22. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 30. Juni 2016

Unser Ansatz ist weiterhin: V endl. dim. inneres Produkt Raum

Satz 1 Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ Hermite'sch. Es gelten $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$ und alle Eigenwerte von T sind reell.

Beweis $(Tx \mid x) = (x \mid T(x)) = \overline{(Tx \mid x)}$.
Sei nun $Tx = cx$ mit $x \neq 0$, dann ist
$\underbrace{(Tx \mid x)}_{\in\mathbb{R}} = (cx \mid x) = c\,\underbrace{\|x\|^2}_{\in\mathbb{R}}$. Also $c \in \mathbb{R}$. □

Erinnerung T^* ist definiert durch $(Tx \mid y) = (x \mid T^*y)$ oder $(x \mid Ty) = (T^*x \mid y)$.

§ 19 Isometrie

Definition Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$, so dass $U^* = U^{-1}$, dann heißt U eine *Isometrie*. Wenn $K = \mathbb{R}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *orthogonal* und wenn $K = \mathbb{C}$ und $U^* = U^{-1}$, heißt U *unitär*.

Satz 2 Für $U \in \mathcal{L}(V,V)$ sind äquivalent:

(1) $U^*U = UU^* = Id$

(2) $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle x, y (U erhält $(\mid)$)

(3) $\|Ux\| = \|x\|$ für alle x (U erhält die Norm)

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2):
$(Ux \mid Uy) = (x \mid U^*Uy) = (x \mid y)$ für alle $x, y \in V$

(2) $\Rightarrow$ (3):
(2) anwenden mit $x = y$

(3) $\Rightarrow$ (1):
$(Ux \mid Ux) = (U^*Ux \mid x) = (x \mid x)$. Also $([U^*U - Id]x \mid x) = 0$ für alle $x \in V$.
Nun ist aber $T := U^*U - Id$ Hermite'sch und $(Tx \mid x) = 0$ für alle x impliziert $T = 0$. □

Bemerkungen

(*i*) (3) impliziert, dass U Distanz erhält:
(4) $\|Ux - Uy\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$

(*ii*) Isometrien sind invertierbar und erhalten das innere Produkt. Also ist $U : (V, (|)) \tilde{\rightarrow} (V, (|))$ ein *Automorphismus* des inneren Produkt-Vektorraums $(V, (|))$.

Satz 3 Eigenwerte von Isometrien haben den absoluten Betrag gleich 1.

Beweis Sei $Ux = cx, x \neq 0; c \in \mathbb{C}$.
Es ist $\|Ux\| = \|x\|$ und $\|Ux\| = \|cx\| = |c|\ \|x\|$. Also $|\ c\ | = 1$. □

§ 20 Orthonormal-Basis wechseln

Satz 4 Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine orthonormale Basis und $U \in \mathcal{L}(V, V)$ eine Isometrie. Dann ist $\mathcal{U}\mathcal{X} := \{Ux_1, \ldots, Ux_n\}$ eine orthonormale Basis. Umgekehrt ist $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis, so dass $\mathcal{U}\mathcal{X}$ wieder eine orthonormale Basis ist. Dann ist $\mathcal{U}$ eine Isometrie.

Beweis

"$\Rightarrow$" $(Ux_i \mid Ux_j) = (x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$. Also ist $\mathcal{U}\mathcal{X}$ orthonormal und $\mathcal{U}\mathcal{X}$ ist eine Basis, weil $\mathcal{U}$ invertierbar ist.

"$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{U}\mathcal{X}$ orthonormal. Es gilt also $(Ux_i \mid Ux_j) = \delta_{ij} = (x_i \mid x_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und damit durch Linearität gilt $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ für alle $x, y \in V$. □

Matrix-Version

Definition $A \in M_{n \times n}(K)$ ist *orthogonal* $(K = \mathbb{R})$ oder *unitär* $(K = \mathbb{C})$, falls
$AA^* = A^*A = I_n$ ist.

Bemerkungen

(*i*) Seien $\mathcal{U}$ eine Isometrie und $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis, dann ist $A := [\mathcal{U}]_{\mathcal{X}}$ unitär (bzw. orthogonal).

(*ii*) Matrix-Version von Satz 4:
Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis und $\mathcal{B}'$ eine beliebige Basis, dann ist $\mathcal{B}'$ orthonormal genau dann, wenn die Basiswechsel-Matrix unitär ist.

§ 21 Spektral-Theorie

Sei wie immer $\dim V < \infty$.
Bisher haben wir drei wichtige Klassen von Operatoren studiert:
(a) Hermit'sche ($T^* = T$)
(b) schief Hermite'sche ($T^* = -T$)
(c) unitäre ($T^* = T^{-1}$).
Alle erfüllen die folgende Eigenschaft:

Definition $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist normal, falls $T^*T = TT^*$ ist.

Wir werden die Struktur von normalen Operatoren genau untersuchen.

Lemma 1 Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant, dann ist $W^\perp \subseteq V$ T^*-invariant.

Beweis Sei $u \in W^\perp, w \in W$ und berechne $(w \mid T^*u) = (Tw \mid u) = 0$ für alle $w \in W$. Also ist $T^*u \in W^\perp$. □

Wir wollen unseren Hauptsatz beweisen:

Satz (Spektralsatz für normale Operatoren)
Sei $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V, V)$ normal. $p := Min.Pol.(T)$. Es gilt

$$p = p_1, \ldots p_k,$$

wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und p_i normiert und irreduzibel ist (d.h. deg $p_i = 1$ oder deg $p_i = 2$).
Setze $W_i := \ker p_i(T); W_i \subseteq V$ ist T-invariant. Dann ist W_i orthogonal zu W_j für $i \neq j$ und $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ (orthogonale direkte Summe).

Wir brauchen noch ein Lemma.