7. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 26. April 2016

§ 6 Die symmetrischen Gruppen S_n (Fortsetzung)

Definition und Notation Betrachte die folgende Untermenge von S_n:
$A_n := \{\sigma \mid \sigma \text{ ist gerade }\}$.

Es gilt: A_n ist eine Untergruppe von S_n.

[Die Einheit (1) ist gerade, also $(1) \in A_n$. Wenn $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ und $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$, wobei τ_i, γ_j Transpositionen und k, n gerade sind, dann gilt

$$\sigma\gamma = \tau_1 \cdots \tau_m \gamma_1 \cdots \gamma_k.$$

Also ist A_n abgeschlossen unter Produkt, auch $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$. Also ist A_n abgeschlossen unter Inversen.]

A_n ist die *alternierende Gruppe.*

Bemerkung $S_n = A_n \uplus$ Ungerade $= A_n \uplus U$, wobei $U :=$ Ungerade $:= \{\delta \mid \delta \text{ ist ungerade }\}$ ist die Untermenge der ungeraden Permutationen.

Die Abbildung
$A_n \longrightarrow U$
$\sigma \longmapsto (12)\sigma$
ist bijektiv. Wir folgern: $|A_n| = \dfrac{n!}{2}$.

§ 7 Multilineare Formen

Definition Sei K ein Körper und seien U, V K-Vektorräume.

$$\beta : U \times V \longrightarrow K$$
$$(x, y) \longmapsto \beta(x, y)$$

ist eine *bilineare Funktionale* (oder bilineare Form), falls gelten:

(1) $\beta(c_1x_1 + c_2x_2, y) = c_1\beta(x_1, y) + c_2\beta(x_2, y)$ und

(2) $\beta(x, d_1y_1 + d_2y_2) = d_1\beta(x, y_1) + d_2\beta(x1, y_2)$

für alle $x, x_1, x_2 \in U$ und $y, y_1, y_2 \in V$ und $c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$.

Beispiel $V \times V^* \longrightarrow K$
$(x, f) \longmapsto [x, f]$, wobei $[x, f] := f(x)$.
Die definierenden Eigenschaften und Verknüpfungen in V^* liefern

(1) $[c_1x_1 + c_2x_2, f] = c_1[x_1, f] + c_2[x_2, f]$ und

(2) $[x, d_1f_1 + d_2f_2] = d_1[x, f_1] + d_2[x, f_2]$.

Notation $L^{(2)}(U \times V; K) :=$ die Menge der bilinearen Formen auf $U \times V$. Sie ist ein Vektorraum (mit den Verknüpfungen $(c_1\beta_1 + c_2\beta_2)(x, y) := c_1\beta_1(x, y) + c_2\beta_2(x, y)$ wie üblich).

Definition Seien $m \in \mathbb{N}$ und $V_1, \ldots, V_m$ K-Vektorräume. Eine *m-lineare Funktionale* (Form) (oder multilineare Funktionale vom Grad m) auf $V_1 \times \cdots \times V_m$ ist eine Abbildung $\mu : V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow K$, so dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{rlcll} \mu(\alpha_1, \ldots, & c\alpha_i + \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & = \\ c\mu(\alpha_1, \ldots, & \alpha_i & , \ldots, \alpha_m) & + \\ \mu(\alpha_1, \ldots, & \gamma_i & , \ldots, \alpha_m) & \end{array}\right\} \text{ für } \alpha_i, \gamma_i \in V_i; c \in K.$$

Notation $L^{(m)}(V_1 \times \cdots \times V_m; K) := K$-Vektorraum der m-linearen Formen.

Bemerkung μ ist multilinear und falls ein i mit $\alpha_i = 0$ existiert, dann gilt $\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) = 0$.

§ 8 Alternierende multilineare Formen auf K^n

Definition Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$. Eine n-lineare Form

$$\delta : \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_{n\text{-mal}} \longrightarrow K$$

ist *alternierend*, falls $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $z_i = z_j$ und $i \neq j$ existieren, dann gilt $\delta(z_1, \ldots, z_n) = 0$ (für $z_1, \ldots, z_n \in K^n$).

Konvention δ wird auch als Abbildung auf $K^{n\times n} = Mat_{n\times n}(K)$ aufgefasst, nämlich

$$\delta(A) = \delta(z_1, \ldots, z_n), \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} z_1 \\ --- \\ .... \\ --- \\ z_n \end{pmatrix};$$

i.e. z_i ist die $i$te-Zeile der $n \times n$-Matrix A.

Lemma 1 Sei δ alternierend. Es gilt:

(i) $z_1, \ldots, z_n$ sind linear abhängig $\Rightarrow \delta(z_1, \ldots, z_n) = 0$

(ii) $\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_n) = -\delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_i, \ldots, z_n)$ (für $i \neq j$).

Allgemeiner $\delta(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}) = Sign(\pi)\delta(z_1, \ldots, z_n)$ für $\pi \in S_n$

Beweis

(i) Ohne Einschränkung nehmen wir an $z_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i$ für geeignete $c_1, \ldots, c_{n-1} \in K$.
Wir berechnen:
$\delta(z_1, \ldots, z_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \delta(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_i) = 0.$

(ii) Wir berechnen:

$$\begin{aligned} 0 = \ & \delta(z_1, \ldots, z_i + z_j, \ldots, z_j + z_i, \ldots, z_n) = \\ & \delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j + z_i, \ldots, z_n) + \\ & \delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_j + z_i, \ldots, z_n) = \\ & \delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_n) + \\ & \delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_i, \ldots, z_n) + \\ & \delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_j, \ldots, z_n) + \\ & \delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_i, \ldots, z_n). \end{aligned}$$

Also:
$0 = \delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_n) + \delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_i, \ldots, z_n)$
wie behauptet. $\square$

Bemerkung

(1) Falls Char $(K) \neq 2$ gilt auch die Umkehrung: δ erfüllt (ii) impliziert δ alternierend ist: Man nehme $z_i = z_j$ für $i \neq j$.
Also $\delta(z_1, \dots z_i, \dots, z_i, \dots, z_n) = -\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n)$. Als Char $(K) \neq 2$ gilt für alle $a \in K$: $a = -a \Rightarrow a = 0$.

(2) $\delta((a,b),(c,d)) \coloneqq ac + bd$ auf $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ ist ein Gegenbeispiel.