17. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 14. Juni 2016

§ 13 Direkte Summen

Lemma Sei V ein K-Vektorraum, $W_1, \dots, W_k$ Unterräume. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $W_1, \dots, W_k$ sind unabhängig, das heißt $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ (mit $\alpha_i \in W_i$ für $1 \leq i \leq k$) $\Rightarrow \alpha_i = 0$ für alle i.

(ii) $W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1}) = \{0\}$ für $2 \leq j \leq k$

(iii) Ist $\mathcal{B}_i$ eine Basis für W_i, so ist $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ eine Basis für $W := W_1 + \dots + W_k$.

(Übungsaufgabe, Übungsblatt)

Notation Wir schreiben $V = W_1 + \dots + W_k$, wenn V nur die Summe der W_i's ist und wir schreiben $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, falls $V = W_1 + \dots + W_k$ und eine der äquivalenten Bedingungen (i), (ii) und (iii) gilt. In dem Fall heißt V die *direkte Summe* der W_i's.

Satz **(Primzerlegung von V bzgl. T)**
Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V, V)$ Min. Pol. $(T) = p = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ die Primfaktorisierung in $K[x]$ von p (wobei p_i verschiedene normierte irreduzible Polynome in $K[x]$ und $r_i \in \mathbb{N}$ sind). Setze $W_i := \ker p_i(T)^{r_i}$ für $1 \leq i \leq k$. Es gilt: W_i ist T-invariant für alle i (siehe 15. Vorlesung) und

(i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$

(ii) Min. Pol. $(T \restriction_{W_i}) = p_i^{r_i}$ für $1 \leq i \leq k$.

Wir beweisen den Fall $k = 2$
(Der allgemeinere Fall folgt per Induktion nach k.)

Proposition Sei $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V, V)$, Min. Pol. $(T) = m = m_1 m_2$ mit $ggT(m_1, m_2) = 1$. Setze $V_i := \ker m_i(T)$ für $i = 1, 2$. Es gilt $V = V_1 \oplus V_2$ und Min. Pol. $(T \restriction_{V_i}) = m_i$ für $i = 1, 2$.

Beweis Da m_1, m_2 relativprim sind, existiert $q_1, q_2 \in K[x]$ mit $1 = m_1 q_1 + m_2 q_2$. Also
$I = m_1(T) q_1(T) + m_2(T) q_2(T)$ $\quad (\ast)$

Behauptung $V_1 = \text{Im } m_2(T)$ und $V_2 = \text{Im } m_1(T)$

Beweis $0 = m(T) = m_1(T)m_2(T)$, weil m = Min. Pol. (T). Also $\operatorname{Im} m_2(T) \subseteq \ker m_1(T)$.

Umgekehrt sei $v \in \ker m_1(T)$. Mit $(*)$ gilt

$$v = \underbrace{q_1(T)m_1(T)(v)}_{=0} + \underbrace{m_2(T)q_2(T)(v)}_{\in \operatorname{Im}\, m_2(T)} \qquad \square$$

Behauptung $V = V_1 \oplus V_2$

Beweis

1. Summe: $v \in V$. Mit $(*)$ gilt:
   $$v = \underbrace{m_1(T)q_1(T)v}_{\in \operatorname{Im}\, m_1(T)} + \underbrace{m_2(T)q_2(T)v}_{\in \operatorname{Im}\, m_2(T)}$$
2. Direkt: Sei $v \in V_1 \cap V_2$. Mit $(*)$ gilt:
   $$v = \underbrace{q_1(T)m_1(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_1} + \underbrace{q_2(T)m_2(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_2}$$

$\square$

Sei nun $\widetilde{m}_i$ = Min. Pol. $(T \restriction_{V_i})$ für $i = 1, 2$. Da $V_i = \ker m_i(T)$, ist es klar, dass $m_i(T \restriction_{V_i}) = 0$ für $i = 1, 2$.

Also $\widetilde{m}_1 \mid m_1$ $(**)$
und $\widetilde{m}_2 \mid m_2$.

Behauptung $\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2$ annihiliert T.

Beweis Berechne für $v_2 \in V_2$ und $v_1 \in V_1$

$\widetilde{m}_1(T)\widetilde{m}_2(T)(v_2 + v_1) = \widetilde{m}_1(T)[\widetilde{m}_2(T)(v_2) + \widetilde{m}_2(T)(v_1)]$
$= \widetilde{m}_1(T)[0 + \widetilde{m}_2(T)(v_1)] = 0$, da $\widetilde{m}_2(T)(v_1) \in V_1$ (weil V_1 $\widetilde{m}_2(T)$-invariant ist, siehe 15. Vorlesung). $\square$

Da $\widetilde{m}_2\widetilde{m}_1$ annihiliert T folgt
$m_1m_2 = m \mid \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2$ $(***)$

Da m_1, m_2 normiert sind, folgt nun aus $(**)$ und $(***)$, dass $\widetilde{m}_i = m_i$ für $i = 1, 2$. $\square$

Sonderfall p_i ist linear und $p = (x - c_1)\cdots(x - c_k)$ mit $c_i \neq c_j$ für $1 \leq i \neq j \leq k$.

Hier ist $W_i = \ker(T - c_iI)$ = Eigenraum zum Eigenwert c_i.

Der Primzerlegungssatz besagt: $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Also hat V eine Basis aus Eigenvektoren und damit ist T diagonalisierbar. Wir haben damit die Umkehrung (von Proposition 2 aus der 13. Vorlesung) gezeigt.

Wir haben also bewiesen:

Satz (Diag. Kriterium für Min. Pol.)
T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Min. Pol. (T) erfällt in verschiedene lineare Faktoren über $K[x]$.

§ 14 Jordanketten

Definition Sei $T : V \to V$ linear, c Eigenwert, $v_1 \neq 0$, $v_2, \ldots, v_r \in V$.
$(v_1, \ldots, v_r)$ heißt *Jordankette*, wenn $(T - cI)(v_1) = 0$ (v_1 Eigenvektor zum c) und $(T - cI)(v_i) = v_{i-1}$ für $i = 2, \ldots r$.

Lemma Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Jordankette. Es gelten für $W = span\{v_1, \ldots, v_r\}$:

(i) $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_r\}$ ist eine Basis für W

(ii) W ist T-invariant und

(iii) $[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & c \end{pmatrix} \leftarrow$ Jordanzelle

(Übungsaufgabe, Übungsblatt)