Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Algebra
Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1
Seien G eine Gruppe und X eine Untermenge von G. Wir definieren die Relation $\sim$ auf G durch $x \sim y$ genau dann, wenn $xy^{-1} \in X$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ genau dann eine Äquivalenzrelation ist, wenn X eine Untergruppe von G ist.

(b) Sei nun X eine Untergruppe. Für $g \in G$, schreiben wir $[g]$ für die Äquivalenzklasse von g bezüglich $\sim$. Sei G/X die Menge von Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung

$$* : G/X \times G/X \to G/X$$

definiert durch

$$[g] * [h] := [gh]$$

genau dann wohldefiniert ist, wenn für alle $x \in G$ und $y \in X$

$$xyx^{-1} \in X$$

gilt.

Aufgabe 1.2
Seien R ein kommutativer Ring und X eine Untermenge von R so, dass $0 \in X$ und für alle $x, y \in X$, $-x \in X$ und $x + y \in X$. Sei $\sim$ die Relation, definiert durch $x \sim y$ genau, dann wenn $x - y \in X$.

(a) Erklären Sie mit Hilfe von Aufgabe 1.1 warum $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf R ist.

(b) Erklären Sie mit Hilfe von Aufgabe 1.1 warum die Verknüpfung $[x]+[y] := [x + y]$ wohldefiniert ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $[x][y] := [xy]$ genau dann wohldefiniert ist, wenn für alle $x \in X$ und $r \in R$, $xr \in X$.

Aufgabe 1.3

(a) Zeigen Sie, dass eine nicht-abelsche Gruppe mindestens 6 Elemente hat.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht-abelsche Gruppe mit 6 Elementen an. Geben Sie ein Beispiel für eine abelsche Gruppe mit 6 Elementen an.

Hinweis: In Teil (a), zeigen Sie zuerst, dass eine Gruppe mit zwei oder weniger Elementen abelsch ist und dann nehmen Sie an, dass die Gruppe Elemente a, b mit $ab \neq ba$ hat. Zeigen Sie, dass e, a, b, ab, ba paarweise ungleich sind. Jetzt, finden Sie ein Element als Produkt von a und b, das nicht in der Menge $\{e, a, b, ab, ba\}$ ist.

Aufgabe 1.4

Ein Paar $(M, *)$ mit einer Menge M und einer Verknüpfung $* : M \times M \to M$ heißt Monoid, wenn für alle $a, b, c \in M$, $a * (b * c) = (a * b) * c$ und, wenn es ein Element $e \in M$ mit $e * a = a * e = a$ für alle $a \in M$ gibt.

Ein Monoid $(M, *)$ erfüllt eine rechtsseitige Kürzungsregel, wenn für alle $a, b, c \in M$ aus $a * c = b * c$ folgt $a = b$.

(a) Zeigen Sie, dass $(M, *)$ eine Gruppe ist, wenn M endlich ist und $(M, *)$ einen rechtsseitige Kürzungsregel erfüllt.

(b) Sei R ein endlicher Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

(c) Sind alle Monoide Gruppen? Sind alle endlichen Ringe (mit Eins) Körper?

Abgabe **Montag, 29.10.2012** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
