15. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 7. Juni 2016

§ 12 Invariante Unterräume

Definition $W \subseteq V$ ist ein Unterraum und $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Dann ist W *T-invariant*, falls $T(W) \subseteq W$.

Beispiele

(0) $\{0\}$ und V sind T-invariant für alle T.

(1) Sei D die Ableitung Operator auf $V = K[x]$ und W der Unterraum der Polynome von deg $\leq n$. Dann ist W D-invariant.

(2) Sei $U \in \mathcal{L}(V, V)$ mit $TU = UT$, setze

(a) $W := \text{Im } (U)$

(b) $N := \ker(U)$

Dann sind W und N T-invariant.

Beweis

(a) Sei $\alpha \in \text{Im } (U)$, $\alpha = U(\beta)$; $T(\alpha) = T(U(\beta)) = U(T(\beta)) \in \text{Im } (U)$

(b) $\alpha \in N; U(T(\alpha)) = T(U(\alpha)) = T(0) = 0 \Rightarrow T(\alpha) \in N$

(3) (Übungsaufgabe:)
$W \subseteq V$ ist T-invariant $\Rightarrow W$ $g(T)$-invariant für alle $g \in K[x]$

(4) Für $g \in K[x]$ gilt $g(T)T = Tg(T)$, $U := g(T)$, insbesondere für $U := cI - T$. Also ist $\ker(T - cI)$ T-invariant. Der Eigenraum zum Eigenwert c ist T-invariant.

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Wir behaupten, dass nur $\{0\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ T-invariant sind (für $T = T_A$). Sei $W \neq V, W \neq \{0\}$ T-invariant. Es gelte aber dann daraus, dass $\dim W = 1$. Sei $\alpha \neq 0, \alpha \in W; \{\alpha\}$ ist eine Basis und damit ein Eigenvektor. A hat aber keine reellen Eigenwerte.

Der Operator $T\restriction_W := T_W$
Sei W T-invariant. Dann ist $T_W \in \mathcal{L}(W, W)$.

Matrix-Darstellung von T_W
Sei V endl. dim. und $W \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum mit dim. $W = r$.
Sei $\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ eine Basis für W. Ergänze $\mathcal{B}'$ zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ für V.
Betrachte $A := [T]_{\mathcal{B}}$. Wir haben die Gleichungen

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_i$$

W ist T-invariant $\Rightarrow T\alpha_j \in W$ für $j \leq r$. Also $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{r} A_{ij}\alpha_i$ für $j \leq r$, das heißt $A_{ij} = 0$ für $j \leq r$ und $i > r$. Also sieht A aus:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei B $r \times r, C$ $r \times (n-r)$ und D $(n-r) \times (n-r)$ sind. Es ist darüber hinaus klar, dass $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

Lemma 1 Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V < \infty, T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $W \subseteq V$ T-invariant. Also $T_W \in \mathcal{L}(W, W)$. Es gelten:

(i) Char. Pol. (T_W) teilt Char. Pol. (T).

(ii) Min. Pol. (T_W) teilt Min. Pol. (T).

Beweis (i) Ist klar, weil

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_W]_{\mathcal{B}'} & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

und somit ist $\det(xI - A) = \det(xI - B)\det(xI - D)$, wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

(ii) Beachte, dass

$$A^k = \begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix}$$

wobei gilt: C_k ist $r \times (n-r)$. Also jedes Polynom das A annihiliert, annihiliert auch damit B. Also Min. Pol. (B) teilt Min. Pol. (A). □

Wir werden in der nächsten Vorlesung die Matrix D genauer untersuchen.