4. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 14. April 2016

Korollar 1 $f \in K[x]; c \in K$. Es gilt: $(x-c)$ teilt f genau dann, wenn $f(c) = 0$.

Beweis Divisionsalgorithmus $\Rightarrow f = (x-c)q + r; r = 0$ oder $\deg r < 1$, i.e., r ist Skalarpolynom. Also $f(c) = r(c) = r$.
Also $r = 0$ genau dann, wenn $f(c) = 0$. □

Definition $c \in K$ ist eine *Nullstelle*, wenn $f(c) = 0$. Abbreviation: "NS von f in K". (Also c ist Nullstelle von f genau dann, wenn $(x-c)$ teilt f.)

Korollar 2 Sei $f \in K[x]$ mit $\deg f = n$. Dann hat f höchstens n Nullstellen in K.

Beweis $\deg f = 0 \Rightarrow f \neq 0$ (Skalarpolynom) $\Rightarrow$ keine Nullstelle in K.
Also ohne Einschränkung $\deg f \geq 1$. $\deg f = 1 \Rightarrow f = ax + c; a \neq 0$ und $ax + c = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{-c}{a}$ also eindeutige Nullstelle. Wir nehmen nun an, dass die Induktionsannahme für $n-1$ gilt.
Sei a eine Nullstelle von f in K, also $f = (x-a)q$; $\quad \deg q = n-1$.
Nun ist $f(b) = 0$ genau dann, wenn $b = a$ oder b eine Nullstelle von q in K ist.
Induktionsannahme $\Rightarrow q$ hat höchstens $(n-1)$ Nullstellen, also hat damit f höhstens n Nullstellen. □

§ 4 Formale Abteilungen

$f = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n := f^{(0)}$ (Konvention)
$f^{(1)} := f' = c_1 + 2c_2x + \cdots + nc_nx^{n-1} := Df$

Bemerkung 1 $D(f + cg) = D(f) + cD(g); f, g \in K[x]$ und $c \in K$.
So ist D ein linearer Operator: $D : K[x] \longrightarrow K[x]$.

Notation $f^{(2)} = f'' = D^2f := D(D(f))$
$f^{(3)} = D^3(f)$ usw.; D^n sind alle lineare Operatoren.

Satz 1 (Taylor's Formel)
Seien Char $(K) = 0; n \in \mathbb{N}_0, a \in K, p \in K[x]$ und deg $p \leq n$.
Es gilt: $p = \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(a)\frac{1}{i!}(x-a)^i$ $(*)$

Beweis Sei (wieder wie in LIS) V der K-Vektorraum der Polynome von deg $\leq n$ (und das 0 Polynom). Betrachte: $l_i : V \longrightarrow K; l_i(p) := p^{(i)}(a); l_i \in V^*$ für alle $i = 0, \ldots, n$.
Setze $p_i := \frac{1}{i!}(x-a)^i$. Es gilt $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ (siehe Übungsblatt).
Also sind $p_0, \ldots, p_n$ und $l_0, \ldots, l_n$ zueinander Dual-Basen von V und V^*.
Also $p = \sum_{i=0}^{n} l_i(p)p_i$. □

Bemerkung

(1) $1, (x-a), \ldots, (x-a)^n$ sind linear unabhängig. Also ist diese lineare Kombination $(*)$ eindeutig.

(2) Char $(K) = 0$ wird vorausgesetzt damit $i! \neq 0$.

Definition 2 Sei $f \neq 0$ und $c \in K$ eine Nullstelle von f in K. Die *Vielfachheit* von c ist die größte $\mu \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $(x-c)^\mu$ teilt f,
Bemerke: $1 \leq \mu \leq$ deg f.

Satz 2 Seien Char $(K) = 0, f \neq 0,$ deg $f \leq n$ und $c \in K$ ist eine Nullstelle von f.
Es gilt: c hat die Vielfachheit μ genau dann, wenn
$f^{(k)}(c) = 0$ bei $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $f^{(\mu)}(c) \neq 0$ $(\dagger)$

Beweis "⇒" $(x-c)^\mu$ teil f und $(x-c)^{\mu+1}$ teilt nicht f. Es gibt also $g \neq 0$ mit $f = (x-c)^\mu g$.
Bemerke: deg $g \leq n - \mu$ und $g(c) \neq 0$.
Die Taylor Formel liefert:

$$f = (x-c)^\mu\Big[\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^m}{m!}\Big].$$

Beweis "⇒" Fortsetzung:

Also $f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}$.

Da die Koeffizienten von f als lineare Kombination von $(x-c)^k (0 \leq k \leq n)$ eindeutig sind, ergibt ein Vergleich:

$$f = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!} =$$

$$g^{(0)}(c) \frac{(x-c)^\mu}{0!} + \cdots + g^{(n-\mu)}(c) \frac{(x-c)^n}{(n-\mu)!}. \qquad (\dagger\dagger)$$

Also $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = 0$ für $0 \leq k \leq \mu - 1$ und $\frac{f^{(k)}}{k!}(c) = \frac{g^{(k-\mu)}(c)}{(k-\mu)!}$ für $\mu \leq k \leq n$.

Insbesondere für $\mu = k$ erhalten wir $f^{(\mu)}(c) = g(c) \neq 0$.

"⇐" $(*)$ und $(\dagger\dagger)$ liefern $f = \sum_{k=\mu}^{n} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!}$.

$$\text{Also } f = (x-c)^\mu \underbrace{\left[\frac{f^\mu(c)}{\mu!} + \frac{f^{\mu+1}(c)}{\mu+1!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-\mu}\right]}_{:= g}$$

$$g(c) = \tfrac{f^\mu(c)}{\mu!} \neq 0.$$

Also $f = (x-c)^\mu g$ mit $g(c) \neq 0$.
Wir behaupten nun: $(x-c)^{\mu+1}$ teilt f nicht, sonst hätten wir $h \in K[x]$ mit $f = (x-c)^{\mu+1} h = (x-c)^\mu (x-c) h = (x-c)^\mu g$.
$K[x]$ Integritätsbereich $\Rightarrow g = (x-c)h$. Also $g(c) = 0$. Ein Widerspruch.
□