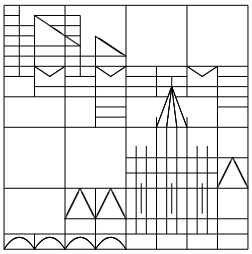
Skript zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2020/21

Robert Denk



Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 15.02.2021

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 1

1 Die Sprache der Mathematik: Logik, Mengen, Funktionen 2

a) Elemente der Logik 2

b) Mengen und Abbildungen 5

2 Zahlen 12

a) Natürliche Zahlen und vollständige Induktion 12

b) Rationale, reelle und komplexe Zahlen 18

c) Mächtigkeit von Mengen 25

3 Folgen und Grenzwerte, Reihen 28

a) Folgen und ihre Grenzwerte 28

b) Reihen 32

4 Einige nützliche Prinzipien 40

a) Metrische Räume 40

b) Topologische Grundbegriffe 43

c) Kompakte Mengen 46

5 Funktionen und Stetigkeit 51

a) Stetige Funktionen 51

b) Funktionenfolgen 56

6 Beispiele von Funktionen 60

a) Die Exponentialfunktion und der Logarithmus 60

b) Die Exponentialfunktion im Komplexen 64

7 Differentiation 74

a) Differenzierbare Funktionen 74

b) Der Mittelwertsatz und Folgerungen 79

8 Integration im $\mathbb{R}^1$ 85

a) Stammfunktionen 85

b) Treppenfunktionen und Regelfunktionen 88

c) Wichtige Sätze zur Integration 91

9 Funktionenreihen 98

a) Potenzreihen 98

b) Die Taylorreihe 102

Literatur 106
Index 107

Vorwort

Dieses Skript gibt den Inhalt der Vorlesung Analysis I vom Wintersemester 2020/21 an der Universität Konstanz wieder. Ein erster Einstieg in das Mathematik-Studium ist nicht leicht, an der Universität Konstanz werden daher eine Reihe von Maßnahmen getroffen, um den Studierenden den Anfang zu erleichtern, wie etwa den Vorkurs, die Mathe-Werkstatt und die Vorlesung mit Übungen „Einführung in das mathematische Arbeiten“. In diesen begleitenden Angeboten wird vor allem der Umgang mit Beweistechniken, mathematischen Formulierungen und logischen Operationen ausführlicher diskutiert als in der Analysis-Vorlesung.

Es gibt viele gute Bücher zur Analysis, welche sich als zusätzliche Quelle für diese Vorlesung gut eignen. Der Inhalt der Vorlesung orientiert sich stark am Buch R. Denk, R. Racke: Kompendium der Analysis I [3]. Sehr empfehlenswert finde ich auch das Buch M. Hieber: Analysis I [6]. Als einführende und ergänzende Literatur für Beweismethoden und Elemente der Logik wird das Buch M. Junk, J.-H. Treude: Beweisen lernen Schritt für Schritt [7]. Digital stehen diese drei (und viele andere) Bücher für die Studierenden der Universität Konstanz über SpringerLink (nach Einloggen ins Uni-Netz) zum Download zur Verfügung.

Konstanz, den 15.02.2021 Robert Denk

1. Die Sprache der Mathematik: Logik, Mengen, Funktionen

- Die roten Einträge auf dem Rand zeigen an, in welchem Video und an welcher Stelle der entsprechende Punkt zu finden ist. Dabei sind die Vorlesungsvideos mit 01,02,... durchnummeriert. Unter dem Rahmen ist noch das Datum des Videos zu sehen. So beginnt z.B. der Punkt „1.1 Worum geht's“ im Video Nummer 01 vom 03.11.20 nach 06 Minuten und 50 Sekunden.

01/06:50 (03.11.20)

1.1 Worum geht's? Die Mathematik besitzt eine eigene Sprache und auch eigene Symbole, die nicht nur eine kurze und prägnante Schreibweise erlauben, sondern auch zu präzisen Formulierungen zwingt. In diesem Abschnitt werden wichtige Grundlagen für alles Weitere bereitgestellt: Operatoren mit Mengen, logische Verknüpfungen und die zugehörigen mathematischen Symbole. Daneben werden die wichtigsten Zahlensysteme der Mathematik vorgestellt: natürliche und ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen und komplexe Zahlen.

In diesem Skript werden Bezeichnungen für die darin enthaltenen Aussagen verwendet, welche in der Mathematik üblich sind. Im Einzelnen tauchen auf:

- Satz, Lemma: Das ist die Überschrift für mathematische Aussagen, welche eine Voraussetzung und eine Behauptung enthalten und einen Beweis benötigen. Inhaltlich werden die wichtigeren Aussagen mit Satz bezeichnet und die eher unwichtigeren mit Lemma (vergleichbar mit Hilfssatz). In vielen Texten taucht hier auch noch Proposition als Überschrift auf.
- Korollar (Folgerung): So werden Aussagen bezeichnet, welche ebenfalls eine Voraussetzung und eine Behauptung enthalten und einen Beweis benötigen, aber relativ direkt aus einer früheren Satz oder Lemma folgen und in Zusammenhang mit der vorigen Aussage stehen.
- Bemerkung: Unter dieser Überschrift finden sich Aussagen, die entweder einen sehr einfachen direkten Beweis erlauben oder aber aus der Literatur ohne Beweis zitiert werden.
- Definition: Hier werden Begriffe neu definiert, es ist kein Beweis nötig.

Das Ende eines Beweises wird mit dem Zeichen „□“ gekennzeichnet. Wir verwenden noch die Schreibweise $a := b$, falls a definiert wird durch die Gleichung $a = b$, so bedeutet etwa $x := 2$, dass x als die Zahl 2 definiert wird. Manchmal schreibt man dies auch in der Form $2 =: x$.

a) Elemente der Logik

© Robert Denk 15.02.2021

Wir verwenden die Elemente der Logik im Folgenden ohne große Axiomatik oder formale Definition. Die Logik verknüpft Aussagen und bewertet sie im Hinblick auf ihren Wahrheitsgehalt. Dabei sind mathematische Aussagen immer wahr oder falsch, aber nie beides zugleich („Tertium non datur“). Beispiele für Aussagen sind:

(i) Das Buch ist grün.

(ii) Es gilt $2 > 4$.

(iii) Es gibt unendlich viele Primzahlen p, für welche auch $p + 2$ eine Primzahl ist.

Offensichtlich ist (ii) falsch. Es ist unerheblich, ob der Wahrheitswert einer Aussage bekannt ist, so weiß man z.B. bis heute nicht, ob die Aussage (iii) stimmt. Keine Aussagen sind:

(iv) Dieser Satz ist falsch.

(v) Hoffentlich verstehe ich die Analysis I-Vorlesung.

Wir benutzen die folgenden abkürzenden Schreibweisen, wobei A und B zwei Aussagen seien:

- $A \wedge B$: A und B (sowohl A als auch B)
- $A \vee B$ A oder B (nicht ausschließend),
- $\neg A$: nicht A, logische Negation,
- $\forall$: für alle,
- $\exists$: es existiert,
- $\exists_1$: es existiert genau ein,
- $A \Rightarrow B$: Implikation (aus A folgt B),
- $A \Leftrightarrow B$: Äquivalenz (A gilt genau dann, wenn B gilt).

Jeder Aussage wird genau ein Wahrheitswert zugeordnet, nämlich w (wahr) oder f (falsch). Die Wahrheitswerte der obigen verknüpften Aussagen sind durch folgende Tabellen (Wahrheitstafeln) gegeben:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

© Robert Denk 15.02.2021

Nach dem Prinzip des Tertium non datur ist $A \vee \neg A$ immer wahr und $A \wedge \neg A$ immer falsch. Aus der obigen Tabelle lassen sich viele weitere Beziehungen ablesen, z.B. ist die Aussage

$$\big[A \Leftrightarrow B\big] \Leftrightarrow \big[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big]$$

immer wahr, d.h. bezüglich des Wahrheitsgehalts gilt $A \Leftrightarrow B = [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$.

Mathematische Sätze sind Aussagen, welche stets wahr sind (solche Aussagen werden auch Tautologien genannt). Hier ein Beispiel, welches sich ebenfalls direkt mit Wahrheitstafeln beweisen lässt:

01/24:50 (03.11.20)

1.2 Lemma. *Für alle Aussagen A, B, C sind folgende Aussagen stets wahr:*

(a) $\neg(A \wedge B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg A) \vee (\neg B)$

(b) $\neg(A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg A) \wedge (\neg B)$

(c) $(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg A) \vee B$

(d) $(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$.

(e) $\big[(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big] \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

(f) $\big[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Die Aussagen (a) und (b) heißen auch de Morgansche[1] Regeln. Die Aussage (d) ist besonders wichtig und wird beim 'indirekten Beweis genutzt: Um die Implikation $A \Rightarrow B$ zu zeigen, kann man $\neg B$ annehmen und daraus $\neg A$ zeigen. Analog ist (e) die Grundlage für den Beweis durch Widerspruch: Um die Implikation $A \Rightarrow B$ zu zeigen, kann ich annehmen, dass sowohl A als auch $\neg B$ gelten und daraus einen Widerspruch, d.h. eine Aussage der Form $C \wedge \neg C$, herleiten. Teil (e) besagt, dass die Implikation transitiv ist.

01/31:30 (03.11.20)

1.3 Lemma. *Sei M eine Menge, und sei für $x \in X$ eine Aussage $A(x)$ gegeben. Dann gelten die Regeln von de Morgan:*

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in M : P(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in M : \neg(P(x)), \\ \neg(\exists x \in M : P(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in M : \neg(P(x)). \end{aligned}$$

Diese Regeln sind intuitiv sofort einsichtig: Wenn die Aussage $P(x)$ nicht für alle x wahr ist, dann gibt es (mindestens) ein x, für welches $P(x)$ falsch sein muss. Im Gegensatz zu den vorigen Regeln kann dieses Lemma nicht mit Hilfe von Wahrheitstafeln bewiesen werden. Wir verzichten hier auf eine formale Einführung (diese gehört zur sogenannten Prädikatenlogik, in der die obere Äquivalenz tatsächlich als Definition verwendet wird), und verwenden die de Morganschen Regeln intuitiv wie hier angegeben. Man beachte, dass die obigen Regeln eine Verallgemeinerung von

[1] Auguste de Morgan, 27.6.1806 – 18.3.1871

© Robert Denk 15.02.2021

Lemma 1.2 (a) und (b) sind: Falls $M = \{x_1, x_2\}$ nur zwei Elemente besitzt und $A = P(x_1)$ und $B = P(x_2)$, so gilt die Aussage $P(x)$ genau dann für alle $x \in M$, wenn $A \wedge B$ gilt.

In dieser Vorlesung werden wir auch folgende etwas schlampige Schreibweise verwenden, welche die Quantoren etwas vermeidet: Statt etwa $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ werden wir auch schreiben $x^2 \geq 0\,(x \in \mathbb{R})$. Mathematisch präzise ist aber stets die Verwendung von Quantoren in der obigen Form. Vermeiden sollte man hingegen $x^2 \geq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, da der Quantor in der korrekten Version vor der Aussage stehen sollte.

b) Mengen und Abbildungen

Für die Infinitesimalrechnung werden wir uns mit der sogenannten „naiven Mengenlehre“ begnügen. Eine Menge ist danach die „Zusammenfassung von (endlich oder unendlich vielen) wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten (Elementen) zu einem Ganzen“. Wir setzen somit voraus, dass wir die Elemente von den Mengen, welche wir betrachten, „kennen“. Die Elemente sind uns z. B. durch explizite Aufführung (z. B.: $M = \{1, 5\}$) oder durch die Angabe einer definierenden Eigenschaft (z. B.: $M = \{x :\ x$ ist eine gerade natürliche Zahl$\}$) bekannt.

Für Mengen definieren wir folgende Notationen:

1.4 Definition. Seien M, N Mengen.

01/40:00
(03.11.20)

a) Man schreibt $x \in M$, falls x ein Element von M ist, sowie $x \notin M$, falls x kein Element von M ist. Die leere Menge (die Menge, welche kein Element besitzt), wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

b) Man schreibt $M \subset N$, falls M eine Teilmenge von N ist, d.h. falls gilt $x \in M \Rightarrow x \in N$. Die Mengen M und N sind gleich (in Zeichen $M = N$), falls $M \subset N$ und $N \subset M$ gilt, d.h. falls sie dieselben Elemente besitzen. Falls $M \subset N$ und $M \neq N$ gilt, schreiben wir $M \subsetneq N$ (M ist echte Teilmenge von N).

c) Die Vereinigungsmenge von M und N ist definiert durch

$$M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\},$$

der Durchschnitt oder die Schnittmenge von M und N ist definiert durch

$$M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

d) Das (relative) Komplement von N bzgl. M ist definiert durch $M \setminus N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$. Falls $N \subset M$ gilt und die Menge M aus dem Kontext klar ist, schreibt man auch $N^c := \{x \in M : x \notin N\}$.

Diese Mengenoperationen werden in Abbildung 1.1 veranschaulicht.

© Robert Denk 15.02.2021

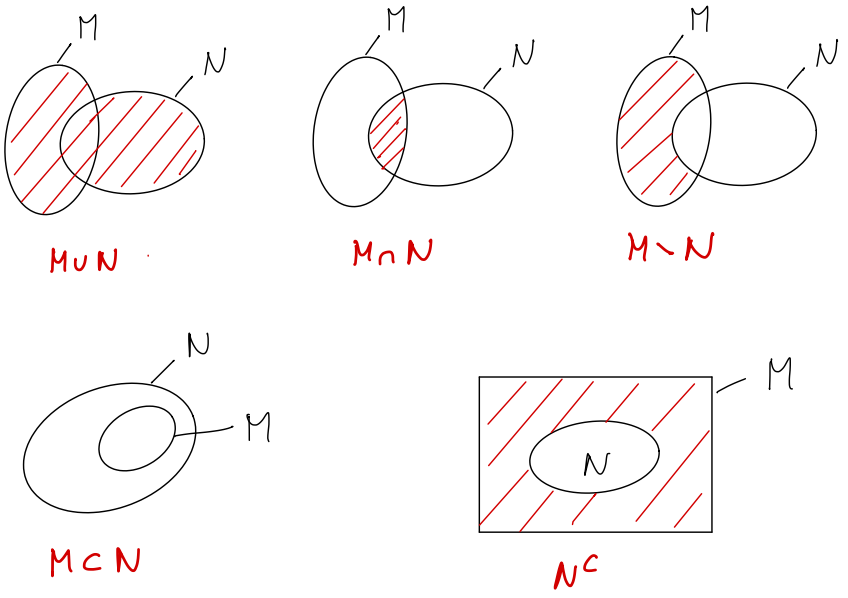


Abbildung 1.1: Mengenoperationen

Mengen lassen sich in vielerlei Weise bilden, so ist z.B. mit der Menge $\{1,2\}$ auch die Menge

$$\mathscr{P}(\{1,2\}) := \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\}$$

bilden. Dies ist eine Menge, deren Elemente selbst wieder Mengen sind! Man beachte, dass z.B. $1 \notin \mathscr{P}(\{1,2\})$ gilt, ebenso ist $\{1,2\}$ keine Teilmenge (sondern ein Element) von $\mathscr{P}(\{1,2\})$. Aber nicht jede Mengenbildung ist zulässig. So kann es etwa die Menge

$$M := \{X : X \text{ ist eine Menge, und es gilt } X \notin X\}$$

(das ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten) nicht geben, denn es kann nicht bestimmt werden, ob $M \in M$ gilt. Diese Menge geht auf Bertrand Russell[2] zurück und lässt sich in der Alltagssprache folgendermaßen veranschaulichen: Man kann einen Barbier als einen definieren, der all jene und nur jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Die Frage ist: Rasiert der Barbier sich selbst?

Wir werden insbesondere mit folgenden Mengen von Zahlen arbeiten:

01/56:30
(03.11.20)

1.5 Definition. Wir bezeichnen mit

- $\mathbb{N} := \{1,2,3,\ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, Zahlen),
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0,1,2,3,\ldots\}$,

[2] Bertrand Russell, 18.5.1872-2.2.1970

© Robert Denk 15.02.2021

- $\mathbb{Z} := \{x : x \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ die Menge der ganzen Zahlen ,
- $\mathbb{Q} := \{x : x = \frac{m}{n} \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \text{ und ein } n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der rationalen Zahlen,
- $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen,
- $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen.

Dabei werden die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ später definiert und genauer diskutiert.

Da die Mengenoperationen mit Hilfe von logischen Verknüpfungen definiert wurden, lassen sich die folgenden Aussagen auf die Regeln der logischen Operationen $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ zurückführen. Das folgende Lemma wird in den Übungen verifiziert.

1.6 Lemma. *Für beliebige Mengen A, B und C gilt:* 01/1:02:00 (03.11.20)

(i) $A \cup A = A$ *und* $A \cap A = A$ *(Idempotenz),*

(ii) $A \cup B = B \cup A$ *und* $A \cap B = B \cap A$ *(Kommutativität),*

(iii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *und* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(Assoziativität) und*

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *und* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Distributivität).*

1.7 Definition. a) Sei I eine nichtleere Menge (in diesem Zusammenhang als Indexmenge bezeichnet), und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge. Dann heißt $\{M_i : i \in I\}$ eine Familie von Mengen, und man definiert den Durchschnitt bzw. die Vereinigung dieser Mengenfamilie durch 01/1:07:20 (03.11.20)

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x : \text{ es existiert ein } j \in I \text{ mit } x \in M_j\},$$
$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x : \text{ für alle } j \in I \text{ gilt } x \in M_j\}.$$

Falls $I = \mathbb{N}$, schreibt man auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$, analog für den Durchschnitt.

b) Sei M eine Menge. Dann heißt

$$\mathscr{P}(M) := \{X : X \subset M\}$$

die Potenzmenge von M.

Direkt nach Definition gilt $X \in \mathscr{P}(M) \Leftrightarrow X \subset M$. Die Potenzmenge liefert immer eine Möglichkeit, neue Mengen zu bilden. Eine andere Möglichkeit, Mengen zu konstruieren, ist das kartesische Produkt, das wir zunächst nur für zwei Mengen definieren wollen:

© Robert Denk 15.02.2021

01/1:18:00 (03.11.20)

1.8 Definition. Seien X und Y Mengen, dann wird die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$ als das kartesische Produkt $X \times Y$ bezeichnet. Es gilt also

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X,\, y \in Y\}.$$

Man definiert $X \times \emptyset = \emptyset \times X = \emptyset$ sowie $X^2 := X \times X$.

Neben den Mengen sind Abbildungen ein wesentlicher Teil der mathematischen Sprache. Wir beginnen mit der Definition der zentralen Begriffe, siehe auch Abbildung 1.2.

01/1:24:30 (03.11.20)

1.9 Definition. Seien X und Y Mengen.

a) Eine Funktion oder Abbildung $f\colon X \to Y$ ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Man schreibt

$$f\colon X \to Y,\ x \mapsto f(x).$$

b) Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt $D(f) := X$ der Definitionsbereich von f, und

$$G(f) := \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\} \subset X \times Y$$

heißt der Graph von f.

02/02:40 (06.11.20)

Für $A \subset X$ heißt $f(A) := \{y \in Y :$ es existiert ein $x \in A$ mit $y = f(x)\}$ das Bild von A. Für $B \subset Y$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ das Urbild von B, siehe auch Abbildung 1.2. Die Menge

$$R(f) := f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset Y$$

heißt der Wertebereich von f.

Die Menge aller Funktionen $f\colon X \to Y$ wird auch mit $\mathrm{Abb}(X, Y)$ oder Y^X bezeichnet.

02/11:20 (06.11.20)

1.10 Satz. *Seien X und Y Mengen, und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Ferner seien $X_1, X_2 \subset X$ und $Y_1, Y_2 \subset Y$ Teilmengen von X bzw. Y. Dann gilt*

(i) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$,

(ii) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$,

(iii) $f(X \setminus X_1) \supset f(X) \setminus f(X_1)$,

(iv) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$,

(v) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$,

(vi) $f^{-1}(Y \setminus Y_1) = X \setminus f^{-1}(Y_1)$.

In (i) und (iii) kann $\neq$ auftreten.

© Robert Denk 15.02.2021

Der Beweis wird wieder in den Übungen geführt. Man sieht an diesen Aussagen, dass sich das Urbild in gewisser Weise besser verhält als das Bild. Die folgende Definition betrachtet die Einschränkung und die Komposition von Funktionen.

1.11 Definition. Seien X, Y, Z Mengen, und seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. 02/17:20 (06.11.20)

a) Sei $X_0 \subset X$. Dann heißt die Abbildung

$$f_0 : X_0 \to X, x \mapsto f(x)$$

die Einschränkung von f auf die Menge X_0. Man schreibt $f_0 =: f|_{X_0}$. In diesem Fall heißt f eine Fortsetzung von f_0.

b) Die Komposition $g \circ f$ von f und g ist definiert durch

$$(g \circ f)\colon X \to Z,\ x \mapsto g(f(x)).$$

Falls die Funktionen f und g in Teil b) dieser Definition nicht auf der ganzen Menge X bzw. Y definiert sind, ist die Komposition $g \circ f$ nur definiert, falls $R(f) \subset D(g)$ gilt.

1.12 Beispiele. a) Sei X eine Menge. Dann heißt die Abbildung $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $x \mapsto x$ die Identität auf X. 02/23:20 (06.11.20)

b) Falls X eine nichtleere Menge und $A \subset X$ sind, so heißt die Funktion

$$\chi_A\colon X \to \{0,1\},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

die charakteristische Funktion der Menge A.

Die folgenden Begriffe für Abbildungen sind von zentraler Bedeutung, siehe Abbildung 1.2.

1.13 Definition. Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f 02/28:30 (06.11.20)

(i) injektiv, falls für $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ bereits $x_1 = x_2$ folgt,

(ii) surjektiv, falls $R(f) = f(X) = Y$,

(iii) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

1.14 Satz. *Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann ist f genau dann bijektiv, wenn eine Abbildung $g\colon Y \to X$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt.* 02/36:50 (06.11.20)

© Robert Denk 15.02.2021

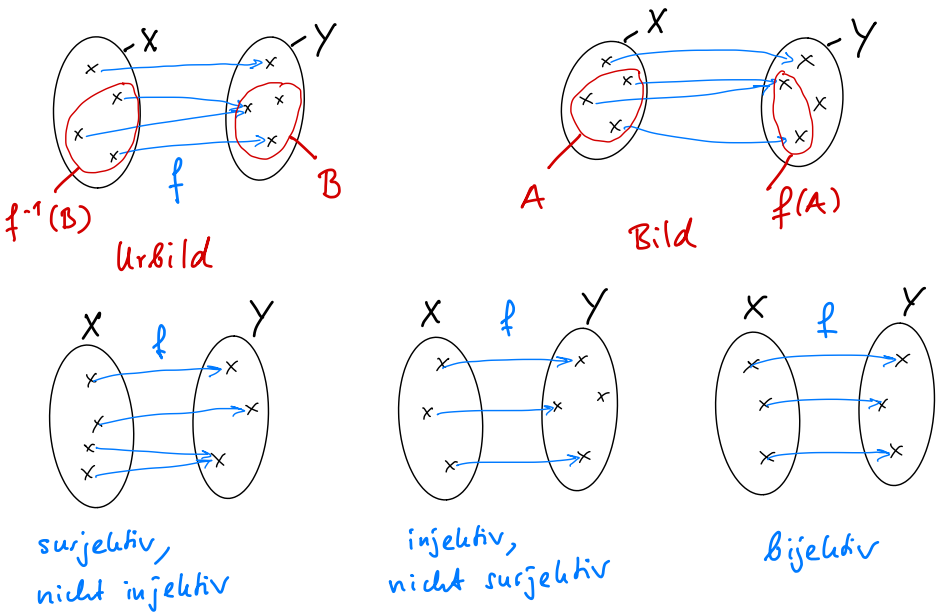


Abbildung 1.2: Eigenschaften von Abbildungen

Beweis. **(i)** Sei $f\colon X \to Y$ bijektiv. Da f surjektiv ist, existiert zu jedem $y \in Y$ ein $x_y \in X$ mit $f(x_y) = y$. Wegen der Injektivität von f ist x_y eindeutig bestimmt: Falls $\widetilde{x}_y \in X$ ein weiteres Element mit $f(\widetilde{x}_y) = y$ ist, so folgt $f(x_y) = f(\widetilde{x}_y)$, und die Injektivität liefert $x_y = \widetilde{x}_y$. Damit ist die Abbildung $g\colon Y \to X$, $y \mapsto g(y) := x_y$ definiert, und es gilt $f(g(y)) = y$ für alle $y \in Y$, d.h. $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Sei nun $x \in X$ und $y := f(x)$. Dann gilt $f(g(y)) = y = f(x)$, und aus der Injektivität von f folgt $g(y) = x$, d.h. $g(f(x)) = x$, was $g \circ f = \mathrm{id}_X$ zeigt.

(ii) Sei nun $g\colon Y \to X$ eine Funktion mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Für alle $y \in Y$ gilt dann $y = f(g(y)) = f(x) \in R(f)$ für $x := g(y)$, also ist f surjektiv. Seien nun $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2) =: y$. Dann gilt $x_1 = g(f(x_1)) = g(y) = g(f(x_2)) = x_2$, was die Injektivität von f zeigt. Damit ist f bijektiv.

(iii) Wir haben noch die Eindeutigkeit von g zu zeigen. Sei $\widetilde{g}\colon Y \to X$ eine weitere Funktion mit $\widetilde{g} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ \widetilde{g} = \mathrm{id}_Y$. Dann gilt für alle $y \in Y$

$$g(y) = g((f \circ \widetilde{g})(y)) = g(f(\widetilde{g}(y))) = (g \circ f)(\widetilde{g}(y)) = \widetilde{g}(y),$$

was $g = \widetilde{g}$ zeigt. □

02/1:01:30
(06.11.20)

1.15 Definition. Seien X und Y Mengen, und sei $f\colon X \to Y$ eine bijektive Funktion. Dann wird die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon Y \to X$ von f definiert als die nach Satz 1.15 eindeutig bestimmte Funktion mit der Eigenschaft $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$.

© Robert Denk 15.02.2021

02/1:04:00
(06.11.20)

1.16 Bemerkung. a) Man beachte die doppelte Notation: Für jede Abbildung $f\colon X \to Y$ ist das Urbild $f^{-1}(B)$ für eine Menge B definiert. Formal entspricht dies einer Abbildung zwischen den Potenzmengen

$$f^{-1}\colon \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X),\ B \mapsto f^{-1}(B) \subset X.$$

Falls f bijektiv ist, ist zusätzlich die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon Y \to X$, $y \mapsto f^{-1}(y)$ definiert. Typischerweise unterscheidet man in der Notation nicht zwischen diesen beiden Begriffen. Für bijektive Funktionen gilt, wie im Beweis von Satz 1.14 gezeigt wurde, $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$. Hier steht links das Urbild und rechts die Umkehrabbildung.

b) Falls $f\colon X \to Y$ nur injektiv ist, so ist f als Abbildung $f\colon X \to R(f)$ bijektiv, und man kann die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon R(f) \to X$ betrachten.

© Robert Denk 15.02.2021

2. Zahlen

02/1:18:20
(06.11.20)

2.1 Worum geht's? In diesem Kapitel werden die wichtigsten Zahlensysteme der Mathematik vorgestellt. Neben den natürlichen und rationalen Zahlen sind dies die reellen und komplexen Zahlen. Mit den natürlichen Zahlen verbunden ist das Prinzip der vollständigen Induktion, das sich für Beweise als äußerst nützlich zeigen wird. Ausgehend von den natürlichen Zahlen erweitert man das Zahlensystem schrittweise zu den ganzen Zahlen, um eine Gruppe bezüglich der Addition zu erhalten, sowie zu den rationalen Zahlen, um einen Körper zu erhalten. Die reellen Zahlen sind im Gegensatz zu den rationalen Zahlen vollständig. Schließlich erlaubt es die Erweiterung zu den komplexen Zahlen, algebraische Gleichungen wie $z^2 = -1$ zu lösen. Gerade die letzen beiden Eigenschaften sind der Grund dafür, worum Analysis im Wesentlichen in den Körpern $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ formuliert wird.

a) Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ sind intuitiv bereits vertraut. Eine formale Definition beruht auf den folgenden Axiomen von Peano[3].

02/1:24:45
(06.11.20)

2.2 Definition. Eine Menge $\mathbb{N}$ der natürliche Zahlen wird axiomatisch definiert durch folgende Eigenschaften:

(i) Es gilt $1 \in \mathbb{N}$.

(ii) Es existiert eine injektive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto f(n) =: n^+$ (das Element n^+ heißt Nachfolger von n).

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^+ \neq 1$.

(iv) Sei $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$, und es gelte $((n \in M) \Rightarrow (n^+ \in M))$. Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Ausgehend von dieser axiomatischen Definition, kann man die Zahlen $2 := 1^+$, $3 := 2^+$ etc. definieren sowie eine Abbildung $+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$n + 1 := n^+ \quad \text{und} \quad n + m^+ := (n + m)^+ \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Ebenso lässt sich eine Abbildung $\cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$n \cdot 1 = n \quad \text{und} \quad n \cdot m^+ = n \cdot m + n \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

definieren. Statt $n \cdot m$ schreibt man auch nm. Das Axiom 2.2 (iv) wird die Grundlage für die vollständige Induktion bilden.

Man erkennt, dass das uns bekannte Standardmodell $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation diese Axiome erfüllt, so dass wir wie gewohnt mit den

[3] Guiseppe Peano, 27.8.1858 – 20.4.1939

© Robert Denk 15.02.2021

natürlichen Zahlen rechnen können. Aus den Axiomen erhält man die folgenden bekannten Gesetzmäßigkeiten, deren formaler Beweis nicht sehr spannend ist und hier weggelassen wird.

2.3 Lemma. *Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dann gilt:* 03/15:00 (10.11.20)

(i) $(a+b)+c = a+(b+c)$ *(Assoziativgesetz der Addition)*

(ii) $a+b = b+a$ *(Kommutativgesetz der Addition)*

(iii) $(ab)c = a(bc)$ *(Assoziativgesetz der Multiplikation)*

(iv) $ab = ba$ *(Kommutativgesetz der Multiplikation)*

(v) $a(b+c) = ab+ac$ *(Distributivgesetz).*

Neben den oben genannten Eigenschaften besitzen die natürlichen Zahlen noch eine weitere Struktur, nämlich eine Ordnung: wir können zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ bezüglich ihrer Größe vergleichen, z.B. gilt $2 < 5$. Bevor wir die Ordnungsrelation für die natürlichen Zahlen definieren, geben wir zunächst die Definitionen von Relation und Ordnung an.

2.4 Definition. a) Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $R \subset X \times X$ heißt eine Relation auf X. Man schreibt $x \sim_R y$ oder auch nur $x \sim y$, falls $(x, y) \in R$ gilt. Eine Relation R heißt 03/22:20 (10.11.20)

(i) reflexiv, falls $\forall x \in X : x \sim x$,

(ii) transitiv, falls $\forall x, y, z \in X : (x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z$,

(iii) symmetrisch, falls $\forall x, y \in X : x \sim y \Rightarrow y \sim x$,

(iv) antisymmetrisch, falls $\forall x, y \in X : x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow x = y$.

b) Eine reflexive, transitive und symmetrische Relation heißt Äquivalenzrelation.

Ein Beispiel für eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ wäre etwa $x \sim y :\Leftrightarrow x+y$ ist gerade. Ein typisches Beispiel für eine antisymmetrische Relation ist für eine beliebige Menge X gegeben auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ durch $A \sim B :\Leftrightarrow A \subset B$ für $A, B \subset X$. In diesem Fall könnte man sagen, dass A kleiner als B ist. Der zugehörige mathematische Begriff ist der einer (partiellen) Ordnung:

2.5 Definition. a) Sei X eine Menge. Dann heißt eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation $R \subset X \times X$ eine Halbordnung oder partielle Ordnung (manchmal auch nur Ordnung) in X oder auf X. Wir schreiben $x \prec_R y$ oder nur $x \prec y$, falls $(x, y) \in R$. 03/32:20 (10.11.20)

b) Eine Menge X mit einer Halbordnung R heißt vollständig geordnet, falls $\forall x, y \in X : x \prec y \vee y \prec x$. In diesem Fall heißt R auch eine vollständige Ordnung oder eine totale Ordnung.

© Robert Denk 15.02.2021

c) Sei X eine Menge mit Halbordnung R, und sei $M \subset X$. Dann heißt ein $x \in M$ ein kleinstes Element von M, falls $\forall\, y \in M : x \prec y$.

d) Sei X eine vollständig geordnete Menge. Dann heißt X wohlgeordnet, wenn jede nichtleere Teilmenge von X ein kleinstes Element besitzt.

Wir können nun auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ wie folgt eine totale Ordnung erklären:

03/46:30 (10.11.20)

2.6 Definition. Für zwei natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ definiert man

$$n < m :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : m = n + c$$

sowie $n \leq m :\Leftrightarrow (n < m) \vee (n = m)$. Man schreibt auch $m > n$ statt $n < m$ sowie $m \geq n$ statt $n \leq m$.

Es ist anschaulich klar (und kann wieder formal aus den Peano-Axiomen gezeigt werden), dass durch diese Definition eine vollständige Ordnung auf $\mathbb{N}$ definiert wird, deren kleinstes Element die 1 ist.

03/51:00 (10.11.20)

2.7 Satz (Wohlordnungssatz)**.** *Mit der durch „$\leq$“ gegebenen Ordnung ist $\mathbb{N}$ wohlgeordnet.*

Beweis. Sei M eine beliebige nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass M kein kleinstes Element besitzt, und definieren die Menge

$$K := \{k \in \mathbb{N} : \forall\, m \in M : k \leq m\}.$$

Da 1 ein kleinstes Element in $\mathbb{N}$ ist, gilt $1 \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit insbesondere $1 \leq m$ für alle $m \in M$. Somit gilt $1 \in K$.

Sei nun $k \in K$. Dann gilt $k \notin M$, denn sonst wäre k ein kleinstes Element in M. Es folgt $k < m$ für alle $m \in M$ und damit $k + 1 \leq m$ für alle $m \in M$. Damit gilt $k + 1 \in K$. Die Menge $K \subset \mathbb{N}$ erfüllt somit die Bedingung (iv) aus Definition 2.2, und es folgt $K = \mathbb{N}$.

Da $M \neq \emptyset$, existiert ein $m_0 \in M$, und wegen $m_0 + 1 \in \mathbb{N} = K$ folgt aus der Definition von K der Widerspruch $m_0 + 1 \leq m_0$. Somit war die Annahme falsch, d.h. M besitzt ein kleinstes Element. Also ist $\mathbb{N}$ wohlgeordnet. □

Eine wichtige Beweismethode ist das Prinzip von der vollständigen Induktion:

03/1:07:50 (10.11.20)

2.8 Lemma (Prinzip von der vollständigen Induktion)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte:*

(i) *$A(1)$ ist wahr (Induktionsanfang).*

(ii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $A(n)$ wahr ist, so ist auch $A(n + 1)$ wahr (Induktionsschritt).*

© Robert Denk 15.02.2021

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Beweis. Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$. Dann gilt nach Voraussetzung $1 \in M$ sowie $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$. Nach Eigenschaft (iv) aus Definition 2.2 der natürlichen Zahlen folgt $M = \mathbb{N}$. □

2.9 Bemerkung. Die vollständige Induktion kann auch in folgenden Varianten angewendet werden: Statt eine Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, kann man auch die Aussage nur für $n \geq n_0$ zeigen, wobei dann der Induktionsanfang durch $A(n_0)$ gegeben ist. Man darf im Induktionsschritt auch statt $A(n)$ auch alle Aussagen $A(n_0), A(n_0+1), \ldots, A(n)$ voraussetzen. In Kombination ergibt sich dann folgendes Schema für $n_0 \in \mathbb{N}$ 03/1:21:10 (10.11.20)

(i) $A(n_0)$ ist wahr (Induktionsanfang).

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ gilt: Falls $A(n_0), A(n_0+1), \ldots, A(n)$ wahr sind, so ist auch $A(n+1)$ wahr (Induktionsschritt).

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Um diese Variante zu beweisen, genügt es, Lemma 2.8 auf die Aussage $\widetilde{A}(k)$: „Die Aussagen $A(n_0), \ldots, A(n_0 - 1 + k)$ sind wahr“ für $k \in \mathbb{N}$ anzuwenden.

Das Prinzip von der vollständigen Induktion ist für viele Beweise nützlich. Bevor wir einige Beispiele diskutieren, definieren wir noch eine Schreibweise für Summation und Produkt von Zahlen.

2.10 Definition. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$, und seien a_k Zahlen für $k = m, m+1, m+2, \ldots, n$. Dann definiert man 03/1:30:00 (10.11.20)

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n \quad \text{(Summe)},$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n \quad \text{(Produkt)}.$$

Für $m > n$ definieren wir die Summe $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$ (leere Summe) und das Produkt $\prod_{k=m}^{n} a_k := 1$ (leeres Produkt).

2.11 Lemma. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt* 04/01:30 (13.11.20)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. Sei $A(n)$ die Aussage $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Dann ist der Induktionsanfang $A(1)$ wahr wegen $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ und $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.
Sei $A(n)$ wahr. Dann ist auch $A(n+1)$ wahr (Induktionsschritt), denn:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Also ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. □

Auch die folgende Ungleichung kann leicht mit Induktion bewiesen werden. Wir formulieren dieses Ergebnis gleich in $\mathbb{R}$, auch wenn die formale Einführung der reellen Zahlen erst später kommt.

04/10:00 (13.11.20)

2.12 Lemma (Bernoullische[4] Ungleichung)**.** *Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $x > -1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$*

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion nach n. Der Induktionsanfang $n = 2$ gilt wegen

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x.$$

Für den Induktionsschritt können wir die Behauptung für n als bewiesen annehmen (Induktionsvoraussetzung). Für $n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx) \cdot (1+x) \\ &= (1 + nx + x + nx^2) > 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

04/21:30 (13.11.20)

2.13 Definition. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

der zugehörige Binomialkoeffizient. Man spricht „n über k“ oder „k aus n“.
Für $k \in \mathbb{N}$ heißt

$$k! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$$

die Fakultät von k. Für $k = 0$ vereinbart man $0! := 1$.

[4] Jakob (I) Bernoulli, 27.12.1654 – 16.8.1705

© Robert Denk 15.02.2021

2.14 Lemma. *a) Für $n, k \in \mathbb{N}$ gilt*

04/24:20
(13.11.20)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

b) Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis. Die Gleichheit a) sieht man direkt aus der Definition. Für b) berechnet man

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} \\
&= \frac{(n-1)\dots(n-k+1)[k+(n-k)]}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}.
\end{aligned}$$

□

2.15 Satz (Binomische Formel). *Für $x, y \in \mathbb{R}$ und für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

04/33:50
(13.11.20)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

Dabei wurde $x^0 = 1$ gesetzt.

Beweis. Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach n geführt.

Induktionsanfang $n = 1$: Auf der linken Seite erhalten wir $(x+y)^1 = x + y$, auf der rechten Seite

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} x^k y^{1-k} = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = y + x,$$

also stimmt die Behauptung für $n = 1$.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir berechnen die linke Seite unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung und erhalten

$$(x+y)^{n+1} \quad = \quad (x+y)^n \cdot (x+y) = \Big[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\Big] \cdot (x+y)$$

© Robert Denk 15.02.2021

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^{k+1}y^{n-k} + x^k y^{n-k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

Hier wurde in der ersten Summe die Indexverschiebung $j = k + 1$ verwendet. So erhalten wir weiter

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n+1-j} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right] x^j y^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j}.
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt haben wir dabei die Gleichheit

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$$

aus Lemma 2.14 verwendet. Damit gilt die Aussage für $n + 1$, und der Induktionsbeweis ist beendet. □

b) Rationale, reelle und komplexe Zahlen

Ausgehend von den natürlichen Zahlen, definiert man die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\},$$

sowie die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \{\tfrac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$$

die Menge aller Brüche mit ganzzahligem Zähler und Nenner. Man beachte, dass zwei Brüche $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ dieselbe rationale Zahl darstellen, falls $p_1 q_2 = p_2 q_1$ gilt. Die ganzen Zahlen sind mit der Identifizierung $\frac{p}{1} = p$ Teilmenge der rationalen Zahlen. In $\mathbb{Q}$ werden die üblichen Rechenregeln für die Addition und Multiplikation verwendet. Um die Struktur von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ besser beschreiben zu können, definieren wir die zugehörigen abstrakten Begriffe einer (abelschen) Gruppe und eines Körpers.

© Robert Denk 15.02.2021

2.16 Definition. Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Menge G mit einer Abbildung (Verknüpfung) $\circ : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \circ y$ mit folgenden Eigenschaften: 04/1:03:45 (13.11.20)

(i) $\forall\, x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (Assoziativität),

Es existiert ein $n \in G$ mit

(ii) $\forall\, x \in G : n \circ x = x$ (Existenz eines neutralen Elementes),

(iii) $\forall\, x \in G\, \exists\, y \in G : y \circ x = n$ (Existenz eines inversen Elementes).

Eine Gruppe G heißt abelsch[5] oder kommutativ, falls gilt: $\forall\, x, y \in G\ :\ x \circ y = y \circ x$.

b) Sei K eine Menge, auf der zwei Verknüpfungen $\oplus\colon G \times G \to G$ und $\odot\colon G \times G \to G$ erklärt sind. Dann heißt $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper, falls $(K, \oplus)$ und $(K \setminus \{0\}, \odot)$ abelsche Gruppen sind, wobei 0 das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung $\oplus$ bezeichnet, sowie das Distributivgesetz

$$\forall\, x, y, z \in K : x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$$
$$\forall\, x, y, z \in K : (y \oplus z) \odot x = (y \odot x) \oplus (z \odot x)$$

gilt.

2.17 Beispiele. a) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit 0 als neutralem Element. 04/1:14:50 (13.11.20)

b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper, wobei 0 das neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation ist. Wir schreiben in $\mathbb{Q}$ (und in $\mathbb{R}$) $-x$ für das inverse Element zu x bzgl. der Addition und $\frac{1}{x}$ oder x^{-1} für das inverse Element zu x bzgl. der Multiplikation, sowie $xy := x \cdot y$, $x^2 := x \cdot x$ und $x - y := x + (-y)$. Man beachte, dass Aussagen wie etwa $-x = (-1) \cdot x$ oder $0 \cdot x = 0$ mit Hilfe der Körperaxiome bewiesen werden müssen.

c) Ein Beispiel für einen endlichen Körper ist $\mathbb{F}_2 = (\{0, 1\}, +, \cdot)$, wobei die Addition und Multiplikation in üblicher Weise definiert wird bis auf $1 + 1 := 0$.

2.18 Definition. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, und sei $\leq$ eine vollständige Ordnung auf K. Dann heißt $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper, falls gilt: 04/1:25:10 (13.11.20)

(i) $\forall\, x, y, z \in K : (x > y) \Rightarrow x + z > y + z$,

(ii) $\forall\, x, y, z \in K : ((x > y) \wedge (z > 0)) \Rightarrow xz > yz$.

Ein geordneter Körper K heißt archimedisch geordnet, falls gilt:

(iii) $\forall\, x, y \in K,\ x > 0,\ y > 0\, \exists\, n_K \in K : n_K \cdot x > y$.

Dabei wird n_K iterativ definiert durch $2_K := 1_K + 1_K$ und $(n + 1)_K := n_K + 1_K$, wobei $1_K = 1$ das neutrale Element von K bzgl. der Multiplikation ist.

Die folgenden Aussagen können leicht gezeigt werden.

[5] Niels Henrik Abel, 5.8.1802 – 6.4.1829

© Robert Denk 15.02.2021

05/02:40 (17.11.20)

2.19 Lemma. *Sei K ein geordneter Körper.*

a) Für alle $x \in K \setminus \{0\}$ gilt $x^2 > 0$. Insbesondere ist auch $1 = 1^2 > 0$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n_K > 0$.

Die bisher eingeführte Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist noch zu klein. Wir werden sie zur Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erweitern, um einen vollständigen Körper zu erhalten. Für die Formulierung des Vollständigkeitsaxioms benötigen wir noch einige Begriffe.

05/06:20 (17.11.20)

2.20 Definition. Sei K ein geordneter Körper mit Ordnung $\leq$, und sei $S \subset K$.

a) Die Menge S heißt von unten beschränkt, falls

$$\exists\, a \in K\, \forall x \in S : a \leq x.$$

In diesem Fall heißt a eine untere Schranke von S. Analog definiert man von oben beschränkt und obere Schranke. Die Menge S heißt beschränkt, falls S von unten und von oben beschränkt ist.

b) Ein Element $m \in K$ heißt eine größte untere Schranke oder Infimum von S, falls m eine untere Schranke von S ist und falls für alle unteren Schranken $\widetilde{m}$ von S gilt: $\widetilde{m} \leq m$. In diesem Fall schreibt man $m = \inf S = \inf_{s \in S} s$.

Analog wird die kleinste obere Schranke M oder das Supremum von S definiert, Schreibweise $M = \sup S = \sup_{s \in S} s$.

c) Sei $m = \inf S \in K$. Dann heißt m das Minimum von S, falls $m \in S$ gilt. In diesem Fall schreibt man $\min S := \inf S = m$. Analog definiert man das Maximum $\max S := \sup S$, falls $\sup S \in S$ gilt.

05/20:10 (17.11.20)

2.21 Bemerkung. a) Bei dieser Definition muss man gut aufpassen: Es wird nicht verlangt, dass eine obere Schranke zur Menge S selbst gehört. Dies gilt auch für das Supremum bzw. Infimum. Auch wird hier nicht vorausgesetzt, dass eine obere Schranke oder ein Supremum existiert. So hat z.B. die Menge $\mathbb{N}$ ein Infimum, nämlich 1, aber keine obere Schranke und daher kein Supremum. Für das Intervall $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$ sind -1 und 0 untere Schranken, die Zahl 0 ist das Infimum und gehört nicht zu S, während die Zahl 1 das Supremum ist und zu S gehört.

b) Direkt aus der Definition folgt, dass das Infimum von S (falls existent) eindeutig ist, analog für das Supremum.

c) Die Menge $S := \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ und } x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$ ist beschränkt, besitzt aber kein Supremum. Denn man kann zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, und dass daher für jede obere Schranke $M \in \mathbb{Q}$ von S eine weitere obere Schranke $\widetilde{M} \in \mathbb{Q}$ existiert mit $\sqrt{2} < \widetilde{M} < M$.

Wir wollen wie bisher auf eine axiomatische Einführung der reellen Zahlen verzichten. Die wesentlichen Eigenschaften sind in folgender Aussage zusammengefasst,

© Robert Denk 15.02.2021

welche wir im Rahmen dieser Vorlesung als Axiom betrachten, d.h. als Eigenschaft, die im Folgenden vorausgesetzt wird und nicht bewiesen werden muss.

2.22 Axiom (Vollständigkeitsaxiom). *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein geordneter Körper, der den geordneten Körper $\mathbb{Q}$ enthält, und in dem das folgende Vollständigkeitsaxiom gilt:*

05/33:40 (17.11.20)

- *Jede nichtleere von oben (unten) beschränkte Menge S reeller Zahlen besitzt ein Supremum (Infimum) in $\mathbb{R}$.*

Man kann zeigen, dass durch diese Eigenschaften der Körper der reellen Zahlen im Wesentlichen schon eindeutig festgelegt ist (genauer: bis auf Isomorphien, d.h. lineare und bijektive Abbildungen).

2.23 Bemerkung. Konstruktive Zugänge zu den reellen Zahlen sind der Dedekindsche[6] Schnitt und die Vervollständigung der rationalen Zahlen mittels Cauchy-Folgen, was wir hier aber nicht weiter ausführen wollen.

05/41:00 (17.11.20)

2.24 Satz. *a) Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $\forall\, n \in \mathbb{N} : n \leq x$.*

b) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\forall\, n \in \mathbb{N} : 0 \leq x < \frac{1}{n}$. Dann gilt $x = 0$.

c) Sei $S \subset \mathbb{R}$, und es existiere $M := \sup S$. Dann gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x \in S : M - \varepsilon < x \leq M.$$

05/42:30 (17.11.20)

Beweis. a) Falls ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $\forall\, n \in \mathbb{N} : n \leq x$, so ist $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, und nach Axiom 2.22 existiert $M := \sup \mathbb{N}$. Wegen $M-1 < M$ ist $M-1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Daher existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $M - 1 < n_0 \leq M$. Es folgt $n_0 + 1 > M$ im Widerspruch dazu, dass M eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist.

b) Falls $x > 0$, so erhalten wir wegen $x < \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $\frac{1}{x} > n$, d.h $\frac{1}{x}$ wäre eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ im Widerspruch zu a).

c) Wir nehmen an, dass die Aussage in c) nicht stimmt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\forall\, x \in S : x \leq M - \varepsilon$. Damit ist $M - \varepsilon$ eine obere Schranke von S, und wegen $M - \varepsilon < M$ ist M nicht das Supremum von S, Widerspruch. □

2.25 Definition. Der Absolutbetrag einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

05/1:07:25 (17.11.20)

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

[6] Richard Dedekind, 6.10.1838 – 12.2.1916

© Robert Denk 15.02.2021

05/1:09:00 (17.11.20)

2.26 Lemma. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $|x| \geq 0$,

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung),*

(iv) $|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|$ *(umgekehrte Dreiecksungleichung).*

Beweis. Diese Aussagen lassen sich leicht mit einer Fallunterscheidung bezüglich des Vorzeichens von x und y beweisen. □

05/1:13:40 (17.11.20)

2.27 Satz. *Die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $|x - q| < \varepsilon$.*

Beweis. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Wir nehmen zunächst $x \geq 0$ an. Nach Satz 2.24 a) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wir betrachten die Menge

$$M := \{m \in \mathbb{N} : m > nx\}.$$

Dann ist $M \neq \emptyset$, da sonst $\mathbb{N}$ beschränkt wäre. Da $\mathbb{N}$ wohlgeordnet ist (Satz 2.7), besitzt M ein kleinstes Element m_0. Es folgt $m_0 - 1 \leq nx < m_0$ und damit $\frac{m_0 - 1}{n} \leq x < \frac{m_0}{n}$. Daher gilt für $q := \frac{m_0}{n} \in \mathbb{Q}$ die Abschätzung $|x - q| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Falls $x < 0$, so wählt man ein $\widetilde{q} \in \mathbb{Q}$ mit $|(-x) - \widetilde{q}| < \varepsilon$ und setzt $q := -\widetilde{q}$. □

06/02:00 (20.11.20)

2.28 Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann definiert man die folgenden Intervalle:

$$\begin{aligned}
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{(offenes Intervall)},\\
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{(abgeschlossenes Intervall)},\\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},\\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.
\end{aligned}$$

Die beiden letzen Intervalle heißen auch halboffene Intervalle. Unendliche Intervalle werden analog definiert: $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.

Wir haben bisher die Zahlsysteme $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ kennengelernt. Ausgehend von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, kann man diese Erweiterungen auch dadurch motivieren, dass man immer mehr Gleichungen lösen kann:

- Die Gleichung $a + x = b$ besitzt für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ (denn $\mathbb{Z}$ ist bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe). Die analoge Aussage für $\mathbb{N}$ stimmt nicht.

© Robert Denk 15.02.2021

- Die Gleichung $ax = b$ ist für alle $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ lösbar (denn $\mathbb{Q}$ ist ein Körper). Die analoge Aussage für $\mathbb{Z}$ stimmt nicht.
- Die Gleichung $x^2 = 2$ besitzt eine Lösung $x \in \mathbb{R}$, denn $\mathbb{R}$ ist vollständig. Diese Gleichung besitzt aber keine Lösung in Q.

Allerdings gilt in jedem geordneten Körper nach Lemma 2.19 $x^2 \geq 0$ für alle x, d.h. die Gleichung $x^2 = -2$ ist nicht lösbar. Dazu führt man noch als letzte wesentliche Erweiterung die komplexen Zahlen ein, in der alle derartigen (genauer algebraischen) Gleichungen eine Lösung besitzen. Allerdings sind die komplexen Zahlen (anders als $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) kein geordneter Körper mehr.

06/05:45 (20.11.20)

2.29 Definition. a) Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen wird definiert als $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, versehen mit der Addition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad ((x_1, y_1) \in \mathbb{C},\ (x_2, y_2) \in \mathbb{C})$$

und der Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad ((x_1, y_1) \in \mathbb{C},\ (x_2, y_2) \in \mathbb{C})$$

Man schreibt kurz $1 := (1, 0) \in \mathbb{C}$ sowie $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ und identifiziert $x \in \mathbb{R}$ mit der komplexen Zahl $(x, 0) \in \mathbb{C}$. Damit kann eine Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ in der Form

$$z = (x, y) = x + iy$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ geschrieben werden. Die Zahl $i = (0, 1)$ heißt die imaginäre Einheit. Anschaulich spricht man auch von der komplexen Zahlenebene (siehe Abbildung 2.1).

b) Sei $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann definiert man:

- $\operatorname{Re} z := x$ heißt der Realteil von z,
- $\operatorname{Im} z := y$ heißt der Imaginärteil von z,
- $\overline{z} := (x, -y) = x - iy$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl,
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt der Betrag oder Absolutbetrag oder die Länge von z,

06/22:10 (20.11.20)

2.30 Bemerkung. a) Man rechnet leicht nach, dass $\mathbb{C}$ tatsächlich ein Körper ist. Das neutrale Element der Addition ist $0 = (0, 0)$, das neutrale Element der Multiplikation ist $1 = (1, 0)$. Bezüglich der Multiplikation ist das inverse Element zu $z = (x, y) = x + iy$ gegeben durch

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{|z|^2}, -\frac{y}{|z|^2}\right) = \frac{1}{|z|^2}(x, -y) = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

© Robert Denk 15.02.2021

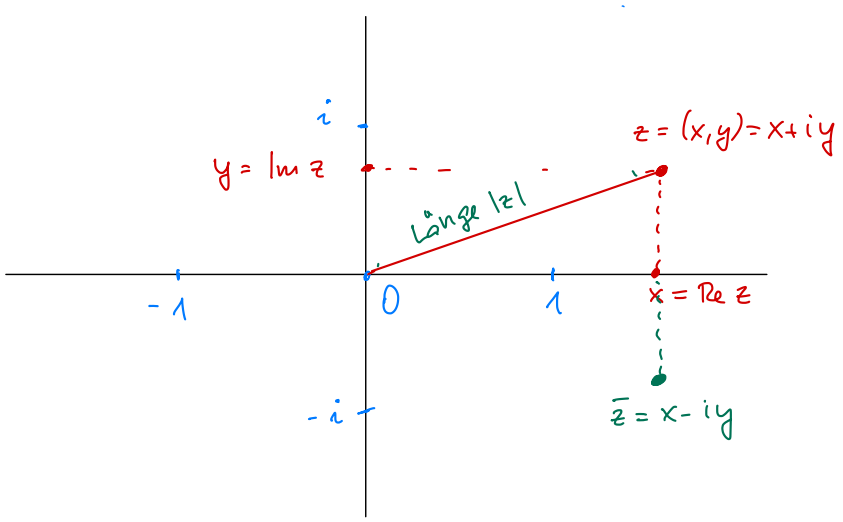


Abbildung 2.1: Die komplexe Zahlenebene

b) Direkt aus der Definition folgen die Rechenregeln $|z|^2 = z\overline{z}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{\overline{z}} = z$ sowie

$$\operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}),\ \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

c) Der Betrag $|\cdot|$ komplexer Zahlen hat die in Lemma 2.26 angegebenen Eigenschaften. Er ist gleich der euklidischen Länge des Vektors z als Element von $\mathbb{R}^2$.

d) Nach Definition der Multiplikation gilt $i^2 = -1$, d.h. die Gleichung $z^2 = -2$ hat die beiden Lösungen $z_1 = i\sqrt{2}$ und $z_2 = -i\sqrt{2}$. Man beachte, dass nach Lemma 2.19 daraus folgt, dass $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper ist. Aussagen wie „Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 < z_2$“ sind daher sinnlos! Man kann allerdings die Länge $|z|$ einer Zahl angeben, womit die Konvergenzbegriffe des nächsten Abschnitts auch auf komplexe Zahlen anwendbar sind.

e) Beim Rechnen mit komplexen Zahlen kann man wie gewohnt rechnen, wenn man die neue Eigenschaft $i^2 = -1$ verwendet. So kann man das Produkt zweier Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ durch

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

berechnen.

© Robert Denk 15.02.2021

c) Mächtigkeit von Mengen

Wir wollen die bisher eingeführten Mengen von Zahlen auch noch hinsichtlich ihrer Mächtigkeit vergleichen.

06/48:15 (20.11.20)

2.31 Definition. a) Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig oder von gleicher Kardinalität, falls eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ existiert. In diesem Fall schreibt man $|A| = |B|$. Andere Schreibweisen sind $\#A$ oder $\operatorname{card} A$ statt $|A|$.

b) Eine Menge A heißt endlich, falls $A = \emptyset$ (in diesem Fall setzt man $|A| := 0$) oder falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $|A| = |\{1, \dots, n\}| =: n$. Falls A nicht endlich ist, heißt A unendlich.

c) Eine Menge A heißt abzählbar, falls A endlich ist oder $|A| = |\mathbb{N}|$ gilt. In zweiten Fall heißt A auch abzählbar unendlich. Falls A nicht abzählbar ist, so heißt A überabzählbar.

06/55:00 (20.11.20)

2.32 Satz. *a) Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.*

b) Seien A_n, $n \in \mathbb{N}$ abzählbare Mengen. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

c) Sei M eine abzählbare Menge, und für jedes $m \in M$ sei A_m eine abzählbare Menge. Dann ist auch $\bigcup_{m\in M} A_m$ abzählbar.

d) Sei A abzählbar. Dann ist auch das kartesische Produkt $A \times A$ abzählbar.

Beweis. a) Sei A abzählbar und $B \subset A$. Da die Aussage offensichtlich ist, falls A oder B endlich sind, dürfen wir $|A| = |\mathbb{N}|$ annehmen, d.h. es existiert eine Bijektion $a\colon N \to A$, $n \mapsto a_n$. Somit gilt $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wir definieren iterativ n_k, $k \in \mathbb{N}$, durch

(i) n_1 ist die kleinste Zahl mit $a_{n_1} \in B$.

(ii) Seien $n_1, \dots, n_{k-1}$ bereits gewählt. Dann definiert man n_k als die kleinste Zahl größer als n_{k-1} mit $a_{n_k} \in B$.

Dann ist $b\colon \mathbb{N} \to B$, $k \mapsto a_{n_k}$ eine Bijektion.

b) O.E. seien alle A_n unendlich, d.h. $A_n = \{a_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$. Man verwendet das Schema aus Abbildung 2.2 und nummeriert die Elemente in der durch die Pfeile gegebenen Reihenfolge. Dabei werden doppelt auftretende Elemente gestrichen. Man erhält eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, d.h. die Vereinigung ist abzählbar. (Falls manche A_n endlich sind, kann man dasselbe Schema verwenden, wobei dann die entsprechenden Stellen frei bleiben.)

c) folgt analog zu b).

d) Schreibe $A \times A = \bigcup_{a_1\in A} \bigcup_{a_2\in A} \{(a_1, a_2)\}$. Da für festes $a_1 \in A$ die Menge $\bigcup_{a_2\in A} \{(a_1, a_2)\}$ bijektiv zu A und damit abzählbar ist, kann b) angewendet werden, was die Abzählbarkeit von $A \times A$ zeigt. □

© Robert Denk 15.02.2021

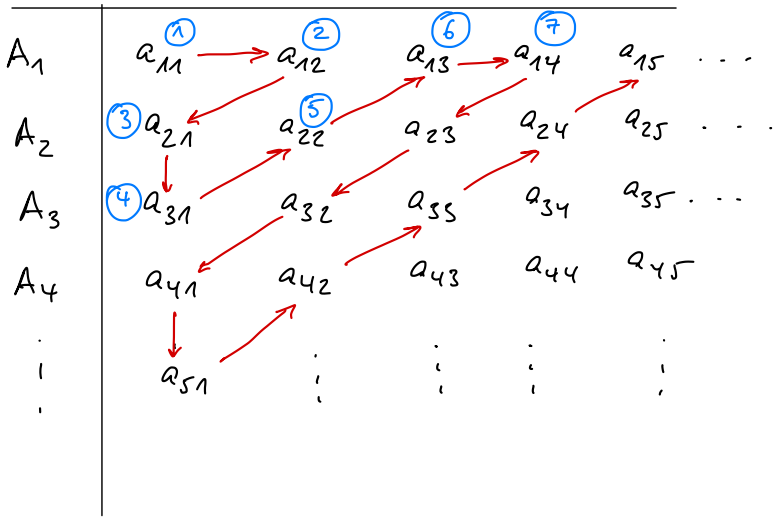


Abbildung 2.2: Schema für die Abzählbarkeit im Beweis von Satz 2.32 b)

06/1:28:00 (20.11.20)

2.33 Satz. *a) Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*
b) Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

07/01:00 (24.11.20)

Beweis. a) Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist eine Bijektion. Für rationale Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ haben wir die Darstellung $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ folgt daher aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, die nach Satz 2.32 d) und a) gilt.

b) Wir verwenden das Cantorsche[7] Diagonalverfahren : Angenommen, die Menge $[0,1)$ sei abzählbar, d.h. es gilt $[0,1) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wir schreiben jedes x_n in Dezimaldarstellung:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,\ a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, \ldots \\ x_2 &= 0,\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, \ldots \\ x_3 &= 0,\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, \ldots \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

[7] Georg Cantor, 3.3.1845 – 6.1.1918

© Robert Denk 15.02.2021

mit den Ziffern $a_{nm} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Wir definieren nun eine Zahl $y \in [0, 1)$ durch $y = 0,\, y_1\, y_2\, y_3\, \ldots$, wobei

$$y_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{kk} \neq 1, \\ 0, & \text{falls } a_{kk} = 1. \end{cases}$$

Dann sind nach Konstruktion die Zahlen y und x_k an der Stelle k verschieden, d.h. es gilt $y \neq x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $y \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = [0, 1)$, Widerspruch. Also ist $[0, 1)$ überabzählbar, und wegen Satz 2.32 a) ist auch $\mathbb{R}$ überabzählbar. □

07/17:00 (24.11.20)

2.34 Bemerkung. a) Wir haben $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| \neq |\mathbb{R}|$ gezeigt. Man definiert die zugehörigen Kardinalzahlen $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$ („Aleph“, erster Buchstabe im hebräischen Alphabet) und $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}|$ (Mächtigkeit des Kontinuums). Ähnlich wie im Beweis von Satz 2.33 b) kann man zeigen, dass

$$|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$$

gilt (dabei ist $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$). In der Arithmetik der Kardinalzahlen gilt also $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Die sogenannte Kontinuumshypothese besagt, dass es keine Menge mit einer Kardinalzahl „zwischen“ $\aleph_0$ und $\mathfrak{c}$ gibt, d.h. es gibt keine Menge M mit $\mathbb{N} \subset M \subset \mathbb{R}$ und $|M| \neq |\mathbb{N}|$ sowie $|M| \neq |\mathbb{R}|$. Nach Ergebnissen von Gödel[8] und Cohen[9] ist diese Hypothese aus den Axiomen der Mengenlehre weder zu beweisen noch zu widerlegen. Wer die Kontinuumshypothese verwenden will, muss sie als zusätzliches Axiom als wahr annehmen.

b) In der Mengenlehre wird gezeigt, dass auch für jede unendliche Menge M die Potenzmenge eine höhere Kardinalität besitzt, d.h. es gilt $|M| < |\mathscr{P}(M)|$. Insbesondere gibt es unendlich viele verschiedene unendliche Kardinalzahlen.

[8] Kurt Gödel, 28.4.1906 – 14.1.1978
[9] Paul Joseph Cohen, 2.4.1934 – 23.3.2007

© Robert Denk 15.02.2021

3. Folgen und Grenzwerte, Reihen

07/44:00 (24.11.20)

3.1 Worum geht's? Eine wesentliche Zutat der Analysis ist der Begriff der Konvergenz und des Grenzwerts. Wir werden hier Folgen von Zahlen betrachten und die entsprechenden Konvergenzbegriffe definieren und analysieren. Eine wichtige Eigenschaft des betrachteten Zahlkörpers ist hierbei die Vollständigkeit, die für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gegeben ist, nicht aber für $\mathbb{Q}$. Dies ist auch der Grund dafür, dass reelle und komplexe Zahlen die wichtigsten in der Analysis verwendeten Körper sind.

a) Folgen und ihre Grenzwerte

07/49:00 (24.11.20)

3.2 Definition. a) Sei M eine nichtleere Menge. Dann heißt eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to M$, $n \mapsto a(n)$, eine Folge in M. Man schreibt oft $a_n := a(n)$ sowie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ oder $(a_n)_n \subset M$ für Folgen $\mathbb{N} \to M$, $n \mapsto a_n$. (Präziser wäre hier die Schreibweise $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$.) Statt $\mathbb{N}$ werden auch andere Indexmengen wie $\mathbb{N}_0$ (manchmal auch $\mathbb{Z}$) verwendet.

b) Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißt eine Zahlenfolge.

Die wichtigste Frage bei Folgen ist die der Konvergenz. So konvergiert offensichtlich die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Um das korrekt zu formulieren und zu beweisen, benötigen wir die folgenden zentralen Definitionen.

07/56:10 (24.11.20)

3.3 Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Zahlenfolge.

a) Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißt eine Cauchyfolge[10], falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

b) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißt konvergent gegen den Grenzwert (Limes) $a \in \mathbb{K}$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \forall\, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreibt man $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ oder $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ oder $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt eine Nullfolge.

c) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist. Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞, falls

$$\forall\, N > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \forall\, n \geq n_0 : a_n \geq N.$$

d) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißt beschränkt, falls ein $C > 0$ existiert mit $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

[10] Augustin-Louis Cauchy, 21.8.1789 – 23.5.1857

© Robert Denk 15.02.2021

3.4 Beispiele. Beispiele für Cauchyfolgen sind $a_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ sowie $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Beide Folgen sind auch konvergent mit Grenzwert 1 bzw. 0. Die durch $a_n := n$ bzw. $a_n := \sqrt{n}$ definierten Folgen sind beide divergent, und zwar bestimmt divergent gegen ∞. Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist weder Cauchyfolge noch konvergent.

07/1:10:10 (24.11.20)

3.5 Satz. *a) Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.*

b) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

c) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

07/1:16:20 (24.11.20)

Beweis. a) Seien a und a' Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren n_0 und $n_0' \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(n \geq n_0)$ und $|a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(n \geq n_0')$ gelten. Damit folgt für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir nach Satz 2.24 b) $|a - a'| = 0$, d.h. $a = a'$.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Cauchyfolge. Dann existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < 1$ $(n, m \geq n_0)$. Insbesondere folgt $|a_n - a_{n_0}| \leq 1$ $(n \geq n_0)$ und damit $|a_n| \leq |a_{n_0}| + 1$ $(n \geq n_0)$. Setzt man nun $C := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1\}$, so gilt $|a_n| \leq C$ $(n \in \mathbb{N})$.

c) Es gelte $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Sei $\varepsilon > 0$, und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(n \geq n_0)$. Dann gilt für alle $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. □

3.6 Definition. Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt

08/01:00 (27.11.20)

- monoton wachsend, falls $\forall n : a_{n+1} \geq a_n$,
- streng monoton wachsend, falls $\forall n : a_{n+1} > a_n$,
- monoton fallend, falls $\forall n : a_{n+1} \leq a_n$,
- streng monoton fallend, falls $\forall n : a_{n+1} < a_n$.

3.7 Satz. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

08/02:40 (27.11.20)

Beweis. Da $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist, existiert $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach dem Vollständigkeitsaxiom 2.22. Nach Satz 2.24 c) existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, folgt $a - \varepsilon < a_n \leq a$ für alle $n \geq n_0$, insbesondere gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ $(n \geq n_0)$, was $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ zeigt. □

© Robert Denk 15.02.2021

Wir haben oben gesehen, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Die Rückrichtung gilt etwa in $\mathbb{Q}$ nicht: Betrachtet man eine Folge rationaler Zahlen, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, so besitzt diese Folge keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$. Für $\mathbb{R}$ (und damit auch für $\mathbb{C}$) gilt jedoch auch die Rückrichtung:

08/08:45 (27.11.20)

3.8 Satz (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$)**.** *Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge. Nach Satz 3.5 b) ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. es existiert ein $K > 0$ mit $|a_n| \le K$ $(n \in \mathbb{N})$. Wir definieren die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$c_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt $c_n \le c_{n+1} \le K$, d.h. die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt und damit (Satz 3.7) konvergent gegen $c := \lim_{n\to\infty} c_n = \sup\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wir erhalten:

(i) $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m \ge n_0 : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}$, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist,

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_1 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \ge n_1 : |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}$, da $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert,

(iii) $\forall\, \varepsilon > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, k(n) \ge n : |c_n - a_{k(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}$ nach Satz 2.24 c).

Somit folgt für alle $n \ge n_2 := \max\{n_0, n_1\}$

$$\begin{aligned} |a_n - c| &= |a_n - a_{k(n)} + a_{k(n)} - c_n + c_n - c| \\ &\le |a_n - a_{k(n)}| + |a_{k(n)} - c_n| + |c_n - c| \\ &\le \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

08/22:35 (27.11.20)

3.9 Korollar (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$)**.** *Jede Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist konvergent.*

Beweis. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|\operatorname{Re} z| \le |z|$, $|\operatorname{Im} z| \le |z|$. Falls $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Cauchyfolge ist, sind daher auch $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchyfolgen und nach Satz 3.8 konvergent. Wegen $|z| = \sqrt{|\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2} \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ ist auch $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. □

08/31:20 (27.11.20)

3.10 Beispiel. Sei $p > 0$ und $a_n := p^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Falls $p < 1$, setze $r := \frac{1}{p} - 1$. Dann ist $r > 0$ und $p = \frac{1}{1+r}$. Mit der Bernoullischen Ungleichung, Lemma 2.12, erhält man $0 \le a_n = \frac{1}{(1+r)^n} \le \frac{1}{1+rn}$ für $n \in \mathbb{N}$ und damit $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

b) Falls $p = 1$, ist die Folge konstant, und $a_n \to 1$ $(n \to \infty)$.

c) Falls $p > 1$, schreiben wir $p = 1 + r$ mit $r > 0$, und es folgt $p^n = (1 + r)^n \ge 1 + rn \to \infty$ $(n \to \infty)$.

© Robert Denk 15.02.2021

Der folgende Satz lässt sich leicht anhand der Definition der Konvergenz zeigen.

3.11 Satz (Grenzwertsätze). *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ zwei Zahlenfolgen mit $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ und $b_n \to b$ $(n \to \infty)$. Dann gilt:*

08/39:10 (27.11.20)

a) $a_n + b_n \to a + b$ $(n \to \infty)$.

b) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ $(n \to \infty)$.

c) Falls $b \neq 0$ und

$$c_n := \begin{cases} \frac{a_n}{b_n}, & \text{falls } b_n \neq 0, \\ 0, & \text{falls } b_n = 0, \end{cases}$$

dann gilt $c_n \to \frac{a}{b}$ $(n \to \infty)$.

d) $|a_n| \to |a|$ $(n \to \infty)$.

3.12 Lemma. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Zahlenfolge, und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, d.h. es gilt $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < \ldots$. Dann gilt:*

08/46:20 (27.11.20)

a) Falls $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, so gilt auch $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$.

b) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$, so gilt auch $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

Beweis. a) folgt direkt aus der Definition der Konvergenz einer Folge.

b) folgt aus a) und der Eindeutigkeit des Grenzwerts (Satz 3.5 a)), angewendet auf die Teilfolge. □

3.13 Satz. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergente reelle Zahlenfolgen mit $a_n \leq b_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.*

08/54:20 (27.11.20)

Insbesondere gilt: Seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1 \leq a_n \leq c_2$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt auch $c_1 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq c_2$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $a := \lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n =: b$ gilt. Zu $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$ existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ $(n \geq n_1)$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ $(n \geq n_2)$. Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann $b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

3.14 Bemerkung. a) Die Grenzwertsätze besagen unter anderem, dass die Limesbildung linear ist, d.h. falls $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ beide existieren, so gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ auch

08/1:03:00 (27.11.20)

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b.$$

© Robert Denk 15.02.2021

Nach Satz 3.13 bleibt auch „≤“ im Grenzwert erhalten. Man beachte aber, dass dies nicht für „<“ gilt! Denn für $a_n := \frac{1}{n}$ gilt zwar $a_n > 0$, aber nicht $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$. Aus der Voraussetzung $a_n > b_n$ erhält man im Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$.

b) Nach Definition der Konvergenz ändert sich das Konvergenzverhalten einer Folge wie auch der Grenzwert nicht, wenn die Folge an endlich vielen Stellen geändert wird. In diesem Zusammenhang wird manchmal folgende Sprechweise verwendet: Eine Aussage $A(n)$ gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, wenn $\{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ gilt nicht}\}$ endlich ist. Sie gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, wenn $\{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ gilt}\}$ unendlich ist. In dieser Sprechweise erhält man: Falls zwei Folgen für fast alle $n \in \mathbb{N}$ übereinstimmen, besitzen sie dasselbe Konvergenzverhalten und (falls existent) denselben Grenzwert.

b) Reihen

Wie bisher sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

08/1:14:00 (27.11.20)

3.15 Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Zahlenfolge.

a) Dann heißt das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die unendliche Reihe mit Gliedern a_n. Für $N \in \mathbb{N}$ heißt $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$ die N-te Partialsumme der Reihe.

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt konvergent, falls die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ der Partialsummen konvergent ist. In diesem Fall setzt man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} s_N$. Ansonsten heißt die unendliche Reihe divergent.

08/1:17:50 (27.11.20)

3.16 Bemerkung. a) Das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty}$ hat eine doppelte Bedeutung: Einerseits steht es abstrakt für die Folge der Partialsummen, unabhängig davon, ob diese konvergiert, andererseits für den Grenzwert dieser Folge im Falle der Konvergenz. Sowohl „Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht“ als auch „$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$“ sind zulässige Aussagen.

b) Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{K}$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon (m, n \geq n_0)$. Denn es gilt $\sum_{k=m}^{n} a_k = s_n - s_{m-1}$, und die obige Bedingung ist äquivalent dazu, dass $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ ist dies äquivalent zur Konvergenz.

09/08:40 (01.12.20)

3.17 Lemma. *Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, so divergiert etwa die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.*

Beweis. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann existiert nach Bemerkung 3.16 b) für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \varepsilon$ $(n \geq n_0)$. Somit gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Um die Divergenz der harmonischen Reihe zu zeigen, wählen wir zu $n_0 \in \mathbb{N}$ die

© Robert Denk 15.02.2021

Indizes $m := n_0$ und $n = 2n_0$. Dann gilt

$$|s_n - s_m| = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}.$$

Also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge und daher nicht konvergent. □

3.18 Lemma (Geometrische Reihe). *a) Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

09/18:50 (01.12.20)

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

wobei $q^0 := 1$ gesetzt wird.

b) Sei $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Falls $|q| \geq 1$, so divergiert die geometrische Reihe.

Beweis. a) Wir zeigen die Aussage mit Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ steht auf beiden Seiten in a) der Wert 1. Wir nehmen also an, dass die Aussage für n gilt. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q},$$

und die Aussage gilt auch für $n + 1$.

b) Für $|q| < 1$ gilt nach Beispiel 3.12 $|q|^n \to 0$ $(n \to \infty)$ und damit $q^n \to 0$ $(n \to \infty)$. Mit a) folgt $\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$ $(n \to \infty)$. Falls $|q| \geq 1$, so ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, und die Reihe divergiert nach Lemma 3.17. □

Im Folgenden werden wir Kriterien für die Konvergenz einer Reihe herleiten. Wir beginnen mit einer stärkeren Art der Konvergenz.

3.19 Definition. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

09/32:20 (01.12.20)

3.20 Lemma. *Wenn eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, so ist sie auch konvergent.*

09/33:30 (01.12.20)

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ für $n \geq m$

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_k\Big| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Nach Bemerkung 3.16 b) ist die Reihe konvergent. □

Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist nicht absolut konvergent, aber nach dem folgenden Satz konvergent.

09/44:30 (01.12.20)

3.21 Satz (Leibniz[11]-Kriterium). *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.*

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt für die Partialsummen $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der alternierenden Reihe

$$\begin{aligned} s_{2m+2} &= s_{2m} + (-a_{2m+1} + a_{2m}) \leq s_{2m}, \\ s_{2m+3} &= s_{2m+1} + (a_{2m+2} - a_{2m+3}) \geq s_{2m+1}, \end{aligned}$$

wobei die Monotonie der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verwendet wurde. Wegen $s_{2m} \geq s_1$ und $s_{2m+1} \leq s_2$ $(m \in \mathbb{N})$ sind beide Teilfolgen $(s_{2m})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2m+1})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt, also (nach Satz 3.7) konvergent. Wegen $s_{2m+1} - s_{2m} = -a_{2m+1} \to 0$ $(m \to \infty)$ haben beide Folgen denselben Grenzwert s, d.h. zu $\varepsilon > 0$ existieren $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $|s_{2m} - s| < \varepsilon$ $(m \geq m_1)$ und $|s_{2m+1} - s| < \varepsilon$ $(m \geq m_2)$. Für alle $n \geq 2\max\{m_1, m_2\}$ folgt damit $|s_n - s| < \varepsilon$, was die Konvergenz der Reihe zeigt. □

09/1:01:00 (01.12.20)

3.22 Bemerkung. a) Im Beweis sieht man: Es gilt $|s_n - s| \leq a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, d.h. man hat für den Grenzwert die Abschätzung $s_n - a_{n+1} \leq s \leq s_n + a_{n+1}$.

b) Wie oben erwähnt, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, sie ist aber nicht absolut konvergent. Eine spannende Frage, die wir später noch beantworten werden, ist die nach dem Wert dieser Reihe.

Obwohl das Leibniz-Kriterium bei den Studierenden traditionellerweise sehr beliebt ist, sind die folgenden Kriterien wichtiger, um die Konvergenz einer Reihe zu untersuchen. Dabei erinnern wir an die Sprechweise „für fast alle“ (Bemerkung 3.22 b)): Eine Aussage gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, wenn sie für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

09/1:05:40 (01.12.20)

3.23 Satz (Majorantenkriterium). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Falls $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.*

In diesem Fall heißt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine (konvergente) Majorante zu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

[11] Gottfried Wilhelm Leibniz, 21.6.1646 – 14.11.1716

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. Für hinreichend große $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt die Abschätzung $|a_n| \leq b_n$ sowie, da $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert,

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} b_k \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Nach Bemerkung 3.16 b) ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. □

Das Majorantenkriterium liefert weitere wichtige Konvergenzkriterien, etwa durch Vergleich mit der geometrischen Reihe.

3.24 Satz (Quotientenkriterium). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Falls ein $q \in (0,1)$ existiert mit* 09/1:12:40 (01.12.20)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_n}{a_{n_0}}\right| = \prod_{k=n_0}^{n-1} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q^{n-n_0}$$

für alle $n \geq n_0$. Also gilt $|a_n| \leq \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} q^n$ $(n \geq n_0)$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} q^n$ ist eine konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

3.25 Satz (Wurzelkriterium). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge. Falls ein $q \in (0,1)$ mit* 09/1:20:15 (01.12.20)

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

existiert, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq q^n$ $(n \geq n_0)$, und die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ist eine konvergente Majorante. □

Man beachte bei beiden Kriterien, dass $q < 1$ vorausgesetzt wird! So ist die Bedingung $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ nicht hinreichend für die Konvergenz, wie das Beispiel der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ zeigt.

Im Allgemeinen darf man bei Reihen (selbst bei konvergenten) die Reihenfolge der Summanden nicht vertauschen. Der folgende Satz zeigt, dass dies bei absolut konvergenten Reihen ohne Änderung des Wertes möglich ist.

© Robert Denk 15.02.2021

10/02:00 (04.12.20)

3.26 Satz (Umordnungssatz). *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe mit Grenzwert s. Dann konvergiert jede Umordnung dieser Reihe ebenfalls gegen s, d.h. für jede Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ gegen s.*

Beweis. Sei $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Wir müssen $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} = s$ zeigen. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit gilt

$$\Big|s - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k\Big| = \Big|\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k\Big| \le \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\{\varphi(1), \dots, \varphi(N)\} \supset \{1, \dots, n_0 - 1\}$ gilt. Dann folgt für $n \ge N$

$$\begin{aligned}\Big|s - \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}\Big| &\le \Big|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k\Big| + \Big|s - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k\Big| \\ &\le \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Wie multipliziert man zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$? Intuitiv ist klar, dass man durch Ausmultiplizieren eine unendliche Summe der Form $\sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_k b_\ell$ erhält. Allerdings ist dies eine Reihe mit doppeltem Summationsindex. Um dies wieder in eine gewöhnliche Reihe zu verwandeln, verwendet man die Tatsache, dass $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ abzählbar ist, d.h. es existiert eine bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $n \mapsto \varphi(n) = (k_n, \ell_n)$ (eine Aufzählung von $\mathbb{N}_0 \times N_0$. Wenn man Umordnen kann, wird man erwarten, dass das Produkt der Reihen gleich $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} b_{\ell_n}$ ist. Dabei sind besonders interessante Abzählungen die in immer größeren Quadraten (quadratisches Schema) und das aus Satz 2.32 bekannte Diagonalschema, siehe Abbildung 3.1.

Der folgende Satz zeigt, dass diese Idee bei absolut konvergenten Reihen tatsächlich zum gewünschten Ergebnis führt.

3.27 Satz. *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen, und sei $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $n \mapsto (k_n, \ell_n)$ eine Bijektion. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} b_{\ell_n}$ absolut, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} b_{\ell_n} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

Beweis. Für $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $|k_n| \le M$ und $|\ell_n| \le M$ für alle $n = 0, \dots, N$. Damit folgt

$$\sum_{n=0}^{N} |a_{k_n} b_{\ell_n}| \le \Big(\sum_{n=0}^{M} |a_n|\Big)\Big(\sum_{n=0}^{M} |b_n|\Big) \le \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\Big) < \infty,$$

© Robert Denk 15.02.2021

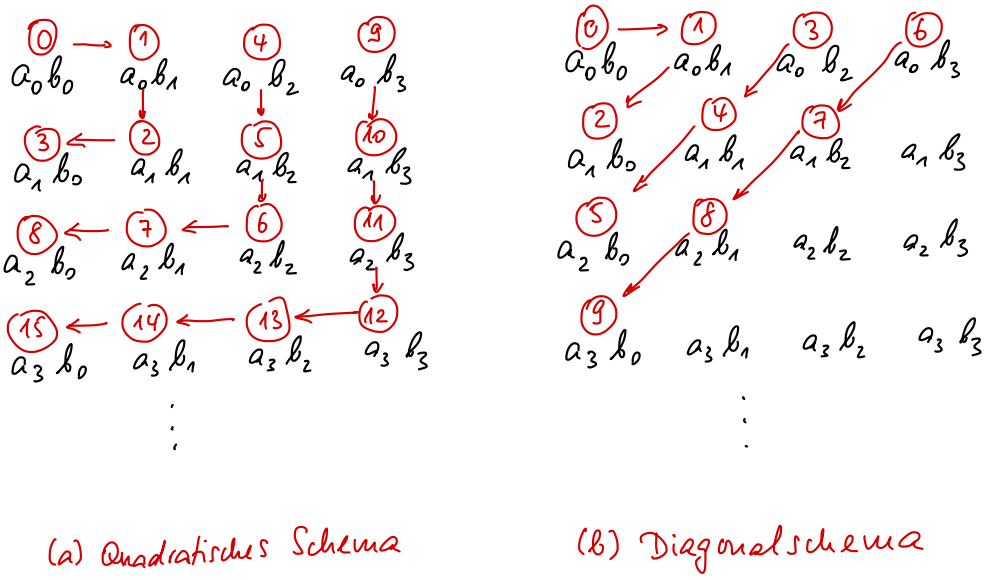


Abbildung 3.1: Abzählungen von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

und die Reihe $\sum_{n=0}^{N} |a_{k_n} b_{\ell_n}|$ konvergiert, da die Partialsummen monoton wachsend und beschränkt sind. Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} b_{\ell_n}$ absolut konvergent.

Seien zwei Bijektionen $\varphi, \widetilde{\varphi}$ wie im Satz gegeben. Dann entsteht die zu $\widetilde{\varphi}$ gehörige Reihe durch Umordnung aus der zu φ gehörigen Reihe, und nach dem Umordnungssatz haben beide Reihen denselben Grenzwert. Somit ist der Wert der Reihe unabhängig von der Wahl von φ.

Wählt man speziell das quadratische Schema (Abbildung 3.1 (a)), so erhält man immer für $n = (N+1)^2 - 1$ ein volles Quadrat, d.h. alle Produkte der Form $a_k b_\ell$ mit $k, \ell = 0, \dots, N$. Für dieses Schema gilt also für die Partialsummen

$$\sum_{n=0}^{(N+1)^2-1} a_{k_n} b_{\ell_n} = (a_0 + \cdots + a_N)(b_0 + \cdots + b_N) \to \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) =: s \quad (N \to \infty).$$

Da die Reihe konvergiert und eine Teilfolge der Partialsummen gegen s konvergiert, konvergiert auch die Reihe für dieses spezielle Schema gegen s (Lemma 3.12 b)). Da die Reihe für jedes Schema gegen denselben Wert konvergiert, erhalten wir die Behauptung. □

3.28 Satz (Cauchy-Produkt von Reihen)**.** *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Definiert man*

10/21:30 (04.12.20)

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

© Robert Denk 15.02.2021

so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut, und es gilt*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Beweis. Wir wenden Satz 3.27 an auf die diagonale Abzählung $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $n \mapsto (k_n, \ell_n)$ aus Abbildung 3.1 (b). Man sieht, dass c_n gerade die Summe der Elemente auf der n-ten Diagonale ist:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0 = a_{k_0} b_{\ell_0} \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 = a_{k_1} b_{\ell_1} + a_{k_2} b_{\ell_2}, \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = a_{k_3} b_{\ell_3} + a_{k_4} b_{\ell_4} + a_{k_5} b_{\ell_5} \\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Damit sind die Partialsummen $\sum_{n=0}^{N} c_n$ des Cauchy-Produkts eine Teilfolge der Partialsummen $\sum_{n=0}^{M} a_{k_n} b_{\ell_n}$. Da Teilfolge einer konvergenten Folge denselben Grenzwert besitzen, konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gegen das Produkt der beiden Reihen. □

Als Anwendung betrachten wir eine der wichtigsten Reihen der Mathematik, die Exponentialreihe. In der folgenden Reihe wird wie üblich $z^0 := 1$ gesetzt.

10/25:50
(04.12.20)

3.29 Definition. Für $z \in \mathbb{C}$ wird die Exponentialreihe definiert durch

$$\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Die Eulersche Zahl ist definiert als $e := \exp(1)$. Die Funktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(z)$ heißt auch Exponentialfunktion.

Man sieht sofort aus dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\exp(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

10/29:20
(04.12.20)

3.30 Satz (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)**.** *Für alle* $w, z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z)$.

Beweis. Wir wenden Satz 3.28 auf die Reihen $\exp(w)$ und $\exp(z)$ an. Dabei sind die Koeffizienten des Cauchy-Produkts gegeben durch

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^k z^{n-k} = \frac{1}{n!}(w+z)^n.$$

Hier wurde die binomische Formel (Satz 2.15) verwendet. Nach Satz 3.28 erhalten wir

$$\exp(w)\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w+z)^n}{n!} = \exp(w+z).$$

□

© Robert Denk 15.02.2021

10/37:10
(04.12.20)

3.31 Korollar. *a) Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(z) \neq 0$ *sowie* $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(x) > 0$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ *ist* $\exp(n) = e^n$.

Beweis. a) Es gilt $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$.

b) Falls $x \geq 0$, so ist jeder Termin in der Reihe $\exp(x)$ nichtnegativ, und es folgt sogar $\exp(x) \geq 1$. Falls $x < 0$, so gilt $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$.

c) Wegen $e^n = \exp(1)^n$ folgt dies iterativ aus der Funktionalgleichung. □

© Robert Denk 15.02.2021

4. Einige nützliche Prinzipien

10/51:40
(04.12.20)

4.1 Worum geht's? Wir haben bereits die Konvergenz einer Zahlenfolge oder einer Reihe kennengelernt. Eine Grundlage dieses Begriffs ist eine abstrakte Version des Abstands zweier Zahlen, was zum Konzept eines metrischen Raums führt. Da wir später Metriken auch noch für allgemeinere Mengen als reelle oder komplexe Zahlen behandeln, werden in diesem Abschnitt einige fundamentale abstrakte Konzepte der Analysis behandelt. Ein wichtiges, aber beim ersten Kennenlernen auch schwer verständliches Prinzip ist die Kompaktheit, welche wir neben anderen Konzepten wie Metrik, Norm, Skalarprodukt hier behandeln. Wir werden auch topologische Grundlagen wie das Innere oder den Rand einer Menge in diesem Abschnitt behandeln.

a) Metrische Räume

Wir können den Abstand zweier Zahlen x und y (z. B. $x, y \in \mathbb{R}$) voneinander mit Hilfe des Absolutbetrags $|x-y|$ messen. Wir wollen hier dieses Konzept des Abstandes auf allgemeinere Mengen übertragen. Dabei muss keine Vektorraumstruktur vorausgesetzt werden, d.h. der Ausdruck $x-y$ muss nicht definiert sein. Wie bisher sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

10/58:00
(04.12.20)

4.2 Definition. Sei X eine Menge. Dann heißt $d : X \times X \to [0, \infty)$ eine Metrik auf X, falls für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt:

(i) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$,

(ii) $d(x_1, x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow x_1 = x_2$,

(iii) $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$ (Dreiecksungleichung).

In diesem Fall heißt (X, d) ein metrischer Raum.

10/1:04:00
(04.12.20)

4.3 Beispiele. a) Definiere für $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$d_2(x,y) := |x-y| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

$$d_1(x,y) := \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

$$d_\infty(x,y) := \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - y_k|.$$

Dann sind d_2, d_1, d_∞ Metriken auf $\mathbb{K}^n$. Die Metrik d_2 heißt auch Standardmetrik oder euklidische Metrik auf $\mathbb{K}^n$.

© Robert Denk 15.02.2021

b) Die Menge $[0,1] \subset \mathbb{R}$ mit $d(x,y) := |x-y|$ $(x,y \in [0,1])$ ist ebenfalls ein metrischer Raum. Allgemein sieht man: Falls (X,d) ein metrischer Raum ist und $X_0 \subset X$, dann ist auch $(X_0, d|_{X_0})$ wieder ein metrischer Raum.

c) Sei X eine beliebige Menge. Dann wird durch definiert durch

$$d\colon X \times X \to [0,\infty), \quad (x,y) \mapsto d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert, die diskrete Metrik.

Wir kennen bereits die zentralen Begriffe von Cauchy-Folgen und Konvergenz. Diese lassen sich auch in allgemeinen metrischen Räumen betrachten:

4.4 Definition. Seien (X,d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $r > 0$. Dann heißt $B(x_0,r) := \{x \in X \,|\, d(x,x_0) < r\}$ die (offene) Kugel (Ball) um x_0 mit Radius r. 10/1:17:30 (04.12.20)

4.5 Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum. 10/1:15:15 (04.12.20)

a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt Cauchy-Folge, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall n,m \geq n_0 : d(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

b) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt konvergent, falls ein $x \in X$ existiert mit

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall n \geq n_0 : d(x_n,x) < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt x der Grenzwert dieser Folge und man schreibt $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ oder $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

c) X heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert, d.h. einen Grenzwert in X besitzt.

d) Sei $X_0 \subset X$. Dann heißt X_0 dicht in X, falls

$$\forall\, x \in X\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x_0 \in X_0 : d(x,x_0) < \varepsilon.$$

Wir wissen bereits, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist, nicht aber $\mathbb{Q}$, und dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt (alles bezüglich der Standardmetrik $d(x,y) = |x-y|$). Bezüglich der diskreten Metrik liegt $\mathbb{Q}$ nicht dicht in $\mathbb{R}$, da etwa $d(\sqrt{2},q) = 1$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt.

In vielen Beispielen war die Metrik gegeben in der Form $d(x,y) = |x-y|$. Dies geht nur, falls X ein Vektorraum ist. Wir geben hier nur kurz die Definition an, da Vektorräume ein zentrales Objekt der Vorlesung Lineare Algebra sind.

4.6 Definition. Sei K ein Körper. Dann heißt eine Menge V ein K-Vektorraum, falls zwei Abbildungen $+\colon V \times V \to V$ (Addition) und $\cdot\colon K \times V \to V$ (Skalarmultiplikation) existieren mit folgenden Eigenschaften: 11/02:00 (08.12.20)

© Robert Denk 15.02.2021

(i) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe.

(ii) Für alle $x,y\in V$ und $\alpha,\beta\in K$ gilt $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$, $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$, $(\alpha\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$, $1\cdot x=x$.

11/06:00 (08.12.20)

4.7 Beispiele. a) $\mathbb{K}^n$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

b) Sei V die Menge aller Funktionen $f\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ (d.h. in der Schreibweise von Definition 1.9 ist $V=[0,1]^{\mathbb{C}}$), und seien die Addition und die Skalarmultiplikation auf V definiert durch

$$\begin{aligned}(f+g)(x)&:=f(x)+g(x) && (x\in[0,1],\ f,g\in V),\\ (\alpha\cdot f)(x)&:=\alpha f(x) && (x\in[0,1],\ \alpha\in\mathbb{C},\ f,g\in V).\end{aligned}$$

Dann ist $(V,+,\cdot)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

c) Man sieht sofort, dass das Beispiel aus b) sich auf die allgemeine Situation übertragen lässt: Seien M eine Menge und K ein Körper, und sei $V=K^M$ die Menge aller Abbildungen $f\colon M\to K$. Definiert man die Addition und Skalarmultiplikation analog zu b), wird V zu einem K-Vektorraum.

Auf Vektorräumen lässt sich das Konzept einer Norm definieren, welches die Länge verallgemeinert:

11/14:50 (08.12.20)

4.8 Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|:V\to[0,\infty)$ heißt Norm auf V, wenn gilt:

(i) $\forall x\in V:\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$,

(ii) $\forall\alpha\in\mathbb{K},x\in V:\|\alpha\cdot x\|=|\alpha|\,\|x\|$,

(iii) $\forall x,y\in V:\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (Dreiecksungleichung).

In diesem Fall heißt $(V,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

11/18:20 (08.12.20)

4.9 Beispiele. a) Beispiele für normierte Räume sind $V=\mathbb{K}$ mit dem Betrag $|\cdot|$ sowie $V=\mathbb{K}^n$ mit der euklidischen Norm $|x|:=|x|_2:=\sqrt{\sum_{k=1}^n|x_k|^2}$.

b) Sei V die Menge aller beschränkten Funktionen $f\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ (dabei heißt eine Funktion f beschränkt, wenn ein $C>0$ existiert mit $|f(x)|\le C$ $(x\in[0,1])$. Dann wird V mit $\|f\|_\infty:=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ zu einem normierten Raum. Diese und verwandte Normen werden wir später noch genauer analysieren.

11/30:50 (08.12.20)

4.10 Bemerkung. Jeder normierte Raum wird mit $d:X\times X\to[0,\infty)$, $(x,y)\mapsto d(x,y):=\|x-y\|$ zu einem metrischen Raum. In diesem Sinne sind Begriffe wie Cauchy-Folge, Vollständigkeit usw. für normierte Räume zu verstehen.

© Robert Denk 15.02.2021

4.11 Definition. Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum. 11/32:10 (08.12.20)

Eine typische Klasse von normierten Räumen sind Räume mit Skalarprodukt, wie es etwa auch auf dem $\mathbb{K}^n$ definiert werden kann. Wir geben hier nur die Definition an:

4.12 Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt, falls gilt: 11/34:00 (08.12.20)

(i) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\, \forall\, x_1, x_2, y \in V : \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1\langle x_1, y\rangle + \alpha_2\langle x_2, y\rangle$,

(ii) $\forall x, y \in V : \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$,

(iii) $\forall x \in V : \langle x, x\rangle \geq 0$ sowie $(\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

In diesem Fall heißt $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt oder ein Prähilbertraum.

4.13 Bemerkung. a) Durch 11/40:30 (08.12.20)

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} \quad (x, y \in \mathbb{K}^n)$$

wird ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ definiert.

b) Man kann zeigen, dass durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ eine Norm auf V definiert wird, die zu dem Skalarprodukt zugehörige (oder durch das Skalarprodukt induzierte) Norm.

4.14 Definition. Ein vollständiger Raum mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum. 11/45:30 (08.12.20)

b) Topologische Grundbegriffe

Im Folgenden sei (X, d) ein metrischen Raum. Wie bisher bezeichne $B(x, \varepsilon)$ die offene Kugel um x mit Radius ε (Definition 4.4).

4.15 Definition. Sei $M \subset X$. 11/55:10 (08.12.20)

a) Dann wird das Innere $\mathring{M}$ von M definiert durch

$$\mathring{M} := \{x \in M : \exists\, \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset M\}.$$

Ein Punkt $x \in \mathring{M}$ heißt ein innerer Punkt von M.

b) Die Menge M heißt offen, falls jeder Punkt $x \in M$ ein innerer Punkt von M ist. M heißt abgeschlossen, falls $X \setminus M$ offen ist.

c) Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt ein Häufungspunkt von M, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x \in M \setminus \{x_0\} : d(x, x_0) < \varepsilon.$$

© Robert Denk 15.02.2021

Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt ein isolierter Punkt von M, falls $x_0 \in M$ gilt und x_0 kein Häufungspunkt von M ist.

d) Der Abschluss $\overline{M}$ von M ist definiert als die Vereinigung von M und der Menge aller Häufungspunkte von M, d.h. $\overline{M} := M \cup \{x_0 \in X : x_0 \text{ ist Häufungspunkt von } M\}$.

11/1:09:10 (08.12.20)

4.16 Beispiele. a) $\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}$ offen und abgeschlossen, während $(0,1]$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen ist. Diese Beispiele zeigen auch, dass abgeschlossen nicht dasselbe ist wie „nicht offen“.

b) Sei $M := [0,1) \subset \mathbb{R}$. Dann ist 1 ein Häufungspunkt von M, und die Menge aller Häufungspunkte ist $[0,1]$. Insbesondere ist $[0,1] = \overline{[0,1)}$.

c) Sei $M := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Dann ist 0 der einzige Häufungspunkt von M (d.h. alle Punkte von M sind isoliert), und es gilt $\overline{M} = M \cup \{0\}$.

11/1:14:10 (08.12.20)

4.17 Bemerkung. Wie die obigen Beispiele zeigen, muss ein Häufungspunkt von M nicht in M liegen (kann aber). Ein Punkt $x_0 \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von M, falls eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \setminus \{x_0\}$ existiert mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Damit folgt

$$\overline{M} = \{x_0 \in X : \text{es existiert eine Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \text{ mit } x_n \to x_0 \ (n \to \infty)\}.$$

Mit dieser Beschreibung und der Definition eines Häufungspunktes erhält man auch $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

12/06:30 (11.12.20)

4.18 Lemma. *Sei $M \subset X$. Dann sind äquivalent:*

(i) *M ist abgeschlossen.*

(ii) *Es gilt $\overline{M} = M$.*

(iii) *Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_n \to x_0 \in X$ $(n \to \infty)$ gilt $x_0 \in M$.*

Für jede Teilmenge $M \subset X$ gilt: $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält.

Beweis. (i)⇒(ii). Angenommen, es existiert ein $x_0 \in \overline{M} \setminus M$. Dann ist x_0 ein Häufungspunkt von M, und nach Definition 4.15 c) gilt $B(x_0,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ für jedes $\varepsilon > 0$. Damit ist x_0 kein innerer Punkt von $X \setminus M$, d.h. $X \setminus M$ ist nicht offen im Widerspruch zu (i).

(ii)⇒(i). Falls M nicht abgeschlossen ist, so ist $X \setminus M$ nicht offen, und daher existiert ein $x_0 \in X \setminus M$ so, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $B(x_0,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset$. Damit ist x_0 ein Häufungspunkt von M und damit $x_0 \in \overline{M} \setminus M$ im Widerspruch zu (ii).

(ii)⇔(iii) folgt direkt aus Bemerkung 4.17.

Sei nun $M \subset X$ beliebig. Wendet man die Äquivalenz von (i) und (ii) auf $\overline{M}$ an, so sieht man, dass $\overline{M}$ abgeschlossen ist. Nach Definition gilt $M \subset \overline{M}$. Angenommen,

© Robert Denk 15.02.2021

es existiert eine weitere abgeschlossene Menge A mit $M \subset A \subsetneq \overline{M}$. Dann existiert ein $x_0 \in \overline{M} \setminus A$. Da x_0 ein Häufungspunkt ist, existiert nach Bemerkung 4.17 eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \subset A$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Wir wenden die Äquivalenz von (i) und (iii) auf A an und erhalten den Widerspruch $x_0 \in A$. □

4.19 Definition. a) Sei $M \subset X$. Dann wird der Rand ∂M von M definiert als

12/09:20 (11.12.20)

$$\partial M := \{x_0 \in X : \forall\, \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset \text{ und } B(x_0, \varepsilon) \cap M^c \neq \emptyset\}.$$

b) Eine Menge $M \subset X$ heißt beschränkt, falls ein $x_0 \in X$ und ein $R > 0$ existieren mit $M \subset B(x_0, R)$.

c) Sei $x_0 \in X$. Dann heißt eine Menge $U \subset X$ eine Umgebung von x, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(x_0, \varepsilon) \subset U$.

4.20 Beispiel. Sei $M = (0, 1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$. Dann ist M beschränkt, da etwa $M \subset B(0, 3)$, es gilt $\partial M = \{0, 1, 2\}$ sowie $\overline{M} = [0, 1] \cup \{2\}$. Der Punkt 2 ist der einzige isolierte Punkt von M. Umgebungen des Punktes $\frac{1}{2}$ sind $B(\frac{1}{2}, r)$ für jedes $r > 0$, aber auch jede Obermenge solcher Kugeln, wie z.B. $[-1, 1]$.

12/16:10 (11.12.20)

Für die Menge der reellen (oder der komplexen) Zahlen gilt der folgende wichtige Satz von Bolzano[12] und Weierstraß[13].

4.21 Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede unendliche beschränkte Menge M reeller Zahlen besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.*

12/21:30 (11.12.20)

Beweis. Seien $\{x_1, x_2, \dots\}$ verschiedene Punkte von M. Wir definieren die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $c_n := \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wie im Beweis von Satz 3.8 gezeigt, gilt $c_n \to c := \sup\{c_1, c_2, \dots\} \in \mathbb{R}$. Dann ist c ein Häufungspunkt von M, denn zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|c - c_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$, und zu c_{n_0} existiert ein x_k, $k \geq n_0$, mit $|c_{n_0} - x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit folgt $|c - x_k| < \varepsilon$, und da $x_k = c$ für höchstens ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist c ein Häufungspunkt von $\{x_1, x_2, \dots\}$. □

Wendet man den obigen Satz für Real- und Imaginärteil an, so sieht man, dass auch jede beschränkte Menge in $\mathbb{C}$ einen Häufungspunkt besitzt. Wir haben bisher Häufungspunkte von Mengen betrachtet. Es gibt diesen Begriff auch für Folgen, wobei nicht einfach der Wertebereich der Folge betrachtet wird.

4.22 Definition. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge reeller Zahlen.

12/39:20 (11.12.20)

a) Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

[12] Bernard Bolzano, 5.10.1781 – 18.12.1848
[13] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 31.10.1815 – 19.2.1897

© Robert Denk 15.02.2021

b) Man definiert (falls existent)

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{k\to\infty} \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$$

(Limes superior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{k\to\infty} \inf\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$$

(Limes inferior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

12/43:40 (11.12.20)

4.23 Beispiele. a) Die Folge $a_n := (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ hat die beiden Häufungspunkte 1 und -1, und es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

b) Die Folge $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$ hat keinen Häufungspunkt, und weder $\limsup_{n\to\infty} a_n$ noch $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existieren.

12/51:55 (11.12.20)

4.24 Bemerkung. a) Falls sie existieren, sind $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ selbst wieder Häufungspunkte. Dabei ist $\limsup_{n\to\infty} a_n$ der größte und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ der kleinste Häufungspunkt der Folge.

b) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist, existieren $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$. Für beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt nur einen Häufungspunkt.

(iii) Es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Dann ist eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ genau dann ein Häufungspunkt, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert mit $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$.

c) Kompakte Mengen

Die Kompaktheit ist ein zentraler Begriff der Topologie. In $\mathbb{R}$ sind kompakte Mengen leicht zu charakterisieren, wir geben dennoch zunächst die allgemeine Definition an. Wie bisher sei (X, d) ein metrischer Raum.

12/1:08:45 (11.12.20)

4.25 Definition. a) Sei Λ eine Menge. Eine Familie $\mathscr{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt eine offene Überdeckung einer Menge $M \subset X$, falls jede Menge U_λ offen ist und $M \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ gilt.

b) Sei $\mathscr{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine offene Überdeckung von $M \subset X$. Man sagt, dass $\mathscr{U}$ eine endliche Teilüberdeckung von M besitzt, falls endlich viele $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ existieren mit $M \subset \bigcup_{k=1}^n U_{\lambda_k}$.

c) Eine Menge $M \subset X$ heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung $\mathscr{U}$ von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

© Robert Denk 15.02.2021

Die oben definierte Eigenschaft heißt auch Heine[14]-Borel[15]-Eigenschaft.

4.26 Beispiele. a) Jede endliche Menge $K \subset X$ ist kompakt. 12/1:19:50 (11.12.20)

b) Die Menge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt, da z.B. die offene Überdeckung $\mathbb{N} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

c) Die offene Überdeckung $(0, 1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{n}, 2)$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung, daher ist das Intervall $(0, 1]$ nicht kompakt.

d) Die offene Überdeckung $[0, 1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{n}, 2)\cup(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ besitzt die endliche Teilüberdeckung $[0, 1] \subset (\frac{1}{5}, 2) \cup (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Allerdings ist damit noch nicht gezeigt, dass $[0, 1]$ kompakt ist, da man zeigen müsste, dass *jede* offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir werden später allerdings sehen, dass $[0, 1]$ tatsächlich kompakt ist.

4.27 Satz. *Sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen.* 13/03:20 (15.12.20)

Man beachte dabei, dass eine Menge $K \subset X$ beschränkt heißt, falls ein $x_0 \in X$ und ein $R > 0$ existieren mit $K \subset B(x_0, R)$ (siehe Definition 4.19 b)).

Beweis. Sei $x_0 \in X$ beliebig. Dann ist $K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_0, n) = X$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(x_0, n_j) = B(x_0, N)$ mit $N := \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Also ist K beschränkt.

Für die Abgeschlossenheit von K zeigen wir, dass $K^c = X \setminus K$ offen ist. Sei $x \in K^c$. Zu $y \in K$ definieren wir $r_y := \frac{1}{4}d(x, y)$. Dann ist $K \subset \bigcup_{y\in K} B(y, r_y)$ eine offene Überdeckung, und wegen der Kompaktheit von K existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(y_j, r_{y_j}). \tag{4-1}$$

Wir setzen $r := \min\{r_1, \dots, r_k\}$. Angenommen, es existiert ein $z \in K \cap B(x, r)$. Wegen (4-1) existiert ein $j \in \{1, \dots, k\}$ mit $z \in B(y_j, r_{y_j})$. Also gilt

$$d(x, y_j) \le d(x, z) + d(z, y_j) < r + r_{y_j} \le 2r_{y_j} = \tfrac{1}{2}d(x, y_j),$$

Widerspruch. Somit gilt $K \cap B(x, r) = \emptyset$ und damit $B(x, r) \subset K^c$.

Wir haben also zu jedem $x \in K^c$ ein $r > 0$ gefunden mit $B(x, r) \subset K^c$. Somit ist K^c offen und damit K abgeschlossen. □

4.28 Satz. *Seien $K \subset X$ kompakt und $A \subset K$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt.* 13/04:30 (15.12.20)

[14] Heinrich Eduard Heine, 16.3.1821 – 21.10.1881
[15] Émile Borel, 7.1.1871 – 3.2.1956

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. Sei $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ eine offene Überdeckung von A. Da $X \setminus A$ offen ist, ist dann

$$K \supset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \cup (X \setminus A)$$

eine offene Überdeckung von K. Wegen der Kompaktheit von K existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$K \supset \bigcup_{j=1}^{k} U_{\lambda_j} \cup (X \setminus A).$$

Damit ist $A \supset \bigcup_{j=1}^{k} U_{\lambda_j}$ eine endliche Teilüberdeckung von A. □

Im Folgenden betrachten wir den metrischen Raum $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(x,y) := |x-y|$ $(x,y \in \mathbb{R})$ und wollen dort kompakte Mengen charakterisieren.

13/13:20 (15.12.20)

4.29 Satz (Intervallschachtelung)**.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Folgen reeller Zahlen mit $a_n \le b_n$, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend sei und $b_n - a_n \to 0$ $(n\to\infty)$ gelte. (D.h. wir haben eine Folge von Intervallen $[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots$, deren Intervalllänge gegen 0 konvergiert.) Dann existiert eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n] = \{r\}$.*

Beweis. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind monoton und wegen $a_n \le b_1$ und $b_n \ge a_1$ $(n\in\mathbb{N})$ beschränkt, also konvergent. Wegen $a_n - b_n \to 0$ $(n\to\infty)$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: r$. Für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Monotonie der Folgen $a_{n_0} \le \lim_{n\to\infty} a_n = r = \lim_{n\to\infty} b_n \le b_{n_0}$, also erhalten wir $r \in \bigcap_{n_0\in\mathbb{N}} [a_{n_0}, b_{n_0}]$.

Sei nun $r' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n]$. Dann gilt $r' \ge a_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und damit $r' \ge \lim_{n\to\infty} a_n = r$ sowie $r' \le b_n$ $(n\in\mathbb{N})$ und damit $r' \ge \lim_{n\to\infty} b_n = r$. Also folgt $r' = r$, d.h. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n] = \{r\}$. □

13/27:00 (15.12.20)

4.30 Satz. *Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$. Dann ist $[a,b]$ kompakt.*

Beweis. Angenommen, $[a,b]$ ist nicht kompakt. Dann existiert eine offene Überdeckung $[a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, welche keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann ist $\{U_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ auch eine offene Überdeckung der beiden Intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ und $[\frac{a+b}{2}, b]$ mit halber Länge. Mindestens eine der beiden offenen Überdeckungen besitzt keine endliche Teilüberdeckung, denn falls beide endliche Teilüberdeckungen besitzen, so wäre die Vereinigung von zwei endlichen Teilüberdeckungen eine endliche Teilüberdeckung von $[a,b]$.

Wir definieren $a_1 := a$ und $b_1 := b$ sowie

$$[a_2,b_2] := \begin{cases} [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}], & \text{falls } [a_1, \frac{a_1+b_2}{2}] \text{ keine endliche Teilüberdeckung besitzt,} \\ [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1], & \text{sonst.} \end{cases}$$

© Robert Denk 15.02.2021

Wir halbieren nun das neue Intervall $[a_2, b_2]$ und betrachten die beiden Teilintervalle $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$ und $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$. Wiederum besitzt mindestens eines der beiden keine endliche Teilüberdeckung. Iterativ erhalten wir eine Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, mit $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ und $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, welche alle keine endliche Teilüberdeckung besitzen.

Nach dem Prinzip der Intervallschachtelung (Satz 4.29) existiert ein $r \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{r\}$. Wegen $r \in [a, b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ existiert ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $r \in U_{\lambda_0}$. Da U_{λ_0} offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$. Wir wählen nun $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$, dies ist möglich wegen $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann gilt $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset U_{\lambda_0}$. Dies ist aber eine endliche Teilüberdeckung (mit nur einer Menge) des Intervalls $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ im Widerspruch zur Konstruktion der Intervallfolge $[a_n, b_n]$. □

4.31 Satz. *Für eine Menge $K \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:*

13/1:00:00
(15.12.20)

(i) *K ist kompakt.*

(ii) *K ist beschränkt und abgeschlossen.*

(iii) *Jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ besitzt eine Teilfolge $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, welche gegen ein $a \in K$ konvergiert.*

Beweis. (i)⇒(ii). Dies gilt nach Satz 4.27 in jedem metrischen Raum.

(ii)⇒(i). Sei $K \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen. Dann existiert ein $R > 0$ mit $K \subset [-R, R]$. Also ist K eine abgeschlossene Teilmenge der (nach Satz 4.30) kompakten Menge $[-R, R]$ und damit nach Satz 4.28 kompakt.

(ii)⇒(iii). Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Folge, und sei $M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Falls M endlich ist, so existieren unendlich viele Folgenglieder, welche denselben Wert haben, und die entsprechende (konstante) Teilfolge ist konvergent. Falls M unendlich ist, so besitzt M nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt, und nach Bemerkung 4.17 existiert eine Teilfolge $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, welche konvergiert. Da K abgeschlossen ist, gilt $a := \lim_{j\to\infty} a_{k_j} \in K$.

(iii)⇒(ii). Falls (iii) gilt, so ist K beschränkt, denn sonst existiert eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $|a_k| \geq k$, und keine Teilfolge davon konvergiert. Um die Abgeschlossenheit von K zu zeigen, sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Folge mit $a_k \to a \in \mathbb{R}$ $(k \to \infty)$. Nach (iii) existiert eine Teilfolge $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $a_{k_j} \to a' \in K$. Nach Lemma 3.12 b) folgt $a = a'$ und damit $a \in K$, also ist K abgeschlossen. □

4.32 Bemerkung. Die obigen Beweise lassen sich (mit etwas Aufwand bei der Notation) auch auf den mehrdimensionalen Fall $\mathbb{R}^n$ übertragen. Insgesamt gilt in $\mathbb{R}^n$ und damit auch in $\mathbb{C}$: Eine Menge ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Man sollte aber beachten, dass in allgemeinen metrischen

13/1:23:00
(15.12.20)

© Robert Denk 15.02.2021

Räumen nur eine Richtung dieser Äquivalenz gilt (aus kompakt folgt beschränkt und abgeschlossen, aber im Allgemeinen nicht umgekehrt).

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Begriff, der die metrischen Räume noch verallgemeinert. Wie man bei der Definition der Kompaktheit sieht, ist das Konzept der offenen Menge zentral. In metrischen Räumen heißt eine Menge U offen, falls für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(x,\varepsilon) \subset U$ (siehe Definition 4.15. In der Definition von $B(x,\varepsilon)$ wird dabei die Metrik verwendet. Man kann nun aber auch die offenen Mengen als grundlegenden Begriff verwenden und das System aller offenen Mengen betrachten (dies ist eine Menge von Mengen, also eine Teilmenge der Potenzmenge). Dies führt zum Begriff der Topologie.

13/1:27:30
(15.12.20)

4.33 Definition. Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt eine Topologie auf X, falls gilt:

(i) Es gilt $\emptyset \in \mathscr{T}$ und $X \in \mathscr{T}$.

(ii) Falls $U, V \in \mathscr{T}$, so gilt $U \cap V \in \mathscr{T}$.

(iii) Sei Λ eine Menge, und seien $U_\lambda \in \mathscr{T}$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathscr{T}$.

In diesem Fall heißt $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $U \subset X$ heißt offen, falls $U \in \mathscr{T}$ gilt.

© Robert Denk 15.02.2021

5. Funktionen und Stetigkeit

5.1 Worum geht's? In diesem Kapitel werden stetige Funktionen $f\colon X \to \mathbb{K}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ betrachtet. Die Stetigkeit ist einer der wichtigsten Begriffe der Analysis und wird später immer wieder in allgemeineren Situationen auftauchen. Neben zentralen Sätzen wie dem Zwischenwertsatz behandeln wir auch Folgen von Funktionen und zugehörige Konvergenzbegriffe.

14/00:30 (18.12.20)

a) Stetige Funktionen

Wir beginnen mit der zentralen Definition, welche wir für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{K}$, aber auch in allgemeinem Setting formulieren. Wie bisher sei im Folgenden stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

5.2 Definition. a) Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $f\colon X \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Dann heißt f stetig in $x_0 \in X$ (oder an der Stelle x_0), falls

14/06:00 (18.12.20)

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in X,\ |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

b) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f stetig in $x_0 \in X$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in X,\ d_X(x, x_0) < \delta : d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

c) In der Situation von a) oder b) heißt f stetig, falls f stetig in allen $x_0 \in X$ ist. Die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon X \to Y$ wird mit $C(X, Y)$ bezeichnet. Statt $C(X, \mathbb{K})$ schreibt man auch nur $C(X)$.

5.3 Beispiele. a) Jede konstante Funktion $f\colon X \to \mathbb{K}$, $x \mapsto c$ mit $c \in \mathbb{K}$ ist stetig. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, ist stetig (wähle in der Definition der Stetigkeit $\delta := \varepsilon$).

14/13:40 (18.12.20)

b) Sei $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Dann ist f stetig: Seien $x_0 \in (-1, 1)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt mit $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in (-1, 1)$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0| \le |x - x_0|\big(|x| + |x_0|\big) < 2|x - x_0| \\ < 2\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Man beachte, dass hier δ unabhängig von x_0 gewählt werden kann. Betrachtet man nun die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, so zeigt dieselbe Rechnung

$$|f(x) - f(x_0)| \le |x - x_0|\,(|x| + |x_0|) < \varepsilon,$$

© Robert Denk 15.02.2021

falls $|x - x_0| < \delta$ für $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\}$ (denn dann gilt $|x| + |x_0| < 2|x_0| + 1 \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$). Anders als vorher, hängt jetzt δ von x_0 ab.

c) Wir betrachten die Heaviside[16]-Funktion

$$H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto H(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Nach Definition ist eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{K}$ unstetig an der Stelle $x_0 \in X$, falls

$$\exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in X,\ |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Wir zeigen, dass dies für $x_0 = 0$ der Fall ist. Dazu wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}$, und zu $\delta > 0$ wähle $x := -\frac{\delta}{2}$. Dann ist $f(x) = 0$ und $f(x_0) = 1$ und damit $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon = \frac{1}{2}$. Man spricht hier von einer Sprungstelle der Funktion H.

d) Sei $X = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ eine beliebige Funktion (d.h. f ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(n) = a_n$). Dann ist f stetig, denn für $\delta := \frac{1}{2}$ folgt aus $x \in X$ und $|x - x_0| < \delta$ bereits $x = x_0$ und damit $|f(x) - f(x_0)| = 0$.

14/39:10 (18.12.20)

5.4 Definition. Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $X \subset \mathbb{R}$ und $f\colon X \to \mathbb{K}$ oder $f\colon X \setminus \{a\} \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Dann definiert man

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \ :\Leftrightarrow\ \big(\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{a\},\ x_n \to a : f(x_n) \to b\big).$$

In diesem Fall heißt b der Limes von f an der Stelle a.

Analog definiert man

$$b = \lim_{x\nearrow a} f(x) \ :\Leftrightarrow\ \big(\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{a\},\ x_n \to a,\ x_n < a : f(x_n) \to b\big)$$
$$b = \lim_{x\searrow a} f(x) \ :\Leftrightarrow\ \big(\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{a\},\ x_n \to a,\ x_n > a : f(x_n) \to b\big)$$

(linksseitiger Limes bzw. rechtsseitiger Limes von f an der Stelle a).

Für die Heaviside-Funktion gilt etwa $\lim_{x\nearrow 0} H(x) = 0$ und $\lim_{x\searrow 0} H(x) = 1 = H(0)$, während $\lim_{x\to 0} H(x)$ nicht existiert.

14/51:10 (18.12.20)

5.5 Satz. *Seien $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $x_0 \in X$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist stetig an der Stelle x_0.*

(ii) *Es gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

(iii) *f ist folgenstetig an der Stelle x_0, d.h. für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)\ (n \to \infty)$.*

[16] Oliver Heaviside, 18.5.1850 – 3.2.1925

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. Falls x_0 kein Häufungspunkt von X ist, so sind alle drei Bedingungen trivialerweise erfüllt. Sei also x_0 ein Häufungspunkt von X. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ergibt sich direkt aus Definition 5.4, zu zeigen ist also die Äquivalenz von (i) und (ii).

(i)⇒(ii). Sei f stetig in x_0, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ eine Folge mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$, und sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig in x_0 ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $x \in X$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Wegen $x_n \to x_0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Somit gilt $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ $(n \geq n_0)$, d.h. $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

(ii)⇒(i). Es gelte $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Angenommen, f ist nicht stetig in x_0. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ ein $x_\delta \in X$ mit $|x_\delta - x_0| < \delta$ und $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Wir wählen $\delta_n := \frac{1}{n}$ und $x_n := x_{\delta_n}$. Dann gilt $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und damit $x_n \to x_0$, aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ und damit $f(x_n) \not\to f(x_0)$, im Widerspruch zu $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. □

Beim nächsten Satz beachte man, dass für Funktionen $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ die Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$ sowie $\frac{f}{g}$ durch $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ $(x \in X)$ etc. definiert sind, analog für die Skalarmultiplikation αf (siehe auch Beispiel 4.7).

14/1:14:10 (18.12.20)

5.6 Satz. *a) Sei $X \subset \mathbb{R}$, und seien $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ beide stetig in $x_0 \in X$. Dann sind auch die Funktionen $f \pm g\colon X \to \mathbb{K}$ und $f \cdot g\colon X \to \mathbb{K}$ stetig in x_0. Falls $g(x_0) \neq 0$ und $X' := \{x \in X : g(x) \neq 0\}$, so ist auch $\frac{f}{g}\colon X' \to \mathbb{K}$ stetig in x_0.*

b) Der Raum $(C(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (und damit ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^X$).

c) Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$ und seien $f\colon X \to \mathbb{R}$ und $g\colon Y \to \mathbb{K}$ Funktionen mit $f(X) \subset Y$. Falls f stetig an der Stelle $x_0 \in X$ und g stetig an der Stelle $f(x_0) \in Y$ sind, so ist auch $g \circ f\colon X \to \mathbb{K}$ stetig an der Stelle x_0.

Beweis. a) Wir verwenden die Folgenstetigkeit. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(f \pm g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n) \pm g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x_0) \pm g(x_0) = (f \pm g)(x_0)$, analog für $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$.

b) Nach a) gilt $f + g \in C(X, \mathbb{K})$. Wendet man a) auf die konstante (und damit stetige) Funktion $g\colon x \mapsto \alpha$ an, so sieht man, dass $\alpha f \in C(X, \mathbb{K})$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt. Somit ist $C(X, \mathbb{K})$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

c) Wieder verwenden wir die Folgenstetigkeit. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Wegen der Stetigkeit von f in x_0 folgt $y_n := f(x_n) \to y_0 := f(x_0)$. Da g stetig in y_0 ist, gilt $g(y_n) \to g(y_0)$ und damit

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \to g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0) \ (n \to \infty).$$

Nach Satz 5.5 ist $g \circ f$ stetig an der Stelle x_0. □

© Robert Denk 15.02.2021

15/02:00 (22.12.20)

5.7 Definition. Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $f\colon X \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Dann heißt f beschränkt, falls der Wertebereich $f(X)$ beschränkt ist, d.h. falls ein $C > 0$ existiert mit $|f(x)| \leq C$ $(x \in X)$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ definiert man $\sup_{x\in X} f(x) := \sup f(X)$, $\max_{x\in X} f(x) := \max f(X)$ und analog $\inf_{x\in X} f(x)$ und $\min_{x\in X} f(x)$ (falls existent).

Man beachte, dass $\max_{x\in X} f(x)$ existiert, falls ein $x_0 \in X$ existiert mit $f(x_0) = \sup_{x\in X} f(x)$. Wir wollen nun stetige Funktionen mit kompakten Definitionsbereichen betrachten. Die erste Aussage formulieren wir allgemein in metrischen Räumen.

15/06:10 (22.12.20)

5.8 Lemma. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann ist f genau dann stetig, wenn für alle offenen $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist.*

Beweis. Übung. □

15/10:00 (22.12.20)

5.9 Satz. *Seien $X \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f\colon X \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Wertebereich $f(X)$ kompakt, und die Funktion f ist beschränkt. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ existieren $\max_{x\in K} f(x)$ und $\min_{x\in X} f(x)$.*

Beweis. Sei $f(X) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ mit $V_\lambda \subset Y$. Nach Lemma 5.8 ist dann $U_\lambda := f^{-1}(V_\lambda) \subset X$ offen, und nach Definition des Urbilds gilt $X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $X \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\lambda_j}$. Es folgt

$$f(X) \subset f\Big(\bigcup_{j=1}^n U_{\lambda_j}\Big) = \bigcup_{j=1}^n f(U_{\lambda_j}) = \bigcup_{j=1}^n V_{\lambda_j},$$

d.h. es existiert eine endliche Teilüberdeckung von $f(X) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$. Also ist $f(X)$ kompakt. Nach Satz 4.27 ist $f(X)$ beschränkt, d.h. f ist beschränkt.

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Da $f(X) \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist, existiert $s := \sup f(X)$. Nach Satz 2.24 c) existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(X)$ mit $y_n \to s$ $(n \to \infty)$. Da $f(X)$ kompakt und daher (Satz 4.27) abgeschlossen ist, gilt $s \in f(X)$ nach Lemma 4.18, d.h. es gilt $s = \sup_{x\in X} f(x) = \max_{x\in X} f(x)$. Analog zeigt man die Existenz von $\min_{x\in X} f(x)$. □

15/26:00 (22.12.20)

5.10 Satz (Zwischenwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Sei $z \in (f(a), f(b))$. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = z$. Die analoge Aussage gilt, falls $f(a) > f(b)$.*

Beweis. Wir können o.E. $z = 0$ annehmen (sonst betrachte die Funktion $x \mapsto f(x) - z$), d.h. es gelte $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Sei $M := \{x \in [a, b] : f(x) < 0\} =$

© Robert Denk 15.02.2021

$f^{-1}((0,\infty))$. Wegen $f(a) < 0$ ist $M \neq \emptyset$, und wegen $M \subset [a,b]$ ist M beschränkt. Somit existiert $x_0 := \sup M$.

Angenommen, $f(x_0) < 0$. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$ mit $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ (man wählt in der Definition der Stetigkeit $\varepsilon := |f(x_0)|/2$). Wegen $f(b) > 0$ gilt $x_0 \neq b$, und daher existiert ein $x \in [a,b]$ mit $x > x_0$ und $f(x) < 0$, im Widerspruch zu $x_0 = \sup M$.

Falls $f(x_0) > 0$, so existiert wie oben ein $\delta > 0$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Damit ist x_0 nicht die kleinste obere Schranke von M, Widerspruch. Insgesamt erhalten wir also $f(x_0) = 0$.

Falls $f(a) > f(b)$ und $z \in (f(b), f(a))$, folgt der Beweis analog oder durch Betrachtung der Funktion $-f$ und dem Zwischenwert $-z$. □

In Beispiel 5.3 a) haben wir gesehen, dass für manche Funktionen beim Nachweis der Stetigkeit δ unabhängig von der Stelle x_0 gewählt werden kann. Das ist die Motivation für die folgende Definition.

5.11 Definition. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{K}$, $X \subset \mathbb{R}$, heißt gleichmäßig stetig in X, falls gilt: 15/46:20 (22.12.20)

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x_0 \in X\, \forall\, x \in X,\ |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Hier darf also δ nicht von x_0 abhängen.

5.12 Satz. *Seien $X \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f\colon X \to \mathbb{K}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig in X.* 15/51:15 (22.12.20)

Beweis. Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, x, y \in X, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Zu $\delta_n := \frac{1}{n}$ existieren also $x_n, y_n \in X$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Da X kompakt ist, existiert nach Satz 4.31 eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to x_0 \in X$ $(k \to \infty)$. Wegen $|x_n - y_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt auch $y_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$. Da f stetig ist, erhalten wir $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$ im Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. □

Wir betrachten zum Abschluss dieses Abschnitts noch monotone Funktionen.

5.13 Definition. Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Dann heißt f monoton wachsend (oder monoton steigend), falls 15/1:01:10 (22.12.20)

$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2).$$

© Robert Denk 15.02.2021

Gilt dies sogar mit „<“ statt „≤“, so heißt f streng monoton wachsend. Analog definiert man [streng] monoton fallend, indem man $f(x_1) \geq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ fordert.

15/1:03:40 (22.12.20)

5.14 Lemma. *Seien $X \subset \mathbb{R}$ und $f\colon X \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dann ist f injektiv, und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(X) \to X$ ist wieder streng monoton wachsend. Die analoge Aussage gilt für fallend.*

Beweis. Sei $f(x_1) = f(x_2)$. Falls $x_1 < x_2$, folgt aus der strengen Monotonie $f(x_1) < f(x_2)$, Widerspruch. Genauso erhält man einen Widerspruch, falls $x_2 < x_1$, denn dann folgt $f(x_2) < f(x_1)$. Also ist f injektiv, und $f^{-1}\colon f(X) \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert.

Seien $y_1, y_2 \in f(X)$ mit $y_1 < y_2$. Dann ist $x_1 := f^{-1}(y_1) < x_2 := f^{-1}(y_2)$, denn falls $x_1 \geq x_2$, so folgt $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, Widerspruch. Also ist f^{-1} streng monoton wachsend. □

15/1:07:00 (22.12.20)

5.15 Lemma. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f([a,b]) \to \mathbb{R}$ (streng monoton wachsend und) stetig.*

Beweis. Sei $g\colon f([a,b]) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f^{-1}(y)$. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f([a,b])$ mit $y_n \to y_0 \in f([a,b])$. Angenommen, es gilt $g(y_n) \not\to g(y_0)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$|g(y_{n_k}) - g(y_0)| \geq \varepsilon \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{5-1}$$

Da $[a,b]$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge von $(g(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$, o.E. sei $(g(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $g(y_{n_k}) \to z \in [a,b]$. Nimmt man in (5-1) den Limes für $k \to \infty$, so erhält man $|z - g(y_0)| \geq \varepsilon$. Aber aus

$$y_0 = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(g(y_{n_k})) = f\Big(\lim_{k\to\infty} g(y_{n_k})\Big) = f(z)$$

folgt im Widerspruch dazu $g(y_0) = z$. □

b) Funktionenfolgen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Funktionenfolgen und untersuchen, inwieweit sich die Eigenschaften der Glieder einer konvergenten Funktionenfolge auf die Grenzfunktion übertragen. Eine Funktionenfolge hat die Form $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion ist. Dabei ist wieder $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wir werden $X \subset \mathbb{R}$ betrachten, die Begriffe lassen sich aber direkt auf allgemeineres X übertragen.

Bei Funktionenfolgen ist es wichtig, verschiedene Konvergenzbegriffe zu unterscheiden. Im Folgenden sei $X \subset \mathbb{R}$.

© Robert Denk 15.02.2021

5.16 Definition. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon X\to\mathbb{K}$. 15/1:23:10 (22.12.20)

a) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt punktweise konvergent (in X) gegen die Funktion $f\colon X\to\mathbb{K}$, falls $f_n(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$ für jedes $x\in X$ gilt, d.h. falls gilt

$$\forall\, x\in X\,\forall\,\varepsilon>0\,\exists\, n_0\in\mathbb{N}\,\forall\, n\geq n_0 : |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

b) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent (in X) gegen die Funktion $f\colon X\to\mathbb{K}$, falls gilt:

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\, n_0\in\mathbb{N}\,\forall\, n\geq n_0\,\forall\, x\in X : |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

5.17 Beispiel. a) Sei $X=[0,1]$ und $f_n\colon X\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^n$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Funktion $f\colon X\to\mathbb{R}$ mit 16/05:00 (08.01.21)

$$f(x):=\begin{cases}0, & \text{falls } x\in[0,1),\\ 1, & \text{falls } x=1.\end{cases}$$

Man beachte hier, dass alle f_n stetig sind, nicht aber die Grenzfunktion f! Wir werden später sehen, dass die Stetigkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz folgt.

b) Sei $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x):=\frac{x^2}{1+nx^2}$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 0$. Denn es gilt $f_n(0)=0$, und für $x\neq 0$ gilt $|f_n(x)|\leq\frac{x^2}{nx^2}=\frac{1}{n}$. Zu $\varepsilon>0$ wähle $n_0\in\mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. Dann gilt für alle $n\geq n_0$ und alle $x\in\mathbb{R}$: $|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)|\leq\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon$.

5.18 Definition. Man definiert $B(X;\mathbb{K}):=\{f\colon X\to\mathbb{K}\,|\,f \text{ beschränkt}\}$. Für $f\in B(X;\mathbb{K})$ definiert man die Supremumsnorm 16/14:50 (08.01.21)

$$\|f\|_\infty:=\sup_{x\in X}|f(x)|.$$

5.19 Bemerkung. a) $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $B(X;\mathbb{K})$, wie man leicht sieht (zu zeigen ist hier im Wesentlichen nur die Dreiecksungleichung). 16/17:15 (08.01.21)

b) Nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz gilt für Funktionen $f_n, f\in B(X;\mathbb{K})$:

$$f_n\to f \text{ gleichmäßig in } X \;\Leftrightarrow\; \|f_n-f\|_\infty\to 0\ (n\to\infty).$$

5.20 Satz. *a) Seien $f_n\colon X\to\mathbb{K}$ stetige Funktionen, und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon X\to\mathbb{K}$. Dann ist f ebenfalls stetig.* 16/21:10 (08.01.21)

b) Falls in a) alle Funktionen f_n gleichmäßig stetig sind, dann ist auch f gleichmäßig stetig.

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. a) Der Beweis ist ein typischer $\frac{\varepsilon}{3}$-Beweis, wie er in der Analysis oft auftritt. Seien $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in X$ gegeben. Da $f_n \to f$ gleichmäßig, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, n \geq n_0\, \forall\, x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Da f_{n_0} stetig ist, existiert ein $\delta = \delta(x_0)$ mit

$$\forall\, x \in X,\, |x - x_0| < \delta : |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Damit folgt für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

b) Der Beweis in a) zeigt, dass aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f_n auch die gleichmäßige Stetigkeit von f folgt, da dann δ unabhängig von x_0 gewählt werden kann. □

16/35:40 (08.01.21)

5.21 Satz. *a) Der Raum $(B(X;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.*

b) Sei $BC(X;\mathbb{K}) := \{f\colon X \to K \mid f$ beschränkt und stetig$\}$. Dann ist $(BC(X;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

c) Sei $BUC(X;\mathbb{K}) := \{f\colon X \to K \mid f$ beschränkt und gleichmäßig stetig$\}$. Dann ist $(BUC(X;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

d) Sei $X \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist $(C(X;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Man beachte, dass ein Banachraum ein vollständiger normierter Raum ist (Definition 4.11), d.h. jede Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ist konvergent, wobei die Konvergenz wieder bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ zu verstehen ist (d.h. gleichmäßige Konvergenz). Die obigen Bezeichnungen kommen aus dem Englischen: *BUC* steht für „bounded uniformly continuous“. Statt $BC(X;\mathbb{K})$ schreibt man auch oft $C_b(X;\mathbb{K})$.

Beweisskizze zu Satz 5.21. a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X;\mathbb{K})$ eine Cauchyfolge. Dann ist für jedes $x \in X$ auch $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Cauchyfolge, und wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Man kann nun zeigen, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert und dass f wieder beschränkt ist.

b) folgt aus a) und Satz 5.20 a), der besagt, dass f stetig ist.

c) folgt analog aus a) und Satz 5.20 b).

d) Falls X kompakt ist, gilt $C(X;\mathbb{K}) = BUC(X;\mathbb{K})$ nach Satz 5.9 und Satz 5.12; damit folgt die Behauptung aus c). □

Mit Hilfe des letzten Satzes lassen sich nun Funktionenreihen betrachten, d.h. Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, wobei $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ eine Funktion ist. Die Definitionen und

© Robert Denk 15.02.2021

Aussagen über Reihen von Zahlen lassen sich direkt auf Funktionenreihen übertragen. So ist der Wert der Reihe definiert als $\sum_{n=1}^{\infty} f_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n$, falls der Limes existiert. Dabei wird die Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm genommen. Hier sei nur ein Beispiel genannt (Majorantenkriterium).

5.22 Lemma. *Seien $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen, und seien $c_n \geq 0$ mit $\|f_n\|_\infty \leq c_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{K}$.*

16/56:45 (08.01.21)

Beweis. Das lässt sich wörtlich wie das Majorantenkriterium für Reihen von Zahlen (Satz 3.23) beweisen, wenn man den Banachraum $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ durch den Banachraum $(BC(X;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ersetzt. □

© Robert Denk 15.02.2021

6. Beispiele von Funktionen

16/1:03:20 (08.01.21)

6.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden wir einige wichtige Funktionen der Analysis kennenlernen. Der Ausgangspunkt ist die bereits bekannte Exponentialfunktion, die als Reihe definiert ist. Daraus lassen sich weitere Funktionen wie Sinus, Cosinus, Logarithmus, Tangens definieren. Dies führt unter anderem zur Eulerschen Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

sowie zu

$$1 + e^{i\pi} = 0,$$

die vielleicht schönste Formel der Mathematik.

a) Die Exponentialfunktion und der Logarithmus

Zur Erinnerung: Die Exponentialfunktion ist definiert durch

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

(siehe Definition 3.29). Es gilt die Funktionalgleichung $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$, Satz 3.30. Wir werden die Exponentialfunktion zunächst im Reellen betrachten (siehe Abbildung 6.1). Man schreibt auch $e^x := \exp(x)$ und $e := \exp(1)$.

16/1:10:20 (08.01.21)

6.2 Lemma. *a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) \geq 1+x$, für alle $x < 1$ gilt $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$.*

b) Für alle $h \in (0,1)$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $(1+h)\exp(x) \leq \exp(x+h) \leq \frac{1}{1-h}\exp(x)$.

c) Die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

d) Die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.

Beweis. Diese Aussagen lassen sich alle recht elementar und einfach zeigen.

a) Für $x \geq 0$ ist $\exp(x) - (1+x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 0$. Für $x \in (-1,0)$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ alternierend mit monoton fallenden Beträgen, es gilt daher

$$\exp(x) - (1+x) = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^3}{3!}}_{<0} + \underbrace{\frac{x^4}{4!}}_{>0} + \ldots > 0.$$

Für $x < -1$ ist $\exp(x) > 0 \geq 1 + x$. Dies zeigt die erste Behauptung. Für $x < 1$ verwendet man $\exp(-x) \geq 1 - x$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ und erhält $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$.

b) Mit a) gilt

$$(1+h)\exp(x) \leq \exp(h)\exp(x) = \exp(x+h) \leq \exp(x)\tfrac{1}{1-h}.$$

© Robert Denk 15.02.2021

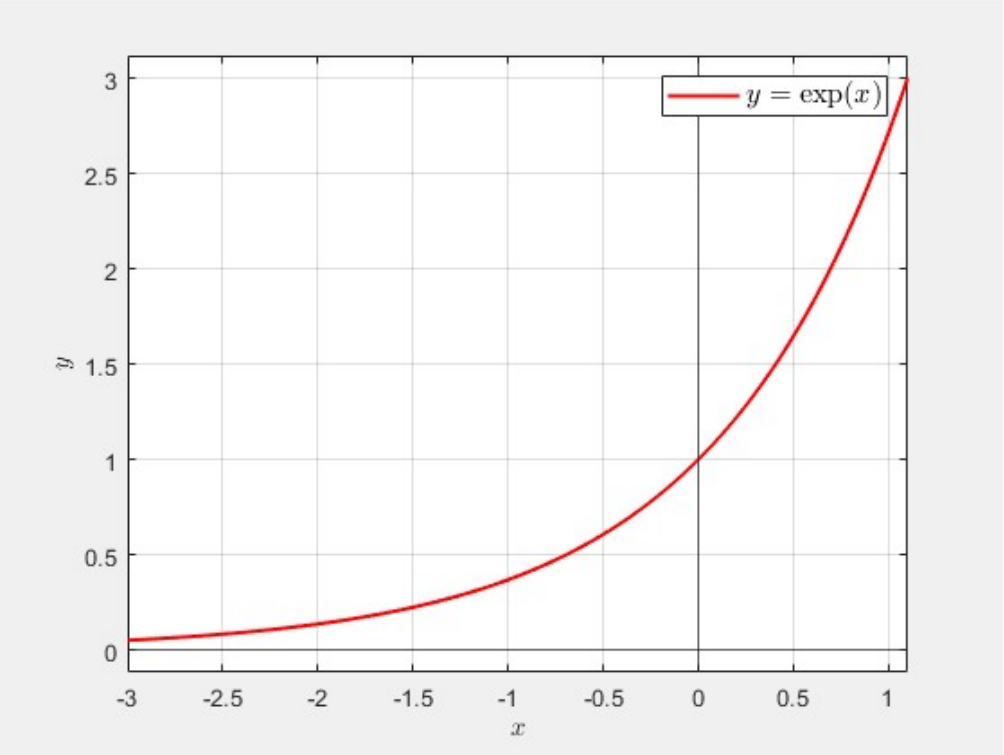


Abbildung 6.1: Die reelle Exponentialfunktion

c) folgt aus b) (Übungsaufgabe).

d) Für $h > 0$ ist $\exp(h) \geq 1 + h > 1$, und damit erhält man $\exp(x+h) - \exp(x) = (\exp(h) - 1)\exp(x) > \exp(x)$, also ist $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton steigend. Nach Lemma 5.14 ist exp injektiv, und wegen $\exp(x) \geq 1 + x \to \infty$ $(x \to \infty)$ und $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \to 0$ $(x \to -\infty)$ ist $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ auch surjektiv und damit bijektiv. □

16/1:27:50 (08.01.21)

6.3 Definition. a) Da $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend, bijektiv und stetig ist, kann man die streng monoton wachsende und stetige Umkehrfunktion $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definieren, die als natürlicher Logarithmus oder Logarithmus zur Basis e bezeichnet wird (siehe Abbildung 6.3).

b) Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert man $a^x := \exp(x \ln a)$. Die Umkehrfunktion $\log_a y\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, y \mapsto \log_a y := \frac{\ln y}{\ln a}$ zu $x \mapsto a^x$ heißt Logarithmus zur Basis a. Für $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$\sqrt[n]{x} := \begin{cases} x^{1/n}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

(n-te Wurzel aus x), d.h. $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ist die Umkehrfunktion zur Abbildung $[0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^n$.

© Robert Denk 15.02.2021

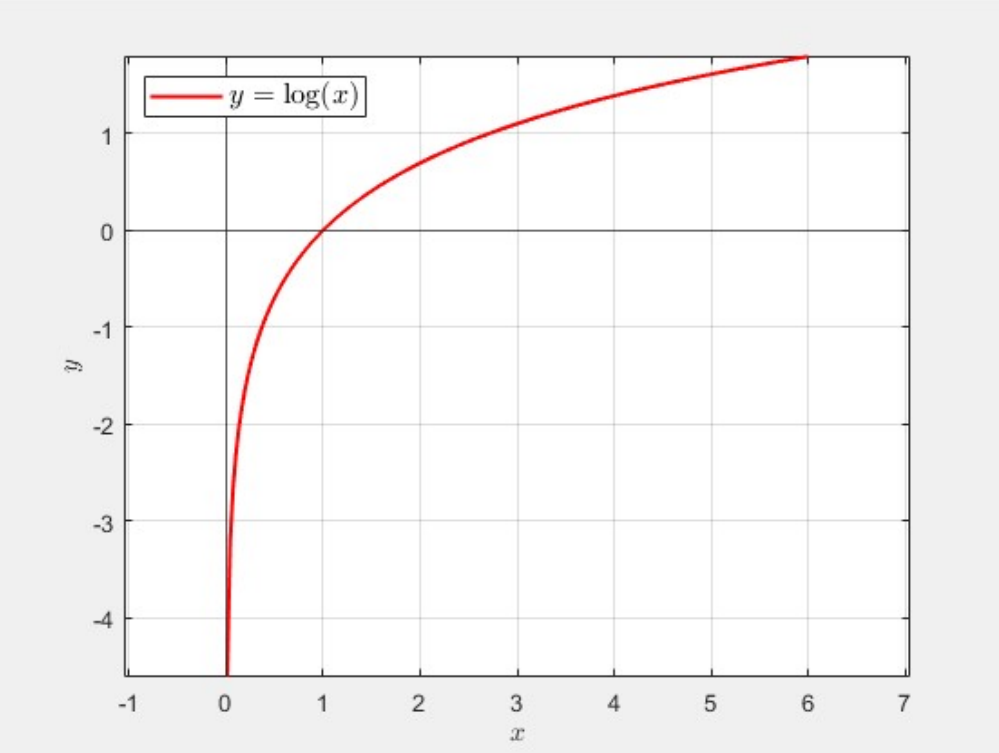


Abbildung 6.2: Der natürliche Logarithmus

In Abbildung 6.3 und 6.4 werden die Funktionen $x \mapsto x^n$ und die zugehörigen Umkehrfunktionen $x \mapsto x^{1/n}$ für verschiedene n gezeigt.

17/04:55 (12.01.21)

6.4 Lemma. *a) Für $x, y > 0$ gilt $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.*

b) Für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.

c) Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$ und $(ab)^x = a^x b^x$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Beweis. Das folgt sofort alles aus den Definitionen und der Funktionalgleichung für die exp-Funktion. □

Im folgenden Lemma berechnen wir einige Grenzwerte für exp und ln. Man sieht, dass für $x \to \infty$ die Exponentialfunktion schneller gegen ∞ geht als jede Potenzfunktion, während der Logarithmus langsamer gegen ∞ geht als jede (auch nichtganzzahlige) Potenzfunktion.

17/08:40 (12.01.21)

6.5 Lemma. *a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{e^x}{x^k} \to \infty$ $(x \to \infty)$.*

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0$.

© Robert Denk 15.02.2021

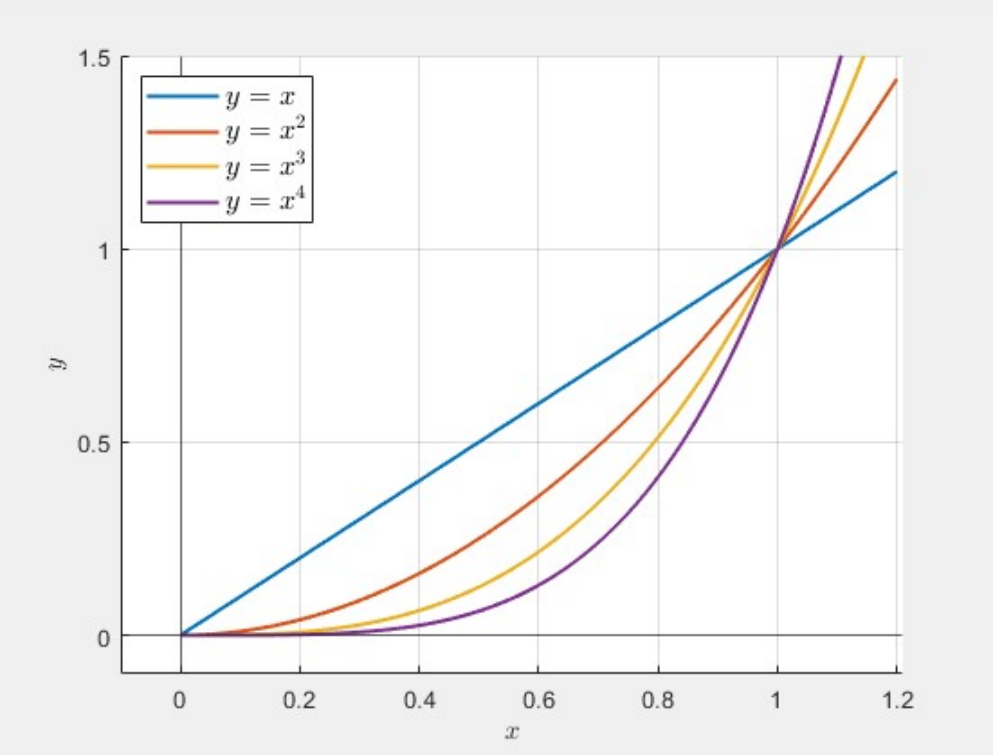


Abbildung 6.3: Die Funktionen $x \mapsto x^n$

c) Es gilt $\ln x \to \infty$ $(x \to \infty)$ *und* $\ln x \to -\infty$ $(x \searrow 0)$.

d) Für alle $\alpha > 0$ *gilt* $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

e) Es gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to \infty)$.

Beweis. a) Es gilt $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ für $x \geq 0$ und damit $\frac{e^x}{x^k} \geq \frac{x}{k+1} \to \infty$ $(x \to \infty)$.

b) folgt aus a) mit $x^k e^{-x} = (\frac{e^x}{x^k})^{-1} \to 0$ $(x \to \infty)$.

c) gilt, da $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bijektiv und streng monoton wachsend ist.

d) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Setze $y_n := \alpha \ln x_n$. Dann gilt $y_n \to \infty$, und mit b) folgt

$$\frac{\ln x_n}{x_n^\alpha} = \frac{y_n}{\alpha e^{y_n}} = \frac{y_n}{\alpha} e^{-y_n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

e) Da exp stetig ist, folgt $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = \exp(\frac{\ln n}{n}) \to \exp(0) = 1$ $(n \to \infty)$. □

© Robert Denk 15.02.2021

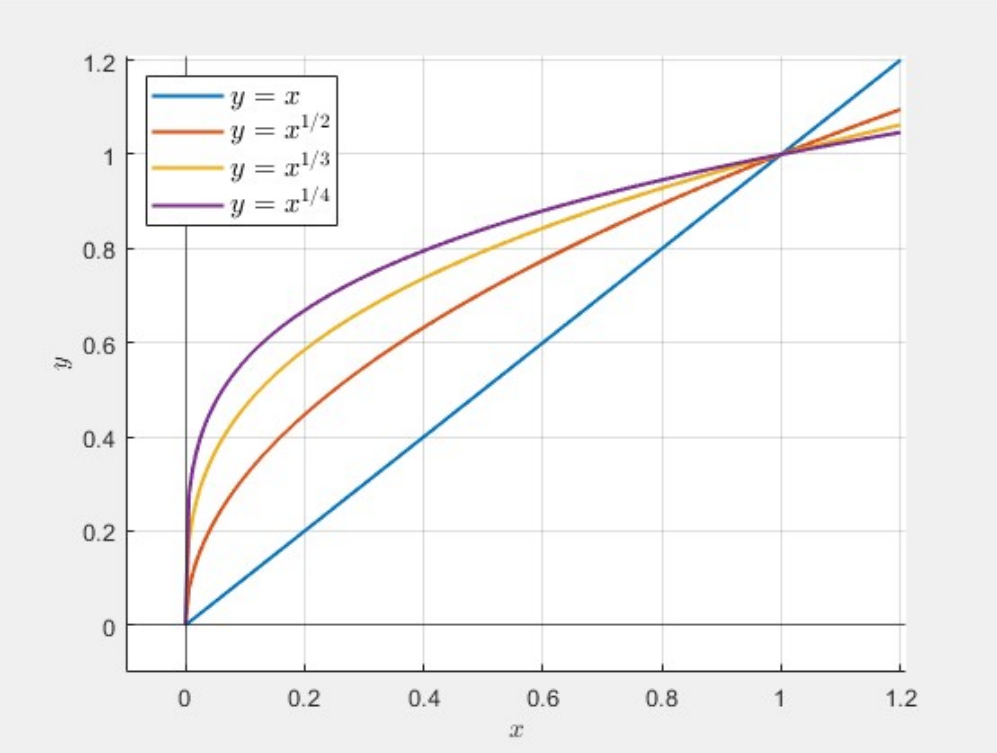


Abbildung 6.4: Die Funktionen $x \mapsto x^{1/n}$

b) Die Exponentialfunktion im Komplexen

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist wesentlich spannender als die reelle, man vergleiche Abbildung 6.5, in der $z \mapsto \operatorname{Re}\exp(z)$ gezeigt wird. Wir beginnen mit einer Restgliedabschätzung.

17/24:30 (12.01.21)

6.6 Lemma. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le 1 + \frac{n}{2}$ die Abschätzung*

$$\Big|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\Big| \le 2\,\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\Big|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\Big| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \\ &= \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{|z|}{n+2} + \frac{|z|^2}{(n+2)(n+3)} + \dots\Big) \\ &\le \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{|z|}{n+2} + \frac{|z|^2}{(n+2)^2} + \dots\Big)\end{aligned}$$

© Robert Denk 15.02.2021

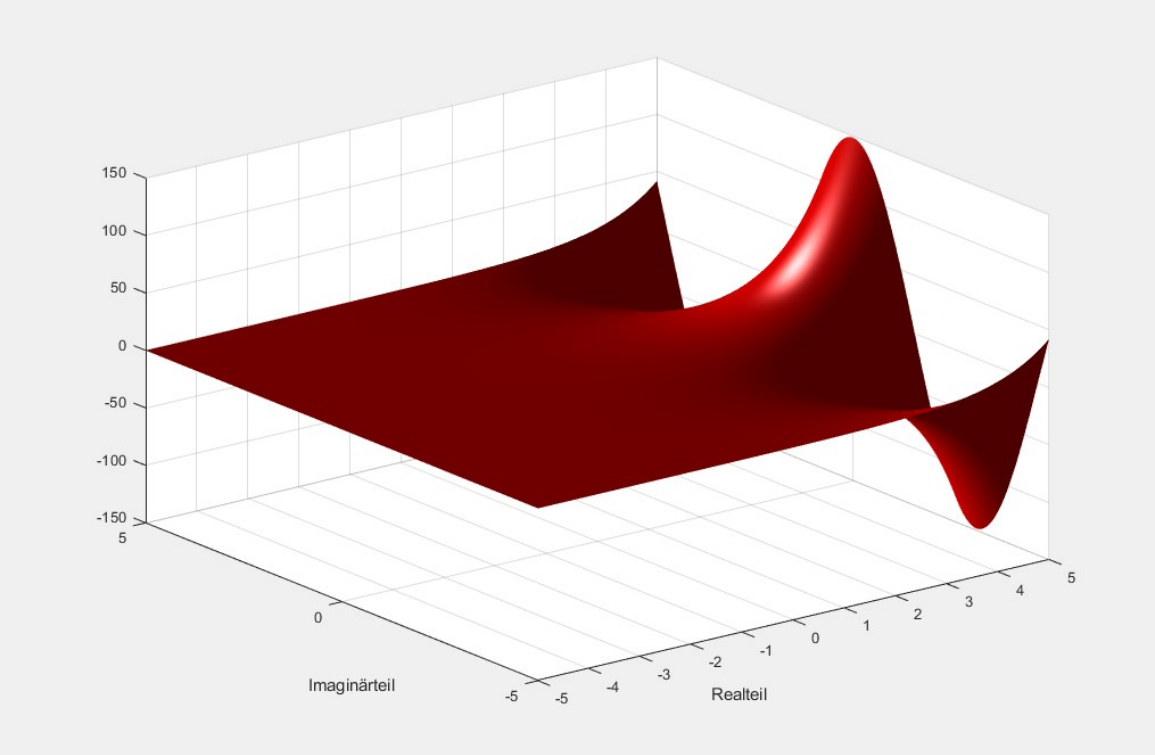


Abbildung 6.5: Die komplexe exp-Funktion, dargestellt ist $z \mapsto \operatorname{Re}\exp(z)$

$$= \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{n+2}\right)^j = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{1-\frac{|z|}{n+2}}$$
$$\leq 2\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!},$$

wobei bei der letzten Ungleichung die Voraussetzung $\frac{|z|}{n+2} \leq \frac{1}{2}$ verwendet wurde. □

6.7 Korollar. *Es gilt*

17/32:10
(12.01.21)

$$\lim_{\mathbb{C}\ni z\to 0,\, z\neq 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Beweis. Wende Lemma 6.6 mit $n = 1$ an und erhalte $|e^z - 1 - z| \leq |z|^2$ für alle $|z| \leq \frac{3}{2}$. Damit folgt $|\frac{e^z-1}{z} - 1| \leq |z| \to 0$ $(z \to 0)$. □

6.8 Satz. *a) Die Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig.*

17/34:40
(12.01.21)

b) Es gilt $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. a) Aus Lemma 6.6 mit $n = 0$ folgt für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|h| \le 1$

$$|\exp(z+h) - \exp(z)| = |\exp(z)|\,|\exp(h) - 1| \le 2|\exp(z)|\,|h| \to 0 \quad (h \to 0).$$

b) Für die Partialsummen gilt $\sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}}$. Nimmt man $N \to \infty$, erhält man die Behauptung. □

17/41:50 (12.01.21)

6.9 Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $\cos x := \mathrm{Re}(e^{ix})$ der Cosinus von x und $\sin x := \mathrm{Im}(e^{ix})$ der Sinus von x, siehe Abbildung 6.6. Damit gilt nach Definition die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

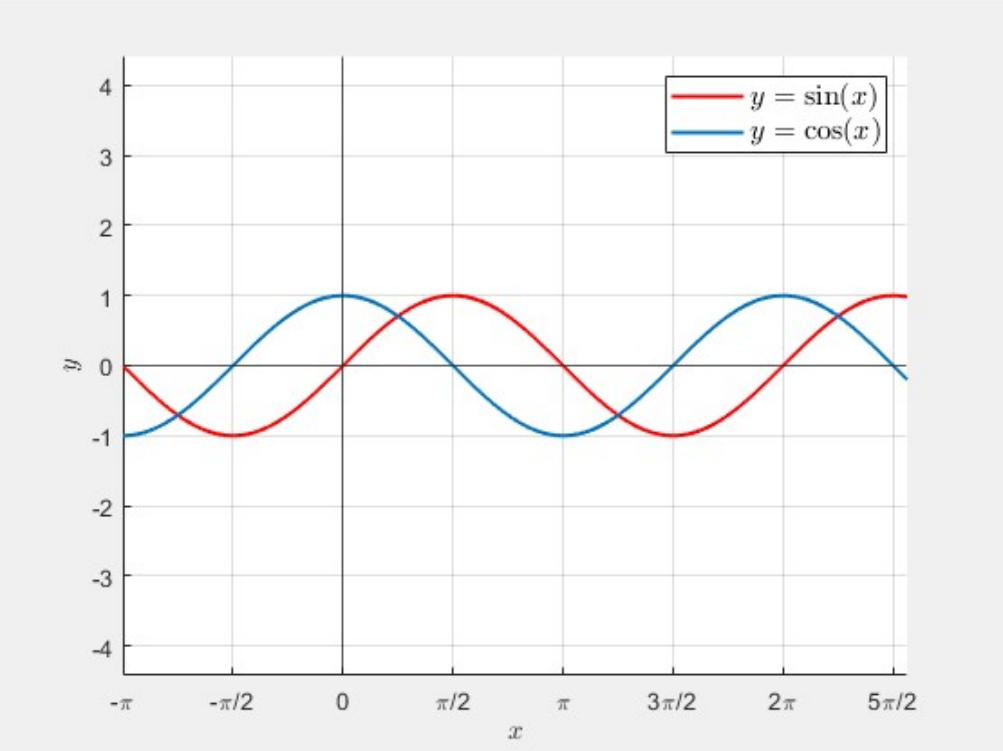


Abbildung 6.6: Die trigonometrischen Funktionen sin und cos

17/44:00 (12.01.21)

6.10 Bemerkung. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{\overline{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$, d.h. die komplexe Zahl e^{ix} liegt auf dem Einheitskreis. Dabei ist x ein Maß für den Winkel, wobei $x = 2\pi$ einem Winkel von 360° entspricht. Für die Zahl e^{ix} ist $\cos x$ der Realteil, also der horizontale Achsenabschnitt und $\sin x$ der Imaginärteil, also der vertikale Achsenabschnitt.

© Robert Denk 15.02.2021

6.11 Bemerkung. Direkt aus der Definition folgt wegen $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ und $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$ $(z \in \mathbb{C})$: 17/50:35 (12.01.21)

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Damit folgt insbesondere $\cos(-x) = \cos x$ und $\sin(-x) = -\sin x$. Wegen $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ $(z \in \mathbb{C})$ und $|e^{ix}| = 1$ folgt

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wobei $\cos^2 x := (\cos x)^2$.

6.12 Satz (Additionstheoreme). *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt* 17/56:00 (12.01.21)

(i) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,

(ii) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,

(iii) $\sin x - \sin y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$,

(iv) $\cos x - \cos y = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$.

Beweis. Es gilt $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ und damit

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i \sin y).$$

Multipliziert man rechts aus und vergleicht Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten, so erhält man (i) und (ii).

Um (iii) zu zeigen, setzt man $u := \frac{x+y}{2}$ und $v := \frac{x-y}{2}$. Dann gilt $u+v = x$ und $u-v = y$, und mit (i) und (ii) sowie der Symmetrie von cos und sin (Bemerkung 6.11) erhält man

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin y &= \sin(u+v) - \sin(u-v) \\
&= \big(\sin u \cos v + \cos u \sin v\big) - \big(\sin u \cos(-v) + \cos u \sin(-v)\big) \\
&= \big(\sin u \cos v + \cos u \sin v\big) - \big(\sin u \cos v - \cos u \sin v\big) \\
&= 2\cos u \sin v = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2}).
\end{aligned}$$

(iv) wird genauso bewiesen. □

6.13 Satz. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt* 17/1:06:40 (12.01.21)

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots,$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots.$$

Dabei sind beide Reihen absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ (und auch für alle $x \in \mathbb{C}$).

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. Es gilt

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 4m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0, \\ i, & \text{falls } n = 4m+1, \\ -1, & \text{falls } n = 4m+2, \\ -i, & \text{falls } n = 4m+3. \end{cases}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Da beide Summen reell sind, ist die erste gleich $\operatorname{Re} e^{ix} = \cos x$ und die zweite gleich $\operatorname{Im} e^{ix} = \sin x$. □

17/1:16:10 (12.01.21)

6.14 Definition und Satz. *Die Funktion* cos *hat im Intervall* $[0, 2]$ *genau eine Nullstelle. Die Zahl* π *wird definiert als das Doppelte dieser Nullstelle, d.h. die Nullstelle ist nach Definition gleich* $\frac{\pi}{2}$.

Beweis. Wegen $e^0 = 1$ gilt $\cos 0 = 1$. Wir schreiben

$$\cos 2 = \left(1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!}\right) - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\right) - \dots$$

Die erste Klammer hat den Wert $-\frac{1}{3}$, die anderen sind alle negativ. Es folgt $\cos 2 < -\frac{1}{3}$. Für den Sinus erhält man analog $\sin x > 0$ $(x \in (0, 2])$ wegen

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!}\left(1 - \frac{x^2}{10 \cdot 11}\right) + \dots,$$

jetzt sind alle Klammern positiv.

Damit folgt für $0 \le x < x' \le 2$ aus den Additionstheoremen

$$\cos x' - \cos x = -2 \sin\left(\frac{x' + x}{2}\right) \sin\left(\frac{x' - x}{2}\right) < 0,$$

d.h. cos ist im Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend. Wegen $\cos 0 > 0$ und $\cos 2 < 0$ existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle von cos in $[0, 2]$, die wegen der strengen Monotonie eindeutig ist. □

Die obige Definition kann auch verwendet werden, um die Zahl π numerisch zu bestimmen (es gibt dafür aber viele verschiedene Methoden), es gilt $\pi = 3,14159265...$

© Robert Denk 15.02.2021

18/07:30
(15.01.21)

6.15 Lemma. *a) Es gilt folgende Wertetabelle:*

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	1
e^{ix}	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$	i	-1	$-i$	1

Insbesondere folgt

$$1 + e^{i\pi} = 0.$$

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\sin(x + 2\pi) = \sin x,\ \cos(x + 2\pi) = \cos x,$

(ii) $\sin(x + \pi) = -\sin x,\ \cos(x + \pi) = -\cos x,$

(iii) $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x),\ \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x).$

Beweis. Es gilt $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 1$ sowie $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ (siehe Beweis von Satz 6.14), damit folgt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Es folgt $e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir $e^{in\pi/2} = (e^{i\pi 2})^n = i^n$. Dies ergibt die letzte Zeile der Tabelle in a) bis auf den Wert bei $\frac{\pi}{4}$, die anderen Zeilen folgen aus der letzten Zeile mit der Eulerschen Formel.

Die Aussagen in b) folgen alle direkt aus den Additionstheoremen und den bereits berechneten Werten. Wegen $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ erhält man den noch fehlenden Wert $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = 1/\sqrt{2}$. □

18/23:50
(15.01.21)

6.16 Korollar. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $\sin x = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = k\pi,$

(ii) $\cos x = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = k\pi + \frac{\pi}{2},$

(iii) $e^{ix} = 1 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = 2k\pi.$

Beweis. Es gilt $\cos x > 0$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, und wegen $\cos(-x) = \cos x$ folgt $\cos x > 0$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Mit $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ folgt $\sin x > 0$ für $x \in (0, \pi)$. Wegen der Punktsymmetrie des Sinus, $\sin(-x) = -\sin x$ erhält man $\sin x < 0$ für $x \in (-\pi, 0)$. Da $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ und $\sin 0 = 0$, folgt (i).

Die Aussage (ii) folgt aus (i) wegen $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Für (iii) verwendet man

$$\sin\tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2i}(e^{ix/2} - e^{-ix/2}) = \tfrac{1}{2i}e^{-ix/2}(e^{ix} - 1).$$

Damit ist $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = 2\pi k.$ □

© Robert Denk 15.02.2021

18/31:45
(15.01.21)

6.17 Definition. a) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ heißt $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ die Tangens-Funktion. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ heißt $\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$ die Kotangens-Funktion (siehe Abbildung 6.7).

b) Die hyperbolischen Funktionen sind für $x \in \mathbb{R}$ (oder auch für $x \in \mathbb{C}$) definiert als $\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (Cosinus hyperbolicus), $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (Sinus hyperbolicus), $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$ (Tangens hyperbolicus)sowie $\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$ $(x \neq 0)$ (Cotangens hyperbolicus), siehe Abbildung 6.8.

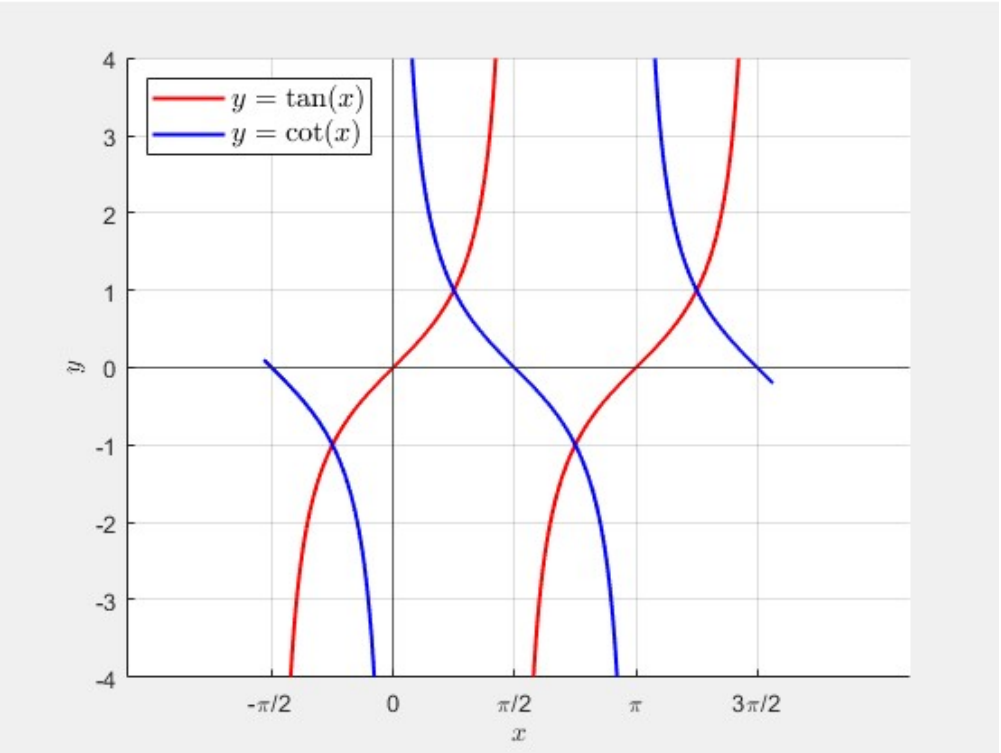


Abbildung 6.7: Tangens- und Kotangens-Funktion

18/36:00
(15.01.21)

6.18 Definition und Satz. *a) Die Funktion* $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ *ist streng monoton fallend und bijektiv. Ihre Umkehrfunktion* $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ *heißt Arcus-Cosinus.*

b) Die Funktion $\sin\colon [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ *ist streng monoton steigend und bijektiv. Ihre Umkehrfunktion* $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *heißt Arcus-Sinus.*

c) Die Funktion $\tan\colon (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv. Ihre Umkehrfunktion* $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ *heißt Arcus-Tangens (siehe Abbildung 6.9).*

Beweis. a) cos ist streng monoton fallend in $[0,\frac{\pi}{2}]$ und wegen $\cos x = -\cos(\pi - x)$ auch in $[\frac{\pi}{2},\pi]$. Als stetige streng monoton fallende Funktion ist $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ bijektiv.

© Robert Denk 15.02.2021

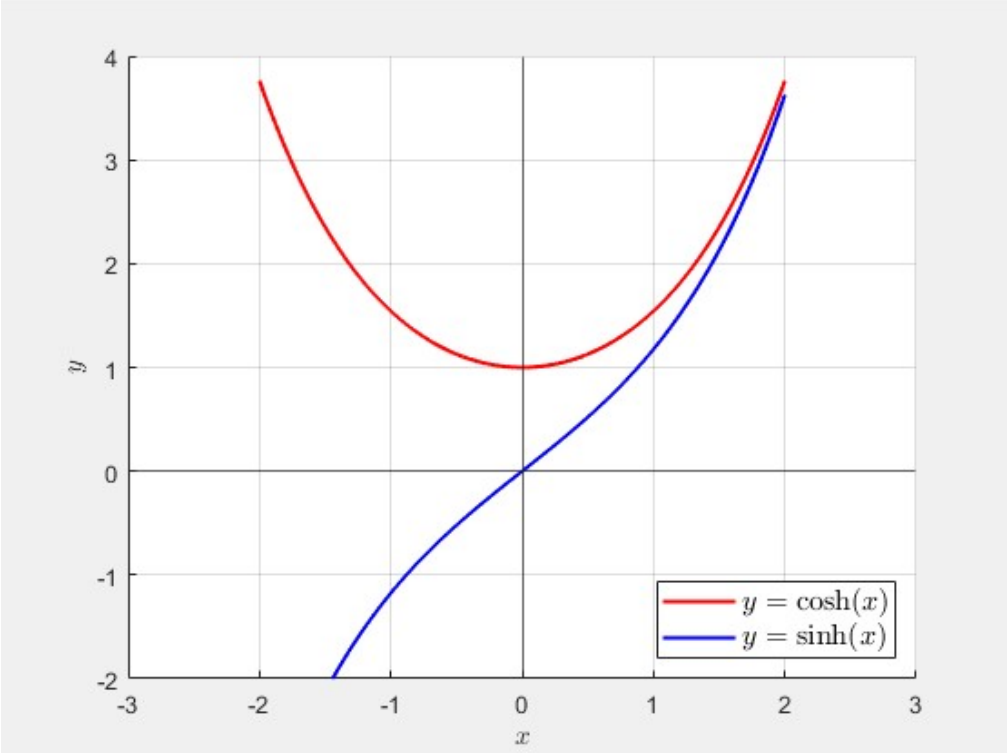


Abbildung 6.8: Die Funktionen cosh und sinh

b) folgt aus a) und $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

c) Für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ist $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ wegen a) und b) streng monoton steigend. Wegen $\tan(-x) = -\tan x$ ist $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend. Es gilt $\cos x \searrow 0$ $(x \nearrow \frac{\pi}{2})$ und $\sin x > 0$ für $x \in (0, \pi)$, daher folgt $\tan x \to \infty$ $(x \nearrow \frac{\pi}{2})$. Mit der Punktsymmetrie folgt $\tan x \to -\infty$ $(x \searrow -\frac{\pi}{2})$, und nach dem Zwischenwertsatz ist $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ bijektiv. □

6.19 Satz (Polarkoordinaten). *Jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben in der Form $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z| \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Für $z \neq 0$ ist φ eindeutig bis auf Vielfache von 2π. Hierbei heißt r der Radius oder der Betrag von z und φ das Argument von z oder der Winkel von z im Bogenmaß.*

18/50:20 (15.01.21)

Beweis. Definiere $r := |z|$. Falls $z \neq 0$, setze $\widetilde{z} := \frac{z}{r} =: x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $|\widetilde{z}|^2 = x^2 + y^2 = \frac{|z|^2}{r^2} = 1$ und damit $|x| \leq 1$. Wir definieren $\alpha := \arccos x$. Dann folgt $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - x^2} = \pm y$. Setzt man nun

$$\varphi := \begin{cases} \alpha, & \text{falls } \sin\alpha = y, \\ -\alpha, & \text{falls } \sin\alpha = -y, \end{cases}$$

© Robert Denk 15.02.2021

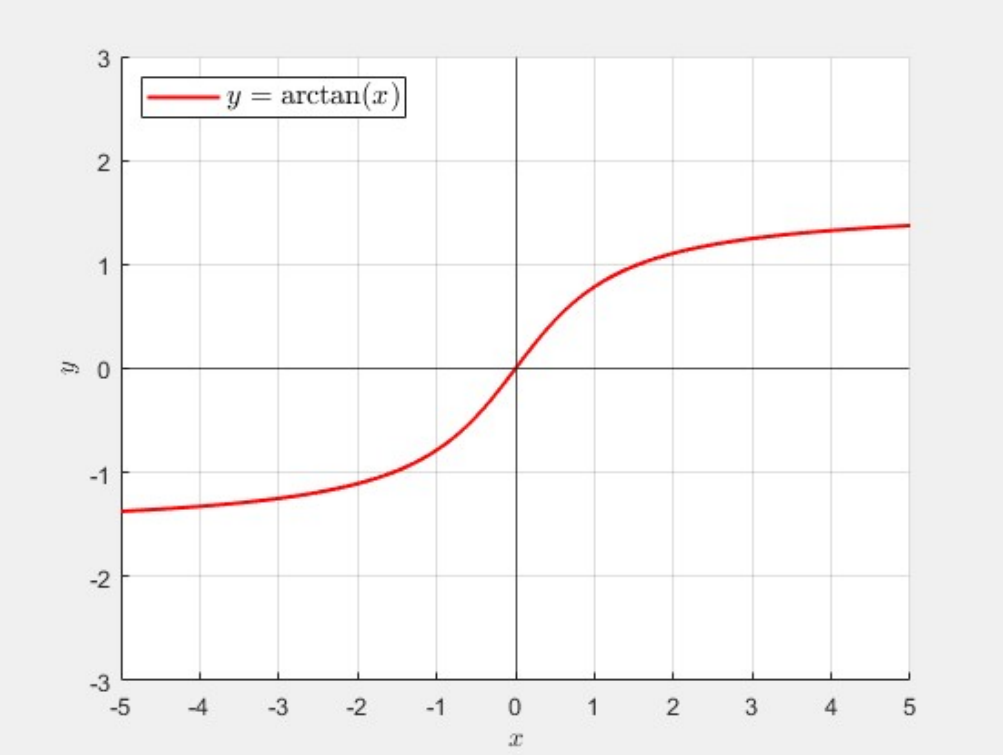


Abbildung 6.9: Die Arcus-Tangens-Funktion

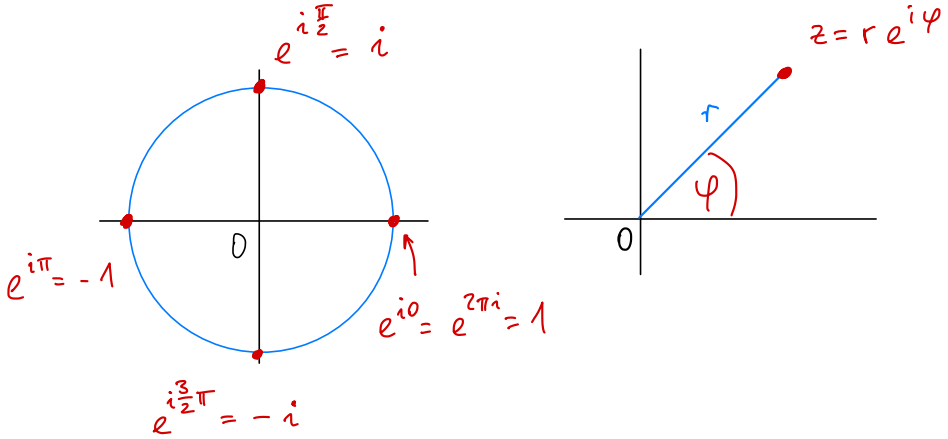


Abbildung 6.10: Wichtige Werte auf dem Einheitskreis und Polarkoordinaten

© Robert Denk 15.02.2021

so gilt in jedem Fall $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = x + iy = \widetilde{z}$ und somit $z = re^{i\varphi}$.

Es gelte nun $z = re^{i\varphi_1} = re^{i\varphi_2}$ für $z \neq 0$. Dann ist $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = 1$, d.h. $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. □

Die Polarkoordinaten ermöglichen eine einfache Darstellung der Multiplikation in $\mathbb{C}$: Seien $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Dann gilt $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, d.h. der Betrag der beiden Zahlen wird multipliziert und die Winkel der beiden Zahlen werden addiert. Das Produkt $z_1 z_2$ hat somit die Länge $r_1 r_2$ und das Argument $\varphi_1+\varphi_2$. Wegen $1/e^{i\varphi} = e^{-i\varphi}$ werden bei der Division zweier komplexer Zahlen die Winkel subtrahiert.

6.20 Korollar (n-te Einheitswurzeln)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n komplexe Lösungen $z = \zeta_k$ mit $\zeta_k := \exp(i\frac{2k\pi}{n})$, $k = 0, \ldots, n-1$.*

18/1:01:30 (15.01.21)

Beweis. Sei $z^n = 1$ mit $z = re^{i\varphi}$, wobei $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ gelte. Wegen $1 = |z^n| = |z|^n = r^n$ und $r \geq 0$ folgt $r = 1$. Es gilt $z^n = e^{in\varphi} = 1$ und damit $n\varphi = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, d.h. $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$. Aus $\varphi \in [0, 2\pi)$ folgt $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, und daher gilt $z = \zeta_k$ für ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Wir haben gezeigt, dass jede Lösung der Gleichung eine n-te Einheitswurzel ζ_k ist; andererseits gilt $\zeta_k^n = 1$, d.h. jede Einheitswurzel ist auch eine Lösung. □

© Robert Denk 15.02.2021

7. Differentiation

18/1:14:10 (15.01.21)

7.1 Worum geht's? Neben der Stetigkeit von Funktionen ist ihre Differenzierbarkeit eines der zentralen Themen der gesamten Analysis. Anschaulich bedeutet die Differenzierbarkeit einer Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, dass die Funktion glatt ist, d.h. der Graph besitzt keinen Knick. Formal ist die Ableitung an einer Stelle als Limes des Differenzenquotienten definiert, was die Differenzierbarkeit mit der Existenz einer Tangente verbindet. Besser (und für allgemeinere Situation angemessen) ist allerdings die Sichtweise, dass eine Funktion an einer Stelle differenzierbar ist, wenn man sie hinreichend gut durch eine affin-lineare Funktion approximieren kann.

a) Differenzierbare Funktionen

18/1:18:00 (15.01.21)

7.2 Definition. Seien $I \subset \mathbb{R}$ offen, $x \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Dann heißt f differenzierbar an der Stelle x, falls

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x)$ die Ableitung von f an der Stelle x. Die Funktion f heißt differenzierbar (in I), falls f an jeder Stelle $x \in I$ differenzierbar ist. Weitere Schreibweisen sind $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx} := Df(x) := f'(x)$ sowie (vor allem falls $f = f(t)$ ein Funktion der Zeit t ist) $\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t)$.

Man beachte, dass $\frac{df(x)}{dx}$ nicht als Bruch verstanden werden darf, es handelt sich nur um ein Symbol für die Ableitung.

18/1:22:30 (15.01.21)

7.3 Bemerkung. a) Der Ausdruck $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ heißt Differenzenquotient und beschreibt die Steigung der Geraden, auf der die Punkte $(x+h, f(x+h))$ und $(x, f(x))$ liegen. Der Grenzwert $f'(x)$ entspricht somit der Steigung der Tangente an die Funktion f im Punkt x.

b) Wenn $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von I ist, dann definieren wir entsprechend auch links- und rechtsseitige Differenzierbarkeit.

19/01:40 (19.01.21)

7.4 Beispiel. a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann gilt

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}h^j x^{n-j} = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}h^{j-1}x^{n-j}$$

und damit

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\cdot x^{n-1} = f'(x).$$

© Robert Denk 15.02.2021

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$. Dann folgt mit Korollar 6.7

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \to e^x \quad (h \to 0),$$

und damit ist f in $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist im Nullpunkt nicht differenzierbar, denn für $x = 0$ gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{falls } h > 0, \\ -1, & \text{falls } h < 0. \end{cases}$$

Damit erhält man $\lim\limits_{h \searrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1$ und $\lim\limits_{h \nearrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -1$, und der Limes des Differenzenquotienten existiert nicht. Die Funktion ist aber links- und rechtsseitig differenzierbar in $x = 0$.

7.5 Bemerkung. Seien $I \subset \mathbb{R}$ offen und $f\colon I \to \mathbb{K}$ differenzierbar an der Stelle $x \in I$. Dann gilt

19/11:45 (19.01.21)

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, h = f(x) + f'(x)h + \Big(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\Big)h,$$

wobei der Wert in Klammern $(\ldots)$ für $h \to 0$ gegen 0 konvergiert. Somit sieht man, dass eine Zahl $g(x)$ und ein „Rest“ $r(x,h)$ existieren mit

$$f(x+h) = f(x) + g(x)h + r(x,h),$$

wobei $\frac{|r(x,h)|}{|h|} \to 0$ $(h \to 0)$ gilt. Umgekehrt folgt aus der Existenz von $g(x)$ und $r(x,h)$ mit diesen Eigenschaften, dass f an der Stelle x differenzierbar ist sowie $g(x) = f'(x)$.

Ebenfalls direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit sieht man: Die Funktion f ist genau dann differenzierbar an der Stelle x, falls eine Funktion f_1 existiert mit

$$f(x+h) = f(x) + f_1(x,h)h,$$

wobei $h \mapsto f_1(x,h)$ stetig an der Stelle $h = 0$ ist. Die Funktion f_1 ist gerade der Differenzenquotient, und es gilt $\lim_{h\to 0} f_1(x,h) = f'(x)$.

Man kann also in einer Umgebung des Punktes x die Funktion f approximieren durch die affin-lineare Funktion $z \mapsto f(x) + g(x)(z-x)$. Diese Bedingung kann auch in allgemeineren Situationen als Definition der Differenzierbarkeit genommen werden:

© Robert Denk 15.02.2021

19/21:30 (19.01.21)

7.6 Definition. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume, $D \subset E$ offen, $f\colon D \to F$ eine Funktion. Dann heißt f differenzierbar an der Stelle $x \in D$, falls für $h \in E$ mit $\|h\|_E$ klein die Darstellung

$$f(x+h) = f(x) + g(x)h + r(x,h)$$

gilt, wobei $g(x)\colon E \to F$, $h \mapsto g(x)h$ eine lineare Funktion ist und $\frac{\|r(x,h)\|_F}{\|h\|_E} \to 0$ $(h \to 0)$ gilt. In diesem Fall heißt $f'(x) := Df(x) := g(x)$ die Ableitung von f an der Stelle x.

19/29:50 (19.01.21)

7.7 Satz. *Sei $f\colon I \to \mathbb{K}$ differenzierbar an der Stelle $x \in I$. Dann ist f stetig an der Stelle x.*

Beweis. Das folgt sofort aus

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, h \to f'(x)\cdot 0 = 0 \quad (h \to 0).$$

□

Insbesondere werden wir uns für stetig differenzierbare Funktionen interessieren:

19/33:30 (19.01.21)

7.8 Definition. Sei $f\colon I \to \mathbb{K}$ differenzierbar und $f' \in C(I;\mathbb{K})$. Dann heißt f stetig differenzierbar in I. Den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen in I bezeichnen wir mit $C^1(I;\mathbb{K})$.

Der Raum $C^1(I,\mathbb{R})$ ist wieder ein Vektorraum, wie aus den folgenden Rechenregeln für die Ableitung folgt.

19/38:10 (19.01.21)

7.9 Satz. *Seien $f, g\colon I \to \mathbb{K}$ differenzierbar. Dann gilt:*

a) $(f+g)' = f' + g'$.

b) (Produktregel) $(f\cdot g)' = f'g + fg'$.

c) Für alle $x \in I$ mit $g(x) \neq 0$ gilt $(\frac{1}{g(x)})' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

d) (Quotientenregel) Für alle $x \in I$ mit $g(x) \neq 0$ gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Beweis. a) folgt direkt aus den Rechenregeln für den Limes.

b) Wir schreiben

$$\begin{aligned}\tfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} &= f(x+h)\tfrac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &\to f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

© Robert Denk 15.02.2021

c) Als stetige Funktion ist g auch in einer Umgebung von x von Null verschieden. Damit folgt die Aussage aus

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{h}\big(\tfrac{1}{g(x+h)}-\tfrac{1}{g(x)}\big) &= \tfrac{1}{g(x+h)g(x)}\tfrac{g(x)-g(x+h)}{h}\\ &\to \tfrac{1}{g(x)^2}(-g'(x)) \quad (h\to 0).\end{aligned}$$

d) Aus b) und c) folgt $(\frac{f}{g})' = (f\,\frac{1}{g})' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}$. □

7.10 Satz (Kettenregel). *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ an der Stelle a differenzierbar, und sei $g\colon J \to \mathbb{K}$ an der Stelle $b := f(a) \in J$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle a differenzierbar, und es gilt*

19/57:10 (19.01.21)

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Man spricht beim Faktor $f'(a)$ vom Nachdifferenzieren. So gilt z.B. $(e^{x^2})' = e^{x^2}\cdot 2x$.

Beweis. Nach Bemerkung 7.5 gilt $f(x) = f(a) + f_1(x)(x-a)$, wobei die Funktion f_1 an der Stelle a stetig ist mit $\lim_{x\to a} f_1(x) = f'(a)$. Analog gilt $g(y) = g(b) + g_1(y)(y-b)$, wobei g_1 an der Stelle b stetig ist mit Grenzwert $g'(b)$. Eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x)) = g(b) + g_1(f(x))(f(x)-b)\\ &= g(b) + g_1(f(a)+f_1(x)(x-a))f_1(x)(x-a).\end{aligned}$$

Da $x \mapsto g_1(f(a)+f_1(x)(x-a))f_1(x)$ stetig an der Stelle a ist, ist $g\circ f$ an der Stelle a differenzierbar, und es gilt

$$(g\circ f)'(a) = \lim_{x\to a} g_1(f(a)+f_1(x)(x-a))f_1(x) = g'(f(a))f'(a).$$ □

7.11 Beispiele. Mit den obigen Regeln erhält man folgende Tabelle von Ableitungen:

19/1:21:30 (19.01.21)

$f(x)$	$f'(x)$
x^n $(n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
x^α $(x>0,\ \alpha\in\mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$

© Robert Denk 15.02.2021

Dabei folgen die Regeln für sin und cos aus $(e^{ix})' = ie^{ix} = i(\cos x + i \sin x)$, die Ableitung von $\tan x$ folgt aus der Quotientenregel, und die letzte Zeile folgt aus $x^\alpha = e^{x \ln \alpha}$. Die Ableitungen für $\ln x$ und die Arcus-Funktionen werden später bewiesen.

20/01:00 (22.01.21)

7.12 Beispiel. Sei $f_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_0(x) := \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

(siehe Abbildung 7.1). Dann ist f_0 an der Stelle $x = 0$ nicht stetig und daher auch nicht differenzierbar.

Definiert man $f_1(x) := x f_0(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, so ist f_1 an der Stelle $x = 0$ stetig mit Funktionswert 0. Für $h_n := \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ erhält man

$$\frac{f_1(h_n) - f_1(0)}{h_n} = \frac{h_n \sin(\frac{\pi}{h_n})}{h_n} = \sin(\pi(n + \tfrac{1}{2})) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Also existiert $\lim_{h \to 0} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h}$ nicht, d.h. f_1 ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

Sei nun $f_2(x) := x^2 f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann ist f_2 wegen $|f_2(x)| \leq |x|^2$ differenzierbar an der Stelle $x = 0$ mit Ableitung $f_2'(0) = 0$. Für $x \neq 0$ ist f als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen ebenfalls differenzierbar, und für die Ableitung gilt

$$f_2'(x) = 2x f_0(x) + x^2 f_0'(x) = 2x \sin \tfrac{\pi}{x} - \pi \cos \tfrac{\pi}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Da der erste Summand auf der rechten Seite für $x \to 0$ gegen 0 konvergiert und der zweite Summand für $x \to 0$ keinen Grenzwert besitzt, ist f_2' ein Beispiel einer in $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktion, die nicht stetig differenzierbar ist.

20/06:10 (22.01.21)

7.13 Beispiel. Die Sägezahnfunktion $g_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $g(x) := |x|$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$ und $g(x \pm 1) := g(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ (periodische Fortsetzung). Man setzt $g_j(x) := 2^{-j} g(2^j x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $j \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. Man kann zeigen, dass die Funktion f stetig, aber an keiner Stelle differenzierbar ist (siehe Abbildung 7.2).

© Robert Denk 15.02.2021

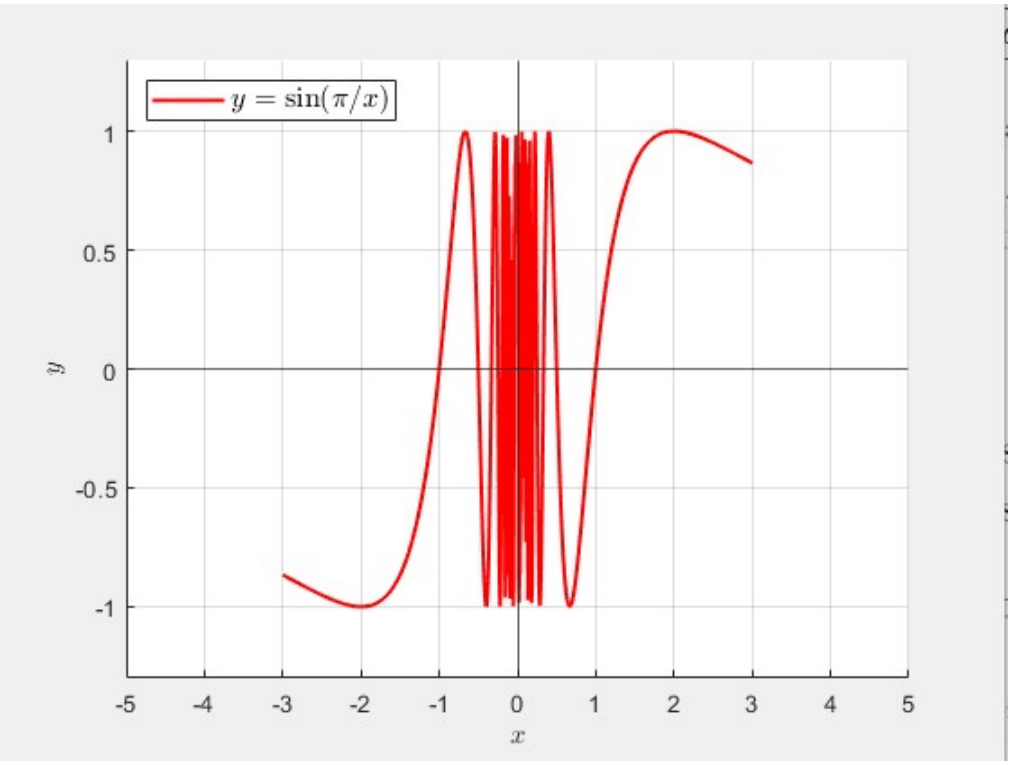


Abbildung 7.1: Die Funktion $x \mapsto \sin(\pi/x)$

b) Der Mittelwertsatz und Folgerungen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $x_0 \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definiert man:

- f besitzt an der Stelle x_0 das lokale Maximum $f(x_0)$, falls ein $c > 0$ existiert mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < c$.
- f besitzt an der Stelle x_0 das lokales Minimum $f(x_0)$, falls ein $c > 0$ existiert mit $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < c$.
- f besitzt an der Stelle x_0 das globale Maximum $f(x_0)$, falls $f(x_0) = \max_{x \in I} f(x)$.
- f besitzt an der Stelle x_0 das globale Minimum $f(x_0)$, falls $f(x_0) = \min_{x \in I} f(x)$.
- Ein lokales Extremum ist ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum. Analog für globale Extrema.

Man beachte, dass ein globales Minimum / Maximum auch stets ein lokales Minimum / Maximum ist. Lokale und globale Extrema können auch auf dem Rand des Definitionsbereichs auftreten.

Im Folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

© Robert Denk 15.02.2021

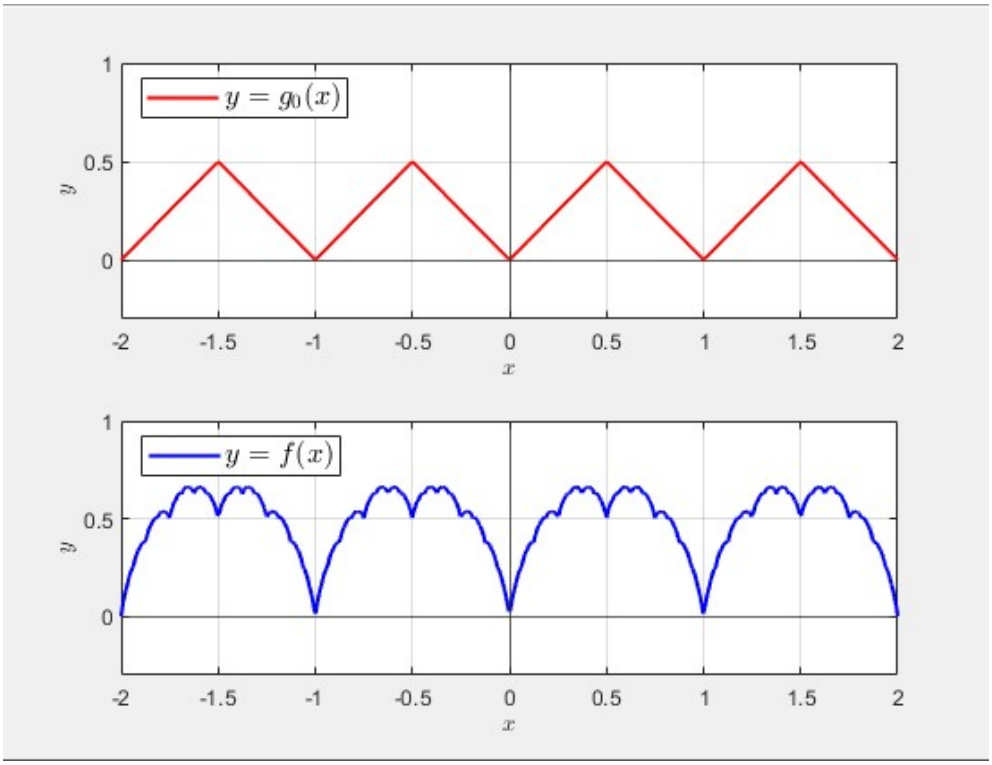


Abbildung 7.2: Die Sägezahnfunktion und die Funktion f aus Beispiel 7.13

20/19:40 (22.01.21)

7.14 Satz. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung U des Punktes $x \in (a,b)$ differenzierbar und besitze an der Stelle x ein lokales Extremum. Dann gilt $f'(x) = 0$.*

Beweis. Sei o.E. x ein lokales Minimum von f. Dann folgt für alle hinreichend kleine $h > 0$ sowohl $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ und damit $f'(x) \geq 0$ als auch $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \leq 0$ und damit $f'(x) \geq 0$. Somit gilt $f'(x) = 0$. □

Beachte, dass aus $f'(x) = 0$ nicht folgt, dass f an der Stelle x ein lokales Extremum besitzt, wie man an der Funktion $x \mapsto x^3$ an der Stelle $x = 0$ sieht.

20/25:50 (22.01.21)

7.15 Satz (Satz von Rolle[17]). *Es sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, differenzierbar in (a,b), und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. O.E. sei $f(a) = f(b) = 0$ (sonst betrachte die Funktion $x \mapsto f(x) - f(a)$). Sei $M := \max_{x\in[a,b]} f(x) \geq 0$. Falls $M > 0$, so existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = M$, und nach Satz 7.14 folgt $f'(x_0) = 0$. Falls $M = 0$, so betrachtet man $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$. Falls $m < 0$, folgt die Behauptung wie oben. Falls $m = 0$, so gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ und damit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. □

[17] Michel Rolle, 21.4.1652 – 8.11.1719

© Robert Denk 15.02.2021

7.16 Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Es sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ differenzierbar in (a,b). Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ so, dass*

20/36:00 (22.01.21)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0),$$

d. h. es gibt einen Punkt, in dem die Tangente an die Funktion f dieselbe Steigung hat wie die Gerade, die durch die Punkte $(a,f(a))$ und $(b,f(b))$ geht.

Beweis. Definiere $F(x) := f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dann gilt $F(a) = F(b) = 0$, und nach dem Satz von Rolle (Satz 7.15) existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $F'(x_0) = 0$, d.h. $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

7.17 Bemerkung. Die folgenden Formulierungen sind äquivalent zum Mittelwertsatz:

20/47:40 (22.01.21)

(i) $\exists\, x_0 \in (a,b) : f(b) = f(a) + (b-a)f'(x_0)$,

(ii) $\exists\, \theta \in (0,1) : f(b) = f(a) + (b-a)f'(a+\theta(b-a))$.

Häufig wird der Satz auch in einem Intervall $[x-h_0, x+h_0] \subset [a,b]$ angewendet: Für alle $|h| \le h_0$ existiert ein $\theta \in (0,1)$ mit

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

7.18 Korollar. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

20/54:10 (22.01.21)

a) Es gilt $f'(x) = 0$ $(x \in I)$ genau dann, wenn f eine konstante Funktion ist.

b) Es gilt $f'(x) \ge 0$ $(x \in I)$ genau dann, wenn f monoton wächst.

c) Falls $f'(x) > 0$ $(x \in I)$, so ist f streng monoton wachsend.

Beweis. a) Sei $f' = 0$. Dann existiert für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ ein $c \in (x,y)$ mit

$$f(y) = f(x) + f'(c)(y-x) = f(x).$$

Also ist f konstant. Die andere Richtung ist klar.

b) Falls f monoton wächst, gilt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge 0$ für alle $h > 0$ und damit $f'(x) \ge 0$. Falls $f'(x) \ge 0$ $(x \in I)$, so folgt für $h > 0$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) \ge f(x)$$

für ein $\theta \in (0,1)$.

c) folgt analog zu b). □

© Robert Denk 15.02.2021

20/1:08:10 (22.01.21)

7.19 Satz (Satz von der lokalen Umkehrbarkeit)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in einer Umgebung von $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann existieren offene Umgebungen U von x_0 und V von $f(x_0)$ so, dass $f\colon U \to V$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung $g := (f|_U)^{-1}\colon V \to U$ differenzierbar ist. Es gilt $g \in C^1(V;\mathbb{R})$ und*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad (y \in V).$$

Beweis. O.E. sei $f'(x_0) > 0$. Da f' stetig ist, existiert eine offene Umgebung U von x_0 mit $f'(x) \geq c > 0$ $(x \in U)$. Nach Korollar 7.18 c) ist f in U streng monoton wachsend und damit bijektiv. Die Umkehrfunktion ist nach Lemma 5.15 wieder stetig. Es gilt für $y, y+h \in V$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(y+h)-y}{h} = \frac{f(g(y+h)) - f(g(y))}{h} \\ &= \frac{f(g(y+h)) - f(g(y))}{g(y+h)-g(y)} \cdot \frac{g(y+h)-g(y)}{h} \end{aligned}$$

Da g stetig ist, gilt $g(y+h) \to g(y)$ $(h \to 0)$, und damit konvergiert der erste Bruch gegen $f'(g(y))$. Also ist g differenzierbar mit $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Da f' und g stetig sind, folgt aus dieser Darstellung $g \in C^1(V;\mathbb{R})$. □

20/1:27:50 (22.01.21)

7.20 Bemerkung. a) Die Darstellung von g' folgt auch durch Ableiten der Identität $f(g(y)) = y$ (wenn man schon weiß, dass g differenzierbar ist).

b) Mit diesem Satz erhält man die Ableitungen der Arcus-Funktionen und des Logarithmus aus Beispiel 7.11.

21/02:00 (26.01.21)

7.21 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{K}$ heißt zweimal differenzierbar an der Stelle $x \in I$, falls die Ableitung f' in einer Umgebung von x existiert und an der Stelle x differenzierbar ist. In diesem Fall schreibt man $f''(x) := (f')'(x)$. Analog definiert man k-mal differenzierbar mit $k \in \mathbb{N}$ und schreibt $f^{(k)}(x)$. Für $k \in \mathbb{N}$ setzt man

$$C^k(I;\mathbb{K}) := \{f\colon I \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist in } I \text{ } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$

sowie $C^0(I;\mathbb{K}) := C(I;\mathbb{K})$. Man definiert auch noch $C^\infty(I;\mathbb{K})$ als die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen, d.h. die Menge aller Funktionen, für welche jede Ableitung existiert.

21/07:20 (26.01.21)

7.22 Satz (Taylorreihe bis zum linearen Term)**.** *Sei $f \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ in (a,b) zweimal differenzierbar. Dann existiert zu $x \in [a,b]$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $x+h \in [a,b]$ ein $\theta \in (0,1)$ mit*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \tfrac{h^2}{2} f''(x+\theta h). \tag{7-1}$$

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$F(z) := f(x+h) - f(x+z) - (h-z)f'(x+z) - m\tfrac{(h-z)^2}{2},$$

wobei $m \in \mathbb{R}$ eine Konstante sei. Dann gilt $F(0) = f(x+h) - f(x) - hf'(x) - m\frac{h^2}{2}$ sowie $F(h) = 0$. Wählt man m so, dass auch $F(0) = 0$ ist, so existiert nach dem Satz von Rolle ein $\theta \in (0,1)$ mit

$$\begin{aligned} 0 = F'(\theta h) &= -f'(x+\theta h) + f'(x+\theta h) - (h-\theta h)f''(x+\theta h) + m(h-\theta h) \\ &= (h-\theta h)[-f''(x+\theta h) + m]. \end{aligned}$$

Also gilt $m = f''(x+\theta h)$, und aus $F(0) = 0$ folgt (7-1). □

7.23 Korollar. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, und seien $f \in C^2(I;\mathbb{R})$ und $x_0 \in I$.* 21/20:00 (26.01.21)

a) Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ gilt, so hat f ein isoliertes lokales Minimum an der Stelle x_0.

b) Falls f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum hat, so gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \geq 0$.

Beweis. Beide Aussagen folgen sofort aus der Darstellung

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \tfrac{h^2}{2} f''(x_0+\theta h),$$

beachte, dass in Teil a) $f''(x_0+\theta h) > 0$ für kleine h gilt. □

7.24 Satz. *a) (Erweiterter Mittelwertsatz) Seien $f, g \in C([a,b];\mathbb{R})$ in (a,b) differenzierbar mit $g(a) \neq g(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit* 21/26:30 (26.01.21)

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x_0).$$

b) (Regel von L'Hospital[18]). Seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $a \in I$ mit $f(a) = g(a) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Limes auf der rechten Seite existiert.

[18] Guillaume François Antoine de L'Hospital, 1661 – 3.2.1704

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. a) Wende den Satz von Rolle an auf die Funktion

$$F(x) := f(x) - f(a) - (g(x) - g(a))\,\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Beachte, dass $F(a) = F(b) = 0$ gilt.

b) Für $b > a$ gilt nach Teil a)

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

mit einem $x_0 \in (a, b)$. Nehme jetzt den Limes $b \to a$. □

21/38:00 (26.01.21)

7.25 Bemerkung. Die Regel von L'Hospital ist oft nützlich für die Berechnung von Grenzwerten, so gilt etwa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Die Regel von L'Hospital ist auch anwendbar für $\lim_{x\to\infty} \ldots$ oder falls Zähler und Nenner beide gegen Unendlich konvergieren. So gilt z.B.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \tfrac{x}{e^x} &= \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{e^x} = 0,\\
\lim_{x\to 0} x \ln x &= \lim_{x\to 0} \tfrac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \tfrac{1/x}{-1/x^2} = 0,\\
\lim_{x\to 0} \tfrac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \tfrac{1/(x+1)}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Aus dem letzten Beispiel erhält man durch Anwendung der exp-Funktion

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

21/46:00 (26.01.21)

7.26 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ und $\lambda \in (0, 1)$ die Ungleichung

$$f\big(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\big) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

gilt. Die Funktion f heißt konkav, falls $-f$ konvex ist.

21/51:40 (26.01.21)

7.27 Bemerkung. a) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, falls $f''(x) \ge 0$ $(x \in I)$, wie man mit dem Mittelwertsatz sieht.

b) Falls f konvex ist, gilt für alle $x_1, \ldots, x_n \in I$ und alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ die Jensensche Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Insbesondere gilt für konvexe f die Ungleichung

$$f\Big(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\Big) \le \frac{1}{n}\big(f(x_1) + \ldots + f(x_n)\big).$$

© Robert Denk 15.02.2021

8. Integration im $\mathbb{R}^1$

8.1 Worum geht's? Ziel dieses Kapitels ist die elementare Integration der Klasse der Regelfunktionen. Dabei gibt es zwei Zugänge zur Integration: zum einen als Umkehrung der Differentiation, zum anderen über die Berechnung von Flächen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass beide Zugänge zum gleichen Integralbegriff führen. Zur elementaren Integrationstheorie gehören auch die Vertauschung von Grenzprozessen, parameterabhängige Integrale und eine erste Version des Satzes von Fubini.

21/1:01:00 (26.01.21)

a) Stammfunktionen

8.2 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und seien $F, f\colon I \to \mathbb{K}$ Funktionen. Dann heißt F eine Stammfunktion zu f, falls F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. Man schreibt $\int f(x)\,dx = F$ oder kurz $\int f = F$, falls F eine Stammfunktion von f ist (unbestimmtes Integral).

21/1:05:00 (26.01.21)

Nach Korollar 7.18 a) folgt: Falls F_1 und F_2 Stammfunktionen zu f sind, so ist $F_1 - F_2$ konstant. Andererseits ist mit F auch die Funktion $F + c$ mit $c \in \mathbb{K}$ eine Stammfunktion zu f. Typischerweise schreibt man daher z.B. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$, da jede der Funktionen $x \mapsto \frac{x^2}{2} + c$ eine Stammfunktion zu $x \mapsto x$ ist.

8.3 Beispiel. Aus den Beispielen für die Ableitung erhalten wir sofort folgende Tabelle für das unbestimmte Integral:

21/1:13:30 (26.01.21)

f	F
1	x
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

.

Zu den Funktionen e^{x^2}, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ gibt es keine elementaren Formeln für die Stammfunktion.

8.4 Satz (Rechenregeln für das unbestimmte Integral)**.** *Seien $f, g\colon I \to \mathbb{K}$ Funktionen mit Stammfunktionen F bzw. G, und sei $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt*

21/1:22:20 (26.01.21)

a) $\int \alpha f = \alpha \int f$, $\int (f+g) = \int f + \int g$.

© Robert Denk 15.02.2021

b) Partielle Integration:

$$\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) + c.$$

c) Substitutionsregel

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c.$$

d) Speziell gilt $\int f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + c$ *und (falls* $f > 0$*)* $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c.$

Beweis. Das folgt alles sofort aus den Rechenregeln für die Ableitung. □

22/04:10
(29.01.21)

8.5 Beispiele. a) Mit partieller Integration folgt

$$\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \tfrac{1}{x}\,dx = x\ln x - x.$$

Hier wurde $f(x) = x$ und $g(x) = \ln x$ gesetzt.

b) Ebenfalls mit partieller Integration erhält man

$$\int \sin^2 x\,dx = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x\,dx = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x\,dx$$

und damit

$$\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x).$$

c) Genauso folgt

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x.$$

d) Wir wollen $\int xe^{x^2}\,dx$ mit Substitution berechnen und setzen dazu $g(x) := x^2$ sowie $f(y) := e^y$. Dann gilt $g'(x) = 2x$ und damit

$$\int xe^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int f(g(x))g'(x)\,dx = \tfrac{1}{2}F(g(x)) = \tfrac{1}{2}e^{x^2}.$$

Die Substitution lässt sich in etwas lässiger Schreibweise einfacher merken und berechnen: Setzt man $y := x^2$, so gilt $\frac{dy}{dx} = 2x$ und damit $dy = 2x\,dx$. Damit folgt

$$\int xe^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx = \tfrac{1}{2}\int e^y\,dy = \tfrac{1}{2}e^y = \tfrac{1}{2}e^{x^2}.$$

e) Zur Berechnung von $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ verwenden wir die Substitution $y = \sin x$. Es folgt $dy = \cos x\,dx$ und damit

$$\int \tfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int \tfrac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int y^{-1/2}\,dy = \frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{y} = 2\sqrt{\sin x}.$$

© Robert Denk 15.02.2021

8.6 Beispiel (Partialbruchzerlegung)**.** Wir wollen $\int \frac{x^3-2}{x(x-1)^2}\,dx$ mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung berechnen, die allgemein für Integrale der Form $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ mit Polynomen p, q funktioniert. Dies geschieht in folgenden Schritten: 22/20:30 (29.01.21)

(i) Polynomdivision mit Rest: Durch Division kann man erreichen, dass der Zählergrad kleiner als der Nennergrad wird. Der Nenner ist $x^3 - 2x^2 + x$ und damit ist

$$(x^3 - 2) : (x^3 - 2x^2 + x) = 1 \text{ Rest } 2x^2 - x - 2,$$

d.h. $\frac{x^3-2}{x(x-1)^2} = 1 + \frac{2x^2-x-2}{x(x-1)^2} = 1 + \frac{p_1(x)}{q(x)}$ mit $\deg p_1 < \deg q$. Im allgemeinen Fall kann man durch Polynomdivision eine Darstellung $\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$ mit einem Polynom $r(x)$ erzielen.

(ii) Form der Partialbruchzerlegung: Der Nenner hat die Nullstellen $x = 0$ (einfach) und $x = 1$ (doppelt) - im allgemeinen Fall muss man die Nullstellen des Polynoms q erst noch bestimmen. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung für $\frac{p_1(x)}{q(x)}$ lautet

$$\frac{2x^2 - x - 2}{x(x-1)^2} = \frac{c_1}{x} + \frac{d_1}{x-1} + \frac{d_2}{(x-1)^2}\,. \tag{8-1}$$

Man beachte, dass man allgemein bei einer k-fachen Nullstelle x_0 den Ansatz $\frac{c_1}{x-x_0} + \frac{c_2}{(x-x_0)^2} + \ldots + \frac{c_k}{(x-x_0)^k}$ verwendet und die Terme für alle Nullstellen auf der rechten Seite addiert.

(iii) Bestimmung der Koeffizienten: Um die Koeffizienten von (8-1) zu bestimmen, kann man mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren. Man erhält

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 2 &= c_1(x-1)^2 + d_1x(x-1) + d_2x \\ &= c_1x^2 - c_1 \cdot 2x + c_1 + d_1x^2 - d_1x + d_2x \\ &= (c_1 + d_1)x^2 + (-2c_1 - d_1 + d_2)x + c_1. \end{aligned}$$

Beide Seiten sind Polynome in x. Da beide Seiten für alle x übereinstimmen sollen, müssen die Koeffizienten dieser Polynome gleich sein. Der Koeffizientenvergleich der beiden Seiten liefert somit

$$\begin{aligned} c_1 + d_1 &= 2, \\ -2c_1 - d_1 + d_2 &= -1, \\ c_1 &= -2. \end{aligned}$$

Also gilt $c_1 = -2$, $d_1 = 4$, $d_2 = -1$.

(iv) Integration: Aus (i)-(iii) haben wir erhalten:

$$\frac{x^3 - 2}{x(x-1)^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\,.$$

© Robert Denk 15.02.2021

Dies kann nun einfach integriert werden: In Intervallen, die die Pole 0 und 1 nicht enthalten, folgt

$$\int \frac{x^3-2}{x(x-1)^2}\,dx = x - 2\ln|x| + 4\ln|x-1| + \frac{1}{x-1}\,.$$

In Schritt (iii) wurden die Koeffizienten durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich bestimmt. Alternativ kann man die Koeffizienten (vor allem bei einfachen Nullstellen x_0) auch bestimmen, indem man die Gleichung nur mit $x - x_0$ multipliziert. Multipliziert man z.B. (8-1) mit $x = x - 0$, erhält man

$$\frac{2x^2-x-2}{(x-1)^2} = c_1 + \Big(\frac{d_1}{x-1} + \frac{d_2}{(x-1)^2}\Big)x.$$

Für $x = 0$ folgt sofort $c_1 = -2$. Genauso kann man sofort $d_2 = -1$ durch Multiplizieren von (8-1) mit $(x-1)^2$ und Einsetzen von $x = 1$ erhalten. Die Bestimmung von d_1 kann dann durch Auflösen von (8-1) nach d_1 erfolgen. Falls das Nennerpolynom nur einfache Nullstellen besitzt, kann man alle Koeffizienten leicht auf diese Weise erhalten.

b) Treppenfunktionen und Regelfunktionen

Im letzten Kapitel wurde die Integration als Umkehroperation der Differentiation eingeführt. Wir wollen nun die Integration von einer anderen Seite her angehen, nämlich über den Zusammenhang mit der Berechnung von Flächeninhalten unterhalb einer Kurve, was zum bestimmten Integral führen wird.

22/54:00 (29.01.21)

8.7 Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und sei $I := (a, b)$. Dann heißt eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{K}$ eine Treppenfunktion, falls es eine Zerlegung (Partition) von (a, b) der Form $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ so gibt, dass $f|_{(x_{j-1},x_j)}$ eine konstante Funktion für alle $j = 1, \ldots, n$ ist. Wir setzen $\mathcal{T}(I;\mathbb{K}) := \{f\colon I \to \mathbb{K} \,|\, f \text{ ist Treppenfunktion}\}$.

22/58:50 (29.01.21)

8.8 Bemerkung. a) Über die Werte $f(x_i)$ wird keine Aussage gemacht.

b) Die Partition ist nicht eindeutig, man kann etwa noch Punkte hinzufügen.

c) Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{K}$ ist genau dann eine Treppenfunktion, falls es $x_1, \ldots, x_{n-1} \in I$ mit $a =: x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n := b$ und $f_j \in \mathbb{K}$ $(j = 1, \ldots, n)$ gibt mit

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j \chi_{(x_{j-1},x_j)}(x) \quad (x \in I \setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}).$$

Dabei ist

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

© Robert Denk 15.02.2021

die charakteristische Funktion der Menge A (siehe Beispiel 1.12).

d) Falls f und g Treppenfunktionen sind, sind auch $f+g$ und fg Treppenfunktionen. Die Menge $\mathcal{T}(I;\mathbb{K})$ der Treppenfunktionen ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, der durch die Norm Norm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in I}|f(x)|$ zu einem normierten Raum wird. Es gilt $\mathcal{T}(I;\mathbb{K}) \subset B(I;\mathbb{K})$, wobei wieder $B(I;\mathbb{K})$ der Banachraum aller beschränkten Funktionen ist.

8.9 Definition. Der Abschluss $\mathcal{R}(I;\mathbb{K}) := \overline{\mathcal{T}(I;\mathbb{K})} \subset B(I;\mathbb{K})$ der Treppenfunktionen bzgl. der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ heißt der Raum aller Regelfunktionen von I nach $\mathbb{K}$. 22/1:10:00 (29.01.21)

Als abgeschlossener Teilraum des Banachraums $B(I;\mathbb{K})$ ist auch $\mathcal{R}(I;\mathbb{K})$ ein Banachraum.

8.10 Definition. Seien $I = (a,b)$ und $f\colon I \to \mathbb{K}$ eine Treppenfunktion. Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Partition mit $f|_{(x_{j-1},x_j)} = f_j$ für $j = 1,\ldots,n$. Dann heißt 22/1:18:50 (29.01.21)

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j - x_{j-1})$$

das (bestimmte) Integral von f über (a,b), siehe Zeichnung 8.1. Man schreibt auch $\int_I f := \int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx$ und setzt $\int_a^a f(x)\,dx := 0$ sowie $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$.

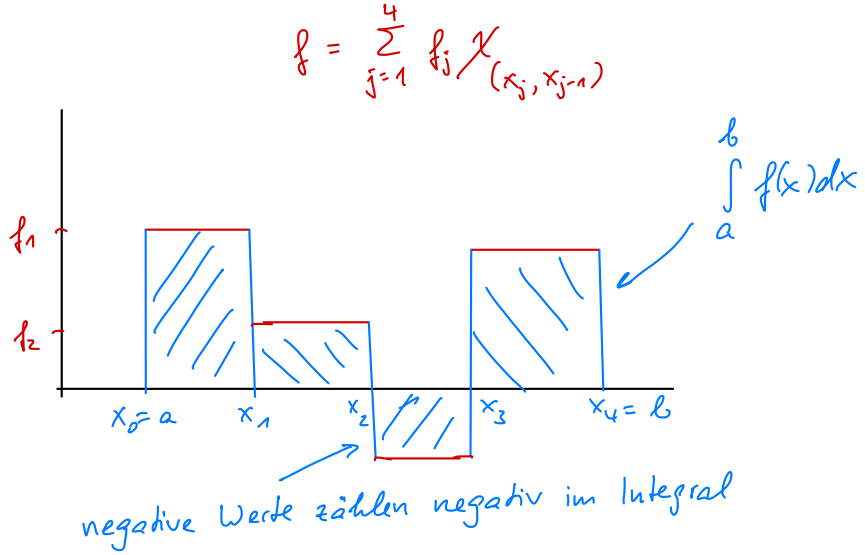


Abbildung 8.1: Treppenfunktionen und das bestimmte Integral

© Robert Denk 15.02.2021

23/04:40
(02.02.21)

8.11 Definition und Satz. *Sei $I = (a, b)$ mit $a < b$.*

a) Die Abbildung

$$\Phi\colon \mathcal{T}(I;\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

ist linear, d.h. es gilt $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$ für alle $f, g \in \mathcal{T}(I;\mathbb{K})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Es gilt

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \le (b-a)\|f\|_\infty \quad (f \in \mathcal{T}(I;\mathbb{K})), \tag{8-2}$$

damit ist Φ stetig.

b) Damit existiert genau eine lineare und stetige Fortsetzung $\widetilde{\Phi}\colon \mathcal{R}(I;\mathbb{K})$ von Φ. Für $f \in \mathcal{R}(I;\mathbb{K})$ ist $\widetilde{\Phi}(f)$ folgendermaßen definiert: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(I;\mathbb{K})$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann gilt $\widetilde{\Phi}(f) := \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)$. Für Regelfunktionen $f \in \mathcal{R}(I;\mathbb{K})$ schreibt man wieder $\int_a^b f(x)\,dx := \widetilde{\Phi}(f)$. Die Abschätzung (8-2) gilt für alle $f \in \mathcal{R}(I;\mathbb{K})$.

Beweis. a) Die Linearität von Φ folgt direkt aus der Definition, die Abschätzung (8-2) erhält man aus

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| = \Big|\sum_{j=1}^n f_j(x_j - x_{j-1})\Big| &\le \sum_{j=1}^n |f_j|\,(x_j - x_{j-1}) \\ &\le \|f\|_\infty \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \|f\|_\infty (b-a).\end{aligned}$$

Die Stetigkeit in a) folgt aus der Linearität und (8-2): Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(I;\mathbb{K})$ eine Folge von Treppenfunktionen ist mit $f_n \to f \in \mathcal{T}(I;\mathbb{K})$ $(n \to \infty)$, so gilt $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ und damit $|\Phi(f_n) - \Phi(f)| \le (b-a)\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$. Also ist Φ folgenstetig.

b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(I;\mathbb{K})$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, und wegen (8-2) ist auch $(\Phi(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Cauchyfolge und somit konvergent. Also existiert $\Phi(f) := \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)$. Zu zeigen ist noch, dass $\Phi(f)$ wohldefiniert ist, d.h. dass der Wert $\Phi(f)$ nicht von der Wahl der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt. Sei dazu $(\widetilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(I;\mathbb{K})$ eine weitere Folge mit $\|\widetilde{f}_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann folgt $\|f_n - \widetilde{f}_n\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$, und mit (8-2) folgt $|\Phi(\widetilde{f}_n) - \Phi(f_n)| \to 0$ $(n \to \infty)$. Also gilt $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\widetilde{f}_n)$.

Die Abschätzung (8-2) bleibt auch im Limes erhalten und gilt damit auch für Regelfunktionen. □

© Robert Denk 15.02.2021

8.12 Beispiel. Sei $I = (0,1)$, $f\colon I \to \mathbb{R}, f(x) := x$. Für $n \in \mathbb{N}$ wähle die Treppenfunktion 23/23:50 (02.02.21)

$$f_n\Big|_{(\frac{j-1}{n},\frac{j}{n})} := \tfrac{j-1}{n} \quad (j = 1,\dots,n).$$

Dann gilt $\|f - f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$, also ist $f \in \mathcal{R}(I;\mathbb{R})$. Für die Integrale erhält man

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{j=1}^n \tfrac{j-1}{n}\,\tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n (j-1) = \tfrac{1}{n^2}\,\tfrac{n(n-1)}{2} = \tfrac{n-1}{2n}.$$

Also gilt

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Wir werden später sehen, dass man das Integral leichter unter Verwendung der Stammfunktion $F(x) = \frac{x^2}{2}$ berechnen kann, denn es gilt $\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\big|_{x=0}^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$.

Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen.

8.13 Satz. *Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := (a,b)$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(I;\mathbb{K})$ genau dann, wenn f überall in $[a,b]$ einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert besitzt (an den Intervallenden jeweils nur einer der beiden Grenzwerte). Insbesondere ist jede in $[a,b]$ stetige Funktion eine Regelfunktion.* 23/30:40 (02.02.21)

c) Wichtige Sätze zur Integration

Im Folgenden seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := (a,b)$.

8.14 Satz (Rechenregeln für das bestimmte Integral)**.** *Für $f,g \in \mathcal{R}(I;\mathbb{K})$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt* 23/36:50 (02.02.21)

(i) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$, $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$,

(ii) *für $c \in (a,b)$ gilt* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$,

(iii) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt zusätzlich

(iv) *Falls $f \ge 0$, so ist* $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$,

(v) $(b-a)\inf_{x\in(a,b)} f(x) \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\sup_{x\in(a,b)} f(x)$.

Beweis. Das gilt alles für Treppenfunktionen und bleibt im Grenzwert erhalten. □

© Robert Denk 15.02.2021

23/47:20 (02.02.21)

8.15 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei $f \in C([a,b];\mathbb{R})$. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(x_0).$$

Beweis. Für $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$ gilt nach Satz 8.14 (v)

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0).$$

□

Für den Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral betrachten wir $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$. Wir werden zeigen, dass F Lipschitz-stetig ist, was wir im allgemeinen Setting definieren wollen.

23/55:20 (02.02.21)

8.16 Definition. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f Lipschitz-stetig, falls ein $L \ge 0$ existiert mit

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \le L\|x_1 - x_2\|_X \quad (x_1, x_2 \in X).$$

Die Funktion f heißt Hölder-stetig mit Exponent $\alpha \in (0,1)$, falls ein $C \ge 0$ existiert mit

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \le L\|x_1 - x_2\|_X^\alpha \quad (x_1, x_2 \in X).$$

Man sieht sofort, dass Lipschitz- und Hölder-stetige Funktionen stetig sind.

23/1:00:30 (02.02.21)

8.17 Satz. *Sei $f \in \mathcal{R}(I;\mathbb{K})$, und sei $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ $(x \in [a,b])$. Dann gilt:*

a) Für $x, y \in [a,b]$ ist $|F(x) - F(y)| \le \|f\|_\infty |x-y|$, d.h. F ist Lipschitz-stetig und damit stetig.

b) Für alle $x \in [a,b]$ existieren die links- und rechtsseitigen Ableitungen, und es gilt

$$F'_\pm(x) := \lim_{h\searrow 0} \frac{F(x\pm h) - F(x)}{\pm h} = f(x\pm 0) := \lim_{h\searrow 0} f(x \pm h).$$

Beweis. a) O.E. sei $x < y$. Dann gilt

$$|F(y) - F(x)| = \Big|\int_x^y f(t)\,dt\Big| \le \int_x^y |f(t)|\,dt \le \|f\|_\infty (y-x).$$

© Robert Denk 15.02.2021

Also ist F Lipschitz-stetig und damit stetig.

b) Sei $h > 0$, und sei $x \in [a, b)$. Dann gilt $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$. Nach Satz 8.13 besitzt f an der Stelle x einen rechtsseitigen Grenzwert $f(x+0)$. Wir schreiben $hf(x+0) = \int_x^{x+h} f(x+0)\,dt$ (beachte, dass beim zweiten Integral über die konstante Funktion $t \mapsto f(x+0)$ integriert wird) und erhalten

$$F(x+h) - F(x) - hf(x+0) = \int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x+0)\big)\,dt.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des rechtsseitigen Grenzwerts existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $t \in (x, x+\delta)$ die Abschätzung $|f(t) - f(x+0)| < \varepsilon$ gilt. Für $h \in (0, \delta)$ folgt

$$|F(x+h) - F(x) - hf(x+0)| \le \int_x^{x+h} |f(t) - f(x+0)|\,dt \le \varepsilon\, h$$

und damit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \to f(x+0) \quad (h \searrow 0).$$

Analog zeigt man die Existenz der linksseitigen Ableitung. □

8.18 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $f \in C([a,b], \mathbb{K})$, und sei $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ $(x \in [a,b])$. Dann ist $F \in C^1([a,b], \mathbb{K})$ mit $F' = f$.*

24/01:50 (05.02.21)

Beweis. Das folgt sofort aus Satz 8.17 b) wegen $f(x \pm 0) = f(x)$. □

8.19 Bemerkung. a) Nach dem Hauptsatz wird durch $F_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion mit $F_a(a) = 0$ definiert. Insbesondere besitzt jede stetige Funktion eine Stammfunktion. Da sich zwei Stammfunktionen nur um eine additive Konstante unterscheiden, gilt für jede Stammfunktion F von f die Gleichheit $F(x) = F_a(x) + F(a)$. Für $x = b$ erhält man

24/05:45 (05.02.21)

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_{x=a}^b$$

für jede Stammfunktion F von f. Man schreibt auch $F(x)\big|_a^b := F(x)\big|_{x=a}^b$.

b) Durch den Hauptsatz werden das unbestimmte und das bestimmte Integral verbunden. Damit gelten die Regeln für das unbestimmte Integral entsprechend auch für das bestimmte Integral. So gilt etwa die partielle Integration in der Form

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

© Robert Denk 15.02.2021

Integration durch Substitution hat die Form

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.$$

Man beachte dabei, dass die Grenzen entsprechend der Substitution $y := g(x)$ mit substituiert werden müssen.

Wie wir bereits bei der Stetigkeit gesehen haben, muss man bei Funktionenfolgen aufpassen, welche Konvergenz vorliegt. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies auch für das Differenzieren und Integrieren gilt.

24/17:00 (05.02.21)

8.20 Beispiele. a) Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stückweise linear mit $f_n(0) = 0, f_n(\frac{1}{n}) = n, f_n(\frac{2}{n}) = 0$ und $f_n(1) = 0$, siehe Abbildung 8.2. Dann gilt $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ punktweise, aber $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ konvergiert nicht gegen 0.

b) Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$. Dann gilt $f_n \to 0$ sogar gleichmäßig, aber $f_n'(x) = \cos(nx)$ konvergiert nicht gegen 0.

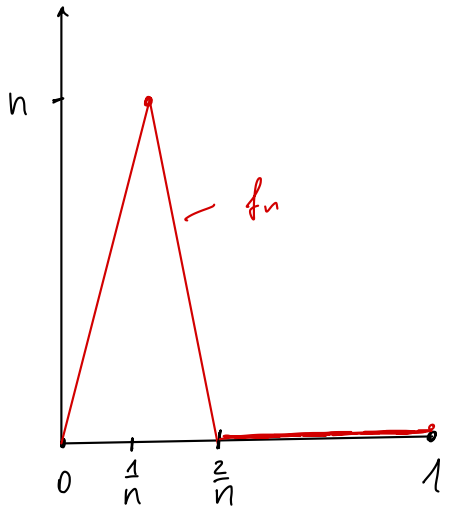


Abbildung 8.2: Die Funktion f_n aus Beispiel 8.20 a)

24/22:15 (05.02.21)

8.21 Satz. *Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}(I;\mathbb{K})$ und $f \in \mathcal{R}(I;\mathbb{K})$ mit $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ gleichmäßig. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. Das folgt sofort aus der Abschätzung

$$\Big|\int_a^b f_n - \int_a^b f\Big| = \Big|\int_a^b (f_n - f)\Big| \le \int_a^b |f_n - f| \le (b-a)\|f_n - f\|_\infty.$$

□

Der obige Satz zeigt, dass die gleichmäßige Konvergenz für die Konvergenz der Integrale ausreicht. Bei der Ableitung ist die Situation komplizierter: Hier braucht man die punktweise Konvergenz der Funktionenfolge und die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen, wie der folgende Satz zeigt.

24/26:10 (05.02.21)

8.22 Satz. *Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1([a,b];\mathbb{K})$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ mit $f_n \to f$ $(n\to\infty)$ punktweise. Die Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ seien eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ (und damit konvergent). Dann ist f stetig differenzierbar, und es gilt $f_n \to f$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig und $f_n' \to f'$ $(n\to\infty)$ gleichmäßig. Insbesondere ist*

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = (\lim_{n\to\infty} f_n)' = f'.$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt \quad (x\in[a,b]). \tag{8-3}$$

Wir erhalten

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(a) - f_m(a)| + (b-a)\|f_n' - f_m'\|_\infty.$$

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert, geht der erste Term auf der rechten Seite für $n,m\to\infty$ gegen 0, und wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Ableitungen auch der zweite. Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und damit sogar gleichmäßig konvergent gegen f. Sei $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$. Nach Satz 8.21 können wir in (8-3) den Grenzwert für $n\to\infty$ nehmen und erhalten

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Durch Ableiten (Satz 8.17 b)) folgt $f' = g$, somit gilt $f_n' \to f'$ gleichmäßig. □

Am obigen Beweis sieht man, dass es statt der punktweisen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar genügt, wenn $f_n(x_0) \to f(x_0)$ $(n\to\infty)$ für ein $x_0\in[a,b]$ gilt.

Im folgenden Satz werden iterierte Integrale betrachtet. Es handelt sich um einen Spezialfall des Satzes von Fubini[19], der im zweiten Semester allgemeiner behandelt wird. Wir verzichten hier auf einen Beweis.

[19] Guido Fubini, 19.1.1879 – 6.6.1943

© Robert Denk 15.02.2021

24/46:00 (05.02.21)

8.23 Satz (Vertauschen von Integralen). *Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $c < d$, und sei $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ stetig. Definiere*

$$F(t) := \int_a^b f(x,t)\,dx \quad (t \in [c,d]).$$

Dann ist $F\colon [c,d] \to \mathbb{K}$ stetig, und damit existiert $\int_c^d F(t)\,dt = \int_c^d \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt$. Analog existiert das Integral mit umgekehrter Integrationsreihenfolge, und es gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt.$$

Wir wollen nun den Integralbegriff erweitern, um Integrale wie $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ oder $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ berechnen zu können. Man beachte, dass $\frac{1}{\sqrt{x}}$ keine Regelfunktion in $[0,1]$ ist, da der rechtsseitige Grenzwert für $x \searrow 0$ nicht existiert. In beiden Fällen handelt es sich um ein uneigentliches Integral.

24/53:20 (05.02.21)

8.24 Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{K}$ eine Funktion mit $f|_{(a+\varepsilon,b)} \in \mathcal{R}((a+\varepsilon,b);\mathbb{K})$ für alle $\varepsilon > 0$. Dann definiert man das uneigentliche Integral von f über (a,b) durch

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

falls dieser Limes existiert. Analog wird das uneigentliche Integral definiert, falls $f|_{(a,b-\varepsilon)}$ für alle $\varepsilon > 0$ eine Regelfunktion ist. Falls $c \in (a,b)$ und $f|_{(a,c-\varepsilon)}$ und $f|_{(c+\varepsilon,b)}$ jeweils Regelfunktionen sind, so definiert man das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx := \Big(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx\Big) + \Big(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\Big),$$

falls beide Limiten existieren. Man definiert den Cauchyschen Hauptwert (englisch: principal value) des Integrals

$$\text{p.v.} \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Big(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\Big),$$

falls dieser Limes existiert.

Analog werden die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$
$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

© Robert Denk 15.02.2021

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \big(\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,dx\big) + \big(\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx\big),$$
$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)\,dx,$$

falls die jeweiligen Limiten existieren.

8.25 Beispiele. a) Es gilt

24/1:06:50 (05.02.21)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0} 2x^{1/2}\Big|_{x=\varepsilon}^1 = 2\lim_{\varepsilon\searrow 0}(1-\varepsilon^{1/2}) = 1,$$

insbesondere existiert das uneigentliche Integral.
b) Wegen $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = -\ln\varepsilon \to \infty$ $(\varepsilon\searrow 0)$ und $\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx = \ln\varepsilon \to -\infty$ $(\varepsilon\searrow 0)$ existiert das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ nicht. Allerdings gilt

$$\text{p.v.}\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\Big(\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx\Big) = \lim_{\varepsilon\searrow 0}(\ln\varepsilon - \ln\varepsilon) = 0.$$

8.26 Bemerkung (Riemann-Integral)**.** Wir haben das Integral für Regelfunktionen, also gleichmäßige Grenzwerte von Treppenfunktionen definiert. Allgemeinere Zugänge sind das Lebesgue[20]-Integral (welches im zweiten Semester betrachtet wird) und das Riemann[21]-Integral. Beim Riemann-Integral betrachtet man zu $f\colon [a,b]\to\mathbb{K}$ wieder Zerlegungen $Z\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und die zugehörigen Unter- und Obersummen

24/1:19:50 (05.02.21)

$$S_Z^u(f) := \sum_{j=1}^n \Big(\inf_{x\in[x_{j-1},x_j)} f(x)\Big)(x_j - x_{j-1}),$$
$$S_Z^o(f) := \sum_{j=1}^n \Big(\sup_{x\in[x_{j-1},x_j)} f(x)\Big)(x_j - x_{j-1}).$$

Eine Funktion heißt Riemann-integrierbar, falls

$$\sup\big\{S_Z^u(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a,b]\big\} = \inf\big\{S_Z^o(f) : Z \text{ ist eine Zerlegung von } [a,b]\big\}.$$

Man kann zeigen, dass jede Regelfunktion Riemann-integrierbar ist, aber nicht umgekehrt.

[20] Henri Léon Lebesgue, 28.6.1875 – 26.7.1941
[21] Bernhard Riemann, 17.9.1826 – 20.7.1866

© Robert Denk 15.02.2021

9. Funktionenreihen

25/02:10 (09.02.21)

9.1 Worum geht's? Wir kommen noch einmal auf Funktionenreihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ zurück, die bereits in Abschnitt 5 b) kurz erwähnt wurden. Speziell betrachten wir Potenzreihen, d.h. Funktionenreihen mit $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$. Dabei werden wir auch gleich den Fall $z \in \mathbb{C}$, d.h. Funktionen $f_n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ betrachten. Viele Funktionen können tatsächlich lokal, also in einer Umgebung eines festen Punktes $z_0 \in \mathbb{C}$, in dieser Form geschrieben werden. Man erhält die Taylorreihe, deren Partialsummen als polynomiale Approximation der Funktion gesehen werden können.

a) Potenzreihen

Wir erinnern an die Situation bei Funktionenreihen $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mit Funktionen $f \colon I \to \mathbb{K}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$: Die Konvergenz der Reihe ist wie immer definiert als die Konvergenz der Folge der Partialsummen $s_N := \sum_{n=0}^{N} f_n$, wobei man zwischen punktweiser Konvergenz $s_N(x) \to f(x)$ $(N \to \infty)$ für alle $x \in I$ und gleichmäßiger Konvergenz $\|s_N - f\|_\infty \to 0$ $(N \to \infty)$ unterscheiden muss. Dabei ist $\|f\|_\infty := \sup_{x \in I} |f(x)|$ wieder die Supremumsnorm. Die absolute Konvergenz der Reihe bedeutet, dass für jedes $x \in I$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ konvergiert.

Wie bei Zahlen gibt es auch hier das Majorantenkriterium, siehe Lemma 5.22: Falls $\|f_n\|_\infty \le c_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig gegen $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

In Verallgemeinerung der bisherigen Situation betrachten wir Potenzreihen in $\mathbb{C}$, d.h. $f_n \colon U \to \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ offen. Dabei heißt eine Funktion $f \colon U \to \mathbb{C}$ differenzierbar in U, falls für alle $z \in U$ der Limes $f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ existiert. Die Sätze über Vertauschen von Reihe und Ableitung bzw. Integral übertragen sich aus dem reellen Fall. Man erhält die folgenden Aussagen, wobei wie immer $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ sei.

25/09:30 (09.02.21)

9.2 Satz. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ und $f_n \colon U \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ Funktionen, wobei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen die Funktion $f \colon U \to \mathbb{C}$ konvergiere.*

a) Falls alle f_n stetig in U sind, so ist auch f stetig in U.

b) Falls alle f_n differenzierbar sind und die Reihe der Ableitungen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ gleichmäßig konvergiert, so ist auch f differenzierbar, und es gilt $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.

c) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a, b] \subset U$. Falls $f_n \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, so ist auch $f \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Im Folgenden betrachten wir speziell Potenzreihen, wobei wir wie schon in Abschnitt 6 a) auch komplexe Argumente zulassen. Somit betrachten wir Reihen der Form

© Robert Denk 15.02.2021

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $z_0 = 0$, alle Aussagen gelten aber analog auch für allgemeines z_0. Damit sei ab sofort

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit den entsprechenden Partialsummen $s_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ für $N \in \mathbb{N}_0$. Wie bisher sei $B(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ die offene Kreisscheibe um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$.

25/19:40 (09.02.21)

9.3 Satz. *Es gelte $s_N(w_0) \to f(w_0)$ $(N \to \infty)$ für ein $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (d.h. die Reihe konvergiere an der Stelle w_0). Dann gilt:*

a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |w_0|$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut. Die Konvergenz ist gleichmäßig in allen $\overline{B(0, r)}$ mit $r < |w_0|$.

b) Es gilt $f \in C^\infty(B(0, |w_0|); \mathbb{C})$, und für die k-te Ableitung ($k \in \mathbb{N}$) gilt

$$f^{(k)}(z) = \lim_{N \to \infty} s_N^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) a_n z^{n-k},$$

wobei die Konvergenz der Reihe wieder absolut und gleichmäßig in allen $\overline{B(0, r)}$ mit $r < |w_0|$ ist.

c) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-|w_0| < a < b < |w_0|$ gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Beweis. a) Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_0^n$ konvergiert, gilt $|a_n w_0^n| \to 0$ $(n \to \infty)$ und damit $|a_n w_0^n| \leq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Für diese n folgt

$$|a_n z^n| = |a_n w_0^n| \left| \frac{z^n}{w_0^n} \right| \leq \left(\frac{|z|}{|w_0|} \right)^n \leq \left(\frac{r}{|w_0|} \right)^n$$

für alle $z \in \overline{B(0, r)}$ mit $r < |w_0|$. Damit ist $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n$ mit $\theta := \frac{r}{|w_0|} < 1$ eine konvergente Majorante bzgl. $\| \cdot \|_\infty$ in $\overline{B(0, r)}$. Damit folgt die Aussage aus dem Majorantenkriterium.

b) Es gilt $s_N'(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n n z^{n-1}$, und damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n\theta^n$ wieder eine konvergente Majorante in $\overline{B(0, r)}$ für die Reihe der Ableitungen. Nach Satz 9.2 b) folgt die Aussage in b) für $k = 1$. Der Rest folgt durch Iteration.

c) folgt aus Satz 9.2 c). □

Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen.

© Robert Denk 15.02.2021

25/47:55 (09.02.21)

9.4 Satz (Abelscher Grenzwertsatz). *Falls* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *für ein* $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *konvergiert, so gilt*

$$f(w_0) = \lim_{r \nearrow 1} f(rw_0).$$

Dieser Satz besagt, dass man den Wert $f(w_0)$ der Reihe auf dem Rand des Kreises $B(0, |w_0|)$ als Grenzwert der Werte $f(rw_0)$ im Inneren erhält, falls die Reihe auf dem Rand konvergiert.

25/53:10 (09.02.21)

9.5 Bemerkung. Sei $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_0^n$ konvergiert, so folgt $|a_n w_0^n| \leq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$ und damit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{|w_0|}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit existiert $a := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, und es gilt $a \leq \frac{1}{|w_0|}$. Diese Zahl ist die Grundlage der folgenden Definition.

25/57:40 (09.02.21)

9.6 Definition. Der Konvergenzradius r der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ wird definiert als

$$r := \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{falls } a := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ existiert und } a \neq 0, \\ \infty, & \text{falls } a := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ existiert und } a = 0, \\ 0, & \text{falls } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ nicht existiert.} \end{cases}$$

25/1:00:30 (09.02.21)

9.7 Satz. *Sei* r *der Konvergenzradius der Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

a) Für $|z| < r$ *konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *absolut.*

b) Für $|z| > r$ *divergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

c) Für $|z| = r$ *kann man keine allgemeine Aussage treffen, die Reihe kann konvergieren oder divergieren.*

Beweis. a) Wähle $\rho \in (|z|, r)$. Dann gilt $a := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$ und damit $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$. Somit erhalten wir $|a_n||z|^n \leq (\frac{|z|}{\rho})^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$, und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{|z|}{\rho})^n$ ist wegen $\frac{|z|}{\rho} < 1$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

b) Angenommen, es existiert ein $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $|w_0| > r$ so, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_0^n$ konvergiert. Nach Bemerkung 9.5 folgt dann $a \leq \frac{1}{|w_0|} < \frac{1}{r}$ im Widerspruch zur Definition von r.

c) erhält man aus den nachfolgenden Beispielen. □

25/1:08:40 (09.02.21)

9.8 Beispiele. a) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert für $|z| < 1$ (mit Wert $\frac{1}{1-z}$ und divergiert für $|z| \geq 1$, hat also Konvergenzradius 1. Für jedes z auf dem Rand des Konvergenzkreises divergiert hier die Reihe.

© Robert Denk 15.02.2021

b) Die Exponentialreihe $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ und hat damit Konvergenzradius ∞.

9.9 Lemma (Logarithmus-Reihe). *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt* 25/1:14:20 (09.02.21)

$$\ln(1+z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j} = z - \frac{z}{2} + \frac{z}{3} - + \dots \tag{9-1}$$

(für $z \notin \mathbb{R}$ wird die rechte Seite als Definition von $\ln(1+z)$ verwendet). Die Reihe konvergiert auch noch für $z = 1$, und es gilt

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$$

Beweis. Wir betrachten die Reihe

$$g(w) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w^j}{j} \quad (w \in B(0,1)).$$

Für alle $w \in B(0,1)$ konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut, und für die Ableitung gilt

$$g'(w) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{w^j}{j} \Big)' = \sum_{j=1}^{\infty} w^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} w^j = \frac{1}{1-w}.$$

Für reelle $w \in (-1,1)$ gilt aber auch $\frac{1}{1-w} = -(\ln(1-w))'$. Somit besitzen $g(w)$ und die Funktion $w \mapsto -\ln(1-w)$ für alle $w \in (-1,1)$ dieselbe Ableitung. An der Stelle $w = 0$ haben beide Funktionen den Wert 0. Also folgt $g(w) = -\ln(1-w)$. Man setzt nun $z := -w$ und erhält Gleichheit (9-1) für alle $z \in (-1,1)$. Für komplexe z kann man (9-1) als Definition von $\ln(1+z)$ lesen.

Für $z = 1$ konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium, und sie besitzt den Wert $\ln 2$ nach dem Abelschen Grenzwertsatz. □

Man beachte, dass die Logarithmus-Reihe für $z = -1$ nicht konvergiert (harmonische Reihe). Dies ist also ein Beispiel, bei dem die Reihe für manche Werte auf dem Rand des Konvergenzkreises konvergiert und für manche divergiert.

9.10 Satz (Identitätssatz für Potenzreihen). *Seien die Reihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ beide für $|z| < \varepsilon$ konvergent, und es existiere eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $f(z_n) = g(z_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt $a_n = b_n$ $(n \in \mathbb{N})$.* 26/07:50 (12.02.21)

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. Es gilt $a_0 = f(0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(0) = b_0$. Definiere $f_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$ und $g_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-1}$. Dann gilt

$$f_1(z_n) = \frac{f(z_n) - a_0}{z_n} = \frac{g(z_n) - b_0}{z_n} = g_1(z_n),$$

und wie oben folgt $a_1 = f_1(0) = g_1(0) = b_1$. Iterativ erhält man die Behauptung. □

b) Die Taylorreihe

Im Folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

26/17:00 (12.02.21)

9.11 Satz (Satz von Taylor)**.** *Seien $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ und $f^{(n)}$ differenzierbar in (a,b). Sei $x \in (a,b]$. Dann existiert ein $\xi \in (a,x)$ mit*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Die Summe heißt Taylorpolynom der Ordnung n, der letzte Term das Restglied der Taylorreihe.

Beweis. Zu $m \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $g\colon [a,x] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(y) := f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(y)}{j!}(x-y)^j - m\frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nach Konstruktion gilt $g(x) = 0$. Wir wählen m so, dass auch $g(a) = 0$ gilt. Die Funktion g ist in $[a,x]$ stetig und in (a,x) differenzierbar mit Ableitung

$$g'(y) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - m\frac{(x-y)^n}{n!}$$

(Produktregel und Teleskopsumme). Nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in (a,x)$ mit $g'(\xi) = 0$. Für dieses ξ folgt $m = f^{(n+1)}(\xi)$ und damit

$$0 = g(a) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

□

26/30:45 (12.02.21)

9.12 Bemerkung. Dies ist die Darstellung des Restglieds nach Lagrange[22]. Eine äquivalente Darstellung ist

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + R_n(x,h)$$

mit $R_n(x,h) = \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$ für ein $\theta \in (0,1)$.

[22] Joseph Louis Lagrange, 25.1.1736 – 10.4.1813

© Robert Denk 15.02.2021

9.13 Definition. Sei $f \in C^\infty([a,b];\mathbb{K})$. Dann heißt die Reihe

26/33:40 (12.02.21)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

die Taylorreihe von f an der Stelle a.

9.14 Bemerkung. Man beachte, dass nichts über die Konvergenz der Reihe gesagt wird! Um zu zeigen, dass die Taylorreihe gegen $f(x)$ konvergiert, muss man zeigen, dass das Restglied gegen 0 konvergiert. Auch für $f \in C^\infty([a,b],\mathbb{K})$ kann es passieren, dass die Reihe nur für $x = a$ konvergiert, aber auch, dass die Taylorreihe konvergiert, aber nicht gegen $f(x)$. Dies ist in folgendem Beispiel der Fall: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

26/36:20 (12.02.21)

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Somit ist die Taylorreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut und gleichmäßig konvergent (gegen 0), aber der Wert der Reihe ist für alle $x \neq 0$ verschieden von $f(x)$.

9.15 Satz (Zweite Restglieddarstellung). *Sei $f \in C^{n+1}([a,b];\mathbb{K})$. Dann gilt für $x \in (a,b]$*

26/41:30 (12.02.21)

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Beweis. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und partieller Integration erhält man (wähle $t \mapsto -(x-t)$ als Stammfunktion der konstanten Funktion $t \mapsto 1$)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x 1 \cdot f'(t)\,dt \\ &= f(a) - (x-t)f'(t)\Big|_{t=a}^{x} + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) - \frac{(x-t)^2}{2}f''(t)\Big|_{t=a}^{x} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f^{(3)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Iterativ erhält man die Behauptung. □

9.16 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{K}$ offen, $z_0 \in U$, und $f\colon U \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Falls $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für alle $z \in U$ gilt, so ist diese Reihe bereits die Taylorreihe an der Stelle z_0, d.h. es gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

26/49:00 (12.02.21)

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. Da U offen ist, konvergiert die Reihe in einer Kugel $B(z_0, \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$, also ist der Konvergenzradius der Reihe größer als 0. Da die Reihe und alle Ableitungen in $\overline{B(z_0, \varepsilon/2)}$ gleichmäßig konvergieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z_0) &= a_0, \\ f'(z_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}\Big|_{z=z_0} = a_1, \\ f''(z_0) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(z-z_0)^{n-2}\Big|_{z=z_0} = a_2 \cdot 2! \end{aligned}$$

Iterativ folgt die Behauptung. □

26/56:00 (12.02.21)

9.17 Beispiele. a) Nach Lemma 9.16 sind

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ \sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

alles die Taylorreihen der entsprechenden Funktionen an der Stelle $z_0 = 0$.

b) Nach Lemma 9.9 gilt $\ln(1+w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{w^n}{n}$ für $|w| < 1$. Setzt man $z = 1 + w$, erhält man

$$\ln(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n} \quad (|z-1| < 1).$$

Dies ist nach Lemma 9.16 die Taylorreihe des Logarithmus an der Stelle $z_0 = 1$.

26/1:00:30 (12.02.21)

9.18 Satz (Arctan-Reihe)**.** *Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$ gilt*

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots \tag{9-2}$$

Insbesondere ist

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$$

© Robert Denk 15.02.2021

Beweis. Für $x \in [0,1)$ gilt (verwende die geometrische Reihe und gleichmäßige Konvergenz in $[0,x]$)

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.\end{aligned}$$

Für $x = 1$ konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium und ist gleich $\arctan 1$ nach dem Abelschen Grenzwertsatz. Wegen $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ folgt die letzte Formel. Für $x \in [-1,0]$ verwendet man, dass beide Seiten von (9-2) punktsymmetrisch in x sind. □

9.19 Satz (Binomialreihe)**.** *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert man den Binomialkoeffizienten durch*

26/1:15:40 (12.02.21)

$$\binom{\alpha}{n} := \prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha-k+1}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}.$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

Beweisidee. Man betrachtet die Funktion $f(x) := (1+x)^\alpha (= e^{\alpha\ln(1+x)})$. Wegen

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

folgt $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$, und die Binomialreihe ist die Taylorreihe der Funktion f an der Stelle 0. Der Beweis besteht nun in einer (technischen) Abschätzung des Restglieds in der Darstellung von Satz 9.15. □

© Robert Denk 15.02.2021

Literatur

[1] H. Amann and J. Escher. *Analysis. II.* Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[2] M. Barner and F. Flohr. *Analysis. II.* de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 1989.

[3] R. Denk and R. Racke. *Kompendium der Analysis. Ein kompletter Bachelor-Kurs von reellen Zahlen zu partiellen Differentialgleichungen. Band 1: Differential- und Integralrechnung, gewöhnliche Differentialgleichungen.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011.

[4] O. Forster. *Analysis* 2. *Differentialrechnung im* $\mathbf{R}^n$. Verlag Vieweg, Braunschweig, 1977. Gewöhnliche Differentialgleichungen, Rororo Vieweg: Mathematik Grundkurs, No. 31.

[5] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2.* Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, sixth edition, 1991.

[6] M. Hieber. *Analysis I.* Springer Berlin Heidelberg, 2018.

[7] M. Junk and J. Treude. *Beweisen lernen Schritt für Schritt: für einen gelungenen Einstieg ins Mathestudium.* Springer, Berlin Heidelberg, 2020.

[8] W. Rudin. *Reelle und komplexe Analysis.* R. Oldenbourg Verlag, Munich, 1999. Translated from the third English (1987) edition by Uwe Krieg.

[9] R. Walter. *Einführung in die Analysis. 2.* de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2007.

© Robert Denk 15.02.2021

Index

Äquivalenz, 3
Überdeckung
    offene, 46
überabzählbar, 25

Abbildung, 8
Abel, N. H., 19
abelsch, 19
Abelscher Grenzwertsatz, 100
Ableitung, 74
Abschluss, 44
absolut konvergent, 33
Absolutbetrag, 21, 23
abzählbar, 25
Additionstheoreme, 67
Äquivalenzrelation, 13
alternierende Reihe, 34
antisymmetrisch, 13
Arctan-Reihe, 104
Arcus-Cosinus, 70
Arcus-Sinus, 70
Arcus-Tangens, 70
Assoziativgesetz, 13
Assoziativität, 7, 19

Ball, 41
Banachraum, 43
Bernoulli, Jak. (I), 16
Bernoullische Ungleichung, 16
beschränkt, 20, 45
beschränkte Funktion, 54
bestimmt divergent gegen Unendlich, 28
bestimmtes Integral, 89
Betrag, 23
Beweis
    indirekter, 4
Beweis durch Widerspruch, 4
bijektiv, 9
Bild, 8
Binomialkoeffizient, 16, 105
Binomialreihe, 105
Binomische Formel, 17
Bolzano, B., 45
Borel, É, 47

Cantor, G., 26
Cantorsches Diagonalverfahren, 26
Cauchy, A.-L., 28
Cauchy-Folge, 41
Cauchy-Produkt von Reihen, 37
Cauchyfolge, 28
Cauchyscher Hauptwert, 96
charakteristische Funktion, 9
Cohen, P., 27
Cosinus, 66
Cosinus hyperbolicus, 70
Cotangens hyperbolicus, 70

Dedekind, R., 21
Dedekindscher Schnitt, 21
Definitionsbereich, 8
dicht, 22, 41
Differenzenquotient, 74
differenzierbar, 74
diskrete Metrik, 41
Distributivgesetz, 13, 19
Distributivität, 7
divergent, 28
    Reihe, 32
divergente Reihe, 32
Dreiecksungleichung, 22, 40
Durchschnitt, 5, 7

Einheitswurzeln, 73
Einschränkung, 9
Element, 5
endlich, 25
endliche Teilüberdeckung, 46
Erweiterter Mittelwertsatz, 83
euklidische Metrik, 40
Eulersche Formel, 66
Eulersche Zahl, 38

Exponentialfunktion, 38
Exponentialreihe, 38
Extremum, 79

Fakultät, 16
fast alle, 32
Folge, 28
folgenstetig, 52
Fortsetzung, 9
Fubini, G., 95
Funktion, 8
    beschränkt, 54
    differenzierbare, 74
    Heaviside-, 52
    rechtsseitig differenzierbare, 74
    stetig differenzierbare, 76
Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, 38

ganze Zahl, 18
ganze Zahlen, 7
geometrische Reihe, 33
gleichmäßig konvergent, 57
gleichmächtig, 25
Gödel, K., 27
Graph, 8
Grenzwert, 28, 41
Grenzwertsätze, 31
Gruppe, 19
    abelsche, 19
    kommutative, 19

Häufungspunkt, 43, 45
Hölder-stetig, 92
Halbordnung, 13
harmonische Reihe, 32
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 93
Heaviside, O.L., 52
Heine, E., 47
Hilbertraum, 43
hyperbolische Funktionen, 70

Idempotenz, 7
Identität, 9
Identitätssatz für Potenzreihen, 101
imaginäre Einheit, 23
Imaginärteil, 23
Implikation, 3
Indexverschiebung, 18
injektiv, 9
innerer Punkt, 43
Inneres, 43
Integral
    bestimmtes, 89
    Riemann-, 97
    unbestimmtes, 85
    uneigentliches, 96
Integration
    durch Substitution, 86
    partielle, 86
Intervalle, 22
Intervallschachtelung, 48
inverses Element, 19
isolierter Punkt, 44

Jensensche Ungleichung, 84

Kardinalität, 25
kartesisches Produkt, 8
Kettenregel, 77
kleinstes Element, 14
Koeffizientenvergleich, 87
Körper, 19
kommutativ, 19
Kommutativgesetz, 13
Kommutativität, 7
kompakt, 46
Komplement, 5
komplexe Zahl, 23
komplexe Zahlen, 7
konkav, 84
Kontinuumshypothese, 27
konvergent, 28, 41
    absolut, 33
    gleichmäßig, 57
    punktweise, 57
    Reihe, 32
konvergente Reihe, 32

© Robert Denk 15.02.2021

Konvergenz, 28
Konvergenzradius, 100
konvex, 84
Kotangens, 70
Kugel, 41

Länge, 23
Lagrange, J.L., 102
Lagrange-Darstellung des Restglieds, 102
Lebesgue, H. L., 97
leere Menge, 5
Leibniz, G.W., 34
Leibniz-Kriterium, 34
de L'Hospital, G.F.A., 83
Limes, 28, 52
Limes inferior, 46
Limes superior, 46
linksseitiger Limes, 52
Lipschitz-stetig, 92
Logarithmus, 61
Logarithmus-Reihe, 101
lokales Extremum, 79
lokales Maximum, 79
lokales Minimum, 79

Majorante, 34
Majorantenkriterium, 34
Maximum
    globales, 79
    lokales, 79
Menge, 5
    Durchschnitts-, 5
    Komplement-, 5
    leere, 5
    Teil-, 5
    Vereinigungs-, 5
Mengenlehre, 5
Metrik, 40
    diskrete, 41
Minimum
    globales, 79
    lokales, 79
Mittelwertsatz der Integralrechnung, 92
monoton, 29
    fallend, 29
    wachsend, 29
monoton fallend, 56
monoton steigend, 55
monotone Funktion, 56
de Morgan, A., 4

Nachdifferenzieren, 77
natürliche Zahl, 6
natürliche Zahlen, 12
natürlicher Logarithmus, 61
Negation, 3
neutrales Element, 19
Norm, 42
normierter Raum, 42

obere Schranke, 20
Obersumme, 97
offen, 43, 50
offene Überdeckung, 46
on oben beschränkt, 20
onjugiert komplexe Zahl, 23
Ordnung auf $\mathbb{N}$, 14

Partialbruchzerlegung, 87
Partialsumme, 32
partielle Integration, 86
Partition, 88
Peano, G., 12
Polarkoordinaten, 71
Potenzmenge, 7
Prähilbertraum, 43
Produktregel, 76
punktweise konvergent, 57

Quotientenkriterium, 35
Quotientenregel, 76

Rand, 45
rationale Zahl, 18
rationale Zahlen, 7
Raum
    topologischer, 50
Raum mit Skalarprodukt, 43
Realteil, 23

© Robert Denk 15.02.2021

rechtsseitiger Limes, 52
reelle Zahlen, 7
reflexiv, 13
Regel von L'Hospital, 83
Regelfunktionen, 89
Reihe, 32
  alternierend, 34
  Arctan-, 104
  Binomial-, 105
  geometrische, 33
  harmonische, 32
  Logarithmus-, 101
  Taylor-, 103
Relation, 13
  Äquivalenz-, 13
  antisymmetrische, 13
  reflexive, 13
  symmetrische, 13
  transitive, 13
Restglied der Taylorreihe, 102
  Lagrange-Darstellung, 102
Riemann, B., 97
Riemann-Integral, 97
Rolle, M., 80
Russel, B., 6

Sägezahnfunktion, 78
Satz
  Abelscher Grenzwert-, 100
  Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 93
  Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 81
  Mittelwertsatz der Integralrechnung, 92
  von Bolzano-Weierstraß, 45
  von Fubini, 95
  von Rolle, 80
  von Taylor, 102
  Zwischenwert-, 54
Satz von der lokalen Umkehrbarkeit, 82
Schnittmenge, 5
Schranke, 20
Sinus, 66
Sinus hyperbolicus, 70
Skalarprodukt, 43
Sprungstelle, 52
Stammfunktion, 85
Standardmetrik, 40
stetig
  Hölder-, 92
  Lipschitz-, 92
stetig differenzierbar, 76
streng monoton, 29
streng monoton fallend, 56
streng monoton wachsend, 56
Substitutionsregel, 86
Supremumsnorm, 57
surjektiv, 9
symmetrisch, 13

Tangens, 70
Tangens hyperbolicus, 70
Tangente, 74
Tangentensteigung, 74, 81
Tautologien, 4
Taylorpolynom, 102
Taylorreihe, 103
Teilüberdeckung, 46
Teilmenge, 5
tertium non datur, 3
Topologie, 50
topologischer Raum, 50
transitiv, 13
Treppenfunktion, 88

Umgebung, 45
Umordnungssatz, 36
unbestimmtes Integral, 85
uneigentliches Integral, 96
unendlich, 25
unendliche Reihe, 32
Ungleichung von Jensen, 84
unstetig, 52
untere Schranke, 20
Untersumme, 97
Urbild, 8

Vereinigung, 7

© Robert Denk 15.02.2021

Vereinigungsmenge, 5
Vertauschen von Integralen, 96
vollständig, 41
vollständig geordnet, 13
vollständige Induktion, 14
Vollständigkeitsaxiom, 21
von unten beschränkt, 20

Wahrheitstafeln, 3
Wahrheitswert, 3
Weierstraß, K.T.W., 45
Wertebereich, 8
wohldefiniert, 90
wohlgeordnet, 14
Wohlordnungssatz, 14
Wurzel, 61
Wurzelkriterium, 35

Zahl
    ganze, 7, 18
    komplexe, 7, 23
    natürliche, 6, 12
    rationale, 7, 18
    reelle, 7
Zahlenfolge, 28
Zwischenwertsatz, 54

© Robert Denk 15.02.2021