Algebraische Zahlentheorie
Algebra B 4 - Sommersemester 2017
Prof'in Dr. Salma Kuhlmann

10.Vorlesung

1. Juni 2017

Proposition 10.1 (Transitivität von Ganzheit)
Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Integritätsbereiche. Aus B ganz über A und C ganz über B folgt C ganz über A.

Für den Beweis brauchen wir:

Lemma 10.2
Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Ringerweiterungen. Aus B endlich erzeugt als A-Modul und
C endlich erzeugt als B-Modul folgt
C endlich erzeugt als A-Modul.

Beweis. Seien $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ erzeugend für B als A-Modul und
$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ erzeugend für C als B-Modul.
Dann ist $\{\beta_i \gamma_j\}$ erzeugend für C als A-Modul. □

Lemma 10.3
Sei $B = A[\beta_1, \ldots, \beta_m]$ eine Ringerweiterung, mit β_i ganz über A $\forall i = 1, \ldots, m$. Dann ist B ganz über A und B ist endlich erzeugt als A-Modul.

Beweis. Induktion nach m. Induktionsanfang $m = 1$:
Seien $\beta = \beta_1$, β ganz über A, und $a_i \in A$, so daß $\beta^n + \cdots + a_n = 0$

Behauptung: $1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{n-1}$ erzeugen $B = A[\beta]$ als A-Modul.

Beweis. Weil $\beta^n \in \sum_{i=0}^{n-1} A\beta^i$, kann man ein Element b aus $A[\beta]$ als

$$(*) \qquad b = c_0 + c_1\beta + \cdots + c_N\beta^N \quad (c_i \in A)$$

umschreiben, indem man $c_N\beta^N$ als A-lineare Kombination der $\beta^0, \ldots, \beta^{n-1}$ schreibt und in $(*)$ ersetzt usw... □

Induktionsschritt: schreibe $B = A[\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_m] = \underbrace{A[\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}]}_{:=D}[\beta_m]$

D ist endlich erzeugt als A-Modul per Induktionsannahme und $B = D[\beta_m]$ ist endlich erzeugt als D-Modul per Induktionsanfang, da β_m a fortiori auch ganz über D ist, also sind $A \subseteq D \subseteq B$ wie in Lemma 10.2 und damit ist B endlich erzeugt als A-Modul und (Korollar 9.3) damit ist B ganz über A. □

Beweis von Proposition 10.1. Seien $\gamma \in C$ und $b_i \in B$, so daß $\gamma^n + b_1\gamma^{n-1} + \cdots + b_n = 0$
Setze $B' := A[b_1, \ldots, b_n]$. Da die b_i ganz über A sind, ist B' endlich erzeugt als A-Modul (Lemma 10.3). Nun ist γ bereits ganz über B' (Wahl der b_i), also ist $B'[\gamma]$ endlich erzeugt als B'-Modul, also (Lemma 10.2) ist $B'[\gamma]$ endlich erzeugt als A-Modul. Damit ist γ ganz über A. □

Korollar 10.4
Sei $R \subseteq S$ Ringerweiterung. Es ist: $\overline{R}^S$ ist ganz abgeschlossen in S.

Beweis. Es ist: $R \subseteq \overline{R}^S \subseteq S$. Sei $\gamma \in S$ ganz über $\overline{R}^S$, also haben wir $R \underset{\text{ganz}}{\subseteq} \overline{R}^S \underset{\text{ganz}}{\subseteq} \overline{R}^S[\gamma]$ und damit gilt nach Proposition 10.1 $R \underset{\text{ganz}}{\subseteq} \overline{R}^S[\gamma]$. Somit ist $\gamma \in \overline{R}^S$. □

Korollar 10.5
Sei $R \subseteq K$, K Körper. Dann ist $\overline{R}^K$ ganz abgeschlossen.

Beweis. $\overline{R}^K \subseteq \mathrm{Quot}(\overline{R}^K) \subseteq K$ und $\overline{R}^K$ ist ganz abgeschlossen in K (Korollar 10.4), also ist a fortiori $\overline{R}^K$ ganz abgeschlossen (in der Zwischenerweiterung $\mathrm{Quot}(\overline{R}^K)$). □

§Zusammenfassung: Lokalisierung

(3. Vorlesung BIII)

1. Sei R ein Integritätsbereich. $D \subseteq R$ ist multiplikativ falls $1 \in D$ und $s, t \in D \Rightarrow st \in D$
2. Sei $D \subseteq R$ multiplikativ mit $0 \notin D$, $\sim$ wird auf $R \times D$ wie folgt definiert: $(r, d) \sim (r', d') \Leftrightarrow rd' = dr'$. Schreibe $\frac{r}{d} := [(r, d)]$
3. $\{\frac{r}{d} \mid (r, d) \in R \times D\} := D^{-1}R$ ist ein Ring

Beispiel 10.1
$D := R \backslash \{0\}$ ist multiplikativ und $D^{-1}R = \mathrm{Quot}(R)$.

Beispiel 10.2
$\mathfrak{p} \lhd R$ Primideal$\Rightarrow$ $D := R \backslash \mathfrak{p}$ ist multiplikativ. Wir bezeichnen mit $R_{\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung $D^{-1}R$ von R nach $\mathfrak{p}$, also ist $R_{\mathfrak{p}} := \{\frac{r}{d} \mid r \in R, d \notin \mathfrak{p}\}$.

Definition und Notation

a) Für $I \lhd R$ und $D \subseteq R$ multiplikativ mit $0 \notin D$, setze $I^e := D^{-1}RI$ das von I in $D^{-1}R$ erzeugte Ideal.
   ÜA: $I^e = \{\frac{a}{d} \mid a \in I, d \in D\} \lhd D^{-1}R$

b) Sei nun $I \lhd D^{-1}R$. Setze $I^c := I \cap R \lhd R$. Es gilt
   (i) $I \lhd D^{-1}R \Rightarrow I^{ce} = I$
   (ii) $I \lhd R$ prim und $I \cap D = \varnothing \Rightarrow I^{ec} = I$
   (iii) $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^e$ ist eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : p \cap D = \varnothing\}$ und $\mathrm{Spec}(D^{-1}R)$, wobei $\mathrm{Spec}(R)$:=Menge aller Primideale von R.

Korollar 10.1
Sei $\mathfrak{p} \lhd R$ prim. Die Abbildung $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$ liefert eine inklusionserhaltende Bijektion $\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} \to \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$. Insbesondere besitzt $R_{\mathfrak{p}}$ nur ein maximales Ideal, nämlich $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$.

Definition 10.1
R ist lokal, wenn R nur ein maximales Ideal besitzt.

Lemma 10.2
R ist lokal $\Leftrightarrow$ $R \backslash R^{\times}$ ist ein Ideal.

Beweis. siehe ÜB. □

§Lokalisierung und Ganzheit

ÜB B4: R noethersch, $D \subseteq R$ multiplikativ ohne Null $\Rightarrow D^{-1}R$ noethersch.

Satz
R ganz abgeschlossen$\Rightarrow$ $D^{-1}R$ ganz abgeschlossen.

Beweis. siehe ÜB. □

Korollar
$R \subseteq R'$ ganze Erweiterung$\Rightarrow$ $D^{-1}R \subseteq D^{-1}R'$ ganze Erweiterung.

Beweis. Siehe ÜB. □

11