Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

06. Dezember 2012

Name:	Vorname:	Übungsgruppe:

Probeklausur zur Vorlesung „Algebra“

Es gibt *drei* Aufgaben.
Die notierten *Punkte* (eingekreiste Zahlen) gibt es für *richtige* Lösungen mit begründeter Herleitung.

Viel Erfolg!

1	2	3				$\sum$

Punkte:	Name:	Vorname:	Übungsgruppe:

(1) (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[i] := \{p + qi \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist. ③

(b) Sei $N : \mathbb{Q}[i] \to \mathbb{Q}$ die Abbildung definiert durch

$$p + qi \mapsto p^2 + q^2.$$

Zeigen Sie, dass für alle $c, d \in \mathbb{Q}[i]$

$$N(cd) = N(c)N(d)$$

gilt. ①

(c) Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i]$ zusammen mit der Abbildung $N' : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert durch

$$a + bi \mapsto a^2 + b^2$$

ein euklidischer Integritätsbereich ist. ⑤

Punkte:	Name:	Vorname:	Übungsgruppe:

(2) (a) Definieren Sie die Begriffe einfache Körpererweiterung, endliche Körpererweiterung und endlich erzeugte Körpererweiterung. ③

(b) Zeigen Sie, dass eine einfache Körpererweiterung $F(\alpha)$ von F genau dann endlich ist, wenn α algebraisch über F ist. ⑤

(c) Finden Sie ein Beispiel für eine endlich erzeugte Körpererweiterung, die nicht endlich ist. Begründen Sie Ihre Antwort. ②

Punkte:	Name:	Vorname:	Übungsgruppe:

(3) (a) Sei R ein Ring (kommutativ mit Eins) und seien $A_1, ..., A_k \lhd R$ Ideale von R. Formulieren Sie den chinesischen Restsatz für R und $A_1, ..., A_k$ und beweisen Sie ihn für $k = 2$. ⑧

(b) Eine natürliche Zahl heißt quadratfrei, wenn es außer der Eins keine Quadratzahl gibt, die diese Zahl teilt. Zeigen Sie, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ k aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die nicht quadratfrei sind. ②