \mathscr{F}_T := \widetilde{\mathscr{F}_T^0}.$$

Dann ist $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ eine normale Filtrierung, und $(W_t)_{t\in[0,T]}$ ist ein Q-Wiener Prozess bzgl. $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$.

Beweis. Nach Definition von $\mathscr{F}_t$ ist $(W_t)_{t\in J}$ adaptiert zu $(\mathscr{F}_t)_{t\in J}$. Sei $0 \le s < t \le T$. Da

$$\sigma(W_{t_1}, \dots, W_{t_N}) = \sigma(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_N} - W_{t_{N-1}}) \quad (0 \le t_1 < \dots < t_N \le T)$$

gilt, ist $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathscr{F}_s^0$ und damit auch von $\widetilde{\mathscr{F}_s^0}$.

Seien $B \in \mathscr{F}_s$ und $A \subset H$ abgeschlossen. Dann gilt

$$\begin{aligned} P\big(\{W_t - W_s \in A\} \cap B\big) &= \mathbb{E}\big(\chi_A \circ (W_t - W_s) \cdot \chi_B\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\big[\max\{0, 1 - n \operatorname{dist}(W_t - W_s, A)\}\big] \cdot \chi_B\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} E\Big(\big[\max\{0, 1 - n \operatorname{dist}(W_t - W_{s+1/m}, A)\big] \cdot \chi_B\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} E\Big(\max\{0, 1 - n \operatorname{dist}(W_t - W_{s+1/m}, A)\Big)\mathbb{E}(\chi_B) \\ &= P(W_t - W_s \in A)P(B). \end{aligned}$$

Hier wurde die P-fast sichere Stetigkeit von $s \mapsto W_s$ verwendet sowie die Unabhängigkeit von $W_t - W_{s+1/m}$ von $\widetilde{\mathscr{F}^0_{s+1/m}} \supset \mathscr{F}_s$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Damit stimmen für jedes $B \in \mathscr{F}_s$ die Maße $P(\{W_t - W_s \in A\} \cap B)$ und $P(\{W_t - W_s \in A\})P(B)$ (jeweils definiert auf $\mathscr{B}(H)$) überein auf der Menge $\{A \in H : A \text{ abgeschlossen}\}$. Da diese Menge ein durchschnittstabiles Erzeugendensystem von $\mathscr{B}(H)$ ist, stimmen die Maße auf ganz $\mathscr{B}(H)$ überein, d.h. $W_t - W_s$ ist unabhängig zu $\mathscr{F}_s$. □

c) Banachraum-wertige Martingale

Im Folgenden seien wieder $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein W-Raum, E ein separabler reeller Banachraum, H ein separabler reeller Hilbertraum, $(\mathscr{F}_t)_{t\ge 0}$ eine Filtrierung von $\mathscr{F}$, $T \in (0, \infty)$.

2.23 Definition und Satz (Satz vom bedingten Erwartungswert). *Seien $X \in L^1((\Omega, \mathscr{F}, P); E)$ und $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ eine Unter-σ-Algebra. Dann existiert eine Zufallsvariable $X_0 \in L^1((\Omega, \mathscr{F}_0, P); E)$ mit*

$$\int_A X dP = \int_A X_0 dP \quad (A \in \mathscr{F}_0). \tag{2-5}$$

Die Zufallsvariable X_0 ist P-fast sicher eindeutig bestimmt (d.h. eindeutig bestimmt als Element von $L^1(\Omega, P)$) und heißt bedingter Erwartungswert von X unter der Bedingung $\mathscr{F}_0$, Schreibweise $\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0) := X_0$. Es gilt

$$\|E(X|\mathscr{F}_0)\| \leq \mathbb{E}\big(\|X\|\,|\mathscr{F}_0\big) \quad P\text{-fast sicher.}$$

Beweis. **(i)** Existenz: Sei $X = \sum_{k=1}^N x_k \chi_{A_k}$ mit $x_k \in E$ und $A_k \in \mathscr{F}$. Dann ist $X_0 := \sum_{k=1}^N x_k \mathbb{E}(\chi_{A_k}|\mathscr{F}_0)$ $\mathscr{F}_0$-messbar, wobei $\mathbb{E}(\chi_{A_k}|\mathscr{F}_0)$ der skalare bedingte Erwartungswert (Satz A.11) ist, und es gilt (2-5). Weiter erhalten wir

$$\|X_0\| \leq \sum_{k=1}^N \|x_k\| \mathbb{E}(\chi_{A_k}|\mathscr{F}_0) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^N \|x_k\|\chi_{A_k}\Big|\mathscr{F}_0\Big) = \mathbb{E}(\|X\|\,|\,\mathscr{F}_0)$$

und damit

$$\mathbb{E}(\|X_0\|) \leq \mathbb{E}(\|X\|). \tag{2-6}$$

Sei nun $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$. Dann existiert eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit $\|X - X_n\|_{L^1(\Omega,\mathscr{F},P;E)} \to 0$. Für $X_{n,0} \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_0, P; E)$ wie oben gilt mit (2-6)

$$\|X_{n,0} - X_{m,0}\|_{L^1(\Omega,\mathscr{F}_0,P;E)} \leq \|X_n - X_m\|_{L^1(\Omega,\mathscr{F},P;E)}.$$

Also existiert $X_0 := \lim_{n\to\infty} X_{n,0} \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_0, P; E)$. Damit folgt

$$\int_A X dP = \lim_{n\to\infty} \int_A X_n dP = \lim_{n\to\infty} \int_A X_{n,0} dP = \int_A X_0 dP \quad (A \in \mathscr{F}_0).$$

Es gilt

$$\|\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0)\| = \|X_0\| = \lim_{n\to\infty} \|X_{n,0}\| \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\|X_n\|\,|\,\mathscr{F}_0)$$

in $L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ und damit P-fast sicher.

(ii) Eindeutigkeit: Seien $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ mit $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x)$ $(x \in X)$, siehe Lemma C.2. Seien weiter X_0, $\widetilde{X}_0$ $\mathscr{F}_0$-messbar mit $\int_A X_0 dP = \int_A \widetilde{X}_0 dP$ $(A \in \mathscr{F}_0)$. Dann gilt

$$\int_A \varphi_n(X_0) dP = \int_A \varphi_n(\widetilde{X}_0) dP \quad (n \in \mathbb{N},\ A \in \mathscr{F}_0).$$

Für $A := \{\omega \in \Omega : \varphi_n(X_0(\omega)) > \varphi_n(\widetilde{X}_0(\omega))\}$ folgt $P(A) = 0$, analog $P(\varphi_n(X_0) < \varphi_n(\widetilde{X}_0)) = 0$. Also gilt $\varphi_n(X_0) = \varphi_n(\widetilde{X}_0)$ P-fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit existiert eine Menge $N \in \mathscr{F}$ mit $P(N) = 0$ und $\varphi_n(X_0(\omega)) = \varphi_n(\widetilde{X}_0(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Für diese ω folgt $X_0(\omega) = \widetilde{X}_0(\omega)$ nach Lemma C.2. Also gilt $X_0 = \widetilde{X}_0$ P-fast sicher. □

2.24 Bemerkung. Die Abbildung $\mathbb{E}_p\colon L^p(\Omega,\mathscr{F},P;E)\to L^p(\Omega,\mathscr{F}_0,P;E)$, $X\mapsto \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0)$ ist für alle $p\in[1,\infty)$ wohldefiniert, linear, eine Projektion (d.h. es gilt $\mathbb{E}_p^2=\mathbb{E}_p$) und stetig mit Norm 1. Dabei folgt die Stetigkeit aus der Jensenschen Ungleichung (Lemma A.4) und den Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0)\|^p_{L^p(\Omega,\mathscr{F}_0,P;E)} &= \mathbb{E}\Big[\|\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0)\|_E^p\Big] \le \mathbb{E}\Big[\Big(\mathbb{E}\big(\|X\|_E|\mathscr{F}_0\big)\Big)^p\Big]\\ &\le \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big(\|X\|_E^p|\mathscr{F}_0\big)\Big] = \mathbb{E}(\|X\|_E^p) = \|X\|^p_{L^p(\Omega,\mathscr{F},P;E)}.\end{aligned}$$

2.25 Lemma. *Seien $(E_1,\mathscr{E}_1)$, $(E_2,\mathscr{E}_2)$ Messräume, $\psi\colon E_1\times E_2\to\mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Sei $X_i\colon(\Omega,\mathscr{F})\to(E_i,\mathscr{E}_i)$ Zufallsvariablen, $i=1,2$, und $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$. Falls X_1 $\mathscr{F}_0$-messbar ist und X_2 unabhängig von $\mathscr{F}_0$ ist, so gilt*

$$\mathbb{E}(\psi(X_1,X_2)|\mathscr{F}_0)(\omega)=\mathbb{E}(\psi(X_1(\omega),X_2))\Big(=\int_\Omega \psi(X_1(\omega),X_2(\omega'))dP(\omega')\Big)$$

für fast alle $\omega\in\Omega$. Die analoge Aussage gilt auch für messbare nichtnegative Funktionen ψ.

Beweis. Siehe [DPZ92], Prop. 1.12. □

2.26 Definition. Sei $(X_t)_{t\ge0}$ ein E-wertiger stochastischer Prozess, $(\mathscr{F}_t)_{t\ge0}$ eine Filtrierung von $\mathscr{F}$. Dann heißt $(X_t)_{t\ge0}$ ein $\mathscr{F}_t$-Martingal, falls $X_t\in L^1(\Omega;E)$ für alle $t\ge0$ gilt, $(X_t)_{t\ge0}$ $(\mathscr{F}_t)_{t\ge0}$-adaptiert ist (d.h. X_t ist $\mathscr{F}_t$-messbar für alle $t\ge0$) sowie

$$\mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s)=X_s\quad P\text{-fast sicher für alle } 0\le s\le t<\infty.$$

Im Fall $E=\mathbb{R}$ heißt $(X_t)_{t\ge0}$ ein $\mathscr{F}_t$-Submartingal (bzw. Supermartingal), falls

$$\mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s)\ge X_s\quad P\text{-fast sicher}$$

(bzw. „$\le$“) für alle $0\le s\le t<\infty$ gilt.

2.27 Bemerkung. a) Sei $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}$ eine Unter-σ-Algebra und $X\colon(\Omega,\mathscr{F})\to(E,\mathscr{B}(E))$ eine Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\varphi(X)|\mathscr{F}_0)=\varphi(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0))\quad(\varphi\in E').$$

Denn für $Z:=\varphi(E(X|\mathscr{F}_0))$ und $A\in\mathscr{F}_0$ gilt

$$\int_A ZdP=\int_A\varphi(E(X|\mathscr{F}_0))dP=\varphi\Big(\int_A E(X|\mathscr{F}_0)dP\Big)=\varphi\Big(\int_A XdP\Big)=\int_A\varphi(X)dP,$$

d.h. Z ist eine Version von $E(\varphi(X)|\mathscr{F}_0)$.

b) Sei $(X_t)_{t\ge0}$ E-wertig, adaptiert und integrierbar. Dann ist $(X_t)_{t\ge0}$ genau dann ein Martingal, falls $(\varphi(X_t))_{t\ge0}$ für alle $\varphi\in E'$ ein reellwertiges Martingal ist.

2.28 Lemma. *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein E-wertiges $\mathscr{F}_t$-Martingal, $p \in [1,\infty)$. Dann ist $\big(\|X_t\|^p\big)_{t\geq 0}$ ein reellwertiges Submartingal.*

Beweis. Wir wählen nach Lemma C.2 eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ mit $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}\big(\|X_t\| \,\big|\, \mathscr{F}_s\big) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\varphi_n(X_t)|\mathscr{F}_s) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(\mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_0)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(X_s) = \|X_s\|$$

für $s \leq t$.

Damit ist $(\|X_t\|)_{t\geq 0}$ ein Submartingal. Für $p > 1$ gilt

$$\mathbb{E}\big(\|X_t\|^p \,|\, \mathscr{F}_s\big) \geq \Big[\mathbb{E}\big(\|X_t\| \,|\, \mathscr{F}_s\big)\Big]^p \geq \|X_s\|^p \quad (s \leq t)$$

nach der Jensenschen Ungleichung, Lemma A.4. □

2.29 Satz (Doobsche Maximalungleichung)**.** *Sei $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein rechtsstetiges E-wertiges $\mathscr{F}_t$-Martingal, und sei $p \in (1,\infty)$ mit $X_T \in L^p(\Omega; E)$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \|X_t\|^p\Big)^{1/p} \leq \tfrac{p}{p-1} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\Big(\|X_t\|^p\Big)^{1/p} = \tfrac{p}{p-1}\mathbb{E}\Big(\|X_T\|^p\Big)^{1/p}.$$

Beweis. Nach Lemma 2.28 ist $(\|X_t\|)_{t\in[0,T]}$ ein reellwertiges rechststetiges Submartingal. Daher folgt die Behauptung aus der reellwertigen Doobschen Maximalungleichung, Satz A.10. □

2.30 Definition. Wir definieren $\mathcal{M}_T^2(E)$ als die Menge aller E-wertigen stetigen quadratintegrierbaren Martingale, d.h. es sei $\mathcal{M}_T^2(E)$ die Menge aller $\mathscr{F}_t$-Martingale $(X_t)_{t\in[0,T]}$, $X\colon \Omega \to E$, mit

$$X_t \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, P; E) \quad (t \in [0,T]),$$

so dass für P-fast alle $\omega \in \Omega$ die Abbildung

$$[0,T] \to E,\ t \mapsto X_t(\omega)$$

stetig ist.

2.31 Lemma. *a) Auf dem Raum $\mathcal{M}_T^2$ sind die Normen*

$$\begin{aligned} &\|X\|_{L^2(\Omega, L^\infty([0,T];E))} = \|X\|_{L^2(\Omega, C([0,T],E))} \\ \textit{und } &\|X\|_{\mathcal{M}_T^2} := \|X\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega;E))} = \|X_T\|_{L^2(\Omega;E)} \end{aligned}$$

äquivalent.

b) Der Raum $(\mathcal{M}_T^2, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_T^2})$ ist ein Banachraum.

Beweis. a) Die Äquivalenz der Normen folgt direkt aus der Doobschen Maximalungleichung, Satz 2.29. Man beachte, dass die letzte Gleichheit in a) aus der Submartingaleigenschaft von $(\|X_t\|^2)_{t\in[0,T]}$ folgt.

b) Da $L^2(\Omega, L^\infty([0,T];E))$ ein Banachraum und die Norm auf diesem Raum äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_T^2}$ ist, ist für die Vollständigkeit von $\mathcal{M}_T^2$ nur die Abgeschlossenheit als Teilmenge von $L^2(\Omega, L^\infty([0,T];E))$ zu zeigen. Nach Definition 2.30 ist $\mathcal{M}_T^2 \subset L^2(\Omega; C([0,T],E))$, der Grenzwert einer Cauchyfolge in $\mathcal{M}_T^2$ liegt somit wieder in $L^2(\Omega; C([0,T],E))$, besitzt also P-fast sicher stetige Pfade. Ebenso liegt der Grenzwert in $L^\infty([0,T]; L^2(\Omega; E))$, ist also quadratintegrierbar.

Zu zeigen ist daher nur noch, dass die Martingaleigenschaft erhalten bleibt. Nach Bemerkung 2.24 ist die Abbildung

$$\Phi_{1,s}\colon L^2(\Omega, \mathscr{F}, P; E) \to L^2(\Omega, \mathscr{F}_s, P; E),\ Y \mapsto \mathbb{E}(Y|\mathscr{F}_s)$$

stetig. Trivialerweise ist $C([0,T],E) \to E,\ f \mapsto f(t)$ stetig. Damit ist aber auch die „triviale Fortsetzung“

$$\Phi_{2,t}\colon L^2(\Omega; C([0,T],E)) \to L^2(\Omega, \mathscr{F}, P; E),\ X \mapsto X_t$$

stetig. Somit ist

$$\Phi_{1,s} \circ \Phi_{2,t}\colon L^2(\Omega; C([0,T],E)) \to L^2(\Omega, \mathscr{F}_s, P; E),\ X \mapsto \mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s)$$

ebenfalls stetig, und der Raum der Martingale ist als Durchschnitt

$$\bigcap_{0\le s<t\le T} \big\{X \in L^2(\Omega; C([0,T],E)) : \Phi_{1,s} \circ \Phi_{2,t}(X) = \Phi_{2,s}(X)\big\}$$

abgeschlossen. □

Wir betrachten nun speziell Wiener Prozesse. Dazu sei $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ mit $Q = Q^* \ge 0$.

2.32 Lemma. *Sei $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ ein H-wertiger Q-Wiener Prozess bzgl. einer normalen Filtrierung $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Dann gilt $W \in \mathcal{M}_T^2(H)$.*

Beweis. Nach Definition des Wiener Prozesses ist $t \mapsto W_t$ P-fast sicher stetig. Weiter gilt $\|W_t\|^2_{L^2(\Omega;H)} = t \operatorname{tr} Q < \infty$, d.h. $W \in L^\infty((0,T); L^2(\Omega;H))$. Für $0 \le s \le t \le T$, $h \in H$ und $A \in \mathscr{F}_s$ gilt

$$\Big\langle \int_A (W_t - W_s)dP, h\Big\rangle = \int_A \langle W_t - W_s, h\rangle dP = P(A)\int \langle W_t - W_s, h\rangle dP = 0,$$

da $W_t - W_s$ unabhängig zu $\mathscr{F}_s$ ist. Also gilt $\int_A W_t dP = \int_A W_s dP$ für alle $A \in \mathscr{F}_s$, d.h. $E(W_t|\mathscr{F}_s) = W_s$. □

Wir wollen im Folgenden die Klasse der betrachteten Prozesse erweitern. Dazu fixieren wir folgende Situation:

(i) H ist reeller separabler Hilbertraum, und $Q \in L(H)$ ist ein injektiver Operator mit $Q = Q^* \geq 0$.

(ii) $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ ist eine Orthonormalbasis von H mit $Q\widetilde{e}_n = \lambda_n \widetilde{e}_n$.

(iii) Wir setzen $H_0 := R(Q^{1/2})$ mit Norm $\|\cdot\|_{H_0} := \|Q^{-1/2}\cdot\|_H$, siehe Bemerkung C.4, sowie $e_n := \sqrt{\lambda_n}\widetilde{e}_n$. Dann ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H_0.

(iv) Gegeben ist ein weiterer reeller separabler Hilbertraum H_1 und eine Abbildung $J\colon H_0 \to H_1$, welche injektiv und ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, d.h. $J \in \mathscr{S}_2(H_0, H_1)$.

2.33 Bemerkung. a) Eine Standardwahl ist $Q = \mathrm{id}_H$, d.h. $H = H_0$.

b) Falls $H = L^2(G)$ mit $G \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so kann man $H_1 := W_2^{-s}(G)$ und $J\colon L^2(G) \hookrightarrow W_2^{-s}(G)$ mit hinreichend großem $s > 0$ wählen.

c) Die Existenz von H_1 und J ist immer gegeben: Man kann $H_1 := H_0$ und $Jx := \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle \mu_n e_n$ mit $\mu_n > 0$ und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ wählen. In diesem Fall ist J sogar bijektiv.

2.34 Definition und Satz. *In obiger Situation definiere $Q_1 := JJ^*$. Dann gilt $0 \leq Q_1 = Q_1^* \in \mathscr{S}_1(H_1)$, und Q_1 ist injektiv. Seien $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ unabhängige reellwertige Brownsche Bewegungen. Dann konvergiert die Reihe*

$$W_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n(t) J e_n \quad (t \in [0,T])$$

in $\mathcal{M}_T^2$ und definiert einen Q_1-Wiener Prozess auf H_1. Es gilt $R(Q_1^{1/2}) = J(H_0)$ und

$$\|x\|_{H_0} = \|Q_1^{-1/2}Jx\|_{H_1} = \|Jx\|_{R(Q_1^{1/2})} \quad (x \in H_0),$$

d.h. die Abbildung $J\colon R(Q^{1/2}) \to R(Q_1^{1/2})$ ist eine Isometrie. Hier ist $Q_1^{-1/2}$ die Pseudo-Inverse von $Q_1^{1/2}$, siehe Definition C.3.

Der Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ heißt zylindrischer Q-Wiener Prozess in H.

Beweis. **(1)** Definiere die Filtrierung

$$\mathscr{G}_t := \sigma\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\{\beta_n(s) : s \leq t\})\Big) \quad (t > 0).$$

Seien $0 \leq s < t$. Da $\sigma\big(\sigma(\{\beta_n(r) : r \leq s\}) \cup \sigma(\beta_n(t))\big)$ unabhängig von der σ-Algebra $\sigma\big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}\setminus\{n\}} \sigma(\{\beta_m(r) : r \leq s\})\big)$ ist, gilt

$$\mathbb{E}(\beta_n(t)|\mathscr{G}_s) = \mathbb{E}\big(\beta_n(t) \,|\, \sigma(\{\beta_n(r) : r \leq s\})\big) = \beta_n(s).$$

Also ist $(\beta_n(t)Je_n)_{t\geq 0}$ ein stetiges H_1-wertiges Martingal bzgl. der Filtrierung $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$, dasselbe gilt für die Partialsummen $W_N(t) := \sum_{n=1}^N \beta_n(t)Je_n$. Nach der Doobschen Maximalungleichung (Satz 2.29) gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \Big\| \sum_{n=N}^M \beta_n(t)Je_n\Big\|_{H_1}^2\Big) &\leq 4 \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\Big(\Big\| \sum_{n=N}^M \beta_n(t)Je_n\Big\|_{H_1}^2\Big) \\
&= 4T \sum_{n=N}^M \|Je_n\|_{H_1}^2 \to 0
\end{aligned}$$

für $N, M \to \infty$, wobei $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Je_n\|_{H_1}^2 = \|J\|_{\mathrm{HS}}^2 < \infty$ verwendet wurde. Somit konvergiert $(W_N)_{N\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}_T^2(H_1)$, und es folgt $W \in \mathcal{M}_T^2(H_1)$, insbesondere ist W P-fast sicher stetig.

(2) Für alle $h_1 \in H_1$ ist $\langle W_t - W_s, h_1\rangle_{H_1}$, $0 \leq s < t$, normalverteilt mit Erwartungswert 0. Es gilt

$$\begin{aligned}
&E\big(\langle W_t - W_s, h_1\rangle_{H_1} \langle W_t - W_s, \widetilde{h}_1\rangle_{H_1}\big) \\
&\quad= \sum_{n\in\mathbb{N}} (t-s)\langle Je_n, h_1\rangle_{H_1} \langle Je_n, \widetilde{h}_1\rangle_{H_1} \\
&\quad= \sum_{n\in\mathbb{N}} (t-s)\langle e_n, J^*h_1\rangle_{H_0} \langle e_n, J^*\widetilde{h}_1\rangle_{H_0} \\
&\quad= (t-s)\langle J^*h_1, J^*\widetilde{h}_1\rangle_{H_0} \\
&\quad= (t-s)\langle JJ^*h_1, \widetilde{h}_1\rangle_{H_1}.
\end{aligned}$$

Also ist $P \circ (W_t - W_s)^{-1} = N(0, (t-s)Q_1)$. Die Unabhängigkeit der Zuwächse zeigt man wie im Beweis von Satz 2.20.

(3) Die Aussagen über $R(Q^{1/2})$ und J folgen direkt aus Lemma C.5. □

3. Stochastische Integration

3.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden wir das Integral $\int_0^t \Phi_s dW_s$ definieren und einige wichtige Eigenschaften untersuchen. Wie üblich, wird das Integral zunächst für elementare Prozesse Φ definiert und dann durch Grenzwertbildung für allgemeinere Prozesse. Es ist hier aber nicht so leicht, eine Charakterisierung für den Abschluss der elementaren Prozesse zu finden. Ein zentrales Hilfsmittel in der Konstruktion des Integrals ist die Itô-Isometrie.

a) Die Konstruktion des stochastischen Integrals

Im Folgenden seien $T \in (0, \infty)$, $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum mit normaler Filtrierung $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$, H, K separable Hilberträume, $0 \le Q \in \mathscr{S}_1(H)$ sowie $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ ein H-wertiger Q-Wiener Prozess bezüglich der Filtrierung $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Wir versehen $L(H, K)$ kanonisch mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(L(H, K))$, an einigen Stellen auch mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}_s(L(H, K))$, welche durch die starke Operatortopologie erzeugt wird (dies ist die von allen Abbildungen $T \mapsto Tx$ mit $x \in H$ erzeugte Topologie).

3.2 Definition. a) Sei $\Phi = (\Phi_t)_{t\in[0,T]}$ ein $L(H, K)$-wertiger stochastischer Prozess. Dann heißt Φ elementar, falls $k \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$ existieren mit

$$\Phi_t = \sum_{m=0}^{k-1} \Phi^{(m)} \chi_{(t_m,t_{m+1}]}(t) \quad (t \in [0, T]),$$

wobei für alle $m \in \{0, \ldots, k-1\}$ die Abbildung

$$\Phi^{(m)} \colon (\Omega, \mathscr{F}_{t_m}) \to (L(H, K), \mathscr{B}_s(L(H, K)))$$

messbar ist mit endlichem Wertebereich $R(\Phi^{(m)}) \subset L(H, K)$. Somit existieren $N_m \in \mathbb{N}$ und $T_{jm} \in L(H, K)$, $A_{jm} \in \mathscr{F}_{t_m}$ disjunkt für alle $j = 1, \ldots, N_m$ so, dass

$$\Phi^{(m)}(\omega) = \sum_{j=1}^{N_m} \chi_{A_{jm}}(\omega) T_{jm} \quad (\omega \in \Omega,\ m = 1, \ldots, k-1).$$

Die Menge aller elementaren Prozesse wird mit $\mathcal{E}(H, K)$ bezeichnet.

b) Für einen elementaren Prozess $\Phi \in \mathcal{E}(H, K)$ heißt

$$\operatorname{Int}[\Phi](t) := \int_0^t \Phi_s dW_s := \sum_{m=0}^{k-1} \Phi^{(m)}(W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m \wedge t}) \quad (t \in [0, T])$$

das stochastische Integral (Itô-Integral). Hier ist $t \wedge s := \min\{t, s\}$.

3.3 Lemma. *Für* $\Phi \in \mathcal{E}(H,K)$ *gilt* $\operatorname{Int}[\Phi] \in \mathcal{M}_T^2(K)$.

Beweis. Sei $\Phi_t = \sum_{m=0}^{k-1} \Phi^{(m)} \chi_{(t_m,t_{m+1}]}(t)$ wie in Definition 3.2. Dann ist die Abbildung $[0,T] \to K$, $t \mapsto \operatorname{Int}[\Phi](t)$ P-fast sicher stetig, da $t \mapsto W_t$ stetig ist und $\Phi^{(m)} \in L(H,K)$. Da $R(\Phi)$ endlich ist, gilt $\Phi \in L^\infty((0,T) \times \Omega; L(H,K))$, und aus $W_t \in L^2(\Omega; H)$ folgt

$$\operatorname{Int}[\Phi](t) \in L^2(\Omega; K) \quad (t \in [0,T]).$$

Seien $0 \le s < t \le T$ und $A \in \mathscr{F}_s$. Um die Martingaleigenschaft zu zeigen, betrachten wir

$$\int_A \Phi^{(m)} (W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m \wedge t}) dP = \sum_{j=1}^{N_m} T_{jm} \int_{A \cap A_{jm}} (W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m\wedge t}) dP.$$

Falls $s < t_m$, ist $A \cap A_{jm} \in \mathscr{F}_{t_m}$, und da W ein Martingal ist, folgt

$$\begin{aligned} \int_{A\cap A_{jm}} (W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m\wedge t}) dP &= \int_{A\cap A_{jm}} (W_{t_m\wedge t} - W_{t_m\wedge t}) dP \\ &= 0 = \int_{A\cap A_{jm}} (W_{t_{m+1}\wedge s} - W_{t_m\wedge s}) dP. \end{aligned}$$

Falls $t_m \le s < t_{m+1}$, erhält man analog $A \cap A_{jm} \in \mathscr{F}_s$ und

$$\int_{A\cap A_{jm}} (W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m\wedge t}) dP = \int_{A\cap A_{jm}} (W_{t_{m+1}\wedge s} - W_{t_m\wedge s}) dP.$$

Ist schließlich $s \ge t_{m+1}$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{A\cap A_{jm}} (W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m\wedge t}) dP &= \int_{A\cap A_{jm}} (W_{t_{m+1}} - W_{t_m}) dP \\ &= \int_{A\cap A_{jm}} (W_{t_{m+1}\wedge s} - W_{t_m\wedge s}) dP. \end{aligned}$$

Durch Summation über m erhalten wir

$$\int_A \operatorname{Int}[\Phi](t) dP = \int_A \operatorname{Int}[\Phi](s) dP,$$

d.h. $\mathbb{E}\big(\operatorname{Int}[\Phi](t) \,|\, \mathscr{F}_s\big) = \operatorname{Int}[\Phi](s)$, und $\operatorname{Int}[\Phi]$ ist ein Martingal. Ingesamt folgt somit $\operatorname{Int}[\Phi] \in \mathcal{M}_T^2(K)$. □

Für die Fortsetzung des Integrals auf allgemeinere Integranden ist die folgende Isometrie wesentlich.

3.4 Satz (Itô-Isometrie)**.** *Für* $\Phi \in \mathcal{E}(H,K)$ *gilt*

$$\begin{aligned}\big\|\operatorname{Int}[\Phi]\big\|^2_{\mathcal{M}^2_T(K)} &= \mathbb{E}\Big(\int_0^T \|\Phi_s Q^{1/2}\|^2_{\mathscr{S}_2(H,K)} ds\Big)\\ &= \|\Phi Q^{1/2}\|^2_{L^2(\Omega;L^2((0,T);\mathscr{S}_2(H,K)))} =: \|\Phi\|^2_W.\end{aligned}$$

Beweis. Sei wieder $\Phi = \sum_{m=0}^{k-1} \Phi^{(m)} \chi_{(t_m,t_{m+1}]} \in \mathcal{E}(H,K)$. Mit $\Delta_m := W_{t_{m+1}} - W_{t_m}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\big\|\operatorname{Int}[\Phi]\big\|^2_{\mathcal{M}^2_T(K)} &= \mathbb{E}\Big(\Big\|\int_0^T \Phi_s dW_s\Big\|^2_K\Big) = \mathbb{E}\Big(\Big\|\sum_{m=0}^{k-1} \Phi^{(m)}\Delta_m\Big\|^2_K\Big)\\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \mathbb{E}\big(\|\Phi^{(m)}\Delta_m\|^2_K\big) + 2 \sum_{0\le m<n\le k-1} \mathbb{E}\big(\langle \Phi^{(m)}\Delta_m, \Phi^{(n)}\Delta_n\rangle_K\big).\end{aligned} \tag{3-1}$$

(1) Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von K. Dann gilt

$$\mathbb{E}\big(\|\Phi^{(m)}\Delta_m\|^2_K\big) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big(\langle \Phi^{(m)}\Delta_m, e_\ell\rangle^2_K\big) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big(\Delta_m, (\Phi^{(m)})^* e_\ell\rangle^2_H\big).$$

Da Δ_m unabhängig von $\mathscr{F}_{t_m}$ ist und $(\Phi^{(m)})^*$ $\mathscr{F}_{t_m}$-messbar ist, gilt nach Lemma 2.25 und Bemerkung 2.11

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\langle\Delta_m,(\Phi^{(m)})^* e_\ell\rangle^2_H \,\big|\, \mathscr{F}_{t_m}\big)(\omega) &= \mathbb{E}\big(\langle \Delta_m, (\Phi^{(m)})^*(\omega) e_\ell\rangle^2_H\big)\\ &= (t_{m+1}-t_m)\big\langle Q(\Phi^{(m)})^*(\omega)e_\ell, (\Phi^{(m)})^*(\omega)e_\ell\big\rangle_H\\ &= (t_{m+1}-t_m)\big\|Q^{1/2}(\Phi^{(m)})^*(\omega)e_\ell\big\|^2_H.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\|\Phi^{(m)}\Delta_m\|^2_K\big) &= (t_{m+1}-t_m)\sum_{\ell\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big(\|Q^{1/2}(\Phi^{(m)})^* e_\ell\|^2_H\big)\\ &= (t_{m+1}-t_m)\mathbb{E}\big(\|Q^{1/2}(\Phi^{(m)})^*\|^2_{\mathscr{S}_2(K,H)}\big)\\ &= (t_{m+1}-t_m)\mathbb{E}\big(\|\Phi^{(m)}Q^{1/2}\|^2_{\mathscr{S}_2(H,K)}\big).\end{aligned}$$

Summation über m liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sum_{m=0}^{k-1} \|\Phi^{(m)}\Delta_m\|^2_K\Big) &= \int_0^T \mathbb{E}\big(\|\Phi_s Q^{1/2}\|^2_{\mathscr{S}_2(H,K)}\big) ds\\ &= \|\Phi Q^{1/2}\|^2_{L^2(\Omega;L^2((0,T);\mathscr{S}_2(H,K)))} = \|\Phi\|^2_W.\end{aligned}$$

(2) Für $0 \le m < n \le k-1$ erhält man analog

$$\mathbb{E}\big(\langle\Phi^{(m)}\Delta_m,\Phi^{(n)}\Delta_n\rangle_K\big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(\langle(\Phi^{(n)})^*\Phi^{(m)}\Delta_m, \Delta_n\rangle_H \,\big|\, \mathscr{F}_{t_n}\big)\Big)$$

$$= \int_\Omega \mathbb{E}\Big(\langle (\Phi^{(n)})^* \Phi^{(m)}(\omega)\Delta_m(\omega), \Delta_n\rangle_H\Big) dP(\omega) = 0,$$

da $\mathbb{E}(\langle h, \Delta_n\rangle_H) = 0$ für alle $h \in H$ gilt. $\square$

3.5 Bemerkung. a) Die Bezeichnung $\|\cdot\|_W$ deutet an, dass der Operator Q durch den Wiener Prozess W bestimmt wird. Aufgrund der Itô-Isometrie wäre $\|\cdot\|_W$ eine passende Norm auf $\mathcal{E}(H,K)$, bezüglich welcher vervollständigt werden kann, um das Integral zu verallgemeinern. Man beachte allerdings, dass $\|\cdot\|_W$ nur eine Halbnorm ist: Es gilt $\|\Phi\|_W = 0$ genau dann, wenn $\Phi|_{R(Q^{1/2})} = 0$ $(dt \otimes P)$-fast sicher gilt. Man geht daher zu Äquivalenzklassen und zum Quotientenraum über, ohne die Notation zu ändern.

b) Unter Beachtung von a) definiert man $\overline{\mathcal{E}(H,K)}$ als Vervollständigung von $\mathcal{E}(H,K)$ bzgl. $\|\cdot\|_W$ und setzt $\mathrm{Int}\colon \mathcal{E}(H,K) \to \mathcal{M}_T^2(K)$ eindeutig zu $\mathrm{Int}\colon \overline{\mathcal{E}(H,K)} \to \mathcal{M}_T^2(K)$ fort. Diese Abbildung ist wieder eine Isometrie.

c) Man beachte, dass nach Satz B.11 der Raum $\mathscr{S}_2(H,K)$ wieder ein separabler Hilbertraum ist und daher der Raum $L^2(\Omega; L^2((0,T); \mathscr{S}_2(H,K)))$ wohldefiniert (und wieder ein Hilbertraum) ist.

3.6 Definition und Bemerkung. Für eine explizite Beschreibung von $\overline{\mathcal{E}(H,K)}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \Omega_T &:= [0,T] \times \Omega, \\ \mathscr{F}_T &:= \mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathscr{F}, \\ P_T &:= dt \otimes P. \end{aligned}$$

Weiter sei $H_0 := R(Q^{1/2}) \subset H$ der Wertebereich von $Q^{1/2}$ mit Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle_{H_0} := \langle Q^{-1/2}x, Q^{-1/2}y\rangle_H \quad (x, y \in H_0)$$

mit der Pseudo-Inversen $Q^{-1/2}$ zu $Q^{1/2}$. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ eine Orthonormalbasis von $(\ker Q^{1/2})^\perp \subset H$. Dann ist $(Q^{1/2}e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H_0 (siehe Bemerkung C.4). Ergänzt man $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch mit Elementen aus $\ker Q^{1/2}$ zu einer Orthonormalbasis von H, so folgt

$$\|T\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|TQ^{1/2}e_n\|_K^2 = \|TQ^{1/2}\|^2_{\mathscr{S}_2(H,K)}. \tag{3-2}$$

Man definiert $L(H,K)_0 := \{T|_{H_0} : T \in L(H,K)\}$. Da $TQ^{1/2} \in \mathscr{S}_2(H,K)$ für alle $T \in L(H,K)$ gilt, folgt $L(H,K)_0 \subset S_2(H_0,K)$. Nach Bemerkung 3.5 a) sind alle Prozesse in $\mathcal{E}(H,K)$ (genauer: alle Äquivalenzklassen von Prozessen) $L(H,K)_0$-wertigen Prozesse.

Unter Verwendung von (3-2) kann man die Itô-Isometrie auch in der Form

$$\|\operatorname{Int}[\Phi]\|^2_{\mathcal{M}^2_T(K)} = \mathbb{E}\Big(\int_0^T \|\Phi_s\|^2_{\mathscr{L}_2(H_0,K)}ds\Big) = \|\Phi\|^2_{L^2(\Omega_T;\mathscr{L}_2(H_0,K))}$$

schreiben.

3.7 Lemma. *Es existiert eine Orthnormalbasis von $\mathscr{L}_2(H_0,K)$, welche aus Elementen von $L(H,K)_0$ besteht. Insbesondere ist $L(H,K)_0 \subset \mathscr{L}_2(H_0,K)$ dicht.*

Beweis. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ eine Orthonormalbasis von H mit $Qe_n = \lambda_n e_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Mit Bemerkung C.4 und $Q^{1/2}e_n = \sqrt{\lambda_n}e_n$ folgt, dass $\{\lambda_n e_n : n \in \mathbb{N} \text{ mit } \lambda_n > 0\}$ eine Orthonormalbasis von H_0 ist. Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Orthonormalbasis von K. Nach Satz B.11 ist dann $\{f_m \otimes \sqrt{\lambda_n}e_n : m, n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{L}_2(H_0,K)$. Es gilt

$$f_m \otimes \sqrt{\lambda_n}e_n = \langle\sqrt{\lambda_n}e_n,\cdot\rangle_{H_0} f_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\langle e_n,\cdot\rangle_H f_m \in L(H,K),$$

also sind alle Basisvektoren in $L(H,K)_0$. Rationale endliche Linearkombinationen davon sind dicht in $\mathscr{L}_2(H_0,K)$. □

3.8 Definition und Bemerkung. Wir definieren die σ-Algebra

$$\mathscr{P}_T := \sigma\Big(\big\{(s,t] \times F_s : 0 \le s < t \le T,\ F_s \in \mathscr{F}_s\big\} \cup \big\{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathscr{F}_0\big\}\Big).$$

Dann ist $\mathscr{P}_T$ die von allen linksstetigen $(\mathscr{F}_t)$-adaptierten Prozessen $Y\colon \Omega_T \to \mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra.

Ein Prozess $Y\colon \Omega_T \to H$ heißt (H-)vorhersagbar, falls Y $\mathscr{P}_T$-$\mathscr{B}(H)$-messbar ist.

3.9 Satz. *Sei*

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^2_W(H,K) &:= \big\{\Phi\colon \Omega_T \to \mathscr{L}_2(H_0,K) : \Phi \textit{ vorhersagbar}, \|\Phi\|_W < \infty\big\}\\ &= L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, P_T; \mathscr{L}_2(H_0,K)).\end{aligned}$$

Dann gilt $\overline{\mathcal{E}(H,K)} = \mathcal{N}^2_W(H,K)$.

Beweis. **(1)** Nach Definition von $\mathcal{E}(H,K)$ und wegen $L(H,K)_0 \subset \mathscr{L}_2(H_0,K)$ gilt $\mathcal{E}(H,K) \subset \mathcal{N}^2_W(H,K)$.

(2) Nach Satz B.11 ist $\mathscr{L}_2(H_0,K)$ und damit auch $\mathcal{N}^2_W(H,K)$ ein Hilbertraum und insbesondere vollständig. Daher ist nur zu zeigen, dass $\mathcal{E}(H,K)$ dicht in $\mathcal{N}^2_W(H,K)$ liegt. Sei dazu $\Phi \in \mathcal{N}^2_W(H,K)$.

(i) Nach Definition von $L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, P_T; \mathscr{L}_2(H_0,K))$ existiert eine Folge von Stufenfunktionen $\Phi_n = \sum_{k=1}^{M_n} L_{kn}\chi_{A_{kn}}$ mit $A_{kn} \in \mathscr{P}_T$ und $L_{kn} \in \mathscr{L}_2(H_0,K)$, mit $\|\Phi_n - \Phi\|_W \to 0$ $(n \to \infty)$. Daher sei o.E. $\Phi = L\chi_A$ mit $L \in \mathscr{L}_2(H_0,K)$ und $A \in \mathscr{P}_T$.

(ii) Nach Lemma 3.7 existiert eine Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(H,K)_0$ mit $\|L - L_n\|_{\mathscr{L}_2(H_0,K)} \to 0$ und damit $\|L\chi_A - L_n\chi_A\|_W \to 0$ $(n \to \infty)$. Daher sei o.E. $\Phi = L\chi_A$ mit $L \in L(H,K)_0$.

(iii) Sei $\mathscr{A}$ die von

$$\mathscr{A}_0 := \big\{(s,t] \times F_s : 0 \le s < t \le T,\, F_s \in \mathscr{F}_s\big\} \cup \big\{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathscr{F}_0\big\}$$

erzeugte Algebra. Dann liegt $\mathscr{A}$ dicht in $\sigma(\mathscr{A}_0) = \mathscr{P}_T$ in dem Sinne, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ und $A \in \mathscr{P}_T$ ein $\widetilde{A} \in \mathscr{A}$ existiert mit

$$P\big((A \setminus \widetilde{A}) \cup (\widetilde{A} \setminus A)\big) < \varepsilon. \tag{3-3}$$

Zu $\Phi = L\chi_A$ mit $A \in \mathscr{P}_T$ existiert daher $\widetilde{A} \in \mathscr{A}$ mit (3-3). Die Elemente von $\mathscr{A}$ sind endliche disjunkte Vereinigungen von Elementen aus $\mathscr{A}_0$. Daher existieren $A_1, \ldots, A_N \in \mathscr{A}_0$ mit $\widetilde{A} = \bigcup_{n=1}^N A_n$. Für $\widetilde{\Phi} := \sum_{n=1}^N L\chi_{A_n}$ gilt $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{E}(H,K)$ (man beachte dazu $\|L\chi_{\{0\}\times F_0}\|_W = 0$) sowie

$$\begin{aligned}\|\Phi - \widetilde{\Phi}\|_W^2 &= \Big\|L\Big(\chi_A - \sum_{n=1}^N \chi_{A_n}\Big)\Big\|^2_{L^2(\Omega_T;\mathscr{L}_2(H_0,K))}\\ &= P_T\big((A \setminus \widetilde{A}) \cup (\widetilde{A} \setminus A)\big)\|L\|^2_{\mathscr{L}_2(H_0,K)}\\ &\le \varepsilon \|L\|^2_{\mathscr{L}_2(H_0,K)}.\end{aligned}$$

Nach (i)-(iii) ist $\mathcal{E}(H,K)$ dicht in $\mathcal{N}_W^2(H,K)$. □

3.10 Bemerkung. Das stochastische Integral kann nun durch Lokalisierung weiter verallgemeinert werden auf die Menge $\mathcal{N}_W(H,K)$ aller vorhersagbaren Prozesse $\Phi\colon \Omega_T \to \mathscr{L}_2(H_0,K)$, für welche

$$P\Big(\int_0^T \|\Phi_s\|^2_{\mathscr{L}_2(H_0,K)} ds < \infty\Big) = 1$$

gilt. Die Menge $\mathcal{N}_W(H,K)$ heißt die Menge der stochastisch integrierbaren Prozesse. Für diese Verallgemeinerung verwendet man eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit $\tau_n \nearrow T$ $(n \to \infty)$ und $\chi_{(0,\tau_n]}\Phi \in \mathcal{N}_W^2(H,K)$ und setzt

$$\int_0^t \Phi_s dW_s := \lim_{n\to\infty} \int_0^t \chi_{(0,\tau_n]}(s)\Phi_s dW_s \quad (t \in [0,T]).$$

Für die Details verweisen wir auf [PR07].

Um das stochastische Integral auch für zylindrische Wiener Prozesse zu definieren, verwendet man wieder die Einbettung $J\colon H_0 \to H_1$ (siehe Definition und Satz 2.34). Wir fixieren dazu folgende Situation:

Sei $0 \le Q = Q^* \in L(H)$, $H_0 := R(Q^{1/2})$ mit Norm $\|\cdot\|_{H_0} := \|Q^{-1/2}\cdot\|_H$ sowie $J \in \mathscr{S}_2(H_0, H_1)$ mit einem weiteren separablen Hilbertraum H_1. Wir setzen $Q_1 := JJ^*$. Dann ist $J\colon R(Q^{1/2}) \to R(Q_1^{1/2})$ nach Satz 2.34 eine Isometrie, und mit Polarisation folgt

$$\langle Jx, Jy\rangle_{R(Q_1^{1/2})} = \langle Q_1^{-1/2}Jx, Q_1^{-1/2}Jy\rangle_{H_1} = \langle x, y\rangle_{H_0}.$$

Falls $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0$ eine Orthonormalbasis von H_0 ist, so ist $(Je_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$ eine Orthonormalbasis von $R(Q_1^{1/2})$. Insbesondere ist $\Phi \in \mathscr{S}_2(H_0, K)$ genau dann, wenn $\Phi J^{-1} \in \mathscr{S}_2(R(Q^{1/2}), K)$. Denn es ist

$$\|\Phi\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\Phi e_n\|_K^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\Phi J^{-1} Je_n\|_K^2 = \|\Phi J^{-1}\|^2_{\mathscr{S}_2(R(Q^{1/2}),K)}.$$

Nach Satz 2.34 ist ein Q-zylindrischer Wiener Prozess W zugleich ein Q_1-Wiener Prozess. Daher definiert man mit obigen Bezeichnungen

$$\mathcal{N}_W^2(H,K) := L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, P_T; \mathscr{S}_2(H_0, K)).$$

Für $\Phi \in \mathcal{N}_W^2(H,K)$ definiert man das stochastische Integral durch

$$\int_0^t \Phi_s dW_s := \int_0^t \Phi_s J^{-1} dW_s. \tag{3-4}$$

3.11 Bemerkung. a) Für $\Phi \in \mathcal{N}_W^2(H,K)$ gilt

$$\Phi J^{-1} \in L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, P_T; \mathscr{S}_2(R(Q_1^{1/2}), K)).$$

Daher ist die rechte Seite von (3-4) als Integral bezüglich des Q_1-Wiener Prozesses $(W_t)_{t\in[0,T]}$ wohldefiniert.

b) Man sieht leicht, dass für elementare Prozesse der Wert des Integrals in (3-4) nicht von der Wahl von J und H_1 abhängt. Man beachte dazu, dass für zylindrische Wiener Prozesse die Darstellung $W_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n(t) Je_n$ gilt, siehe Satz 2.34. Nach Konstruktion gilt dies auch für alle $\Phi \in \mathcal{N}_W^2(H,K)$.

c) Wie für Q-Wiener Prozesse kann man auch für zylindrische Q-Wiener Prozesse das Integral verallgemeinern auf $\Phi \in \mathcal{N}_W(H,K)$. Dabei ist $\mathcal{N}_W(H,K)$ definiert als die Menge aller vorhersagbaren Prozesse $\Phi\colon \Omega_T \to \mathscr{S}_2(H_0,K)$, für welche $\int_0^T \|\Phi_s\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} ds < \infty$ P-fast sicher gilt.

b) Eigenschaften des Integrals

In der obigen Situation sei zunächst Q ein Spurklasseoperator.

3.12 Lemma. *Die Abbildung* $\mathrm{Int}\colon \mathcal{N}_W^2(H,K) \to \mathcal{M}_T^2(K)$ *ist linear und isometrisch. Falls* $\widetilde{K}$ *ein weiterer separabler reeller Hilbertraum ist und* $A \in L(K,\widetilde{K})$, *so gilt* $A\Phi \in \mathcal{N}_W^2(H,\widetilde{K})$ *für alle* $\Phi \in \mathcal{N}_W^2(H,K)$ *sowie* $A\int_0^t \Phi_s dW_s = \int_0^t A\Phi_s dW_s$ P*-fast sicher für alle* $t \in [0,T]$.

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition für elementare Prozesse und durch Approximation für $\Phi \in \mathcal{N}_W^2(H,K)$. Man beachte dabei, dass $\|A\Phi_s\|_{\mathscr{L}_2(H_0,\widetilde{K})} \le \|A\|_{L(K,\widetilde{K})}\|\Phi_s\|_{\mathscr{L}_2(H_0,K)}$ gilt und $A\Phi$ auch $\mathscr{P}_T$-$\mathscr{B}(\widetilde{H})$-messbar, d.h. vorhersagbar ist. □

3.13 Definition und Lemma. *Seien* $\Phi \in \mathcal{N}_W^2(H,K)$ *und* $f\colon \Omega_T \to K$ *ein* $(\mathscr{F}_t)$*-adaptierter Prozess mit stetigen Pfaden, d.h.* $t \mapsto f_t(\omega) \in C([0,T],K)$ *für* P*-fast alle* $\omega \in \Omega$. *Definiere*

$$\Phi^{(f)}\colon \Omega_T \times H_0 \to \mathbb{R},\ \Phi_t^{(f)}(\omega)h := \langle f_t(\omega), \Phi_t(\omega)h\rangle_K.$$

Dann ist $\Phi^{(f)} \in \mathcal{N}_W(H,\mathbb{R})$, *und das stochastische Integral*

$$\int_0^t \big\langle f_s, \Phi_s dW_s\big\rangle := \int_0^t \Phi_s^{(f)} dW_s \quad (t \in [0,T])$$

ist wohldefiniert im Sinne von Bemerkung 3.10.

Beweis. Nach Bemerkung 3.8 sind stetige adaptierte Prozesse vorhersagbar, d.h. $\Phi^{(f)}$ ist $\mathscr{P}_T$-$\mathscr{B}(\mathscr{L}_2(H,\mathbb{R}))$-messbar. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Dann gilt für $s \in [0,T]$ und $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_s^{(f)}(\omega)\|^2_{\mathscr{L}_2(H_0,\mathbb{R})} &= \|\Phi_s^{(f)}(\omega)Q^{1/2}\|^2_{\mathscr{L}_2(H,\mathbb{R})} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big|\Phi_s^{(f)}(\omega)Q^{1/2}e_n\big|^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f_s(\omega), \Phi_s(\omega)Q^{1/2}e_n\rangle_K^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Q^{1/2}\Phi_s(\omega)^* f_s(\omega), e_n\rangle_H^2 \\
&= \|Q^{1/2}\Phi_s(\omega)^* f_s(\omega)\|_H^2 \le \|Q^{1/2}\Phi_s(\omega)^*\|^2_{L(H,K)}\|f_s(\omega)\|_K^2 \\
&\le \|\Phi_s(\omega)Q^{1/2}\|^2_{\mathscr{L}_2(H,K)}\|f_s(\omega)\|_K^2 = \|\Phi_s(\omega)\|^2_{\mathscr{L}_2(H_0,K)}\|f_s(\omega)\|_K^2.
\end{aligned}$$

Damit folgt $\int_0^T \|\Phi_s^{(f)}\|^2_{\mathscr{L}_2(H_0,K)} ds < \infty$ P-fast sicher, d.h. $\Phi^{(f)} \in \mathcal{N}_W(0,T;H,K)$. □

3.14 Bemerkung. Sei $\Phi \in \mathcal{N}_W^2(H,K)$, und sei $M_t := (\operatorname{Int}\Phi)(t)$. Dann ist (nach Satz 3.9) $M \in \mathcal{M}_T^2(K)$, d.h. M ist ein stetiges L^2-Martingal, es gilt $\mathbb{E}(M_t) = 0$ ($t \in [0,T]$). Man kann leicht zeigen, dass der Kovarianzoperator gegeben ist durch

$$\operatorname{cov}(M_t) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t \Phi_s Q^{1/2} (\Phi_s Q^{1/2})^* ds \Big).$$

Insbesondere gilt wegen $\mathbb{E}(\|M_t\|_K^2) = \operatorname{tr}\operatorname{cov}(M_t)$ (siehe Bemerkung 2.13) die Gleichheit

$$\mathbb{E}(\|M_t\|_K^2) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t \|\Phi_s\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} ds \Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t \operatorname{tr}\big[\Phi_s Q^{1/2} (\Phi_s Q^{1/2})^*\big] ds \Big).$$

Falls sogar $\Phi \in L^2(\Omega_T, \mathscr{P}_T, P_T; L(H,K))$ gilt, lässt sich das letzte Integral schreiben als

$$\mathbb{E}(\|M_t\|_K^2) = \mathbb{E}\Big(\int_0^t \operatorname{tr}\big[\Phi_s Q \Phi_s^*\big] ds \Big).$$

Man definiert die quadratische Variation $(\langle M\rangle_t)_{t\in[0,T]}$ als den eindeutigen stetigen wachsenden $\mathcal{F}_t$-adaptierten Prozess mit $\langle M\rangle_0 = 0$ so, dass $\|M_t\|_K^2 - \langle M\rangle_t$ ein Martingal ist. Es gilt

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t \|\Phi_s\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} ds.$$

3.15 Bemerkung. Die obigen Aussagen lassen sich mit entsprechenden Modifikationen verallgemeinern auf $\Phi \in \mathcal{N}_W(0,T;H,K)$ sowie auf zylindrische Q-Wiener Prozesse.

3.16 Definition. Sei $(W_t)_{t\in[0,T]}$ ein zylindrischer Q-Wiener Prozess mit $0 \le Q = Q^* \in L(H)$. Seien $\Phi \in \mathcal{N}_W(0,T;H,K)$ sowie $\Psi\colon \Omega_T \to K$, Ψ $\mathscr{F}_t$-adaptiert und P-fast sicher Bochner-integrierbar, $X_0\colon \Omega \to K$ $\mathscr{F}_0$-$\mathscr{B}(K)$-messbar. Dann heißt

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Psi_s ds + \int_0^t \Phi_s dW_s \quad (t \in [0,T]) \tag{3-5}$$

ein Itô-Prozess.

3.17 Satz (Itô-Formel). *Sei $X\colon \Omega_T \to K$ ein Itô-Prozess und $F\colon [0,T]\times K \to \mathbb{R}$ stetig. Seien ferner die Fréchet-Ableitungen F_t, F_x und F_{xx} stetig und beschränkt auf beschränkten Teilmengen von $[0,T]\times K$. Dann gilt*

$$F(t,X_t) = F(0,X_0) + \int_0^t \langle F_x(s,X_s), \Phi_s dW_s\rangle + \int_0^t \Big[F_t(s,X_s) + \langle F_x(s,X_s), \Psi_s\rangle_K + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\Big(F_{xx}(s,X_s)(\Phi_s Q^{1/2})(\Phi_s Q^{1/2})^*\Big)\Big] ds.$$

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen (siehe [DPZ92], Thm. 4.17). Die Itô-Formel ist das stochastische Analogon zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Dieser ist als Spezialfall enthalten: Für $\Psi = 1$, $\Phi = 0$, $X_0 = 0$ und $F \in C^2([0,T])$ erhält man als Itô-Prozess $X_t = t$ und damit

$$F(t) = F(0) + \int_0^t F_x(s)ds = F(0) + \int_0^t F'(s)ds.$$

Für $\Phi = 1$, $\Psi = 0$ und $X_0 = 0$ folgt andererseits $X_t = W_t$, und für $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F = F(X_t)$ lautet die Itô-Formel

$$F(W_t) = F(0) + \int_0^t F'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(W_s)ds.$$

Wir werden im nächsten Kapitel auch noch eine stochastische Version des Satzes von Fubini benötigen (für einen Beweis siehe etwa [DPZ92], Theorem 4.18).

3.18 Satz (Stochastischer Satz von Fubini)**.** *Sei E ein separabler Banachraum und*

$$\Phi\colon (\Omega_T \times E, \mathscr{P}_T \otimes \mathscr{B}(E)) \to (\mathscr{S}_2(H_0, K), \mathscr{B}(\mathscr{S}_2(H_0, K)))$$

messbar. Sei μ ein endliches Maß auf $(E, \mathscr{B}(E))$. Es gelte

$$\int_E \|\Phi(\cdot,\cdot,x)\|_W d\mu(x) < \infty.$$

Dann gilt P-fast sicher

$$\int_E \Big[\int_0^T \Phi(t,x)dW_t\Big] d\mu(x) = \int_0^T \Big[\int_E \Phi(t,x)d\mu(x)\Big] dW_t.$$

4. Halbgruppentheorie für SPDEs

4.1 Worum geht's? Wir werden nun SPDEs der Form

$$dX_t = (AX_t + N(X_t))dt + BdW_t,\ X_0 = x_0$$

betrachten, wobei der unbeschränkte Operator A der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe ist. Für diese Gleichung gibt es mehrere Lösungsbegriffe, welche hier kurz diskutiert und verglichen werden. Während man häufig die Existenz einer schwachen Lösung zeigen kann, ist die Frage der (höheren) Regularität der Lösung oft nicht leicht zu beantworten.

a) Stochastische Faltung und lineare SPDEs

Wir betrachten zunächst den linearen Fall, d.h. $N = 0$. Da der stochastische Term BdW_t nicht von X abhängt, spricht man auch von einer SPDE mit additivem Rauschen. Zunächst fixieren wir die Situation für den Rest dieses Kapitels.

(i) Im Folgenden seien H, K reelle separable Hilberträume, $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$, $T \in (0,\infty)$, ein normal filtrierter W-Raum, $0 \le Q = Q^* \in L(H)$ ein Operator, für welchen eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H existiert mit $Qe_n = \lambda_n e_n$, sowie $W\colon \Omega_T \to K$ ein zylindrischer Wiener Prozess bzgl. der Filtrierung $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$.

(ii) Es seien $A\colon K \supset D(A) \to K$ der Generator einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\ge 0}$ auf K, $B \in L(H,K)$, $f\colon \Omega_T \to K$ ein vorhersagbarer K-wertiger Prozess mit $f \in L^1((0,T);K)$ P-fast sicher, und $x_0 \in K$.

Wir betrachten im Folgenden die lineare Gleichung

$$dX_t = (AX_t + f_t)dt + BdW_t\ (t \in [0,T]), \quad X_0 = x_0. \tag{4-1}$$

4.2 Definition. a) Ein K-wertiger Prozess $X\colon \Omega_T \to K$ heißt eine starke Lösung von (4-1), falls X vorhersagbar ist, $X_t \in D(A)$ P_T-fast sicher gilt, $AX \in L^1((0,T);K)$ P-fast sicher gilt, sowie für jedes $t \in [0,T]$ die Gleichheit

$$X_t = x_0 + \int_0^t AX_s ds + BW_t \tag{4-2}$$

P-fast sicher gilt.

b) Ein K-wertiger Prozess $X\colon \Omega_T \to K$ heißt eine milde Lösung von (4-1), falls X vorhersagbar ist, $X \in L^1((0,T);K)$ P-fast sicher gilt sowie für jedes $t \in [0,T]$ die Gleichheit

$$X_t = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds + \int_0^t T(t-s)BdW_s \tag{4-3}$$

P-fast sicher gilt.

c) Ein K-wertiger Prozess $X\colon \Omega_T \to K$ heißt eine schwache Lösung von (4-1), falls X vorhersagbar ist, $X \in L^1((0,T);K)$ P-fast sicher gilt und falls für alle $h \in D(A^*)$ und alle $t \in [0,T]$ die Gleichheit

$$\langle X_t, h\rangle_K = \langle x_0, h\rangle_K + \int_0^t \langle X_s, A^*h\rangle_K + \int_0^t \langle f_s, h\rangle_K ds + \langle BW_t, h\rangle \tag{4-4}$$

P-fast sicher gilt.

4.3 Bemerkung. a) Die Definition einer starken Lösung impliziert insbesondere, dass BW ein K-wertiger stochastischer Prozess ist. Dies ist nur möglich, falls der entsprechende Kovarianzoperator Spurklasse ist, d.h. falls $BQB^* \in \mathscr{S}_1(K)$. Diese Bedingung ist etwa erfüllt, falls $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ oder falls $B \in \mathscr{S}_2(H,K)$.

b) Eine ähnliche Aussage gilt für die milde Lösung: Das stochastische Integral in (4-3) ist zwar für allgemeine zylindrische Wiener Prozesse W definiert, konvergiert aber in einem größeren Hilbertraum. Die Gleichheit (4-3) impliziert, dass der Wert des Integrals P-fast sicher in K liegt. Die Itô-Isometrie zeigt, dass dies der Fall ist, falls $T(\cdot)B \in L^2((0,T);\mathscr{S}_2(H_0,K))$ (man beachte, dass $T(\cdot)B$ eine deterministische Funktion ist).

Der Begriff einer milden Lösung ist durch die Halbgruppentheorie motiviert: Man beachte, dass bei einer deterministischen Gleichung, d.h. für $B=0$, die Lösung durch (4-3) gegeben ist (Variation der Konstanten-Formel).

c) Die Definition einer schwachen Lösung ist für allgemeine zylindrische Wiener Prozesse sinnvoll, da die eindimensionalen Projektionen $\langle BW_t, h\rangle_K$ wohldefinierte reelle Zufallsvariablen sind.

d) Es gibt noch den Begriff einer Martingallösung, bei welchem auch P und W gesucht werden. Man beachte, dass in der stochastischen Literatur die Martingallösung häufig als schwache Lösung bezeichnet wird.

Setzt man in (4-1) $x_0 = 0$ und $f = 0$, so erhält man als milde Lösung nur das stochastische Integral, die sogenannte stochastische Faltung. Wir werden den folgenden Satz für $S(\cdot) := T(\cdot)B$ anwenden.

4.4 Satz (Stochastische Faltung)**.** *Sei $S\colon [0,T] \to L(H,K)$ eine (deterministische) Abbildung mit $S \in L^2((0,T);\mathscr{S}_2(H_0,K))$. Man definiert die stochastische Faltung*

$S * W\colon \Omega_T \to K$ durch

$$(S*W)_t := \int_0^t S(t-s)dW_s \quad (t \in [0,T]).$$

Dann ist $S*W$ ein K-wertiger Gauß-Prozess mit $S*W \in C([0,T], L^2(\Omega;K))$ und besitzt eine vorhersagbare Modifikation. Der Kovarianzoperator ist gegeben durch

$$\operatorname{cov}((S*W)_t) = \int_0^t S(s)QS^*(s)ds \quad (t \in [0,T]).$$

Beweis. Sei $Y := S*W$. Für $0 \le s \le t \le T$ gilt

$$Y_t - Y_s = \int_s^t S(t-r)dW_r + \int_0^s (S(t-r) - S(t-s))dW_r.$$

Da $\int_s^t S(t-r)dW_r$ unabhängig von $\mathscr{F}_s$ und $\int_0^s (S(t-r)-S(t-s))dW_s$ $\mathscr{F}_s$-messbar sind, sind die beiden Integrale unabhängig, und wir erhalten mit Bemerkung 3.14 und majorisierter Konvergenz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|Y_t - Y_s\|_K^2) &= \mathbb{E}\Big\|\int_s^t S(t-r)dW_r\Big\|_K^2 + \mathbb{E}\Big\|\int_0^s (S(t-r)-S(t-s))dW_r\Big\|_K^2 \\ &= \mathbb{E}\Big(\int_s^t \|S(t-r)\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)}dr\Big) + \mathbb{E}\Big(\int_0^s \|S(t-r)-S(t-s)\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)}dr\Big) \\ &\to 0 \quad (s \to t).\end{aligned}$$

Falls S ein (deterministischer) elementarer Prozess ist, ist das Integral als Linearkombination von Gauß-Prozessen wieder ein Gauß-Prozess. Nach Definition des Integrals gilt dies auch für allgemeines $S \in L^2((0,T);\mathscr{S}_2(H_0,K))$. Als Element in $\mathcal{M}_T^2(K)$ besitzt S eine stetige Modifikation und damit eine vorhersagbare Modifikation. Die Formel für den Kovarianzoperator folgt mit Bemerkung 3.14. □

Für die Eindeutigkeit einer schwachen Lösung benötigen wir folgende Aussage.

4.5 Lemma. *Sei X eine schwache Lösung der SPDE*

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t \; (t \in [0,T]), \quad X_0 = 0.$$

Dann gilt für jede Funkion $\psi \in C^1([0,T]; D(A^*))$ und für alle $t \in [0,T]$

$$\langle X_t, \psi(t)\rangle_K = \int_0^t \big\langle X_s, \psi'(s) + A^*\psi(s)\big\rangle_K ds + \int_0^t \langle \psi(s), BdW_s\rangle_K.$$

Für die Definition des letzten Integrals siehe Bemerkung 3.13.

Beweis. Sei zunächst $\psi(t) = \varphi(t)h$ mit $\varphi \in C^1([0,T])$ und $h \in D(A^*)$. Definiere $Y\colon \Omega_T \to \mathbb{R}$ durch $Y_t := \langle X_t, h\rangle_K$. Dann gilt nach Definition einer schwachen Lösung

$$Y_t = \int_0^t \langle X_s, A^*h\rangle_K ds + \langle BW_t, h\rangle_K.$$

Wir schreiben Y_t in der Form

$$Y_t = \int_0^t \Psi_s ds + \int_0^t \Phi_s dW_s$$

mit dem skalaren Prozess $\Psi_s = \langle X_s, A^*h\rangle_K$ und dem $L(H,\mathbb{R})$-wertigen Prozess $\Phi_s := \langle h, B\,\cdot\rangle_K$ (siehe Bemerkung 3.13). Dann liefert die Anwendung der Itô-Formel auf den reellen Itô-Prozess $F(t,Y_t) := \varphi(t)Y_t$

$$\begin{aligned} F(t,Y_t) &= \int_0^t F_x(s,Y_s)\Phi_s dW_s + \int_0^t \big[F_t(s,Y_s) + F_x(s,Y_s)\Psi_s ds\big] ds \\ &= \int_0^t \varphi(s)\langle h, BdW_s\rangle_K + \int_0^t \big[\varphi'(s)\langle X_s, h\rangle_K + \varphi(s)\langle X_s, A^*h\rangle_K\big] ds. \end{aligned}$$

wobei $F_x(s,Y_s) = \varphi(s)$ und $F_t(s,Y_s) = \varphi'(s)Y_s$ verwendet wurde. Wegen $F(t,Y_t) = \varphi(t)\langle X_t, h\rangle_K = \langle X_t, \psi(t)\rangle_K$ folgt

$$\langle X_t, \psi(t)\rangle_K = \int_0^t \langle \psi(s), BdW_s\rangle_K + \int_0^t \big\langle X_s, \psi'(s) + A^*\psi(s)\big\rangle_K ds,$$

also die Behauptung für Funktionen der Gestalt $\psi(t) = \varphi(t)h$. Da die Menge aller Linearkombinationen derartiger Funktionen dicht in $C^1([0,T]; D(A^*))$ liegen, folgt die Behauptung für allgemeines ψ. □

4.6 Satz. *Es gelte $T(\cdot)B \in L^2((0,T); \mathscr{S}_2(H_0,K))$. Dann besitzt die SPDE (4-1) genau eine schwache Lösung, welche durch (4-3) (d.h. als milde Lösung) gegeben ist.*

Beweis. (1) Aus der Halbgruppentheorie ist bekannt, dass für jedes $\omega \in \Omega$ die Funktion Y_t, definiert durch

$$Y_t := T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad (t \in [0,T])$$

eine schwache Lösung der deterministischen (aber über f von ω abhängigen) Gleichung

$$dY_t = (AY_t + f_t)dt \; (t \in [0,T]), \quad Y_0 = x_0$$

ist. Betrachtet man $X_t - Y_t$, so sieht man, dass o.E. $x_0 = 0$ und $f = 0$ angenommen werden kann.

(2) Man definiert X als stochastische Faltung $X := T(\cdot)B * W$. Wir verwenden, dass A^* die Halbgruppe $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ erzeugt, die Identität

$$\int_r^t B^*T(s-r)^*A^*h ds = B^*T(t-r)^*h - B^*h \quad (h \in D(A^*))$$

(siehe Lemma C.6 und Lemma C.7), sowie die stochastische Version des Satzes von Fubini (Satz 3.18). Für $h \in D(A^*)$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle A^*h, X_s\rangle_K ds &= \int_0^t \Big\langle A^*h, \int_0^s T(s-r)BdW_r\Big\rangle_K ds \\
&= \int_0^t \int_0^s \langle B^*T(s-r)^*A^*h, dW_r\rangle_H ds \\
&= \int_0^t \Big\langle \int_r^t B^*T(s-r)^*A^*h ds, dW_r\Big\rangle_H \\
&= \int_0^t \langle B^*T^*(t-r)h, dW_r\rangle_H - \int_0^t \langle B^*h, dW_r\rangle_H \\
&= \int_0^t \langle h, T(t-r)BdW_r\rangle_K - \int_0^t \langle h, BdW_r\rangle_K \\
&= \langle h, X_t\rangle_K - \langle h, BW_t\rangle_K.
\end{aligned}$$

Also ist X eine schwache Lösung.

(3) Wir zeigen noch die Eindeutigkeit der schwachen Lösung. Sei $\widetilde{X}$ eine weitere schwache Lösung. Wir wenden Lemma 4.5 an auf $\widetilde{X}$ und $\psi(s) := T(t-s)^*h$ ($s \in [0,t]$), wobei $h \in D(A^*)$ und $t \in [0,T]$ fest gewählt sind. Dann gilt $\psi(t) = h$ und $\psi'(s) = -A^*\psi(s)$ (Lemma C.7). Nach Lemma 4.5 folgt

$$\langle \widetilde{X}_t, h\rangle_K = \int_0^t \langle \psi(s), BdW_s\rangle_K = \Big\langle h, \int_0^t T(t-s)BdW_s\Big\rangle_K.$$

Da $D(A^*)$ dicht in K ist (denn A^* ist der Generator einer C_0-Halbgruppe), folgt $\widetilde{X} = T(\cdot)B * W$. □

b) Semilineare Gleichungen

Wir betrachten nun folgende semilineare SPDE mit additivem Rauschen:

$$\begin{aligned}
dX_t &= (AX_t + F(X_t))dt + BdW_t \quad (t \in [0,T]), \\
X_0 &= x_0.
\end{aligned} \tag{4-5}$$

Dabei ist $A\colon K \supset D(A) \to K$ der Generator einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$, W ist ein zylindrischer Q-Wiener Prozess mit $0 \leq Q \in L(H)$, $B \in L(H,K)$, $F\colon K \to K$ ist eine messbare Abbildung, und $x_0 \in K$.

4.7 Definition. a) Eine milde Lösung von (4-5) ist ein Prozess $X\colon \Omega_T \to K$ so, dass für jedes $t \in [0,T]$ die Gleichung

$$X_t = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)F(X_s)ds + \int_0^t T(t-s)BdW_s \tag{4-6}$$

P-fast sicher gilt (wobei die P-Nullmenge von t abhängen darf).

b) Eine lokale milde Lösung von (4-5) ist ein Paar (X,τ), wobei $X\colon \Omega_T \to K$ ein Prozess ist, $\tau\colon \Omega \to [0,T]$ eine Stoppzeit mit $\tau > 0$ P-fast sicher, und für jede Stoppzeit $t\colon \Omega \to [0,T]$ mit $t < \tau$ P-fast sicher die Identität (4-6) P-fast sicher gilt. Die lokale milde Lösung (X,τ) heißt maximal, falls für jede weitere lokale Lösung $(\widetilde{X},\widetilde{\tau})$ gilt: $\widetilde{\tau} \le \tau$ P-fast sicher.

4.8 Satz. *In obiger Situation gelte*

(i) $T(\cdot)B \in L^2((0,T); \mathscr{S}_2(H_0,K))$,

(ii) *F ist lokal Lipschitz, d.h. die Einschränkung von F auf jede beschränkte Teilmenge von K ist Lipschitz-stetig.*

Dann existiert genau eine maximale lokale milde Lösung (X,τ) von (4-5). Dabei hat X stetige Pfade, und für fast alle $\omega \in \Omega$ mit $\tau(\omega) < T$ gilt $\|X_t(\omega)\|_K \to \infty$ $(t \nearrow \tau(\omega))$.

Falls F global Lipschitz ist, gilt $\tau = T$ P-fast sicher.

Beweis. Da F auf beschränkten Teilmengen von K Lipschitz-stetig ist, existieren zu $R > 0$ Konstanten $L(R) > 0$ und $C(R) > 0$ mit

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_K &\le L(R)\|x-y\|_K \quad (x,y \in K \text{ mit } \|x\|_K \le R,\ \|y\|_K \le R), \\ \|F(x)\|_K &\le C(R) \quad (x \in K \text{ mit } \|x\|_K \le R). \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung seien dabei $L(R)$ und $C(R)$ monoton steigend und rechtsseitig stetig. Da jede C_0-Halbgruppe in der Operatornorm exponentiell beschränkt ist und das Zeitintervall endlich ist, existiert eine Konstante $M > 0$ gibt mit $\|S(t)\|_{L(K)} \le M$ $(t \in [0,T])$.

Definiert man $g\colon \Omega_T \to K$ durch

$$g(t,\omega) := S(t)x_0(\omega) + (T(\cdot) * W)_t(\omega) \quad (t \in [0,T]),$$

so gilt $g(\cdot,\omega) \in C([0,T],K)$ für alle ω bis auf eine P-Nullmenge N_0. Man definiert $c\colon \Omega_T \to \mathbb{R}$ durch $c_t(\omega) := \sup_{s\in[0,t]} \|g(s,\omega)\|_K$, falls $\omega \in \Omega \setminus N_0$, und $c_t(\omega) := 0$, falls $\omega \in N_0$. Dann ist $c(\cdot,\omega)$ stetig und monoton steigend in t, und der Prozess

$d\colon \Omega_T \to [0,T]$, $d_t(\omega) := \max\big\{ML(c_t(\omega)+1), MC(c_t(\omega)+1)\big\}$, ist rechtsstetig und $\mathscr{F}_t$-adaptiert. Daher ist $\tau\colon \Omega \to [0,T]$,

$$\tau(\omega) := \inf\{t \in [0,T] : td_t(\omega) \geq \tfrac{1}{2}\}$$

(mit $\inf \emptyset := T$) eine Stoppzeit mit $\tau > 0$ P-fast sicher.

Seien nun $\omega \in \Omega \setminus N_0$ und $t < \tau(\omega)$ fest, dann gilt $td_t(\omega) \leq \frac{1}{2}$. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned}
&\Phi\colon C([0,t],K) \to C([0,t],K),\\
&\qquad (\Phi u)(s) := \int_0^s T(s-r)F(u(r))dr + g(s) \quad (s \in [0,t]).
\end{aligned}$$

Für $u,v \in B := \{u \in C([0,t],K) : \sup_{s\in[0,t]} \|u(s) - g(s,\omega)\|_K \leq 1\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[0,t]} \|\Phi u(s) - g(s)\|_K &\leq tMC(c_t(\omega)+1) \leq td_t(\omega) \leq \frac{1}{2},\\
\sup_{s\in[0,t]} \|\Phi u(s) - \Phi v(s)\|_K &\leq tML(c_t(\omega)+1) \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)-v(s)\|_K\\
&\leq td_t(\omega) \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)-v(s)\|_K \leq \tfrac{1}{2} \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)-v(s)\|_K.
\end{aligned}$$

Also ist $\Phi\colon B \to B$ eine Kontraktion, und nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau ein Fixpunkt $\hat{u} \in B$. Wir setzen $X_s(\omega) := \hat{u}(s)$ $(s \in [0,t])$.

Nach Konstruktion gilt $X_t = S(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)F(X_s)ds + \int_0^t T(t-s)BdW_s$ P-fast sicher, d.h. (X,τ) ist eine lokale milde Lösung. Die Eindeutigkeit der lokalen Lösung und die Existenz einer maximalen lokalen Lösung $(X,\tau_{\max})$ folgt (pfadweise) wie im deterministischen Fall, ebenso die Tatsache, dass $\|X_t(\omega)\|_X \to \infty$ $(t \nearrow \tau(\omega))$, falls $\tau_{\max}(\omega) < T$.

Falls F sogar global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L ist, ist Φ eine Kontraktion im ganzen Raum für $t < \frac{1}{2ML}$. Somit lässt sich τ unabhängig von ω wählen, und eine Iteration über das Zeitintervall liefert $\tau_{\max} = T$. $\square$

4.9 Bemerkung. a) Diese pfadweise Betrachtung garantiert nicht, dass $\inf_{\omega\in\Omega} \tau(\omega) > 0$ ist (außer wenn F global Lipschitz-stetig ist).

b) Sei etwa $K = L^2(G)$ (oder $K = H_0^1(G)$) für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist die Nichtlinearität $F\colon L^2(G) \to L^2(G)$ häufig von der Form $[F(h)](x) = f(h(x))$ $(x \in G)$ für $h \in L^2(G)$ mit einer skalaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ein Beispiel ist $f(t) = t^2$, d.h. $[F(h)](x) = (h(x))^2$ $(x \in G)$. In diesem Fall stellt sich die nichttriviale Frage, unter welchen Bedingungen an f die Abbildung $h \mapsto F(h)$, $L^2(G) \to L^2(G)$, wohldefiniert und Lipschitz-stetig ist. Diese Abbildung heißt auch der Nemitzky-Operator von f.

Die letzte Bemerkung zeigt, dass Satz 4.8 für viele Anwendungen noch zu schwach ist. Im Allgemeinen ist etwa $h^2 \notin L^2(G)$, falls $h \in L^2(G)$ gilt. Analoges gilt für $H_0^1(G)$.

Daher ist es wichtig, Lösbarkeitssätze zu finden, bei welchen die Anforderungen an die Nichtlinearität schwächer sind. Hingegen ist in vielen Fällen der Operator A besser als im obigen Satz, nämlich sogar der Generator einer beschränkten holomorphen Halbgruppe. Wir verwenden im Folgenden die Interpolationsskala $K_\alpha := D((-A)^\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, siehe Definition C.12.

4.10 Satz. *In obiger Situation gelte*

(i) $T(\cdot) \in L^2((0,T); \mathscr{S}_2(H_0, K_\alpha))$ *für ein* $\alpha \geq 0$,

(ii) es existieren $\gamma \geq 0$ *und* $\delta \in [0,1)$ *so, dass für alle* $\beta \in [0,\gamma]$ *gilt:* $F\colon K_\beta \to K_{\beta-\delta}$ *ist lokal Lipschitz-stetig und polynomial beschränkt.*

Dann hat (4-5) eine eindeutige maximale milde Lösung (X,τ), *und es gilt* $X_t \in K_\beta$ P*-fast sicher für alle* $t \in (0,\tau)$ *und* $\beta < \beta_0 := \min\{\alpha, \gamma + 1 - \delta\}$.

Man beachte, dass Bedingung (ii) des obigen Satzes bedeutet: Es existieren Konstanten $C_\beta > 0$ und $n_\beta \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|_{K_{\beta-\delta}} &\leq C_\beta \|x-y\|_{K_\beta}, \\ \|F(x)\|_{K_{\beta-delta}} &\leq C_\beta (1 + \|x\|_{\mathbb{K}_\beta}^{n_\beta}). \end{aligned}$$

Der obige Satz liefert für $\alpha = \gamma = 0$ eine K-wertige Lösung selbst für $F\colon K \to K_{-\beta}$, stellt also geringere Bedingungen an F. Falls $\alpha, \gamma > 0$, erhält man höhere Regularität der Lösung.

Beweis. (i) Der Beweis folgt dem Beweis von Satz 4.8. Jetzt wird allerdings Φ folgendermaßen abgeschätzt:

$$\begin{aligned} \sup_{s\in[0,t]} \|\Phi u(s) - \Phi v(s)\|_K &= \sup_{s\in[0,t]} \Big\| \int_0^s T(s-r)(F(u(r)) - F(v(r)))dr \Big\| \\ &\leq \int_0^s \|T(s-r)\|_{L(K_{-\delta},K)} \|F(u(r)) - F(v(r))\|_{K_{-\delta}} dr \\ &\leq C \int_0^s (s-r)^{-\delta} dr \sup_{s\in[0,t]} \|u(s) - v(s)\|_K \\ &\leq C t^{1-\delta} \sup_{s\in[0,t]} \|u(s) - v(s)\|_K. \end{aligned}$$

Hier wurde Satz C.15 b) und $\int_0^s (s-r)^{-\delta} = Cs^{1-\delta}$ verwendet. Diese Abschätzung und eine analoge Abschätzung für $\sup_{s\in[0,t]} \|\Phi u(s) - g(s)\|_K$ zeigt wie im Beweis von Satz 4.8, dass eine eindeutige K-wertige maximale milde Lösung (X,τ) existiert.

(ii) Man definiert $Y_t^a := \int_{at}^t T(t-s)BdW_s$. Wegen

$$Y_t^a = (T(\cdot)B * W)_t - T((1-a)t)(T(\cdot)B * W)_{at}$$

und der Voraussetzung (i) des Satzes ist Y_t^a K_α-wertig.

Die höhere Regularität von X wird durch ein bootstrapping-Argument gezeigt. Wir zeigen folgende Abschätzung: Für jedes $\beta \in [0, \beta_0)$ gibt es Konstanten $p \geq 1$, $q \geq 0$, $a \in (0,1)$, $C > 0$ (alle abhängig von β) so, dass

$$\|X_t\|_{K_\beta} \leq Ct^{-q}\big(1 + \sup_{s\in[at,t]} \|X_s\|_K + \sup_{s\in[0,t]} \|Y_s^a\|_{K_\beta}\big)^p \tag{4-7}$$

für alle $t \in (0, \tau)$ P-fast sicher gilt, wobei $Y_t^a := \int_{at}^t T(t-s)BdW_s$.

Für $\beta = 0$ gilt dies trivialerweise mit $q = 0$, $p = 1$, $C = 1$ und $a \in (0,1)$ beliebig. Es gelte nun (4-7) für ein $\beta \leq \gamma$. Wir zeigen, dass (4-7) dann auch für $\beta + \varepsilon$ gilt, wobei $\varepsilon \in (0, 1-\delta)$ mit $\beta + \varepsilon < \beta_0$ beliebig gewählt gewählt werden kann.

Nach Definition der milden Lösung gilt für jedes $a \in (0,1)$

$$X_t = T((1-a)t)X_{at} + \int_{at}^t T(t-s)F(X_s)ds + Y_t^a.$$

Daher gilt unter Verwendung von Satz C.15 b) und der polynomialen Schranke an F

$$\begin{aligned}\|X_t\|_{K_{\beta+\varepsilon}} &\leq C\Big[t^{-\varepsilon}\|X_{at}\|_{K_\beta} + \int_{at}^t (t-s)^{-(\varepsilon+\delta)}(1 + \|X_s\|_{K_\beta}^{n_\beta})ds\Big] + \|Y_t^a\|_{K_{\beta+\varepsilon}} \\ &\leq Ct^{-\varepsilon} \sup_{s\in[at,t]} (1 + \|X_s\|_{K_\beta}^{n_\beta}) + \|Y_t^a\|_{K_{\beta+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Da (4-7) für β gilt, folgt

$$\|X_t\|_{K_{\beta+\varepsilon}} \leq Ct^{-\varepsilon-n_\beta q}\big(1 + \sup_{s\in[a^2t,t]} \|X_s\|_K + \sup_{s\in[0,t]} \|Y_s^a\|_{K_\beta}\big)^{n_\beta p} + \|Y_t\|_{K_{\beta+\varepsilon}}.$$

Dies ist wieder eine Abschätzung der Form (4-7) für $\beta + \varepsilon$, und somit gilt (4-7) für alle $\beta < \beta_0$. □

4.11 Beispiel. Die inkompressiblen stochastischen Navier-Stokes-Gleichungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} dU_t &= \big[\mu\Delta U_t - (U_t\cdot\nabla)U_t - \nabla P_t\big]dt + BdW_t \quad (t \in (0,T)), \\ \operatorname{div} U_t &= 0 \quad (t \in (0,T)), \\ U_0 &= u_0 \end{aligned} \tag{4-8}$$

im Gebiet $G = \mathbb{R}^n$. Dabei ist W ein Q-Wiener Prozess mit $Q \in \mathscr{S}_1(L^2(\mathbb{R}^n))$. Um diese Gleichung in die Form (4-5) zu bringen, wenden wir die Helmholtz-Projektion $\mathcal{P} := \mathscr{F}^{-1}(I_n - \frac{\xi\xi^T}{|\xi|^2})\mathscr{F}$ an, wobei $\mathscr{F}$ die Fourier-Transformation bezeichne. Die Helmholtz-Projektion ist eine beschränkte Projektion in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Bild $L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) := \{v \in L^2(\mathbb{R}^n) : \operatorname{div} v = 0\}$ und Kern $\{\nabla p : p \in \hat{H}^1(\mathbb{R}^n)\}$, welche sich auf alle Sobolevräume $H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $s \in \mathbb{R}$ erweitern lässt. Damit ist (4-8) formal äquivalent zu

$$\begin{aligned} dU_t &= \big[\mu\mathcal{P}\Delta U_t - \mathcal{P}(U_t \cdot \nabla)U_t\big] + \mathcal{P}BdW_t \quad (t \in (0,T)),\\ U_0 &= u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{4-9}$$

Man wählt als Grundraum $K := H^\alpha_\sigma(\mathbb{R}^n) := H^\alpha(\mathbb{R}^n) \cap L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$ mit $\alpha > 1$. Um die Nichtlinearität $F(x) = \mathcal{P}(x \cdot \nabla)x$ $(x \in K)$ abzuschätzen, verwendet man die Sobolev-Einbettung $H^s(\mathbb{R}^n) \cdot H^r(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^t(\mathbb{R}^n)$ für $s, r > t > 0$ mit $s + r > t + \frac{n}{2}$. Unter Verwendung von Satz 4.10 kann man zeigen, dass für $u_0 \in K$ die SPDE (4-9) eine maximale lokale milde Lösung (U, τ) besitzt, wobei $U \in C([0,\tau), K)$ P-fast sicher gilt.

c) Gleichungen mit multiplikativem Rauschen

Wie bisher seien $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum mit normaler Filtrierung $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$. Weiter seien H, K reelle separable Hilberträume, $0 \leq Q = Q^* \in L(H)$ ein Operator sowie $W\colon \Omega_T \to K$ ein zylindrischer Wiener Prozess. Es seien $A\colon K \supset D(A) \to K$ der Generator einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf K, $f\colon \Omega_T \to K$ ein vorhersagbarer K-wertiger Prozess mit $f \in L^1((0,T); K)$ P-fast sicher, und $x_0 \in K$.

Während bisher $B \in L(H, K)$ gegeben war, sei nun B ein linearer Operator $B\colon K \supset D(B) \to \mathscr{S}_2(H_0, K)$, wobei wieder $H_0 := R(Q^{1/2})$ sei. Wir betrachten nun die lineare SPDE mit multiplikativem Rauschen:

$$dX_t = (AX_t + f_t)dt + B(X_t)dW_t \quad (t \in (0,T)), \quad X_0 = x_0. \tag{4-10}$$

4.12 Bemerkung. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB von H_0. Da für alle $x \in D(B)$ der Operator $B(x)$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|B(x)e_n\|_K^2 < \infty \quad (x \in D(B)).$$

Definiert man $B_n(x) := B(x)e_n$ $(x \in D(B))$, so folgt

$$B(x)h = \sum_{n\in\mathbb{N}} B_n(x)\langle h, e_n\rangle_{H_0} \quad (x \in D(B),\ h \in H_0).$$

Schreibt man W_t in der Form $W_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n(t)e_n$, so kann man (4-10) in folgender Form schreiben:

$$dX_t = (AX_t + f_t)dt + \sum_{n\in\mathbb{N}} B_n(X(t))d\beta_n(t)\ (t \in (0,T)), \quad X_0 = x_0. \tag{4-11}$$

4.13 Beispiel. Sei $H = H_0 = \mathbb{R}^N$, und seien $B_n\colon K \supset D(B_n) \to K$ lineare Operatoren für $n = 1, \dots, N$. Man definiert $B\colon K \supset D(B) \to \mathscr{L}(H_0, K)$ durch $D(B) := \bigcap_{n=1}^N D(B_n)$ und

$$B(x)u := \sum_{n=1}^N u_n B_n x \quad (u = (u_1, \dots, u_m)^\top \in \mathbb{R}^m,\ x \in D(B)).$$

Dann ist für jedes $x \in D(B)$ der Wertebereich von $B(x)$ endlich-dimensional, und damit gilt $B(x) \in \mathscr{S}_2(H_0, K)$ für alle $x \in D(B)$. Die Gleichung (4-10) kann dann nach Bemerkung 4.12 in folgender Form geschrieben werden:

$$dX_t = (AX_t + f_t)dt + \sum_{n=1}^N B_n(X_t)d\beta_n(t).$$

Hier wird die deterministische Gleichung also durch N skalare Brownsche Bewegungen ergänzt, wobei deren Koeffizienten (im Allgemeinen unbeschränkte) lineare Operatoren von X_t sind.

Die folgenden Definitionen sind ähnlich wie im Fall additiven Rauschens, berücksichtigen aber noch die stärkere Messbarkeitsbedingungen an X_t.

4.14 Definition. a) Eine starke Lösung von (4-10) ist ein vorhersagbarer K-wertiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ mit $X_t \in D(A) \cap D(B)$ $\mathbb{P}$-f.s., für welchen

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^T (\|X_s\|_K + \|AX_s\|_K)ds < \infty\Big) = 1, \tag{4-12}$$

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^T \|B(X_s)\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)}dx < \infty\Big) = 1 \tag{4-13}$$

sowie für jedes $t \in [0, T]$

$$X_t = x_0 + \int_0^t (AX_s + f_s)ds + \int_0^t B(X_s)dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt.

b) Eine milde Lösung von (4-10) ist ein vorhersagbarer K-wertiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ mit $X_t \in D(B)$ $\mathbb{P}$-f.s., für welchen

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^T \|X_s\|_K ds < \infty\Big) = 1, \tag{4-14}$$

sowie (4-13) gelten sowie für alle $t \in [0, T]$ $\mathbb{P}$-f.s.

$$X_t = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f_s ds + \int_0^t T(t-s)B(X_s)dW_s.$$

c) Eine schwache Lösung von (4-10) ist ein vorhersagbarer K-wertiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ mit $X_t \in D(B)$ $\mathbb{P}$-f.s., für welchen (4-13) und (4-14) gelten sowie für jedes $t \in [0,T]$ und $h \in D(A^*)$ $\mathbb{P}$-f.s.

$$\langle X(t), h\rangle_K = \langle x_0, h\rangle_K + \int_0^t \big(\langle X_s, A^*h\rangle_K + \langle f_s, h\rangle_K\big)ds + \int_0^t \langle h, B(X_s)dW_s\rangle_K.$$

Wie üblich wird die Existenz einer Lösung über eine Fixpunktgleichung gezeigt. Dazu muss jetzt im multiplikativen Fall aber eine stochastische Faltung der Form

$$W^\Phi(t) := \int_0^t T(t-s)\Phi_s dW_s \quad (t \in [0,T])$$

für $\Phi \in \mathcal{N}_W(H,K)$ betrachtet werden. Dabei war $\mathcal{N}_W(H,K)$ die Menge aller vorhersagbaren Prozesse $\Phi\colon \Omega_T \to \mathscr{S}_2(H_0,K)$ mit

$$\int_0^T \|\Phi_s\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Wir werden folgendes Lemma ohne Beweis verwenden (siehe [DPZ92], Proposition 4.16):

4.15 Lemma. *Sei $\Phi \in \mathcal{N}_W(H,K)$. Dann gilt für alle $a, b > 0$*

$$\mathbb{P}\big(\sup_{t\in[0,T]} \|\operatorname{Int}[\Phi](t)\|_K > a\big) \le \frac{b}{a^2} + \mathbb{P}\Big(\int_0^T \|\Phi_s\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} ds > b\Big).$$

Damit lässt sich die Messbarkeit von W^Φ zeigen:

4.16 Satz. *Für jedes $\Phi \in \mathcal{N}_W(H,K)$ besitzt die stochastische Faltung W^Φ eine vorhersagbare Modifikation.*

Beweis. Falls $\Phi \in \mathcal{E}(H,K)$ ein elementarer Prozess ist, also endlichen Wertebereich besitzt, folgt die Aussage aus Satz 4.4 und der Linearität des Integrals. Sei nun $\Phi \in \mathcal{N}_W(H,K)$.

(i) Wir zeigen zunächst, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $c > 0$ ein elementarer Prozess $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{E}(H,K)$ existiert mit

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^T \|\Phi_s - \widetilde{\Phi}_s\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} > c\Big) < \varepsilon.$$

Angenommen, für ein $\varepsilon > 0$ und ein $c > 0$ gilt diese Aussage nicht. Zu $N \in \mathbb{N}$ sei

$$A_N := \Big\{\omega \in \Omega : \int_0^T \|\Phi_s\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} ds \le N\Big\}.$$

Wegen $\Phi \in \mathcal{N}_W(H,K)$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}(\Omega \setminus A_N) < \frac{\varepsilon}{2}$. Der Prozess $\chi_{A_N}\Phi$ liegt in $\mathcal{N}_W^2(H,K)$. Da die elementaren Prozesse dicht in $\mathcal{N}_W^2(H,K)$ liegen, existiert ein elementarer Prozess $\widetilde{\Phi}$ mit

$$\|\chi_{A_N}\Phi - \widetilde{\Phi}\|^2_{L^2(\Omega_T;\mathscr{S}_2(H_0,K))} < \frac{\varepsilon c}{2}.$$

Dabei sei $\widetilde{\Phi} = 0$ für $\omega \in \Omega \setminus A_N$. Es folgt

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^T \|\chi_{A_N}\Phi_s - \widetilde{\Phi}_s\|^2_{L^2(\Omega_T;\mathscr{S}_2(H_0,K))} ds > c\Big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\int_0^T \|\Phi_s - \widetilde{\Phi}_s\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} > c\Big)\\
&\qquad\qquad \le \mathbb{P}\Big(\int_0^T \|\chi_{A_N}\Phi_s - \widetilde{\Phi}_s\|^2_{L^2(\Omega_T;\mathscr{S}_2(H_0,K))} ds > c\Big) + P(\Omega \setminus A_N)\\
&\qquad\qquad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Annahme.

(ii) Sei $(\Phi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(H,K)$ eine Folge mit

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^T \|\Phi_s - \Phi_s^{(n)}\|^2_{\mathscr{S}_2(H,K)} > \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{n}.$$

Sei $t \in [0,T]$ fest. Wir wenden Lemma 4.15 auf den Integranden $T(t-s)(\Phi_s - \Phi_s^{(n)})$ im Intervall $[0,t]$ an und erhalten für alle $a, b > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\|W_t^\Phi - W_t^{\Phi^{(n)}}\|_K > a\big) &\le \frac{b}{a^2} + \mathbb{P}\Big(\int_0^t \|T(t-s)(\Phi_s - \Phi_s^{(n)})\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} ds > b\Big)\\
&\le \frac{b}{a^2} + \mathbb{P}\Big(\int_0^t \|\Phi_s - \Phi_s^{(n)}\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)} ds > \frac{b}{M^2}\Big),
\end{aligned}$$

wobei wieder $M := \sup_{t\in[0,T]} \|T(t)\|_{L(K)}$. Für $a := 2^{-k}$ und $b := 2^{-k}a^2/2$ erhält man nach Übergang zu einer Teilfolge $(\Phi^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{P}\big(\|W_t^\Phi - W_t^{\Phi^{n_k}}\|_K > 2^{-k}\big) \le 2^{-k}. \tag{4-15}$$

Wir setzen $Z^{(k)} := W^{\Phi^{n_k}}$.

(iii) Sei $A := \{(t,w) \in \Omega_T : (Z^{(k)}(t,w))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}_2(H_0,K) \text{ ist konvergent}\}$ und

$$Z(t,\omega) := \begin{cases} \lim_{k\to\infty} Z^{(k)}(t,w), & \text{falls } (t,\omega) \in A,\\ 0, \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist A eine vorhersagbare Menge und Z ein vorhersagbarer Prozess. Wegen (4-15) gilt nach dem Borel-Cantelli-Lemma für jedes feste t und für $\mathbb{P}$-fast alle ω

$$\|W_t^\Phi - Z_t^{(k)}\|_K \le 2^{-k} \text{ für alle bis auf endlich viele } k.$$

Daher gilt für jedes t die Gleichheit $W_t^\Phi = Z_t$ $\mathbb{P}$-fast sicher, d.h. Z ist die gesuchte Modifikation. □

Der letzte Satz ist ein wesentlicher Schritt, um ein Fixpunktargument zu verwenden. Wir betrachten hier nur den speziellen Fall, dass der Operator B beschränkt ist.

4.17 Satz. *In obiger Situation sei B ein beschränkter Operator, $B \in L(K, \mathscr{S}_2(H_0, K))$. Dann besitzt (4-10) eine eindeutige milde Lösung $X \in L^2((\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T); K)$.*

Beweis. Sei $\mathscr{H}$ der Raum aller K-wertigen vorhersagbaren Prozesse Y mit $\|Y\|_{\mathscr{H}} := \|Y\|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega;K))} < \infty$. Für $Y \in \mathscr{H}$ definiert man

$$F(Y)_t := T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f_s ds + \int_0^t T(t-s)B(Y_s)dW_s.$$

Wegen $Y \in \mathscr{H}$ ist BY vorhersagbar mit

$$\begin{aligned}\|BY\|_W^2 &= \|BY\|^2_{L^2(\Omega_T;\mathscr{S}_2(H_0,K))} \le \|B\|^2_{L(K,\mathscr{S}_2(H_0,K))}\|Y\|^2_{L^2(\Omega_T;K)}\\ &= \|B\|^2_{L(K,\mathscr{S}_2(H_0,K))}\int_0^T \mathbb{E}\big(\|Y_t\|_K^2\big)dt \le \|B\|^2_{L(K,\mathscr{S}_2(H_0,K))}T\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\big(\|Y_t\|_K^2\big)\\ &= \|B\|^2_{L(K,\mathscr{S}_2(H_0,K))}T\|Y\|^2_{\mathscr{H}} < \infty.\end{aligned}$$

Somit ist $BY \in \mathcal{N}_W^2(H,K)$, und nach Satz 4.16 ist $F(Y)$ vorhersagbar.

Weiter gilt für $\widetilde{F}(Y)_t := \int_0^t T(t-s)BY_s dW_s$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|\widetilde{F}(Y)\|_{\mathscr{H}} &\le \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\Big(\int_0^t \|T(t-s)BY_s\|^2_{\mathscr{S}_2(H_0,K)}ds\Big)^{1/2}\\ &\le M\|B\|_{L(K,\mathscr{S}_2(H_0,K))}\sqrt{T}\|Y\|_{\mathscr{H}} < \infty.\end{aligned}$$

Damit ist $F\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ wohldefiniert, und falls $T \le T_0$ mit hinreichend kleinem T_0, auch eine Kontraktion. Somit existiert ein eindeutiger Fixpunkt X, welcher nach Konstruktion eine milde Lösung von (4-10) ist.

Im nächsten Schritt betrachtet man die Gleichung auf dem Intervall $[T_0, 2T_0]$, wobei als Anfangswert jetzt X_{T_0} verwendet wird. Man sieht leicht, dass die obigen Überlegungen auch für $\mathscr{F}_0$-messbare Anfangswerte x_0 gelten, so dass man die Zeitskala um T_0 verschieben kann. Mit einer Iteration erhält man eine globale milde Lösung X auf dem gesamten Intervall $[0,T]$. □

Die Bedingung, dass B beschränkt ist, ist relativ stark. Falls mehr über den Operator A bekannt ist (z.B. Erzeugung einer holomorphen C_0-Halbgruppe), kann man auch allgemeinere B betrachten. Das folgende spezielle Resultat zeigt den seltenen Fall, dass sogar eine starke Lösung existiert.

4.18 Satz. *In obiger Situation sei wieder $B \in L(K, \mathscr{S}_2(H_0, K))$. Weiter gelte $x_0 \in D(A)$, $f = 0$ und $0 \in \rho(A)$. Für den Operator B_A, definiert durch*

$$B_A(x)h := ABA^{-1}x(h) \quad (x \in K,\, h \in H_0),$$

kurz $B_A = ABA^{-1}$, gelte $B_A \in L(K, \mathscr{S}_2(H_0, K))$. Dann besitzt (4-10) eine eindeutige starke Lösung.

Beweisskizze. Sei $Y \in L^2((\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T); K)$ die nach Satz 4.17 existierende eindeutige milde Lösung der SPDE

$$dY_t = AY_t dt + ABA^{-1}Y_t dW_t \;(t \in (0,T)), \quad Y_0 = Ax_0. \tag{4-16}$$

Wir approximieren den Operator A durch die Yosida-Approximationen $A_n := nA(n-A)^{-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, welche beschränkte Operatoren sind. Die zugehörigen Lösungen $X^{(n)}$ bzw. $Y^{(n)}$ seien definiert als die milden Lösungen von

$$dX_t^{(n)} = A_n X_t^{(n)} dt + BX_t^{(n)} dW_t \;(t \in (0,T)), \quad X_0^{(n)} = x_0$$

bzw.

$$dY_t^{(n)} = A_n Y_t^{(n)} dt + A_n B A_n^{-1} Y_t^{(n)} dW_t \;(t \in (0,T)), \quad Y_0^{(n)} = Ax_0.$$

Dann gilt $Y^{(n)} = A_n X^{(n)}$, und damit ist $X^{(n)}$ eine milde Lösung der SPDE

$$dX_t^{(n)} = Y_t^{(n)} dt + BX_t^{(n)} dW_t \;(t \in (0,T)), \quad X_0^{(n)} = x_0.$$

Da der Nulloperator die C_0-Halbgruppe $T(t) = \mathrm{id}_K$ erzeugt, folgt

$$X_t^{(n)} = x_0 + \int_0^t Y_s^{(n)} ds + \int_0^t BX_s^{(n)} dW_s. \tag{4-17}$$

Man kann zeigen, dass $X^{(n)} \to X$ und $Y^{(n)} \to Y$ in $L^2((\Omega_T, \mathscr{P}_T, \mathbb{P}_T); K)$ gilt. Die Abgeschlossenheit des Operators A liefert dann $X_t \in D(A)$ $\mathbb{P}$-f.s. sowie $AX_t = Y_t$ $\mathbb{P}$-f.s. Nimmt man nun $n \to \infty$ in (4-17), erhält man, dass X eine starke Lösung ist. □

4.19 Beispiel (Stochastische Wellengleichung)**.** Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand. Wir betrachten die Wellengleichung mit Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) &= 0 \;((t,x) \in (0,\infty) \times G), \\ u(t,x) &= 0 \;((t,x) \in (0,\infty) \times \partial G), \\ u(0,x) = u_0(x),\; \partial_t u(0,x) &= u_1(x) \;(x \in G). \end{aligned} \tag{4-18}$$

Sei $\Delta_D\colon L^2(G)\supset D(\Delta_D)\to L^2(G)$ der Dirichlet-Laplace-Operator in G, definiert durch $D(\Delta_D):=H^2(G)\cap H_0^1(G)$ und $\Delta_D u:=\Delta u$. Wir definieren den Hilbertraum K durch $K:=H_0^1(G)\times L^2(G)$ mit Skalarprodukt

$$\Big\langle \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\Big\rangle_K := \langle \nabla u_1,\nabla v_1\rangle_{L^2(G)}+\langle u_2,v_2\rangle_{L^2(G)}\quad (u,v\in K).$$

Der Operator $A\colon K\supset D(A)\to K$ wird definiert durch $D(A):=(H^2(G)\cap H_0^1(G))\times H_0^1(G)$ und

$$A\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}0&1\\ \Delta&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\quad (u\in D(A)).$$

Dann gilt $\langle Au,u\rangle_K=0$ für alle $u\in D(A)$, d.h. A ist dissipativ, und man rechnet sofort nach, dass $1-A$ surjektiv ist. Nach dem Satz von Lumer-Phillips erzeugt A eine C_0-Kontrationshalbgruppe $(T(t))_{t\ge 0}$. Da Δ_D selbstadjungiert ist, kann man T auch direkt über den Funktionalkalkül beschreiben: Es gilt

$$T(t)u=\begin{pmatrix}\cos(\sqrt{-\Delta_D}t) & \frac{\sin(\sqrt{-\Delta_D}t)}{\sqrt{-\Delta_D}}\\ -\sqrt{-\Delta_D}\sin(\sqrt{-\Delta_D}t) & \cos(\sqrt{-\Delta_D}t)\end{pmatrix}u.$$

Wir betrachten jetzt die Wellengleichung mit multiplikativem Rauschen in der Form

$$\begin{aligned} dY_t&=\Delta Y_t dt+a(x)\cdot\nabla Y_t d\beta_t\quad ((t,x)\in(0,\infty)\times G),\\ Y_t&=0\quad ((t,x)\in(0,\infty)\times\partial G),\\ Y_0&=x_0,\ \partial_t Y_0=x_1\quad (x\in G).\end{aligned}\tag{4-19}$$

Hierbei ist $a\in C^1(\overline{G};\mathbb{R}^n)$, und β ist eine eindimensionale Brownsche Bewegung.

Dies entspricht dem allgemeinen Setting in diesem Abschnitt mit $H:=\mathbb{R}$, $Q:=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und damit $H_0=\mathbb{R}$. Der Operator $B\in L(K,\mathscr{S}_2(H_0,K))$ ist gegeben durch

$$Bu(h)=\begin{pmatrix}0\\ -a(x)\cdot\nabla u_1\end{pmatrix}h\quad (u=(u_1,u_2)^\top\in K,\ h\in\mathbb{R}).$$

Man beachte, dass nach Definition von K der Operator B beschränkt ist. Wir können also Satz 4.17 anwenden und erhalten eine eindeutige milde Lösung von (4-19) für alle Anfangswerte $(x_0,x_1)^\top\in K$. Um die Voraussetzung von Satz 4.18 zu testen, beachte man zunächst $0\in\rho(A)$, da 0 kein Eigenwert von Δ_D ist. Somit ist $A^{-1}\colon K\to D(A)$ ein Isomorphismus, und für die Beschränktheit von ABA^{-1} braucht man die Bedingung $B(D(A))\subset D(A)$. Mit der obigen Darstellung von B erhält man die Bedingung

$$-a(x)\nabla u_1\in H_0^1(G)\qquad \text{für alle } u\in H^2(G)\cap H_0^1(G).$$

Wegen $u\in H^2(G)$ und $a\in C^1(\overline{G};\mathbb{R}^n)$ ist auch $a\cdot\nabla u\in H^1(G)$, aber im allgemeinen wird die Randbedingung $a\cdot\nabla u\in H_0^1(G)$ nicht erfüllt sein. Falls jedoch $a=0$ auf ∂G gilt, folgt $a\cdot\nabla u|_{\partial G}=0$ für alle $u\in H^2(G)$, und ABA^{-1} ist ein beschränkter Operator. In diesem Fall ist sogar Satz 4.18 anwendbar, und man erhält eine starke Lösung.

A. Stochastische Grundlagen

A.1 Worum geht's? Hier werden einige stochastische Grundbegriffe und wichtige Aussagen der Stochastik kurz vorgestellt, wobei meistens auf Beweise verzichtet wird.

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum), d.h. $\mathscr{F}$ ist eine σ-Algebra über Ω und $P\colon \mathscr{F} \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß), d.h. ein Maß mit $P(\Omega) = 1$. Ohne Einschränkung setzen wir voraus, dass P vollständig ist, d.h. Teilmengen von P-Nullmengen liegen wieder in $\mathcal{F}$.

Im Folgenden seien weiter $(S, \mathscr{S})$ ein Messraum und E ein separabler reeller Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$, versehen mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(E)$.

A.2 Definition. a) Eine (E-wertige) Zufallsvariable ist eine messbare Abbildung $X\colon \Omega \to E$. Das von X auf $(E, \mathscr{B}(E))$ induzierte Maß ist in diesem Fall gegeben durch

$$P^X(A) := P(X \in A) := (P \circ X^{-1})(A) \quad (A \in \mathscr{B}(E)).$$

Das Maß P^X heißt auch die Verteilung von X.

b) Sei I eine Indexmenge, und für $i \in I$ sei $\mathscr{M}_i \subset \mathscr{F}$ eine Familie von Mengen. Dann heißt das System $\{\mathscr{M}_i : i \in I\}$ unabhängig, falls

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{j_k})$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $A_{j_\ell} \in \mathscr{M}_{j_\ell}$, $j_\ell \neq j_{\ell'}$ für $\ell \neq \ell'$ gilt.

c) Für eine Teilmenge $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$ bezeichnet $\sigma(\mathscr{E})$ die von $\mathscr{E}$ erzeugte σ-Algebra. Für eine Menge von Abbildungen $\{f_i\colon i \in I\}$, $f_i\colon \Omega \to E$, sei $\sigma(\{f_i : i \in I\})$ die erzeugte σ-Algebra, d.h. die kleinste σ-Algebra auf Ω, bezüglich welcher alle f_i messbar sind. Somit gilt $\sigma(\{f_i : i \in I\}) = \sigma\big(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathscr{B}(E))\big)$. Eine Familie $\{X_i : i \in I\}$ von Zufallsvariablen $X_i\colon \Omega \to E$ heißt unabhängig, falls $\{\sigma(X_i) : i \in I\}$ unabhängig ist.

d) Seien $X, Y\colon \Omega \to E$ Zufallsvariablen. Dann heißt

$$\mathbb{E}X := \int_\Omega X dP \in E$$

der Erwartungswert von X. Falls $E = \mathbb{R}$, so heißt

$$\operatorname{var} X := \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}X)^2\big]$$

die Varianz von X, falls existent, sowie

$$\operatorname{cov}(X, Y) := \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\big]$$

die Kovarianz von X und Y, falls sie existiert.

A.3 Bemerkung. a) Falls X und Y unabhängig und reellwertig sind, so gilt $\mathbb{E}(XY) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$. Im Fall allgemeiner Banachräume E beachte, dass $\mathbb{E}X$ als Bochner-Integral definiert ist, wobei hier die Voraussetzung, dass E separabel ist, technische Vereinfachungen zur Folge hat.

b) Sei E_1 ein weiterer separabler reeller Banachraum. Dann gilt für $f \in L^1(E, \mathscr{B}(E), P \circ X^{-1}; E_1)$

$$\mathbb{E}f(X) = \int_\Omega f(X(\omega))dP(\omega) = \int_E f(x)d(P \circ X^{-1})(x).$$

Diese Tatsache wird manchmal auch als Transformationslemma bezeichnet und ist leicht für Stufenfunktionen und dann für allgemeine Funktionen durch typische Approximation zu zeigen. Speziell folgt

$$\mathbb{E}X = \int_E \mathrm{id}_E \, d(P \circ X^{-1}).$$

A.4 Lemma (Jensensche Ungleichung). *Ist $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $X\colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ eine Zufallsvariable mit $X \in L^1(\Omega)$ und $\varphi(X) \in L^1(\Omega)$, so gilt $\varphi(\mathbb{E}X) \le \mathbb{E}(\varphi(X))$.*

A.5 Definition. Ein Maß $\mu\colon (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)) \to [0, \infty]$ heißt reelles Gauß-Maß, falls $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma \ge 0$ existieren mit $\mu = N(\alpha, \sigma^2)$, wobei

$$N(\alpha, \sigma^2)(A) := \begin{cases} \int_A f_{\alpha,\sigma^2}(z)dz, & \text{falls } \sigma > 0, \\ \delta_\alpha(A), & \text{falls } \sigma = 0. \end{cases}$$

Hier bezeichnet δ_α das Dirac-Maß an der Stelle $\alpha \in \mathbb{R}$, und die Dichte f_{α,σ^2} ist definiert durch

$$f_{\alpha,\sigma^2}(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{z-\alpha}{\sigma}\Big)^2\Big) \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Das Maß $N(\mu, \sigma^2)$ heißt auch Normalverteilung mit dem Erwartungswert α und der Varianz σ^2.

A.6 Lemma. *Seien $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma \ge 0$. Dann gilt*

$$N(\alpha, \sigma^2)\hat{}\,(\xi) = \exp(i\alpha\xi - \tfrac{1}{2}\sigma^2\xi^2) \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Es gilt $\alpha = \int_\mathbb{R} z dN(\alpha, \sigma^2)(z)$ und $\sigma^2 = \int_\mathbb{R} (z-\alpha)^2 dN(\alpha, \sigma^2)(z)$.

Beweis. Es gilt $\mathscr{F} f_{0,1} = f_{0,1}$. Sei $\sigma > 0$. Für $f_{\alpha,\sigma^2} = \frac{1}{\sigma} f_{0,1}(\frac{\cdot-\alpha}{\sigma})$ folgt damit

$$(\mathscr{F}^{-1} f_{\alpha,\sigma^2})(\xi) = e^{i\alpha\xi}(\mathscr{F}^{-1} f_{0,1})(\sigma\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2} \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Damit erhalten wir $N(\alpha,\sigma^2)\widehat{\ }(\xi) = \sqrt{2\pi}(\mathscr{F}^{-1}f_{\alpha,\sigma^2})(\xi) = \exp(i\alpha\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2)$. Für $\sigma = 0$ gilt $N(\alpha,\sigma^2) = \delta_\alpha$ und damit $N(\alpha,\sigma^2)\widehat{\ }(\xi) = e^{i\alpha\xi}$. Die Gleichungen für α und σ^2 folgen durch Nachrechnen für $f_{0,1}$ und Verwenden der obigen Skalierung für f_{α,σ^2}. □

A.7 Lemma (Charakteristische Funktion und Fouriertransformation)**.** *Sei μ W-Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$. Definiere*

$$T_\mu : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \int \varphi d\mu.$$

a) Es ist $T_\mu \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{\mu} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $[\hat{\mu}] \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ die zu $\hat{\mu}$ gehörige reguläre Distribution, und sei $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformation, welche auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$(\mathscr{F}\varphi)(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx \quad (\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$$

definiert ist. Dann gilt

$$[\hat{\mu}] = (2\pi)^{n/2}\mathscr{F}^{-1}T_\mu \quad \textit{in } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

c) Falls μ_1, μ_2 W-Maße auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ mit $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ auf $\mathbb{R}^n$, so gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. a) folgt sofort aus der Abschätzung $|T_\mu(\varphi)| \le \|\varphi\|_\infty$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}^{-1}T_\mu)(\xi) = T_\mu(\mathscr{F}^{-1}\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathscr{F}^{-1}\varphi)(x)d\mu(x)\\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi d\mu(x)\\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\mu}(\xi)\varphi(\xi)d\xi\\ &= (2\pi)^{-n/2}[\hat{\mu}](\varphi).\end{aligned}$$

c) Da $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ein Isomorphismus ist, folgt aus $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ auf $\mathbb{R}^n$ bereits $T_{\mu_1} = T_{\mu_2}$ auf $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Um zu zeigen, dass $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt, genügt es zu zeigen, dass die Maße auf allen kompakten Mengen übereinstimmen. Für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ finden mit $\varphi_n = 1$ auf K, $0 \le \varphi_n \le 1$ sowie $\varphi_n \to \chi_K$ $(n \to \infty)$ punktweise, wie man unter Verwendung des Friedrichschen Glättungsoperators sieht (Satz 4.21 in [DR12]). Mit majorisierter Konvergenz mit der konstanten Funktion 1 als Majorante folgt $\mu_1(K) = \mu_2(K)$. □

A.8 Satz (Satz von Kolmogorov). *Sei $I \subset \mathbb{R}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_k \in I$ seien Maße $\mu_{t_1,\dots,t_k}$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}((\mathbb{R}^n)^k))$ gegeben. Es gelte:*

(i) Für alle Permutationen σ von $\{1, \dots, k\}$ gilt
$$\mu_{t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(k)}}(A_1 \times \ldots \times A_k) = \mu_{t_1,\dots,t_k}(A_{\sigma^{-1}(1)} \times \ldots \times A_{\sigma^{-1}(k)})$$
für alle $t_1, \dots, t_k \in I$ und alle $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$,

(ii) für alle $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m$, $t_1, \dots, t_m \in I$ und $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt
$$\mu_{t_1,\dots,t_k}(A_1 \times \ldots \times A_k) = \mu_{t_1,\dots,t_k,t_{k+1},\dots,t_m}(A_1 \times \ldots \times A_k \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{(m-k)-mal}).$$

Dann existiert ein W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und ein $\mathbb{R}^n$-wertiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ so, dass
$$P(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_k} \in A_k) = \mu_{t_1,\dots,t_k}(A_1 \times \ldots \times A_k)$$
für alle $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_k \in I$ und $A_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Dieser Satz wird hier nicht bewiesen.

A.9 Korollar. *Es existiert eine reellwertige Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$.*

Beweis. Man definiert für $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k$ das Maß
$$\mu_{t_1,\dots,t_k} := N(0, t_1) \otimes N(0, t_2 - t_1) \otimes \ldots \otimes N(0, t_k - t_{k-1})$$
(Produktmaß). Für beliebige $t_1, \dots, t_k \in [0, \infty)$ definiert man das Maß $\mu_{t_1,\dots,t_k}$ durch die Bedingung (i) im Satz von Kolmogorov (Satz A.8). Dann folgt die Behauptung aus Satz A.8. □

A.10 Satz (Doobsche Maximalungleichung). *Sei $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ein rechtsstetiges Submartingal mit $X_t \colon \Omega \to [0, \infty)$, und sei $p \in (1, \infty)$. Falls $X_T \in L^p(\Omega)$ ist, so gilt*
$$\|X\|_{L^p(\Omega, L^\infty([0,T]))} = \Big\| \sup_{t\in[0,T]} X_t \Big\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{p}{p-1} \|X_T\|_{L^p(\Omega)} \Big(= \frac{p}{p-1} \sup_{t\in[0,T]} \|X_t\|_{L^p(\Omega)} \Big).$$

A.11 Satz (Satz vom bedingten Erwartungswert). *Seien $X \colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ eine Zufallsvariable und $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ eine Unter-σ-Algebra. Falls $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$, so existiert eine Zufallsvariable $X_0 \colon (\Omega, \mathscr{F}_0) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ mit $X_0 \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_0, P)$ mit*
$$\int_A X_0 dP = \int_A X dP \quad (A \in \mathscr{F}_0).$$
Die Zufallsvariable X_0 ist P-fast sicher eindeutig. Man schreibt $\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_0) := X_0$ (bedingter Erwartungswert von X unter der Bedingung $\mathscr{F}_0$). Die analoge Aussage gilt auch für messbares X mit $X \geq 0$.

B. Spurklasse- und Hilbert-Schmidt-Operatoren

B.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden einige Aussagen über Spurklasseoperatoren und Hilbert-Schmidt-Operatoren zusammengefasst. Diese treten bei der Darstellung Gaußscher Zufallsvariablen in Hilberträumen auf, besitzen aber auch wichtige Anwendungen z.B. in der Theorie der Sobolevräume, wo die Einbettungsoperatoren unter geeigneten Voraussetzungen Spurklasseoperatoren sind.

Im Folgenden seien H und K separable Hilberträume.

B.2 Definition. Sei $A \in L(H)$. Dann schreibt man $A \geq 0$, falls A selbstadjungiert ist, d.h. es gilt $A^* = A$, und $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in H$ gilt. Für zwei Operatoren $A, B \in L(H)$ schreibt man $A \leq B$, falls beide Operatoren selbstadjungiert sind und falls $B - A \geq 0$ gilt.

B.3 Definition. Sei $A \colon H \to K$ ein kompakter Operator, und seien $\lambda_1(A^*A) \geq \lambda_2(A^*A) \geq \ldots \geq 0$ die Eigenwerte des (kompakten, selbstadjungierten und nichtnegativen) Operators $A^*A \in L(H)$, wobei die Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit wiederholt werden. Dann heißen

$$s_j(A) := \sqrt{\lambda_j(A^*A)} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

die Singulärwerte von A. Durch Auffüllen mit 0 kann man $j \in \mathbb{N}$ annehmen.

Für $1 \leq p \leq \infty$ wird die Neumann-Schatten-Klasse $\mathscr{S}_p(H, K)$ definiert als die Menge aller kompakten Operatoren A, für welche $(s_j(A))_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$ gilt. Der Raum $\mathscr{S}_p(H, K)$ wird mit der Norm $\|A\|_{S_p(H,K)} := \|(s_j(A))_{j\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p(\mathbb{N})}$ versehen.

Speziell heißt $\mathscr{S}_1(H, K)$ die Menge der Spurklasse-Operatoren, und $\mathscr{S}_2(H, K)$ die Menge der Hilbert-Schmidt-Operatoren. Man schreibt auch $\|\cdot\|_{\text{tr}} := \|\cdot\|_{\mathscr{S}_1(H,K)}$ und $\|\cdot\|_{\text{HS}} := \|\cdot\|_{\mathscr{S}_2(H,K)}$. Falls $H = K$, so schreibt man $\mathscr{S}_p(H)$.

B.4 Bemerkung. Die Neumann-Schatten-Klassen $\mathscr{S}_p(H)$ sind Banachräume und zweiseitige Ideale in $L(H)$. Falls $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und sind $A \in \mathscr{S}_p(H)$, $B \in \mathscr{S}_q(H)$, so ist AB ein Spurklasse-Operator. Für diese Werte von p und q ist $\mathscr{S}_q(H)$ isometrisch isomorph zum Dualraum von $\mathscr{S}_p(H)$.

B.5 Satz. *Sei $A \in L(H, K)$ ein kompakter Operator mit den von 0 verschiedenen Singulärwerten $(s_n(A))_{n\in N_A}$, so existieren Orthonormalsysteme $(e_n)_{n\in N_A} \subset H$ und $(f_n)_{n\in N_A} \subset K$, so dass*

$$A = \sum_{n\in N_A} s_n(A)\langle\cdot, e_n\rangle_H f_n,$$

wobei die Reihe bzgl. $\|\cdot\|_{L(H,K)}$ konvergiert.

Beweis. Sei $s_n := s_n(A)$ für $n \in N_A$. Nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren existiert ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in N_A}$ von H mit $A^*A = \sum_{n\in N_A} s_n^2 \langle \cdot, e_n\rangle e_n$. Man definiert $f_n := s_n^{-1} A e_n$ $(n \in N_A)$. Dann gilt

$$\langle f_n, f_m\rangle_K = s_n^{-1}s_m^{-1}\langle Ae_n, Ae_m\rangle = s_n^{-1}s_m^{-1}\langle A^*Ae_n, e_m\rangle_H = s_n^{-1}s_m^{-1}s_n^2\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{nm}.$$

Somit ist auch $(f_n)_{n\in N_A} \subset K$ ein Orthonormalsystem.

Ebenfalls nach dem Spektralsatz gilt

$$x = \sum_{n\in N_A} \langle x, e_n\rangle e_n + \widetilde{x} \tag{2-1}$$

mit $\widetilde{x} \in \ker(A^*A)$. Wegen $\langle A^*Ax, x\rangle_H = \|Ax\|_H^2$ gilt $\ker(A^*A) = \ker A$. Wendet man A auf (2-1) an, erhält man

$$Ax = \sum_{n\in N_A} \langle x, e_n\rangle Ae_n = \sum_{n\in N_A} s_n\langle x, e_n\rangle f_n.$$

Wegen

$$\Big\| \sum_{n\geq N} s_n\langle x, e_n\rangle f_n\Big\|_K^2 = \sum_{n\geq N} s_n^2 |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq s_N^2\|x\|^2$$

konvergiert die Reihe in der Operatornorm. □

B.6 Korollar. *Sei A eine reelle oder komplexe $m\times n$-Matrix, und seien $s_1(A), \dots, s_k(A)$ die von Null verschiedenen Singulärwerte von A. Dann existieren unitäre Matrizen $U \in \mathbb{K}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$ so, dass*

$$A = U \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V \quad \text{mit} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} s_1(A) & & & \\ & s_2(A) & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_k(A) \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung heißt auch Singulärwerte-Zerlegung von A (SVD = singular value decomposition).

B.7 Definition. Sei $A \in \mathscr{S}_1(H)$, und seien $(\lambda_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenwerte von A. Dann ist die Spur von A definiert durch

$$\operatorname{tr} A := \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(A).$$

B.8 Satz. *Die Abbildung* $\operatorname{tr}\colon \mathscr{S}_1(H) \to \mathbb{C}$ *ist (wohldefiniert und) stetig bzgl. der Norm* $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}}$. *Es gilt* $|\operatorname{tr} A| \le \|A\|_{\mathrm{tr}}$ *für alle* $A \in \mathscr{S}_1(H)$. *Für jede Orthonormalbasis* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von* H *gilt*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ax_n, x_n\rangle_H.$$

Beweisskizze. Die Stetigkeit auf $\mathscr{S}_1(H)$ folgt aus der Abschätzung $|\lambda_n(A)| \le s_n(A)$ $(n \in \mathbb{N})$. Nach dem Schur-Lemma existiert eine Orthonormalbasis $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H, bestehend aus Eigen- und Hauptvektoren von A, so dass

$$A\widetilde{x}_n = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{mn}\widetilde{x}_m \quad (n \in \mathbb{N})$$

mit Koeffizienten $\alpha_{mn} \in \mathbb{C}$ gilt, wobei $\alpha_{nn} = \lambda_n(A)$. Sei P_N die Projektion auf $\operatorname{span}\{\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_N\}$, so gilt $P_N A P_N \to A$ $(N \to \infty)$ in $\mathscr{S}_1(H)$ und damit $\operatorname{tr}(P_N A P_N) \to \operatorname{tr} A$. Da $R(P_N)$ unter A invariant bleibt, ist der Operator $P_N A P_N$ beschrieben durch die Matrix $(\alpha_{mn})_{m,n=1,\dots,N}$. Daher gilt

$$\operatorname{tr} A = \lim_{N\to\infty} \operatorname{tr}(P_N A P_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_{nn} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle A\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_n\rangle.$$

Wegen $|\langle A\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_n\rangle| = |\lambda_n(A)| \le s_n(A)$ und $A \in \mathscr{S}_1(H)$ konvergiert diese Reihe absolut.

Um dieselbe Aussage für eine beliebige Orthonormalbasis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H zu zeigen, verwenden wir die Darstellung von Satz B.5. Es gilt

$$\langle Ax_n, x_n\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j(A)\langle x_n, e_j\rangle\, \langle f_j, x_n\rangle$$

und damit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ax_n, x_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j(A)\langle x_n, e_j\rangle\, \langle f_j, x_n\rangle. \tag{2-2}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \big|\langle Ax_n, x_n\rangle\big| &\le \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \big|s_j(A)\langle x_n, e_j\rangle\, \langle x_n, f_j\rangle\big| \\
&\le \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j(A)\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x_n, e_j\rangle|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x_n, f_j\rangle|^2\Big)^{1/2} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j(A)\|e_j\|\,\|f_j\| = \|A\|_{\mathrm{tr}} < \infty
\end{aligned}$$

konvergiert die Reihe auf der rechten Seite von (2-2) absolut, und wir können die Summationsreihenfolge vertauschen und erhalten

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle Ax_n, x_n\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j(A)\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x_n, e_j\rangle\,\langle f_j, x_n\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j(A)\langle f_j, e_j\rangle.$$

Damit ist die linke Seite unabhängig von der Wahl von $(x_n)_n$. Wählt man speziell $x_n = \widetilde{x}_n$, erhält man $\operatorname{tr} A$. □

B.9 Bemerkung. Sei $A \in \mathscr{S}_1(H)$. Falls $A = A^*$ gilt, so existiert nach dem Spektralsatz für kompakte Operatoren eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Eigenvektoren von A. Damit gilt die Darstellung von Satz B.6 für diese Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (da e_n auch Eigenvektor von $A^*A = A^2$ ist). In diesem Fall gilt $s_n(A) = |\lambda_n(A)|$ und $\operatorname{tr} A = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n(A)|$. Gilt sogar $0 \le Q \in \mathscr{S}_1(H)$, so ist $s_n(A) = \lambda_n(A)$ und $\|A\|_{\mathrm{tr}} = \operatorname{tr} A = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(A)$.

Falls $0 \le Q \in L(H)$, so ist Q genau dann Spuroperator, wenn für eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: $\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle Ae_n, e_n\rangle < \infty$.

B.10 Satz. *Für einen kompakten linearen Operator $A \in L(H,K)$ sind äquivalent:*

(i) A ist ein Hilbert-Schmidt-Operator, d.h. $A \in \mathscr{S}_2(H,K)$,

(ii) $A^*A \in L(H)$ ist ein Spurklasse-Operator, d.h. $A^*A \in \mathscr{S}_1(H)$,

(iii) es gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|_K^2 < \infty$ für eine (für jede) Orthonormalbasis von H.

In diesem Fall gilt $\|A\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|_K^2 = \|A^*A\|_{\mathrm{tr}}$ sowie $A^* \in \mathscr{S}_2(K,H)$ mit $\|A^*\|_{\mathrm{HS}} = \|A\|_{\mathrm{HS}}$.

Beweis. Seien $(\lambda_n(A^*A))_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenwerte von A^*A. Für jede Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H und jede Orthonormalbasis $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von K gilt nach der Parevalschen Gleichung

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|_K^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} |\langle Ae_n, f_m\rangle|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \|A^*f_m\|_H^2.$$

Insbesondere ist die Summe unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis. Verwendet man speziell eine Orthnormalbasis aus Eigenvektoren von A^*A (Spektralsatz), so erhält man

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(A^*A) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle A^*Ae_n, e_n\rangle_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|_K^2.$$

Beachtet man noch, dass $\lambda_n(A^*A) = s_n(A)^2$, so erhält man daraus die behaupteten Äquivalenzen sowie die Gleichheit der Normen. □

B.11 Satz. *Der Raum $\mathscr{S}_2(H,K)$, versehen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle T, S\rangle_{\mathscr{S}_2(H,K)} := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Se_n, Te_n\rangle$$

(wobei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H ist), ist ein separabler Hilbertraum. Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von K ist, so ist $\{f_m \otimes e_n : m,n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{S}_2(H,K)$. Hier ist $f_m \otimes e_n := \langle e_n, \cdot\rangle f_m$.

Beweis. Die Eigenschaften eines Skalarprodukts sind offensichtlich. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}_2(H,K)$ eine Cauchyfolge. Dann ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in $L(H,K)$, und $T := \lim_{n\to\infty} T_n \in L(H,K)$ existiert. Es gilt mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}\|T - T_n\|^2_{\mathscr{S}_2(H,K)} &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \|(T-T_n)e_k\|_K^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lim_{m\to\infty} \|(T_n - T_m)e_k\|_K^2 \\ &\le \liminf_{m\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \|(T_n - T_m)e_k\|_K^2 = \liminf_{m\to\infty} \|T_n - T_m\|^2_{\mathscr{S}_2(H,K)} \to 0 \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

Also ist $T \in \mathscr{S}_2(H,K)$, und $\mathscr{S}_2(H,K)$ ist vollständig.

Es gilt $f_m \otimes e_n \in \mathscr{S}_2(H,K)$ sowie für $T \in \mathscr{S}_2(H,K)$

$$\langle f_m \otimes e_n, T\rangle_{\mathscr{S}_2(H,K)} = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \langle e_n, e_\ell\rangle_H \langle f_m, Te_\ell\rangle_K = \langle f_m, Te_n\rangle_K.$$

Somit ist $\{f_m \otimes e_n : m,n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{S}_2(H,K)$ ein Orthonormalsystem. Falls $\langle f_m \otimes e_n, T\rangle_{\mathscr{S}_2(H,K)}$ für alle $n,m \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\langle f_m, Te_n\rangle_K = 0$ $(n,m \in \mathbb{N})$ und damit $T = 0$. Also ist $\{f_m \otimes e_n : m,n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis. Insbesondere ist $\mathscr{S}_2(H,K)$ separabel. □

C. Funktionalanalytische Hilfsmittel

C.1 Worum geht's? Hier werden einige, vor allem kleinere, Aussagen aus der Funktionalanalysis erwähnt, welche vielleicht nicht jedem geläufig sind. Standardbegriffe, -sätze und -methoden aus der Funktionalanalysis werden ansonsten vorausgesetzt.

C.2 Lemma. *Sei E separabler Banachraum. Dann existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ mit*

$$\|x\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \quad (x \in E).$$

Falls E reeller separabler Banachraum ist, existiert eine Folge $(\varphi_n)_n$ mit

$$\|x\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x) \quad (x \in E).$$

Beweis. Man wählt eine abzählbare dichte Teilmenge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ und dazu $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ mit $\|\varphi_n\|_{E'} = 1$ und $\varphi_n(x_n) = \|x_n\| = 1$ (Existenz nach dem Satz von Hahn-Banach). Für $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ gilt dann $|\varphi_n(x)| \le \|\varphi_n\|_{E'}\|x\| = 1$. Angenommen, es gilt $|\varphi_n(x)| \le 1 - \varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ für ein $\varepsilon > 0$. Für $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|x - x_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt dann $|\varphi_{n_0}(x_{n_0})| \le |\varphi_{n_0}(x)| + |\varphi_{n_0}(x) - \varphi_{n_0}(x_{n_0})| \le 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, Widerspruch. Somit gilt $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)|$ für alle $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ und durch Skalierung für alle $x \in E$. Falls E reell ist, ersetzt man $|\varphi_n|$ durch $\pm\varphi_n$. □

Im Folgenden seien H, H_1 reelle separable Hilberträume.

C.3 Definition. Sei $T \in L(H, H_1)$. Dann heißt

$$T^{-1} := \big(T|_{(\ker T)^\perp}\big)^{-1} \colon R(T) \to (\ker T)^\perp$$

die Pseudo-Inverse von T.

C.4 Bemerkung. Seien $T \in L(H, H_1)$ und $T^{-1} \colon R(T) \to (\ker T)^\perp$ die Pseudo-Inverse von T. Man definiert auf dem Raum $H_0 := R(T) \subset H_1$ das Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle_{R(T)} := \langle T^{-1}x, T^{-1}y\rangle_H \quad (x, y \in R(T)).$$

Dann ist H_0 ein Hilbertraum. Falls $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $(\ker T)^\perp$ ist, so ist $(Te_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0$ eine Orthonormalbasis von H_0.

Denn $T \colon (\ker T)^\perp \to R(T)$ ist eine Bijektion und sogar eine Isometrie, wenn $R(T)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{R(T)}$ versehen wird.

C.5 Lemma. *Seien $T \in L(H, H_1)$ und $Q := TT^* \in L(H_1)$. Dann gilt*

$$R(Q^{1/2}) = R(T) \text{ und } \|Q^{-1/2}x\|_{H_1} = \|T^{-1}x\|_H \quad (x \in R(T)),$$

wobei $Q^{-1/2}$ die Pseudo-Inverse von $Q^{1/2}$ und T^{-1} die Pseudo-Inverse von T ist. Insbesondere ist $T\colon \big((\ker T)^\perp, \|\cdot\|_H\big) \to \big(R(Q^{1/2}), \|\cdot\|_{R(Q^{1/2})}\big)$ ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Man kann zeigen, dass für zwei Operatoren $T_1 \in L(H, H_1)$ und $T_2 \in L(H_1)$ mit $\|T_1^* x\|_H = \|T_2^* x\|_{H_1}$ $(x \in H_1)$ bereits $R(T_1) = R(T_2)$ sowie $\|T_1^{-1}x\|_H = \|T_2^{-1}x\|_{H_1}$ $(x \in R(T_1))$ gilt (Proposition B.1 in [DPZ92]). Da Q selbstadjungiert ist, gilt

$$\|(Q^{1/2})^* x\|_{H_1}^2 = \|Q^{1/2}x\|_{H_1}^2 = \langle Qx, x\rangle_{H_1} = \langle TT^*x, x\rangle_{H_1} = \|T^*x\|_H^2,$$

und die Anwendung der obigen Aussage liefert die Behauptung. □

Im Folgenden verwenden wir einige Aussagen aus der Halbgruppentheorie, die wir hier nicht beweisen.

C.6 Lemma. *Sei E ein reflexiver Banachraum, $A\colon E \supset D(A) \to E$ der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$. Dann ist der adjungierte Operator $A'\colon E' \supset D(A') \to E'$ der Erzeuger der adjungierten Halbgruppe $(T(t)')_{t\geq 0}$.*

C.7 Lemma. *Sei A der Generator einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ im Banachraum E. Dann gilt für alle $x \in D(A)$ die Gleichheit*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax \quad (t \geq 0)$$

und damit für $0 \leq r \leq t$

$$\int_r^t S(s)Axds = S(t)x - S(r)x,$$
$$\int_r^t S(s-r)Axds = S(t-r)x - x.$$

Wir betrachten im Folgenden nichtganzzahlige Potenzen von Operatoren. Dazu dient folgende Definition, wobei E ein komplexer Banachraum sei.

C.8 Definition. Ein linearer Operator $A\colon E \supset D(A) \to E$ erfüllt Bedingung (P), falls $[0, \infty) \subset \rho(A)$ gilt und es ein $M > 0$ gibt mit

$$\|(A-\lambda)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{M}{1+\lambda} \quad (\lambda \geq 0). \tag{3-1}$$

C.9 Bemerkung. a) Unter Verwendung der Potenzreihe für die Resolvente sieht man sofort, dass aus Bedingung (P) sogar folgt: Es existieren ein $\theta_0 > 0$ und ein $r_0 > 0$ so, dass

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le r_0\} \subset \rho(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg z| \le \theta_0\} \subset \rho(A),$$

und für alle λ in dieser Menge gilt immer noch die Abschätzung (3-1) (mit evtl. geändertem M).

b) Falls A eine beschränkte holomorphe Halbgruppe $(T(t))_{t\ge 0}$ erzeugt mit negativer Spektralschranke (d.h. es gilt $\|T(t)\|_{L(E)} \le Me^{\omega t}$ mit $\omega < 0$), so erfüllt A die Bedindung P.

Im Folgenden sei A ein Operator, der Bedingung (P) erfüllt.

C.10 Definition. Sei $\gamma_{r,\theta}$ der Schlüssellochweg mit Radius $r < r_0$ und Winkel $\theta \in (0, \theta_0)$ (mit r_0 und θ_0 wie in Bemerkung C.9 a)). Dann definiert man für $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\alpha < 0$

$$(-A)^\alpha := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\theta}} \lambda^\alpha (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

C.11 Bemerkung. a) Für $\operatorname{Re}\alpha \in (-1, 0)$ gilt

$$(-A)^\alpha x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha (A - t)^{-1} dt.$$

b) Es gilt $(-A)^{-n} = ((-A)^{-1})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $\operatorname{Re}\alpha < -n$ gilt $R((-A)^\alpha) \subset D((-A)^n)$ und $(-A)^n(-A)^\alpha = (-A)^{n+\alpha}$. Für $\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2 < 0$ gilt $(-A)^{z_1}(-A)^{z_2} = (-A)^{z_1+z_2}$.

C.12 Definition. Sei $\operatorname{Re}\alpha \in [0, n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann definiert man

$$D((-A)^\alpha) := \{x \in X : (-A)^{\alpha-n} x \in D((-A)^n)\}, \quad (-A)^\alpha x := (-A)^n(-A)^{\alpha-n} x.$$

C.13 Bemerkung. a) Für $\operatorname{Re}\alpha > 0$ gilt $D((-A)^\alpha) = R((-A)^{-\alpha})$ und $(-A)^\alpha = ((-A)^{-\alpha})^{-1}$. Mit der Norm $x \mapsto \|(-A)^\alpha x\|_E$ wird $D((-A)^\alpha)$ ein Banachraum.

b) Es gilt $(-A)^{it} = ((-A)^{-it})^{-1}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, aber der Operator $(-A)^{it}$ ist im Allgemeinen nicht beschränkt. Man sagt, ein Operator gehört zur Klasse BIP („bounded imaginary powers"), falls $(-A)^{it} \in L(E)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $\|(-A)^{it}\|_{L(E)} \le C$ $(|t| \le 1)$.

Ausgehend von Teil a) der obigen Bemerkung, definiert man eine Skala von Interpolationsräumen, welche dem Operator A zugeordnet ist:

C.14 Definition. Für $\alpha > 0$ definiert man den Banachraum E_α als $D((-A)^\alpha)$, versehen mit der Norm $\|(-A)^\alpha \cdot\|_E$. Für $\alpha < 0$ definiert man E_α als Vervollständigung von E bzgl. der Norm $\|(-A)^\alpha \cdot\|_E$. Man setzt noch $E_0 := E$.

C.15 Satz. *Sei A der Generator einer beschränkten holomorphen Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ mit negativer Spektralschranke.*

a) Für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt

$$\|T(t)x - x\|_E \leq C_\alpha t^\alpha \|x\|_{E_\alpha} \quad (x \in E_\alpha,\, t \in (0,1]).$$

b) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ gilt

$$\|T(t)x\|_{E_\beta} \leq C_{\alpha,\beta} t^{\alpha-\beta} \|x\|_{E_\alpha} \quad (x \in E_\beta, t \in (0,1]).$$

Literatur

[Bau91] Heinz Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. De Gruyter Lehrbuch. Walter de Gruyter & Co., Berlin, fourth edition, 1991.

[DPZ92] Giuseppe Da Prato and Jerzy Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[DR12] Robert Denk and Reinhard Racke. *Kompendium der Analysis*. Springer Spektrum, Stuttgart, 2012. Band 2.

[Hai09] Martin Hairer. An introduction to stochastic PDEs. Lecture notes, University of Warwick / Courant Institute, 2009.

[HT94] Wolfgang Hackenbroch and Anton Thalmaier. *Stochastische Analysis*. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994. Eine Einführung in die Theorie der stetigen Semimartingale. [An introduction to the theory of continuous semimartingales].

[LR15] Wei Liu and Michael Röckner. *Stochastic partial differential equations: an introduction*. Universitext. Springer, Cham, 2015.

[PR07] Claudia Prévôt and Michael Röckner. *A concise course on stochastic partial differential equations*, volume 1905 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007.

[Saa12] Jürgen Saal. Stochastische partielle Differentialgleichungen. Vorlesungsskript, TU Darmstadt, 2012.

[Tha16] Mechthild Thalhammer. Kompendium zur Lehrveranstaltung stochastische partielle Differentialgleichungen. Vorlesungsskript, Universität Innsbruck, 2015/16.

[vN07] Jan van Neerven. Stochastic evolution equations. Internet Seminar Lecture Notes, 2007.

Index