18. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 16. Juni 2016

(1) V ist ein K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V,V), c \in K$ ein Eigenwert, $\ell \in \mathbb{N}, v_i \in V$. $(v_1,\dots,v_\ell)$ ist eine Jordankette der Länge ℓ zum Eigenwert c, falls

$$\begin{array}{rcll} (T-cI)v_i & = & v_{i-1} & i=2,\dots,\ell \\ (T-cI)v_1 & = & 0 & \text{und } v_1 \neq 0 \end{array}$$

(2) $(v_1,\dots,v_\ell)$ ist eine Jordankette $\Rightarrow \{v_1,\dots,v_\ell\}$ $(:= \mathcal{B}')$ linear unabhängig. $W = span\{v_1,\dots,v_\ell\}$ ist T-invariant und

$$[T\restriction_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & c \end{pmatrix} \leftarrow J_\ell(c) := \text{ Jordanzelle der Dimension } \ell \text{ zum Eigenwert } c$$

(Übungsblatt Nr. 10)

(3) Seien $W \subseteq V, W' \subseteq V$ Unterräume; W' ist Komplement von W in V, falls $V = W \oplus W'$.

Bemerkung

(i) Komplemente existieren und sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

(ii) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $v_1^1,\dots,v_s^1 \in V$ linear unabhängig, so dass $span\{v_1^1,\dots,v_s^1\} \cap W = \{0\}$ sind. Dann kann man $\{v_1^1,\dots,v_s^1\}$ zu einer Basis von einem Komplement von W in V ergänzen.

Satz **Jordan Normal Form**

Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V,V)$. Sei Min. Pol. $(T) = (x-c)^r$ mit $c \in K$. Dann hat V eine Basis aus Jordanketten zum Eigenwert c. Die längsten Ketten haben die Länge r, die Anzahl der Ketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis **Behauptung**

Seien $v^1,\dots,v^s \in \ker(T-cI)^j$ linear unabhängig und $span\{v^1,\dots,v^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-1} = \{0\}$, dann sind $w^1 := (T-cI)v^1,\dots,w^s := (T-cI)v^s \in \ker(T-cI)^{j-1}$ linear unabhängig und $span\{w^1,\dots,w^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-2} = \{0\}$.

Beweis der Behauptung

$0 = (T-cI)^j v^i = (T-cI)^{j-1}\underbrace{(T-cI)v^i}_{w^i}$. Also $w^i \in \ker(T-cI)^{j-1}$.

Sei nun $\sum_{i=1}^{s} c_i w^i = 0$ mit $c_i \neq o$ für ein i, so $\sum_{i=1}^{s} c_i (T-cI)v^i = 0$.

Beweis Fortsetzung:

So $(T-cI)\sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$. Also $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \ker(T-cI)^{j-1}$, weil $(T-cI)^{j-1}(\sum c_i v^i) = (T-cI)^{j-2}\underbrace{(T-cI)(\sum c_i v^i)}_{0} = 0$.

Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in span\{v^1,\dots,v^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-1}$.

Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$ mit $c_i \neq 0$ für ein i. Widerspruch, da $\{v_1,\dots,v_s\}$ linear unabhängig sind.

Betrachte nun $\sum c_i w^i$, so dass $(T-cI)^{j-2}(\sum c_i w^i) = 0$.
Dann ist $(T-cI)^{j-1}(\sum c_i v^i) = 0$, so $\sum c_i v^i = 0$ so $(T-cI)(\sum c_i v^i) = 0$.
Also $\sum c_i (T-cI) v^i = 0 = \sum c_i w^i$. □

Wir bauen nun eine Basis aus Jordanketten folgendermaßen:
(Beachte, dass $\ker(T-cI) \subseteq \dots \subseteq \ker(T-cI)^r = V$.)
Setze $n_r = \dim\ker(T-cI)^r - \dim\ker(T-cI)^{r-1}$ und $V = V_r \quad \oplus \ker(T-cI)^{r-1}$.
Sei $\{v_r^1,\dots,v_r^{n_r}\}$ eine Basis für V_r.
Betrachte nun $\ker(T-cI)^{r-1} = V_{r-1} \quad \oplus \ker(T-cI)^{r-2}$.
Setze $v_{r-1}^1 := (T-cI)v_r^1, \dots, v_{r-1}^{n_r} := (T-cI)v_r^{n_r} \in \ker(T-cI)^{r-1}$ und ergänze zu einer Basis von einem Komplement von $\ker(T-cI)^{r-2}$ in $\ker(T-cI)^{r-1}$:
$\{v_{r-1}^1,\dots,v_{r-1}^{n_r}, v_{r-1}^{n_r+1},\dots,v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}\}$.
Also $n_{r-1} = \dim\ker(T-cI)^{r-1} - \dim\ker(T-cI)^{r-2} - n_r$.
Wir verfahren so weiter. Im letzten Schritt bekommen wir
$v_1^1 = (T-cI)v_2^1, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2} = (T-cI)v_2^{n_r+\dots+n_2}$, welches wir zu einer Basis von $\ker(T-cI)$ ergänzen:
$v_1^1,\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2}, v_1^{n_r+\dots+n_2+1},\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}$.

Dies ist die Gestalt der Gesamtbasis für V, die wir erhalten:

$$\begin{array}{llll}
v_r^1,\dots,v_r^{n_r} & & & \\
v_{r-1}^1,\dots,v_{r-1}^{n_r}, & v_{r-1}^{n_r+1},\dots,v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\underbrace{v_1^1,\dots,v_1^{n_r},}_{n_r} & \underbrace{v_1^{n_r+1},\dots,v_1^{n_r+n_{r-1}}}_{n_{r-1}}, & \dots, & \underbrace{v_1^{n_r+\dots+n_2+1},\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}}_{n_1} \\
\text{Jordanketten} & \text{Jordanketten} & & \text{Jordanketten} \\
\text{der Länge } r & \text{der Länge } r-1 & ,\dots, & \text{der Länge } 1
\end{array}$$
□

Bemerkung Die Matrixdarstellung in der Basis der Jordanketten ist

$$A_c := \begin{pmatrix}
J_r(c) & & & & & & \\
& \ddots & & & 0 & & \\
& & J_r(c) & & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& 0 & & & J_1(c) & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & J_1(c)
\end{pmatrix} \text{ wobei } J_i(c)\ n_i\text{-mal erscheint.}$$

Korollar Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V,V)$. Falls Min. Pol. (T) (oder Char. Pol. (T)) zerfällt über K, dann hat V eine Basis von Jordanketten zu den verschiedenen Eigenwerten. Die Anzahl der Jordanketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis Min. Pol. $(T) = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$
$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ mit W_i T-invariant und Min. Pol. $T \restriction_{W_i} = (x - c_i)^{r_i}$ (Primzerlegungssatz).
Jordan Normal Form liefert Basen $\mathcal{B}_{c_i}$ von Jordanketten für $T \restriction_{W_i}$ und jeden c_i.
Setze $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geordnete Basis). □

Bemerkung Sei $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k, W_i$ T-invariant. $\mathcal{B}_i$ = Basis für $W_i, \mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geordnete Basis). Es gilt

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_i = [T \restriction_{W_i}]_{\mathcal{B}_i}$.

(Übungsaufgabe, Übungsblatt Nr. 10)

Korollar Sei K alg. abg., V ein K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$.
Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{c_k} \end{pmatrix}$$

wobei $c_1, \dots c_k$ die Eigenwerte von T sind und A_{c_i} wie vorher beschrieben.