Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Algebra
Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Ordnung eines r-Zyklus in S_n gleich r ist.

Seien $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ paarweise disjunkten Zyklen in S_n. Zeigen Sie, dass die Ordnung von $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Länge der α_i ist.

(b) Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass S_n von den Zyklen (12) und $(12 \cdots n)$ erzeugt ist.

Aufgabe 10.2

Sei $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ eine Gruppe mit 8 Elementen. Dabei sei 1 die Eins von Q und es gelte

$$-1 \cdot -1 = 1,\ i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = i \cdot j \cdot k = -1,$$

sowie $-1 \cdot a = a \cdot -1 = -a$ für $a \in \{1, i, j, k\}$.
Zeigen Sie, dass alle Untergruppen von Q normal sind. Finden Sie die Kommutatorgruppe von Q.

Aufgabe 10.3

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Die n-te Diedergruppe D_n ist die Symmetriegruppe aller Drehungen und Spiegelungen eines regulären n-Ecks. Explizit wird D_n erzeugt von der Drehung a um den Winkel $2\pi/n$ und der Spiegelung b an einer Symmetrieachse des n-Ecks. Als Gruppe von Matrizen ist D_n die Untergruppe der invertierbaren 2×2 Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$ erzeugt von

$$a = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $a^n = 1$, $b^2 = 1$ und $bab = a^{-1}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Element aus D_n als $a^i b^j$ mit $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ und $j \in \{0, 1\}$ geschrieben werden kann. Folgern Sie, dass $|D_n| = 2n$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe von D_n.

Hinweis: Betrachten Sie die Fälle n gerade und n ungerade.

Aufgabe 10.4

Sei K ein Körper. Die Gruppe alle $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $\det A = 1$ wird mit $\mathrm{SL}_n(K)$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(F_3)$ von der Mächtigkeit 24 und nicht isomorph zu S_4 ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(F_3)$ auflösbar ist.

Hinweis: Ein möglicher Lösungsweg ist zu zeigen, dass die Menge der Elemente der Ordnung 2^k (wobei $k \in \{0,1,2\}$) eine normale Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(F_3)$ ist und dass diese Untergruppe isomorph zu Q (siehe Aufgabe 10.2) ist. Um alle Elemente der Ordnung 2^k zu finden betrachten Sie charakteristische Polynome.

Abgabe **Montag, 28.01.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
