

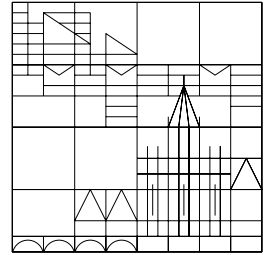
**Universität Konstanz**

Fachbereich Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Dr. Lorna Gregory

Katharina Dupont



06. Dezember 2012

Name:	Vorname:	Übungsgruppe:
-------	----------	---------------

**Probeklausur** zur Vorlesung „Algebra“

Es gibt *drei* Aufgaben.

Die notierten *Punkte* (eingekreiste Zahlen) gibt es für *richtige* Lösungen mit begründeter Herleitung.

**Viel Erfolg!**

1	2	3				$\Sigma$

Punkte:	Name:	Vorname:	Übungsgruppe:
---------	-------	----------	---------------

(1) (a) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Q}[i] := \{p + qi \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$  der Quotientenkörper von  $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  ist. ③

(b) Sei  $N : \mathbb{Q}[i] \rightarrow \mathbb{Q}$  die Abbildung definiert durch

$$p + qi \mapsto p^2 + q^2.$$

Zeigen Sie, dass für alle  $c, d \in \mathbb{Q}[i]$

$$N(cd) = N(c)N(d)$$

gilt. ①

(c) Zeigen Sie, dass der Ring  $\mathbb{Z}[i]$  zusammen mit der Abbildung  $N' : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  definiert durch

$$a + bi \mapsto a^2 + b^2$$

ein euklidischer Integritätsbereich ist. ⑤

Punkte:	Name:	Vorname:	Übungsgruppe:
---------	-------	----------	---------------

- (2) (a) Definieren Sie die Begriffe einfache Körpererweiterung, endliche Körpererweiterung und endlich erzeugte Körpererweiterung. ③
- (b) Zeigen Sie, dass eine einfache Körpererweiterung  $F(\alpha)$  von  $F$  genau dann endlich ist, wenn  $\alpha$  algebraisch über  $F$  ist. ⑤
- (c) Finden Sie ein Beispiel für eine endlich erzeugte Körpererweiterung, die nicht endlich ist. Begründen Sie Ihre Antwort. ②

Punkte:	Name:	Vorname:	Übungsgruppe:
---------	-------	----------	---------------

- (3)** (a) Sei  $R$  ein Ring (kommutativ mit Eins) und seien  $A_1, \dots, A_k \triangleleft R$  Ideale von  $R$ . Formulieren Sie den chinesischen Restsatz für  $R$  und  $A_1, \dots, A_k$  und beweisen Sie ihn für  $k = 2$ . ⑧
- (b) Eine natürliche Zahl heißt quadratfrei, wenn es außer der Eins keine Quadratzahl gibt, die diese Zahl teilt. Zeigen Sie, dass es für alle  $k \in \mathbb{N}$   $k$  aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die nicht quadratfrei sind. ②