Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Algebra
Übungsblatt 6

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.
Aufgabe 6.1
Ein Polynom heißt homogen, falls sämtliche Monome, aus denen das Polynom besteht, den gleichen Grad haben.
Sei K ein Körper. Sei $p \in K[x_1, ..., x_n]$. Die Homogenisierung von p ist

$$x_0^d p(x_1/x_0, ..., x_n/x_0) \in K[x_0, ..., x_n]$$

wobei d der Grad von p ist.
Sei

$$p := \sum c_{d_1,...,d_n} x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n} \in K[x_1, ..., x_n]$$

mit Grad $p = d$. Zeigen Sie, dass die Homogenisierung von p gleich

$$\sum c_{d_1,...,d_n} x_0^{d - \sum d_i} x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n} \in K[x_0, ..., x_n]$$

ist.
Finden Sie die Homogenisierung von

$$1 - 3x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 + x_1^4 x_2^2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$$

und

$$1 + x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_3^2 - 4x_1 x_2 x_3 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3].$$

Aufgabe 6.2

(a) Ist das Polynom

$$x^4 + 9x^2 + 3x + (1 + \sqrt{-2})$$

über $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ irreduzibel?

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das Polynom $x^{2^n} + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.
Hinweis: Für Teil (b) betrachten Sie das Polynom $(x + 1)^{2^n} + 1$.

Aufgabe 6.3
In der Vorlesung (Montag 19. November) haben wir bewiesen, dass, falls R ein faktorieller Ring ist, alle Nichteinheiten $r \in R[x] \backslash \{0\}$ eine Darstellung als Produkt von irreduzibelen Elementen haben. Zeigen Sie, dass diese Darstellung eindeutig bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit ist.

Aufgabe 6.4
Sei F/K eine Körpererweiterung mit char $K \neq 2$. Zeigen Sie, dass, $c \in K$ mit $F = K(\sqrt{c})$ existiert, falls $[F : K] = 2$ ist.
Geben Sie ein Gegenbeispiel für char $K = 2$.

Aufgabe 6.5 Zusatzaufgabe für Interessierte

(a) Sei K ein Körper und x transzendent über K. Sei

$$z := \frac{x^3}{x+1} \in K(x).$$

Zeigen Sie, dass z transzendent über K ist und $F(x)/F(z)$ eine algebraische Körpererweiterung ist. Finden Sie das Minimalpolynom von x über $F(z)$.

Abgabe **Montag, 17.12.2012** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.