Algebraische Zahlentheorie
Algebra B 4 - Sommersemester 2017
Prof'in Dr. Salma Kuhlmann

8.Vorlesung

22. Mai 2017

Beweis von Lemma. (1) $\Rightarrow$ (2): Setze $N := \bigcup_i N_i$, $N \leq M$.
Seien $x_1, \dots, x_r \in N$ mit $N :=$ $\operatorname{Span}_R\{x_1, \dots, x_r\}$ und $i \in \mathbb{N}$, so daß $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq N_i$. Dann ist $N \subseteq N_i$ und damit $N_i = N = N_{i+1} = \dots$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $N_1 \in \mathcal{U}$ nicht maximal. Dann gibt es $N_2 \in \mathcal{U}$ mit $N_1 \subsetneq N_2$. Wiederhole mit N_2: $N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq N_3 \subsetneq \dots$ usw. Diese Prozedur muß nach endlich vielen Schritten anhalten und damit ein maximales Element produzieren.
(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $N \leq M$ und $\mathcal{U}$ die Menge aller seinen endlich erzeugten Untermoduln. Es gilt $\mathcal{U} \neq \varnothing$ weil $\{0\} \in \mathcal{U}$. Sei $N' =$ $\operatorname{Span}_R\{x_1, \dots, x_r\}$ ein maximales Element von $\mathcal{U}$. Ist $N \supsetneq N'$, existiert dann $x \in N \backslash N'$ und $\operatorname{Span}_R\{x_1, \dots, x_r, x\} \supsetneq N'$: Widerpsruch. □

Definition 8.1
M ist noethersch, wenn eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt ist. Ein Ring R ist noethersch heißt also: Jedes Ideal von R ist endlich erzeugt.

Lemma 8.1
Sei $N \leq M$.
M ist noethersch $\Leftrightarrow$ N ist noethersch und M/N ist noethersch.

Beweis. „$\Rightarrow$“ $N' \leq N \Rightarrow N' \leq M \Rightarrow N'$ endlich erzeugt. Also ist N noethersch.
Sei nun $A/N \leq M/N$, wobei $A \leq M$ und $N \leq A$. Also ist A endlich erzeugt und damit auch A/N.
„$\Leftarrow$“ Sei $A \leq M$.
Übungsaufgabe$\Rightarrow$ $A + N/N \cong A/A \cap N$.
Nun $A + N/N \leq M/N \Rightarrow A + N/N$ endlich erzeugt, d.h $A/A \cap N$ endlich erzeugt
und $A \cap N \leq N \Rightarrow A \cap N$ endlich erzeugt.
Lemma 4.2 impliziert nun, dass A endlich erzeugt ist.
□

Korollar 8.2
M_1, M_2 noethersch$\Rightarrow$ $M_1 \oplus M_2$ noethersch.

Beweis. $M_1 \oplus M_2/M_1 \cong M_2$ ist noethersch und M_1 ist noethersch. □

Korollar 8.3
Sei R noethersch und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M noethersch.

Beweis. Lemma 5.1$\Rightarrow$ $M \cong R^n/K$.
Korollar 8.2$\Rightarrow$ $R^n = R \oplus \cdots \oplus R$ ist noethersch (Induktion).
Lemma 8.1$\Rightarrow$ M ist noethersch. □

Satz (Hilbert Basissatz)
Sei R noethersch, dann ist $R[x]$ noethersch.

Beweis. Sei $I \lhd R[x]$. Betrachte $J := \{a \in R \mid a$ ist Leitkoeffizient von $f \in I\}$.
Es ist ein Ideal von R (ÜA), also gibt es $f_1, \ldots, f_n \in I$, so daß die Leitkoeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ von $f_1, \ldots, f_n$ das Ideal J erzeugen. Setze $d := \max_i \deg f_i$ und betrachte den endlich erzeugten R-Modul $M_d := \sum_{i=0}^{d-1} Rx^i$, d.h den R-Modul der Polynome vom Grad $< d$.
Korollar 8.3$\Rightarrow$ M_d ist noethersch, also ist $M_d \cap I \leq M_d$ endlich erzeugt.
Seien $g_1, \ldots, g_m \in I$ Erzeuger davon.

Behauptung: $I =< f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m >$

Beweis. $\supseteq$ ist klar.
Sei nun $f \in I$. Wenn $\deg f < d$, dann ist $f \in< g_1, \ldots, g_m >$. O.E. gilt also $\deg(f) =: k + 1 \geq d$. Wir argumentieren per Induktion über k. Wir multiplizieren f_i mit einer geeigneten Potenz x^{l_i} und bekommen $f_i' \in I$ mit $\deg(f_i') = k + 1$. Sei $f' = \sum_{i=1}^{n} r_i f_i'$, so dass f' und f den gleichen Leitkoeffizient haben. Also ist $\deg(f - f') \leq k$ und per Induktionsannahme gilt $f - f' \in< f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m >$. Da aber $f' \in< f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m >$ ist, bekommen wir nun $f \in< f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m >$ □

□

Korollar 8.4
R noethersch$\Rightarrow$ $R[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch.

Erinnerung: Sei $R \subseteq S$ eine Ringenerweiterung und $Y \subseteq S$ eine Untermenge. Dann ist $R[Y]$ unsere Notation für den kleinsten Unterring von S, der $R \bigcup Y$ enthält.
Wenn $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ endlich ist, dann schreiben wir dafür $R[y_1, \ldots, y_n]$.
Der Evaluation-Homomorphismus

$$\begin{array}{cccc} ev_y & R[x_1, \ldots, x_n] & \rightarrow & R[y_1, \ldots, y_n] \\ & f(x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

ist surjektiv, also gilt $R[y_1, \ldots, y_n] \cong R[x_1, \ldots, x_n]/ker(ev_y)$ (ein Faktorring von Polynomring), d.h $R[y_1, \ldots, y_n]$ besteht aus Polynomen in $\{y_1, \ldots, y_n\}$.

Beispiel 8.1
Sei $R = K$ ein Körper, $S = L$ eine Körpererweiterung von K. Sei $\alpha \in L$ algebraisch über K. Dann hat $ev_\alpha : K[x] \rightarrow K[\alpha]$ einen nicht-tivialen Kern, $\ker(ev_\alpha) =< \mathrm{MinPol}_K(\alpha) >$, also ist $K[\alpha] \cong K[x]/\ker(ev_\alpha)$ mit $\ker(ev_\alpha)$ maximales Ideal. Wir sehen also: $K[\alpha]$ ist bereits ein Körper, und damit gilt $K[\alpha] = K(\alpha)$.

Korollar 8.5
Sei R noethersch, $S = R[a_1, \ldots, a_n]$ eine Ringererweiterung. Dann ist S noethersch.

Beweis. $R[a_1, \ldots, a_n] \cong R[x_1, \ldots, x_n]/\ker(ev_{\bar{a}})$. Nun Korollar 8.4 und Lemma 8.1 anwenden.
□

Kapitel 3: Ganzheit

Erinnerungen

Definition 8.1
Sei $R \subseteq S$ Ringerweiterung

a) $\alpha \in S$ ist ganz über R $\Leftrightarrow \exists f \in R[x]$ normiert mit $f(\alpha) = 0$.

b) $R \subseteq S$ ist eine ganze Ringerweiterung $\Leftrightarrow$ jedes $\alpha \in S$ ist ganz über R.

9