Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Algebra
Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1
Geben Sie einen Beweis von Proposition 4 und Proposition 5 Teil (1) aus Vorlesung 15, das heißt:
Sei G eine Gruppe und sei $x \in G$.

(a) Zeigen Sie, dass:

(i) $|x| = \infty$ impliziert $|x^j| = \infty$ für alle $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

(ii) $|x| = n < \infty$ impliziert $|x^j| = \frac{n}{\text{ggT}(n,j)}$

(iii) $|x| = n < \infty$ und $j|n$ impliziert $|x^j| = n/j$ für $j \in \mathbb{N}$

(b) Angenommen, dass $|x| = \infty$. Zeigen Sie, dass x^j genau dann $\langle x \rangle$ erzeugt, wenn $j = \pm 1$ ist.

Aufgabe 8.2
Finden Sie alle Untergruppen von A_4. Welche davon sind normal?

Aufgabe 8.3

Zeigen Sie, dass jede Untergruppe vom Index 2 einer Gruppe G normal in G ist. Geben Sie ein Beispiel einer Untergruppe einer Gruppe G vom Index 3 an, die nicht normal in G ist.

Aufgabe 8.4
Sei p eine Primzahl.

(a) Sei F ein endlicher Körper mit char$F = p$. Zeigen Sie, dass F von der Mächtigkeit p^n für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass ein Zerfällungskörper von $x^{p^n} - x$ über $\mathbb{Z}_p$ genau p^n Elemente hat.

(c) Sei F ein Körper mit p^n Elementen. Zeigen Sie, dass $x^{p^n} = x$ für alle $x \in F$ gilt. Folgern Sie, dass F ein Zerfällungskörper von $x^{p^n} - x$ über $\mathbb{Z}_p$ ist. Folgern Sie, dass es bis auf Isomorphie nur einen Körper mit p^n Elementen gibt.

Abgabe **Montag, 14.01.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

---

http://www.math.uni-konstanz.de/~gregory/algebra.html