23. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 5. Juli 2016

Erinnerung Lemma 1 - 06.07.2012:
$W \subseteq V$ ist T-invariant $\Rightarrow W^\perp \subseteq V$ ist T^*-invariant (oder $W \subseteq V$ ist T^*-invariant $\Rightarrow W^\perp$ ist T-invariant). Damit können wir eine Analogie zum Satz 2 der 14. Vorlesung vom 04.06.2012 zeigen.

Satz 1 (Orthonormale Trigonalisierung)
Sei $K = \mathbb{C}$ und V ein endlich dim. inneres Produkt K-Vektorraum; $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann gibt es eine orthonormale Basis $\mathcal{X}$, so dass $[T]_\mathcal{X}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis Induktion nach $n := \dim V$. Sei $c \in \mathbb{C}$ und $x \neq 0$ mit $T^*x = cx$, $W := (span\{x\})^\perp$ und $\dim W = \dim V - 1 = n - 1$.
Lemma 1 vom 06.07.2012 impliziert: W ist T-invariant , also ist $T \restriction W$ wohldefiniert.
Per Indutkionsannahme setze $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ als orthonormale Basis für W, wofür die Matrix-Darstellung von $T \restriction W$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
Setze $x_n := x/\|x\|$. Dann ist $\mathcal{X} := \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ die gesuchte Basis. □

Korollar 1 Für jede $n \times n$-Matrix A über $\mathbb{C}$ gibt es eine unitäre Matrix U, so dass $U^{-1}AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis Wähle $\mathcal{X}$ als eine orthonormale Basis und definiere $T(x) = A\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$, wobei $x = \sum \varepsilon_i x_i$ ist, für $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Finde eine orthonormale Basis $\mathcal{J}$ wie in Satz 1.
Setze $U :=$ Matrix der Basiswechsel. Dann ist $U^{-1} = U^*$ und $U^{-1}AU = B$ die obere Dreiecksmatrix. □

§ 22 Orthonormale Diagonalisierung

Lemma 2 Sei T normal, $g(x) \in K[x]$ und $W := \ker g(T)$. Dann ist $W^\perp$ T-invariant.

Beweis **Behauptung:** W ist T^*-invariant.
Sei $u \in W$. Berechne $g(T)(T^*(u)) = T^*(g(T)(u)) = T^*(0) = 0$ (weil T^* kommutiert mit T, also auch mit $g(T)$).

Lemma 1 impliziert nun: $W^\perp$ ist T-invariant. □

Spektralsatz Sei T normal, $T \in \mathcal{L}(V, V)$, $p = \text{Min Pol }(T)$. Es gilt

(*i*) $p = p_1 \cdots p_k$, wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, p_i ist irreduzibel und normiert.

(*ii*) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ für $W_i = \ker p_i(T)$ und W_i ist orthogonal zu W_j für $i \neq j$.

Hilfsbermerkung Ist g ein Faktor von $p := \text{Min. Pol. }(T)$, dann ist $g(T)$ **nicht** invertierbar.

Beweis
Sei $p = gh$ mit $\deg h < \deg p$. Wäre $g(T)$ invertierbar , dann hätten wir $0 = g(T)^{-1}p(T) = g(T)^{-1}g(T)h(T)$ und damit $h(T) = 0$. Widerspruch zu $\deg p$ ist minimal. □

Beweis von Spektralsatz Per Induktion: Lemma 2 impliziert: $W_1^\perp$ ist T-invariant.
Betrachte $T \restriction_{W_1^\perp}$ und bemerke, dass $\ker p_1(T \restriction_{W_1^\perp}) = \{0\}$ ($x \in W_1^\perp$ und $x \in \ker p_1(T) = W_1 \Rightarrow x = 0$). Also ist $p_1(T \restriction_{W_1^\perp})$ invertierbar und damit ist p_1 **kein** Faktor von Min. Pol. $(T \restriction_{W_1^\perp}) = p_2 \cdots p_k$. Aber $p_1 = \text{Min. Pol. }(T \restriction_{W_1})$ und p_1 teilt nicht $p_2 \cdots p_k$. Also $p_1 \neq p_j$ für $j = 2, \ldots, k$. (Argument: Forsetzung per Induktion). □

Korollar 2 $K = \mathbb{C}$. Sei T normal. Es gbit eine orthonormale Basis bestehend aus Eigenvektoren von T.

Beweis p_i ist linear über $\mathbb{C}$, $p_i = (x - c_i)$ also ist W_i der Eigenraum zum Eigenwert c_i. G-S: Wähle eine orthonormale Basis $\mathcal{X}_i$ für W_i $(i = 1, \ldots, k)$. $\mathcal{X}_i$ besteht aus EigenV. zum EigenW. c_i. Also ist $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{X}_k$ die gewünschte Basis. □

Definition $B, A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

(*i*) A ist normal, falls $AA^* = A^*A$

(*ii*) A ist unitär äquivalent zu B, falls es eine unitäre $U \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ mit $B = U^{-1}AU$ gibt.

Korollar 3 (Matrixversion von Korollar 2)
Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, A normal, dann ist A unitär äquivalent zu einer diagonalen Matrix $D \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

§ 23 Anwendungen vom Spektralsatz

V endl. dim.

Korollar 4 $K = \mathbb{C}$, T ist normal. Es gilt: T ist Hermite'sch $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $\in \mathbb{R}$.

Beweis "$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien alle Eigenwerte reell und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis, bestehend aus EigenV. Also ist

$$D = [T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \text{ mit } d_i \in \mathbb{R}.$$

Es ist klar, dass D Hermite'sch ist $(D^* = \overline{D^t} = D^t = D)$. Also ist auch T Hermite'sch (Übungsblatt) □

Korollar 5 $K = \mathbb{C}, T$ ist normal. Es gilt: T ist unitär $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte haben den Absolutbetrag 1.

Beweis "$\Rightarrow$" Ist schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien die Eigenwerte $z_i, \dots z_n$ und $\mathcal{J}$ eine orthonormale Basis bestehend aus EigenV, so dass

$$[T]_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} = D.$$

Behauptung: D ist unitär.

Berechne $D^* = \overline{D^t} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Also } DD^* &= \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1\overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n\overline{z}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n \end{aligned}$$

Also ist auch T unitär (Übungsblatt). □