3. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy
SS 2016: 12 April 2016

Definition 1 Seien $\mathcal{A}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ Algebren über K. Eine Bijektion $\sim: \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}; \alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ ist eine *Algebren-Isomorphie*, falls $\widetilde{(c\alpha + d\beta)} = c\tilde{\alpha} + d\tilde{\beta}$ und $\widetilde{(\alpha\beta)} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}, c, d \in K$ gelten.

Lagrange Interpolation Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei K ein Körper, $t_0, t_1, \ldots, t_n$ $n+1$ verschiedene Elemente aus K.
Sei $V :=$ der K-Vektorraum der Polynome mit deg $\leq n$ (zusammen mit 0 Polynom).

NB: $\dim V = n + 1$ (weil e.g. $\{x^0, \ldots x^n\}$ eine Basis bildet).

Sei $L_i := L_{t_i}; L_i \in V^*; 0 \leq i \leq n; L_i(f) := f(t_i)$.

Behauptung 1
$\{L_0, \ldots, L_n\}$ ist eine Basis für V^*.

Beweis
Es genügt eine duale Basis $\{P_0, \ldots, P_n\}$ von V zu finden. Solch eine Basis ist durch die Gleichungen
$L_j(P_i) = \delta_{ij} \qquad 0 \leq i, j \leq n$ $\qquad (*)$
bestimmt. Wir wollen also $P_0, \ldots, P_n$ konstruieren, die $(*)$ erfüllen.
Wir definieren

$$P_i := \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - t_j}{t_i - t_j} \right)$$

(siehe Übungsblatt) □

Die Dualität liefert wie immer für alle $f \in V$

$$f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) P_i$$

"Lagrange Interpolationsformel".

Satz 1 Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} K[x] & \longrightarrow & K[x]^{\sim} \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array} \quad \text{für } K \text{ unendlich}$$

ist eine K-Algebren-Isomorphie.

Beweis Es ist unmittelbar zu prüfen, dass $\widetilde{f + cg} = \tilde{f} + c\tilde{g}$ und $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$. Die Abbildung ist per Definition surjektiv.
Injektiv? $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$?
Sei deg $f = n; t_o, \ldots, t_n$ verschiedene in K. Seien $P_o, \ldots, P_n$ wie in LIF und schreibe $f = \sum f(t_i) P_i$.
$\tilde{f} = 0 \Rightarrow f(t_i) = 0 \Rightarrow f = 0$. □

§ 3 Ideale

$K[x]$ ist ein Itegritätsbereich. Es gilt
$f, g, h \in K[x]; f \neq 0$ und $fg = fh \Rightarrow g = h$.
Wir wollen den Divisionsalgorithmus in $K[x]$ beweisen.

Divisions-algorithmus Seien $f, g \neq 0; \deg g \leq \deg f$.
Es exisitert genau ein $q \in K[x]$ und genau ein $r \in K[x]$, so dass
$f = qg + r; \qquad r = 0$ oder $\deg r < \deg g$.

Lemma 1 Seien $f, d \neq 0 \in K[x]$ mit $\deg d \leq \deg f$. Es gibt ein $g \in K[x]$, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg (f - dg) < \deg f$.

Beweis Schreibe $\deg f := m \geq n := \deg d$.

$$f = a_m x^m \quad + \quad \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \qquad a_m \neq 0$$

$$d = b_n x^n \quad + \quad \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \qquad b_n \neq 0$$

Betrachte $\dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} \big(b_n x^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} b_i x^i\big) = a_m x^m + \cdots$.
Also ist $f - \dfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \neq 0$ und $\deg \big(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d\big) < \deg f$.
Setze also $g := (\frac{a_m}{b_n}) x^{m-n}$. □

Satz 2 (Divisionsalgorithmus)
Seien $f, d \in K[x]; d \neq 0$. Es existieren $q, r \in K[x]$, so dass

(*i*) $f = dq + r$

(*ii*) $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$.

Ferner sind q, r mit (i) und (ii) eindeutig.

Beweis **Existenz:** Sei $f \neq 0$ und $\deg f \geq \deg d$. Lemma 1 ergibt, dass ein $g \in K[x]$ existiert, so dass $f - dg = 0$ oder $\deg (f - dg) < \deg f$. Wenn $f - dg \neq 0$ und $\deg (f - dg) \geq \deg d$, folgt aus Lemma 1, dass ein $h \in K[x]$ existiert, so dass $(f - dg) - dh = 0$ oder $\deg (f - d(g + h)) < \deg (f - dg)$.
Die Fortsetzung ergibt ... $< \deg (f - d(g + h)) < \deg (f - dg) < \deg f$. Die Prozedur muss nach endlich vielen Schritten anhalten. Wir bekommen also $q \in K[x]$ und $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$ mit $f = dq + r$.

Eindeutigkeit: Sei $f = dq_1 + r_1 = dq + r \Rightarrow d(q - q_1) = (r_1 - r)$ mit $r_1 = 0$ oder $\deg r_1 < \deg d$.
$q - q_1 \neq 0 \Rightarrow d(q - q_1) \neq 0$ und $\deg (r_1 - r) = \deg d + \deg (q - q_1)$.
Aber $\deg (r_1 - r) \leq \max (\deg r_1, \deg r) < \deg d$ - ein Widerspruch.
So $q - q_1 = 0$ und damit $r_1 - r = 0$.

Definition 2 $f, d \in K[x]; d \neq 0$.
d teilt f oder *f ist durch d teilbar* oder *f ist ein Vielfaches von d*, wenn $r = 0$ in (Divisionsalgorithmus): $f = dq + 0$. In dem Fall heißt q Quotient.