Algebraische Zahlentheorie
Algebra B 4 - Sommersemester 2017
Prof'in Dr. Salma Kuhlmann

23.Vorlesung

21 Juli 2017

Sei $L/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper vom Grad n. Ansatz wie in der 22. Vorlesung. Wir wollen nun das Gitter $\sigma(\mathfrak{a}) \subseteq L_{\mathbb{R}}$. studieren.

Bemerkung 23.1
Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein vollständiges Gitter mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ und f.P. T_Γ.
Es ist $v(T_\Gamma) = |\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}|$ (ÜB)

Wir können Bemerkung 23.1 anwenden mit $\Gamma = \sigma(\mathfrak{a})$. Wir berechnen:
$v(T_{\sigma(\mathfrak{a})}) = |\det A| = |(\frac{1}{2}(i))^t \det \mathcal{V}|$. Andererseits ist $(\det \mathcal{V})^2 \underset{\text{ÜB}}{=} D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \underset{\text{Prop. 21.3}}{=} N(\mathfrak{a})^2 D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})$.
Alles zusammen ergibt: $v(T_{\sigma(\mathfrak{a})}) = 2^{-t} N(\mathfrak{a}) \sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}$

Bemerkung 23.2
Sei $\tau \in \mathbb{R}_+$ und setze $X_\tau := \{(x_1, \dots, x_s, z_1, \dots, z_t) \in L_{\mathbb{R}} \mid \sum_{i=1}^s |x_i| + 2\sum_{j=1}^t |z_j| < \tau\}$.
Dann ist X_τ beschränkt, konvex, symmetrisch und $v(X_\tau) = 2^s (\frac{\pi}{2})^t \frac{\tau^n}{n!}$ (ÜB)

Wir können nun eine genauere Aussage über die Minkowski Schranke (Satz 22.2) zeigen.

Satz 23.1 (Explizite Minkowski Schranke)
Sei $0 \neq \mathfrak{a} \lhd \mathcal{O}_L$,. Es gibt $0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}$, so daß

$$|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq \underbrace{(\frac{4}{\pi})^t \frac{n!}{n^n} \sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}}_{:=C_L} N(\mathfrak{a})$$

Beweis. Wir wollen Satz 20.7 auf $\Gamma := \sigma(\mathfrak{a})$ und $X_\tau \subseteq L_{\mathbb{R}}$ für ein geeignetes τ anwenden.
Wir bemerken jetzt schon: wenn

(1) $v(X_\tau) > 2^n v(T_{\sigma(\mathfrak{a})})$ dann

(2) $\exists \alpha \neq 0, \alpha \in \mathfrak{a}$, so daß $\sigma(\alpha) \in X_\tau$, d.h so daß $(\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_s(\alpha), \sigma_{s+1}(\alpha), \dots, \sigma_{s+t}(\alpha)) \in X_\tau$, d.h.

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^s |\sigma_i(\alpha)| + 2\sum_{j=1}^t |\sigma_{s+j}(\alpha)| < \tau$$

Erinnerung (AGU)**:** Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Es ist

$$(\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n a_i)$$

Setze $a_j := |\sigma_j(\alpha)|$, $j = 1, \dots, s$ und $a_{s+1} = a_{s+2} = |\sigma_{s+1}(\alpha)|$ und
$\vdots$
$\underbrace{a_{s+2t-1}}_{=a_{n-1}} = \underbrace{a_{s+2t}}_{a_n} = |\sigma_{s+t}(\alpha)|$
(∗) bedeutet $\sum_{l=1}^n a_l < \tau$. Die AGU impliziert nun, daß $n(a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} < \tau$, d.h. $\prod_{l=1}^n a_l < \frac{\tau^n}{n^n}$, d.h. $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| = \prod_{l=1}^n a_l < \frac{\tau^n}{n^n}$.
(Begründung: $\prod a_l = \prod_{i=1}^s |\sigma_i(\alpha)| \prod_{j=1}^t |\sigma_{s+j}(\alpha)|^2$. Andererseits ist $|\sigma_{s+j}(\alpha)|^2 = |\sigma_{s+j}(\alpha)|.|\overline{\sigma_{s+j}(\alpha)}|$, so daß

$$\begin{aligned}\prod a_l &= |\prod_{i=1}^s \sigma_i(\alpha) \prod_{j=1}^t \sigma_{s+j}(\alpha)\overline{\sigma}_{s+j}(\alpha)| \\ &= |\prod_{i=1}^s \sigma_i(\alpha) \prod_{j=1}^t \sigma_{s+j}(\alpha) \prod_{j=1}^t \overline{\sigma}_{s+j}(\alpha)| \\ &= |N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)|\end{aligned}$$

Weil $\sigma_1, \dots, \sigma_s, \sigma_{s+1}, \bar{\sigma}_{s+1}, \dots, \sigma_{s+t}, \bar{\sigma}_{s+t}$ alle Einbettungen über $\mathbb{Q}$ von L in $\mathbb{C}$ sind.)
Zusammenfassung:

(1) Ist $v(X_\tau) > 2^n v(T_{\sigma(\mathfrak{a})})$, dann

(2) $\exists 0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}$, so daß $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| < \frac{\tau^n}{n^n}$

oder
(1) Ist $2^s(\frac{\pi}{2})^t \frac{\tau^n}{n!} > 2^n 2^{-t} N(\mathfrak{a})\sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}$ dann gilt (2). Wir analysieren die Bedingung (1) genauer:

$$\begin{aligned}(1) \Leftrightarrow \tau^n &> n!2^{-s}2^n2^{-t}2^t\pi^{-t}N(\mathfrak{a})\sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|} \\ \text{d.h. } \tau^n &> n!2^{n-s}\pi^{-t}N(\mathfrak{a})\sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|} \\ \text{d.h. } \tau^n &> n!2^{2t}\pi^{-t}N(\mathfrak{a})\sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}\end{aligned}$$

Wir haben bewiesen:
Ist $\tau^n > n!(\frac{4}{\pi})^t N(\mathfrak{a})\sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}$ (1), dann $\exists 0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}$ mit $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| < \frac{\tau^n}{n^n}$ (2).
Für jedes τ wie in (1) definieren wir
$A_\tau := \{0 \neq \alpha \in \mathfrak{a} \mid |N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| < \frac{\tau^n}{n^n}\}$. Dann ist $A_\tau \neq \emptyset$, $|A_\tau| < \infty$ (da $\sigma(\alpha) \in X_\tau \cap \sigma(\mathfrak{a})$), $\tau_1 < \tau_2 \Rightarrow A_{\tau_1} \subseteq A_{\tau_2}$. Aus diesen Eigenschaften folgern wir, daß $\bigcap_{\tau \text{ erfüllt } (1)} A_\tau \neq \emptyset$: Sei τ_0, so daß $|A_{\tau_0}| \leq |A_\tau|$ für alle τ, die (1) erfüllen. Dann ist $\cap A_\tau = A_{\tau_0} \neq \emptyset$.
Sei nun $\alpha \in \cap A_\tau$. Wir behaupten, daß $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq C_L N(\mathfrak{a})$: da $0 \neq \alpha \in \cap A_\tau$ ist, gilt $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| < \frac{\tau^n}{n^n}$, für alle τ, die (1) erfüllen . Es folgt : $|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq \inf_{\tau \text{ erfüllt } (1)} \{\frac{\tau^n}{n^n}\} = \frac{1}{n^n} \inf_{\tau \text{ erfüllt } (1)} \tau^n$
Nun ist $\inf_{\tau \text{ erfüllt } (1)} \tau^n = n!(\frac{4}{\pi})^t N(\mathfrak{a})\sqrt{|D(\mathcal{O}_L/\mathbb{Z})|}$. □