Universität Konstanz

Skript

Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Sommersemester 2012

TeXed by Lucas Heitele

Inhaltsverzeichnis

Der Mitschrieb enthält eventuell Fehler, für die keine Haftung übernommen wird.
Meldungen über Fehler und Verbesserungen bitte an `lucas.heitele@uni-konstanz.de`

§1. Algebren

Erinnerung: Sei K ein Körper. Eine K-Algebra $\mathscr{A}$ ist ein K-Vektorraum mit einer Multiplikation von Vektoren:

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \times \mathscr{A} &\longrightarrow \mathscr{A} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha\beta \end{aligned}$$

so dass $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{A}$ und $c \in K$ gilt:

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(b) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\gamma + \beta\gamma$
$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(c) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$

Falls es $1 \in \mathscr{A}$ gibt, so dass $1\alpha = \alpha 1 = \alpha \quad \forall\, \alpha \in \mathscr{A}$ heißt die Algebra eine Algebra mit Einheit.
Falls $\alpha\beta = \beta\alpha \quad \forall\, \alpha\beta \in \mathscr{A}$, heißt $\mathscr{A}$ eine kommutative Algebra.

Beispiel1: $\mathscr{A} := \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ kommutative Algebra mit Einheit.

Beispiel2: $\mathscr{A} := \mathscr{L}(V, V)$ kommutative Algebra mit Einheit.

Beispiel3: Potenzreihenalgebra:
Betrachte:

$$K^{\mathbb{N}_0} := \{ f \mid f : \mathbb{N}_0 \to K, f \text{ Abbildung } \}$$

Schreibe $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_0, f_1, \ldots)$
Addition: Punktweise, d.h.

$(\star)$ $\qquad (f + g)_n := f_n + g_n$

Skalarmultiplikation: $\qquad (cf)_n := cf_n$
auch Punktweise

$(\star\star)$Produkt: $\qquad (fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$

> Proposition 1: $\mathscr{A} := K^{\mathbb{N}_0}$ mit den Verknüpfungen (wie in $(\star)$ und $(\star\star)$ erklärt) ist eine kommutative Algebra mit Einheit

---

Erinnerung: in der L.A.I hatten wir die K-Vektorraum Axiome für $K^{\mathbb{N}_0}$ beweisen.

Beweis:

$$(gf)_n = \sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} g_{n-i} f_i = \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} = (fg)_n$$

Somit kommutativ!

$$\begin{aligned}
[(fg)h]_n &= \sum_{i=0}^{n} (fg)_i h_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j} \right) h_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j} h_{n-i} = \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{n-i-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{(n-j)-i} = \sum_{j=0}^{n} f_j (gh)_{n-j} \\
&= [f(gh)]_n
\end{aligned}$$

Also assoziativ!
ÜA.: übrige Axiome (b) und (c). Zeige auch, dass $1 := (1, 0, \ldots, 0)$ Einheit ist.

□

Notation:
$$\begin{aligned}
x &:= (0, 1, 0, \ldots) \\
x^0 &:= 1 \\
x^n &:= \underbrace{x \cdots x}_{n\text{-mal}}
\end{aligned}$$

Proposition 2:

(1) $x^k = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k^{\text{te}} \text{ Stelle}}}{1}, 0, \ldots) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$

(2) $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ sind linear unabhängig, also ist $K^{\mathbb{N}_0}$ unendlich-dimensional.

Beweis: Bereits in L.A.I

□

Definition und Notation: $\mathscr{A} = K^{\mathbb{N}_0}$ heißt die Algebra der Potenzreihen über K.
Sie wird bezeichnet mit $\mathscr{A} := K[\![x]\!]$
Warum Potenzreihen? $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ (formale Schreibweise)

§2. Die Polynomalgebra

Notation: $K[x] := \text{span}\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Definition 1: $f \in K[x]$ heißt Polynom ü ber K. Sei nun $f \neq 0,\ f \in K[\![x]\!]$.
Es gilt:

$$f \in K[x] \text{ gdw. } \exists! n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } f_n \neq 0 \text{ und } f_k = 0 \quad \forall\, k > n$$

$$\deg f := n \quad (\text{Grad von } f \text{ ist } n)$$

NB: $\deg f = n \Leftrightarrow f = f_0 x^0 + f_1 + x^1 + \ldots + f_n x^n, \quad f_n \neq 0$
f_i heißen Koeffizienten von f.

Definition: Ein Polynom aus Gestalt $f = f_0 x^0$ ist ein Skalarpolynom

$$(\deg f = 0 \text{ oder } f = 0)$$

Ein Polynom $f \neq 0$ ist normiert, falls $\deg f = n$ und $f_n = 1$

NB: $f \in [\![x]\!]$ definiere

$$\text{support} f := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid f_n \neq 0\}$$

(i) $\text{support} f = \emptyset$ gdw. $f = 0$
(ii) $\sup f$ ist endlich gdw. $f \in K[x]$
(iii) $f \neq 0$,support endlich.
Es gilt:

$$\deg f = \max(\text{support} f).$$

Definition 2: $f : K \to K$ ist eine polynomiale Funktion, falls es $c_0, \ldots, c_n \in K$ gibt, sodass

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \quad \forall\, x \in K$$

NB: Eine polynomiale Funktion ist etwas anders als ein Polynom. Wir werden die Beziehung genau analysieren.

<u>Satz 1:</u> Seien $f, g \in K[x],\ f, g \neq 0$.
Es gilt:

(i) $fg \neq 0$.

(ii) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

(iii) fg normiert, falls f und g normiert sind.

(iv) fg skalar $\Leftrightarrow$ f und g skalar.

(v) falls $f + g \neq 0$:
$$\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g).$$

<u>Beweis:</u> Sei $\deg f := m$ und $\deg g := n$
<u>Behauptung:</u>
$$\left.\begin{array}{ll} (\star) & (fg)_{m+n} \ = f_m f_n \\ & \text{und} \\ (\star\star) & (fg)_{m+n+k} = 0, k > 0 \end{array}\right\}$$
Wir berechnen:
$$(fg)_{m+n+k} = \sum_{i=0}^{m+n+k} f_i g_{m+n+k-i}$$
Welche Beiträge sind ungleich Null?
$$f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} i \leq m \quad f_i \neq 0 \\ \quad \text{und} \\ m+n+k-i \leq n, \ \text{also } m+k \leq i \end{cases}$$
Das heißt: $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow m+k \leq i \leq m$, d.h. $k = 0$ und $m = i$ wie behauptet.
Nun implizieren $(\star)$ und $(\star\star)$ unmittelbar (i),(ii),(iii) und (i),(ii) implizieren (iv).
(v): ÜA.

□

<u>Korollar 1:</u> $K[x]$ ist kommutative K-Algebra mit Einheit

<u>Beweis:</u> $K[x]$ ist Unterraum von $K[\![x]\!]$. Es genügt also zu prüfen, dass $K[x]$ abgeschlossen unter Produktbildung ist, d.h.
$$f, g \in K[x] \Rightarrow fg \in K[x]$$
Dies folgt aus Satz 1 (§2) (ii).

□

Korollar 2: $f, g, h \in K[x],\ f \neq 0.$

$$\text{Aus } fg = fh \text{ folgt } g = h$$

Beweis: $K[x]$ ist ein Integritätsbereich. Siehe Satz 1 (§2) (i)

□

NB:

$$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \left(\sum_{r=0}^{s} f_r g_{s-r} \right) x^s \text{ für } f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i \text{ und } g = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i$$

Insbesondere:

$$cx^m dx^n = cdx^{n+m} \text{ und } fg = \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} f_i g_j x^{i+j}$$

Definition 3: Sei $\mathscr{A}$ eine K-Algebra mit 1, $f \in K[x],\ f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i,\ \alpha \in \mathscr{A}$.

Definiere:

$$f(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i \text{ mit } \alpha^0 := 1$$

Beispiel 1: $\mathscr{A} = K$, $f \in K[x]$ bestimmt also eine polynomiale Funktion $\tilde{f} : K \to K$

Beispiel 2: $\mathscr{A} = M_{2\times 2}(K),\ B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ f = x^2 + 2$

$$f(B) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2$$

Satz 2: $\mathscr{A}$ K-Algebra mit 1, $f, g \in K[x],\ \alpha \in \mathscr{A},\ c \in K.$

Es gilt:

(i) $(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$

(ii) $(fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$

Beweis: ÜA.

□

Beispiel 1: Nocheinmal: Sei $\alpha \in \mathscr{A}$ fixiert.

$$\begin{aligned} L_\alpha : K[x] &\longrightarrow K \\ f &\longmapsto f(\alpha) \end{aligned}$$

NB: Beispiel: $f \neq 0$ aber $\tilde{f} = 0$
$x^p - x$ für p Primzahl verschwindet auf $\mathbb{F}_p$.
z.B. $f = x^3 - x = x^3 + 2x \in \mathbb{F}_3[x],\ f \neq 0$, weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0,2,0,1,0,\dots) \neq (0,0,0,0,0,\dots)$
Aber $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ in $\mathbb{F}_3$, somit ist $\tilde{f} : \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3$ die Nullabbildung.
(Mehr dazu im Übungsblatt).
Wenn K aber unendlich ist, haben wir solche Beispiele nicht! Wir werden dieses genau untersuchen.

Notation: $K[x]^\sim$ sei der K-Vektorraum der polynomialen Funktionen.

Proposition 1: $K[x]^\sim$ ist eine K-Algebra (mit 1) versehen mit punktweiser Multiplikation

$$(\tilde{f}\tilde{g})(t) := \tilde{f}(t)\tilde{g}(t), \quad t \in K$$

Definition 4: Seien $\mathscr{A}$ und $\tilde{\mathscr{A}}$ Algebren über K.
Eine Bijektion

$$\begin{aligned} {}^\sim : \mathscr{A} &\longrightarrow \tilde{\mathscr{A}} \\ \alpha &\longmapsto \tilde{\alpha} \end{aligned}$$

ist eine allgemeine Isomorphie, falls:

$$\begin{aligned} (c\alpha \tilde{+} d\beta) &= c\tilde{\alpha} + d\tilde{\beta} \\ &\text{und} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathscr{A}, c, d \in K \\ (\tilde{\alpha\beta}) &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta} \end{aligned}$$

Lagrange Interpolation

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei K Körper, $t_0, t_1, \dots, t_n \in K$, paarweise verschieden.
Sei V der K-Vektorraum der Polynome mit deg $\leq n$

NB: $\dim V = n+1$ (weil z.B. $x^0, \ldots, x^n$ Basis bildet)

Sei $L_i := L_{t_i}, \quad L_i \in V^\star, \quad 0 \le i \le n, \quad L_i(f) := f(t_i)$

Behauptung 1: $\{L_0, \ldots, L_n\}$ ist Basis für $V^\star$

Beweis: Es genügt eine duale Basis $\{P_0, \ldots, P_n\}$ von V zu finden. Solch eine Basis ist durch die Gleichungen

$$(\star) \qquad L_j(P_i) = \delta_{ij}, \qquad 0 \le i, j \le n$$

bestimmt. Wir wollen also $P_1, \ldots, P_n$ konstruieren, die $(\star)$ erfüllen.
Wir definieren:

$$P_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left(\frac{x - t_j}{t_i - t_j} \right)$$

(siehe Ü.B.)

$\square$

Die Dualität liefert wie immer:

$$\forall f \in V \; : \; f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) P_i$$

„Lagrange Interpolationsformel“

Satz 3: Die Abbildung

$$\begin{aligned} K[x] &\longrightarrow K[x]^{\sim} \qquad \text{(für K unendlich)} \\ f &\longmapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

ist eine K-Algebren Isomorphie.

Beweis: Es ist unmittelbar zu prüfen, dass

$$(f \tilde{+} cg) = \tilde{f} + c\tilde{g} \text{ und } (\tilde{fg}) = \tilde{f}\tilde{g}.$$

Die Abbildung ist per Definition surjektiv.
Injektiv? $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$? Sei $\deg f = n$, $t_0, \ldots, t_n$ verschieden in K.
Seien $P_0, \ldots, P_n$ wie in der Lagrangen Interpolationsformel und schreibe
$f = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) P_i$

$$\tilde{f} = 0 \Rightarrow f(t_i) = 0 \Rightarrow f = 0$$

$\square$

§3. Ideale

$K[x]$ ist ein Integritätsbereich, es gilt:

$$f, g, h \in K[x], \quad f \neq 0 \text{ und } fg = fg \Rightarrow g = h$$

Wir wollen Divisionsalgorithmen in $K[x]$ beweisen.

<ins>Divisionsalgorithmus:</ins> Seien $f, g \neq 0$, $\deg g \leq \deg f$.

$$\exists!\, q \in K[x], r \in K[x], \text{ sodass } f = qg + r, \quad r = 0 \text{ oder } \deg r < \deg g$$

<ins>Lemma 1:</ins> Seien $0 \neq f, d \in K[x]$ mit $\deg d \leq \deg f$.
Es gibt $g \in K[x]$, sodass $f - dg = 0$ oder $\deg(f - dg) < \deg f$.

<ins>Beweis:</ins> Schreibe $\deg f := m \geq n := \deg d$

$$\begin{aligned} f =& a_m x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i, \quad a_m \neq 0 \\ d =& b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i, \quad a_n \neq 0 \end{aligned}$$

Betrachte

$$\frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \left(b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \right) = a_m x^m + \dots$$

Also ist $f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \neq 0$ und $\deg \left(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \right) < \deg f$

Setze also $g := \left(\frac{a_m}{b_n} \right) x^{m-n}$

□

<ins>Satz 1:</ins> (DA) $f, d \in K[x]$, $d \neq 0$.
Es existieren $q, r \in K[x]$, sodass:

(i) $f = dq + r$

(ii) $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$

Ferner: q, r mit (i) und (ii) sind eindeutig.

Beweis:

Existenz:

Sei $f \neq 0$. Lemma 1 (§3)$\Rightarrow \exists\, g \in K[x]$, sodass $f - dg = 0$ oder $\deg(f-dg) < \deg f$.
Wenn $f - dg \neq 0$ und $\deg(f - dg) \geq \deg d$: Lemma 1 (§3)$\Rightarrow \exists\, h \in K[x]$, sodass $(f - dg) - dh = 0$ oder $\deg(f - d(g + h)) < \deg(f - dg)$
Fortsetzung ergibt:
$\ldots < \deg(f - f(g + h) < \deg(f - dg) < \deg f$
Die Prozedur muss nach endlich vielen Schritten anhalten.
Wir bekommen also $q \in K[x]$ und $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$ mit $f = dq + r$.

Eindeutigkeit:

Sei $f = dq_1 + r_1 = dq + r \Rightarrow d(q - q_1) = (r - r_1)$ mit $r_1 = 0$ oder $\deg r_1 < \deg d$
$q - q_1 \neq 0 \Rightarrow d(q - q_1)$ und $\deg(r_1 - r) = \deg d + \deg(q - q_1)$
Aber

$$\deg(r_1 - r) \leq \max(\deg r_1, \deg r) < \deg d \quad \lightning$$

So $q - q_1 = 0$ und damit $r_1 - r = 0$

□

Definition 1: $f, g \in K[x], d \neq 0$
d teilt f oder f ist durch d teilbar oder f ist Vielfach von d,
wenn $r = 0$ in (DA): $f = dq + 0$. In diesem Fall heißt q Quotient.

Korollar 1: $f \in K[x],\ c \in K$. Es gilt:

$$(x - c) \text{ teilt } f \text{ gdw. } f(c) = 0$$

Beweis: (DA)$\Rightarrow f = (x - c)q + r, \quad r = 0$ oder $\deg r < 1$, d.h. r ist Skalarpolynom.
Also $f(c) = r(c) = r$. Also $r = 0$ gdw. $f(c) = 0$.

□

Definition 2: $c \in K$ ist eine Nullstelle, wenn $f(c) = 0$. Abkürzung: „NS von f in K".
(Also c NS von f gdw. $(x - c)$ teilt f)

Korollar 2: Sei $f \in K[x]$, mit $\deg f = n$. Dann hat f höchstens n NS in K.

Beweis: $\deg f = 0 \Rightarrow f \neq 0$ Skalarpolynom $\Rightarrow$ keine NS in K, also Œ $\deg f \geq 1$
$\deg f = 1 \Rightarrow f = ax + c,\ a \neq 0$ und $ax + c = 0$ gdw. $x = -\frac{c}{a}$ eindeutig.
Induktionsannahme für $n-1$ gelte.
Sei a NS von f in K, also

$$f = (x-a)q, \quad \deg q = n-1$$

Nun ist $f(b) = 0$ gdw. $b = a$ oder b NS von q in K.
IA$\Rightarrow$ q hat höchstens $(n-1)$ NS, also hat damit
f hat höchstens n NS.

□

§4. Formale Ableitungen

$$\begin{aligned} f =& c_0 + c_1 x + c_x^2 + \ldots + c_n x^n =: f^{(0)} \text{ (Konvention)} \\ f^{(1)} := f' =& c_1 + 2c_2 x + \ldots + n c_n x^{n-1} =: Df \end{aligned}$$

Bemerkung 1: $D(f + cg) = D(f) + cD(g), \quad f, g \in K[x], c \in K$
So D linearer Operator.

$$D : K[x] \longrightarrow K[x]$$

Notation:
$$\begin{aligned} f^{(2)} =& f'' = D^2 f := D(D(f)) \\ f^{(3)} :=& D^3 f \\ & \text{etc} \ldots \end{aligned}$$
D^n alle lineare Operatoren.

Satz 1: (Taylor's Formel)
Seien $\mathrm{Char}(K) = 0,\ n \in \mathbb{N}_0,\ a \in K,\ p \in K[x],\ \deg p \leq n.$
Es gilt:

$$p = \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(a) \frac{1}{i!} (x-a)^i \qquad (\star)$$

Beweis: Sei (wieder wie in der Lagrangen Interpolationsformel) V der K-Vektorraum der Polynome vom deg $\leq n$ (und das 0 Polynom).
Betrachte:

$$\begin{aligned} l_i : V \longrightarrow & K \\ p \longmapsto & p^{(i)}(a) \end{aligned}$$

$l_i \in V^\star,\ i = 0, \dots, n$
Setze $P_i := \frac{1}{i!}(x-a)^i$. Es gilt:

$$l_j(P_i) = \delta_{ij} \qquad \text{(siehe Ü.B.)}$$

Also sind $\left.\begin{matrix} P_0, \dots, P_n \\ l_0, \dots, l_n \end{matrix}\right\}$ zueinander Dualbasen von V und $V^\star$.
Also

$$p = \sum_{i=0}^{n} l_i(p) P_i$$

$\square$

Bemerkungen:

(i) $1, (x-a), \dots, (x-a)^n$ sind linear unabhängig, also ist diese Linearkombination $(\star)$ eindeutig.

(ii) $\mathrm{Char}(K) = 0$ wird vorausgesetzt, damit $i! \neq 0$.

Definition 1: Sei $f \neq 0,\ c \in K$ eine NS von f in K.
Die Vielfachheit von c ist das größte $\mu \in \mathbb{N}$, sodass $(x-c)^\mu$ teilt f.

Bemerke: $1 \leq \mu \leq \deg f$

Satz 2: $\mathrm{Char}(K) = 0,\ f \neq 0, ; \deg f \leq n,\ c \in K$ NS von f in K.
Es gilt:

$$c \text{ hat die Vielfachheit } \mu \text{ gdw. } (\dagger) \begin{cases} f^{(k)}(c) = 0 & 0 \leq k \leq \mu - 1 \\ f^{(\mu)}(c) \neq 0 \end{cases}$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ $(x-c)^\mu$ teilt f und $(x-c)^{\mu+1}$ teilt nicht f. Es gibt also $g \neq 0$ und $f = (x-c)^\mu g$.
Bemerke: $\deg f \leq n - \mu$ und $g(c) \neq 0$.
Taylor Formel liefert:

$$f = (x-c)^\mu \left[\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^m}{m!} \right]$$

Also

$$f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^{m+\mu}}{m!}$$

Da die Koeffizienten von f als lineare Kombination von $(x-c)^k$, $(0 \leq k \leq n)$ eindeutig sind, ergibt ein Vergleich:

$$(\dagger\dagger) \qquad f = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^{m+\mu}}{m!}$$
$$= g^{(0)}(c)\frac{(x-c)^{\mu}}{0!} + \ldots + g^{(n-\mu)}(c)\frac{(x-c)^n}{(n-\mu)!}$$

$$\begin{cases} \frac{f^{(k)}}{k!}(c) = 0 & \text{für } 0 \leq k \leq \mu - 1 \\ \qquad \text{und} & \\ \frac{f^{(k)}}{k!}(c) = \frac{g^{(k-\mu)}}{(k-\mu)!}(c) & \mu \leq k \leq n \end{cases}$$

Insbesondere für $\mu = k$ erhalten wir:

$$f^{(\mu)}(c) = g(c) \neq 0$$

„$\Leftarrow$“ $(\dagger)$ und $(\dagger\dagger)$ liefern:

$$f = \sum_{k=\mu}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!}$$

Also

$$f = (x-c)^{\mu}\underbrace{\left[\frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!} + \frac{f^{(\mu+1)}(c)}{(\mu+1)!}(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-\mu}\right]}_{:=g}$$

$$g(c) = \frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!} \neq 0$$

Also $f = (x-c)^{\mu}g$ mit $g(c) \neq 0$.
Wir behaupten nun, dass $(x-c)^{\mu+1}$ teilt nicht f, sonst hätten wir $h \in K[x]$ mit $f = (x-c)^{\mu+1}h = (x-c)^{\mu}(x-c)h = (x-c)^{\mu}g$
$K[x]$ Integritätsbereich $\Rightarrow$ $g = (x-c)h$, also $g(c) = 0$ ↯

$\square$

Definition 2: Ein K-Unterraum $M \subseteq K[x]$ ist ein Ideal, wenn gilt:

$$\forall\, f \in K[x],\ g \in M \text{ ist } fg \in M$$

Beispiel 0: $M = K[x]$ und $M = \{0\}$ sind Ideale

Beispiel 1: Sei $d \in K[x],\ d \neq 0,\ M := dK[x] = \{df \mid f \in K[x]\}$ ist ein Ideal:
Für $c \in K, f, g \in K[x]$

$$\left.\begin{array}{l} d1 \in M \\ \underbrace{c(df)}_{\in M} - \underbrace{dg}_{\in M} = \underbrace{d(cf-g)}_{\in M} \end{array}\right\} \text{Unterraum}$$

$$f \in K[x], \quad dg \in M \Rightarrow f(dg) = \underbrace{d(fg)}_{\in M}$$

□

Definition 3:	$dK[x]$ heißt Hauptideal (mit Erzeuger d)

Beispiel 2: (endlich erzeugtes Ideal)
Seien $d_1, \ldots, d_\ell \in K[x],\ M := d_1K[x] + \ldots + d_\ell K[x]$ ist K-Unterraum
M ist ein Ideal:
Sei $p \in M,\ p = d_1f_1 + \ldots + d_\ell f_\ell,\ f_1, \ldots, f_\ell \in K[x],\ f \in K[x]$
Dann ist $pf = d_1 \underbrace{(f_1 f)}_{\in K[x]} + \ldots + d_\ell \underbrace{(f_\ell f)}_{\in K[x]} \in M$

□

Definition 4:	M ist endlich erzeugtes Ideal (mit Erzeugern $d_1, \ldots, d_\ell$)

Satz 3: Sei $0 \neq M \subseteq K[x]$ Ideal.

$\exists!$ normiertes Polynom $d \in K[x]$, sodass $M = dK[x]$

Beweis:
Existenz: Sei $d \neq 0,\ d \in M,\ \deg d$ minimal und Œ d normiert.
Sei $f \in M$. (DA)$\Rightarrow f = dq + r,\ r = 0$ oder $\deg r < \deg d$. Aber $\underbrace{r = f - dg}_{\in M}$.
Damit muss $r = 0$ und damit $f = dq$ sein.
Eindeutigkeit: Sei g normiert, sodass $M = gK[x]$. Also $\exists\ 0 \neq p, q \in K[x]$, sodass

$$\left.\begin{array}{r} d = gp \\ \text{und } g = dq \end{array}\right\} \text{also } d = dqp.$$

Es folgt: $\deg d = \deg d + \deg p + \deg q$ und damit $\deg p = \deg q = 0$.
Also sind p, q Skalarpolynome. Nun sind g und d normiert, also $p = q = 1$, also $d = g$

□

Korollar 1: Der normierte Erzeuger d vom Ideal $p_1K[x] + \ldots + p_\ell K[x]$ ist der $\mathrm{ggT}(p_1, \ldots, p_\ell)$, d.h.:

$$d|p_i,\ 0 \leq i \leq \ell \text{ und aus } d_0|p_i,\ d_0 \in K[x],\ 1 \leq i \leq \ell \text{ folgt } d_0|d.$$

Beweis: $dK[x] = p_1K[x] + \ldots + p_\ell L[x]$, also $d|p_i,\ 1 \leq i \leq \ell$. Ferner $d \in M$, also:

$$d = p_1q_1 + \ldots + p_nq_n = d_0\left[g_1q_1 + \ldots g_nq_n\right]$$

□

Definition 5: $p_1, \ldots, p_\ell$ sind relativprim, wenn

$$\mathrm{ggT}(p_1, \ldots, p_\ell) = 1$$

$$(\text{äquivalent: } p_1K[x] + \ldots p_\ell K[x] = K[x])$$

§5. Primzerlegung (Primfaktorisierung)

Definition 1: $f \in K[x]$ ist reduzibel über K, wenn es $g, h \in K[x]$ gibt, mit

$$\deg g \geq 1,\ \deg h \geq 1 \text{ und } f = gh.$$

Sonst ist f irreduzibel.
Ist f irreduzibel und $\deg f \geq 1$, so nennen wir f Primpolynome über K.

Bemerkung: f reduzibel $\Rightarrow$ $\deg f \geq 2$

Beispiel: $f = x^2 + 1 = (x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i})$ reduzibel über $\mathbb{C}$, aber irreduzibel über $\mathbb{R}$

Satz 1: $p, f, g \in K[x]$, p Primpolynom.

$$\text{Aus } p|fg \text{ folgt } p|f \text{ oder } p|q$$

Beweis: Œ p normiert, p irreduzibel $\Rightarrow$ Einzige normierte Teiler von p sind 1 und p.
Sei $d := \mathrm{ggT}(f, p)$, insbesondere $d = 1$ oder $d = p$. Falls $d = p$, dann $p|f$.
Wenn $d = 1 \Rightarrow 1 = p_0 p + f_0 f$, $p_0, f_0 \in K[x]$, also

$$g = f_0 fg + p_0 pg \text{ und } \left.\begin{array}{l} p|fg \\ p|p(p_0 g) \end{array}\right\} \Rightarrow p|g$$

□

Korollar 1: p Primideal,

$$p|f_1 \cdots f_\ell \Rightarrow \exists\, i \in \{1, \ldots, \ell\}, \text{ sodass } p|f_i$$

Satz 2: Sei $f \in K[x]$, f normiert, $\deg f \geq 1$. Dann ist f Produkt von normierten Primpolynomen. Diese Darstellung ist eindeutig, bis auf Umnummerierung.

Beweis:
Existenz: $\deg f = 1 \Rightarrow$ f irreduzibel, nichts weiter zu zeigen.
Sei nun $\deg f := n > 1$. Beweis per Induktion nach n.
Ist f irreduzibel, dann ist nichts weiter zu zeigen.
Sonst: $f = gh$, $\quad n > \deg g \geq 1$, $n > \deg h \geq 1$
IA: Gilt für g, h und damit bekommen wir eine Faktorisierung für f.
Eindeutigkeit: Sei $f = p_1 \cdots p_\ell = q_1 \cdots q_s$, p_i, q_i normierte Primpolynome.
Also $p_\ell | q_1 \cdots q_s$, es folgt $p_\ell | q_j$ für ein gewisses $1 \leq j \leq s$.
Da p_ℓ, q_j normiert und prim $\Rightarrow q_j = p_\ell$
Œ nach Umnummerierung bekommen wir

$$p_\ell = q_s \qquad (\star)$$

und somit:

$$P := p_1 \cdots p_{\ell-1} = q_1 \cdots g_{s-1}$$

$\deg(P) < n$, also IA. gilt, d.h. $q_1, \ldots, q_{s-1}$ ist Umnummerierung von $p_1, \ldots, p_\ell$.
Diese Tatsache zusammen mit $(\star)$ beweist unsere Behauptung.

□

§6. Die symmetrischen Gruppen S_n

Notation: Sei $\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}$

Definition 1: Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Permutation von $\mathbb{N}_n$ ist eine Bijektion $\mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_n$.
Wir schreiben S_n für die Menge aller Permutationen von $\mathbb{N}_n$.
Die Menge S_n, zusammen mit der Funktion

$$S_n \times S_n \longrightarrow S_n$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \circ \beta$$

bildet eine Gruppe. Diese nennen wir die symmetrische Gruppe mit n Elementen.

Warum ist S_n eine Gruppe?

(i) Falls $\alpha, \beta \in S_n$, dann ist $\alpha \circ \beta \in S_n$.

(ii) Die Identitätsabbildung $\varepsilon : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_n$, definiert durch $\varepsilon(i) := i$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$ ist die Identität Element aus S_n.

(iii) Bijektive Abbildungen haben Inverse. Falls $\alpha \in S_n$, dann existiert $\beta \in S_n$, sodass $\alpha \circ \beta = \varepsilon$

(iv) Die Multiplikation ist assoziativ, da die Komposition von Funktionen immer assoziativ ist.

Notation: Für $\alpha, \beta \in S_n$, schreiben wir $\alpha\beta$ anstatt $\alpha \circ \beta$.
Für eine Permutation σ von $\mathbb{N}_n$ schreiben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Die Permutation $\sigma \in S_5$ mit $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 5, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1, \sigma(5) = 2$ schreiben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definition 2: Falls für $\sigma \in S_n$, $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_n$ existieren, mit

$$\begin{aligned} \sigma(a_i) &= a_{i+1}, \quad && \text{für } 1 \leq i \leq m-1 \\ \sigma(a_m) &= a_1 && \\ \text{und} \quad \sigma(x) &= x && \text{für } x \notin \{a_1, \ldots, a_m\} \end{aligned}$$

nennen wir σ einen m-Zykel und wir schreiben σ in Zykel-Schreibweise: $(a_1 a_2 \ldots a_m)$. Eine Transposition ist ein 2-Zykel.

Beispiel: Die Permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ist ein 3-Zykel. Wir schreiben σ als (142).

Definition 3: $\alpha, \beta \in S_n$ sind disjunkt, falls

$$\{x \mid \alpha(x) \neq x\} \cap \{x \mid \beta(x) \neq x\} = \emptyset$$

Beispiel:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Permutationen σ und τ sind disjunkt, σ und γ sind aber nicht disjunkt.

Lemma 1: Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \in S_m$ paarweise disjunkte Permutationen und $\tau \in S_n$. Die Permutationen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$ und τ sind disjunkt gdw. a_i und τ für alle $0 < i \leq m$ disjunkt sind.

Beweis: Ü.A.

□

Proposition 1: Jedes $\sigma \in S_n$ kann als Produkt disjunkter Zykel geschrieben werden.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach

$$\Gamma(\sigma) := |\{s \in \mathbb{N}_n \mid \sigma(a) \neq a\}|.$$

Falls $\Gamma(\sigma) = 0$, dann ist σ die Identitätsabbildung auf $\mathbb{N}_n$, also $\sigma = (1)(2)\dots(n)$.
Sei $\sigma \in S_n$, $k = \Gamma(\sigma) > 0$.
Angenommen die Behauptung gilt für alle Permutationen τ mit $\Gamma(\tau) < k$.
Sei $i_0 \in \mathbb{N}_n$, sodass $\sigma(i_0) \neq i_0$. Sei $i_s := \sigma^s(i_0)$.
Da $\mathbb{N}_n$ endlich ist, existieren $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p < q$, sodass $\sigma^p(i_0) = \sigma^q(i_0)$.
Da σ bijektiv ist, ist $\sigma^{p-q}(i_0) = i_0$. Wir wählen das kleinste $r \in \mathbb{N}$ mit $\sigma^{r+1}(i_0) = i_0$ und τ das $r+1$-Zykel $(i_0 i_1 \dots i_r)$.
Dann gilt:

$$\{a \in \mathbb{N}_n \mid (\tau^{-1}\sigma)(a) = a\} = \{a \in \mathbb{N}_n \mid \sigma(a) = a\} \cup \{i_0, \dots, i_r\}$$

und damit $\Gamma(\tau^{-1}\sigma) < k = \tau(\sigma)$. Somit können wir nach der I.A. $\tau^{-1}\sigma$ als Produkt disjunkter Zykel schreiben: $\tau^{-1}\sigma = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$. Also ist $\sigma = \tau\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$.
Da $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m(i_j) = \tau^{-1}\sigma(i_j)$ für $0 \leq j \leq m$, sind die Permutationen $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$ und τ disjunkt. Nach Lemma 1 (§6) heißt das, dass τ und α_i für $0 < i \leq m$ disjunkt sind und damit ist σ Produkt aus disjunkten Zykeln.

□

Beispiel: Die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

geschrieben als Produkt von disjunkten Zykeln:

$$(134)(25)$$

Proposition 2: Jede Permutation von $\mathbb{N}_n$ kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden.

Beweis: Die Identität ist (12)(21).
Da jede Permutation als Produkt von Zykeln geschrieben werden kann, reicht es

zu zeigen, dass jedes Zykel als Produkt von Transpositionen geschrieben werden kann.
Sei $(i_1 \dots i_r) \in S_n$ ein r-Zykel, dann ist

$$(i_1 i_2 \dots i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2).$$

Für i_1:

$$(i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_3) i_1 = (i_1 i_r)(i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3) i_2 = i_2$$

Für $s > 0$:

$$\begin{aligned}(i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2) i_s =& (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s-1})(i_1 i_s) i_s \\ =& (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+2})(i_1 i_{s+1}) i_1 \\ =& (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+2}) i_{s+1} \\ =& i_{s+1}\end{aligned}$$

□

Beispiel: Die Permutation $(123) \in S_n$ kann sowohl als

$$(13)(12),$$

als auch als

$$(13)(42)(12)(14)$$

geschrieben werden. Die Faktorisierung in Transpositionen ist also nicht eindeutig und nicht einmal die Anzahl, der in einer Faktorisierung verwendeten Transpositionen ist eindeutig.

Was ist nun eindeutig?
Um das zu beantworten, müssen wir zuerst die Wirkung einer Permutation $\sigma \in S_n$ auf eine Funktion von $\mathbb{Z}^n$ nach $\mathbb{Z}$ definieren.(Erinnerung: $\mathbb{Z}^n := \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \mathbb{Z}}_{n\text{-mal}}$).

Definition 4: Sei $\sigma \in S_n$ und $f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine Funktion.
Wir definieren σf als Funktion von $\mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$, definiert durch

$$(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Beispiel: Sei $f : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch $f(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_2 + x_3$ und $\sigma := (123) \in S_3$.
Dann ist:

$$(\sigma f)(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = x_2 x_3 x_1$$

Lemma 2: Sei $\sigma, \tau \in S_n$ und $f, g : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$.
Dann gilt:

(i) $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau)f$

(ii) $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$

Beweis: Ü.B.

□

Satz 1: Es gibt eine Abbildung sign : $S_n \longrightarrow \{1, -1\}$, sodass:

(a) Für jede Transposition $\tau \in S_n$ gilt: $\text{sign}(\tau) = -1$.

(b) Für Permutationen σ, σ' gilt:

$$\text{sign}(\sigma\sigma') = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\sigma').$$

Diese Abbildung ist eindeutig mit diesen Eigenschaften.
Für $\sigma \in S_n$ nennen wir $\text{sign}(\sigma)$ Signatur/Vorzeichen von σ.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und $\Delta : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Behauptung: Für eine Transposition $\tau \in S_n$ gilt $\tau\Delta = -\Delta$.
Sei $\tau = (rs)$ mit $r < s$. Nach Lemma 2 (§6) (i) gilt:

$$\tau\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \tau(x_j - x_i).$$

Falls $i, j \notin \{r, s\}$, gilt $\tau(x_j - x_i) = (x_j - x_i)$. Für den Faktor $(x_s - x_r)$ erhalten wir $\tau(x_s - x_r) = -(x_r - x_s)$. Die restlichen Faktoren können in Paare zusammengefasst werden:

$$(x_k - x_s)(x_k - x_r), \text{ für } k > s,$$
$$(x_s - x_k)(x_k - x_r), \text{ für } r < k < s,$$
$$(x_s - x_k)(x_r - x_k), \text{ für } k < r$$

Jedes dieser Paare ist unbeeinflusst von τ. Deshalb gilt $\tau\Delta = -\Delta$, womit die Behauptung bewiesen wäre.

Sei nun $\sigma \in S_n$. Wir können σ schrieben als $\sigma = \tau_1\tau_2\ldots\tau_m$, wobei $\tau 1, \ldots, \tau_m$ Transpositionen sind. Nach Lemma 2 (§6) (ii), gilt:

$$\sigma\Delta = \tau_1(\tau_2(\ldots(\tau_m\Delta)\ldots))$$

und nach der Behauptung oben:

$$\tau_1(\tau_2(\ldots(\tau_m\Delta)\ldots)) = (-1)^m\Delta.$$

Somit gilt $\sigma\Delta = \Delta$ oder $\sigma\Delta = -\Delta$.
Für $\sigma \in S_n$ sei $\operatorname{sign}(\sigma) = +1$, falls $\sigma\Delta = \Delta$ und sei $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$, falls $\sigma\Delta = -\Delta$.
Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $\Delta(1, 2, \ldots, n) \neq 0$.
Sei $\sigma, \tau \in S_n$. Nach Lemma 2 (§6) (i) gilt:

$$(\sigma\tau)\Delta = \sigma(\tau\Delta)$$

Damit:

$$\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau).$$

Die Funktion sign : $S_n \longrightarrow \{1, -1\}$ ist eindeutig mit den Eigenschaften (a) und (b), da jede Permutation ein Produkt aus Transpositionen ist.

□

Bemerkung: Sei $\sigma \in S_n$ und $\tau_1, \ldots \tau_m \in S_n$ Transpositionen, sodass $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_m$.
Dann gilt:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^m$$

Definition 5: Wir nennen eine Permutation gerade, wenn sie als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden kann.

Wir nennen eine Permutation ungerade, falls sie als Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden kann.

Korollar 1: Für eine Permutation σ gilt:

$$\sigma \text{ ist gerade } \Leftrightarrow \operatorname{sign}(\sigma) = 1$$

und

$$\sigma \text{ ist ungerade } \Leftrightarrow \operatorname{sign}(\sigma) = -1.$$

Folglich kann eine Permutation nicht als Produkt einer geraden Anzahl und einer ungeraden Anzahl an Transpositionen geschrieben werden.

Definition und Notation: Betrachte die folgende Untermenge von S_n:

$$A_n := \{\sigma \mid \sigma \text{ ist gerade}\}$$

A_n ist die alternierende Gruppe

Es gilt: A_n ist Untergruppe von S_n:
Die Einheit (1) ist gerade, also $(1) \in A_n$.
Seien $\sigma = \tau_1 \dots \tau_m,\ \gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$, mit $\tau_i, \gamma_j \in S_n$, $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ m, n$ gerade.
Damit ist $\sigma\gamma = \tau_1 \dots \tau_m \gamma_1 \dots \gamma_n$, also A_n abgeschlossen unter Produkt.
Außerdem $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \dots \tau_1^{-1}$, also A_n abgeschlossen unter Inversen.

Bemerkung: $$S_n = A_n \,\dot{\cup}\, U,$$
wobei $U := \{\sigma \mid \sigma \text{ ist ungerade}\}$ Untermenge der Ungeraden Permutationen.
Die Abbildung

$$A_n \longrightarrow U$$

$$\sigma \longmapsto (12)\sigma$$

ist bijektiv. Wir folgern:

$$|A_n| = \frac{n!}{2}$$

§7. Multilineare Formen

Definition 1: Sei K Körper, U, V K-Vektorräume

$$\begin{aligned} \beta\,:\, U \times V &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto \beta(x, y) \end{aligned}$$

ist ein bilineares Funktional/bilineare Form, falls gilt:

(1) $\beta(c_1x_1 + c_2x_2, y) = y_1\beta(x_1, y) + c_2\beta(x_2, y)$
und

(2) $\beta(x, d_1y_1 + d_2y_2) = d_1\beta(x, y_1) + d_2\beta(x, y_1)$

für alle $x, x_1, x_2 \in U,\ y, y_1, y_2 \in V,\ c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$

Beispiel:

$$\begin{aligned} V \times V^\star &\longrightarrow K \\ (x, f) &\longmapsto [x, f] \end{aligned}$$

wobei $[x, f] := f(x)$ für $x \in V$ und $f \in V^\star$.
Die definierenden Eigenschaften und Verknüpfungen in $V^\star$ liefern:

(1) $[c_1x_1 + c_2x_2, f] = c_1[x_2, f] + c_2[x_2, f]$
und

(2) $[x, d_1, f_1 + d_2f_2] = d_1[x, f_1] + d_2[x, f_2]$.

für $x, x_1, x_2 \in V,\ f, f_1, f_2 \in V^\star\ c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$ □

Notation: $\mathscr{L}^{(2)}(U \times V, K) :=$ die Menge der bilinearen Formen auf $U \times V$.
Diese Menge ist ein K-Vektorraum
(mit den Verknüpfungen $(c_1\beta_1 + c_2\beta_2)(x, y) := c_1\beta_1(x, y) + c_2\beta_2(x, y)$ wie üblich).

Definition 2: $m \in \mathbb{N},\ V_1, \dots, V_m$ K-Vektorräume
Ein m-lineares Funktional/m-lineare Form (multilineares Funktional vom Grad m) auf $V_1 \times \ldots \times V_m$ ist eine Abbildung $\mu : V_1 \times \ldots V_m \longrightarrow K$,
sodass für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} &\mu(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \gamma_i, \dots, \alpha_m) \\ = {}&c\mu(\alpha_1, \dots\dots, \alpha_i, \dots\dots, \alpha_m) \\ + {}&\ \mu(\alpha_1, \dots\dots, \gamma_i, \dots\dots, \alpha_m) \end{aligned}\right\} \text{ für } \alpha_i, \gamma_i \in V_i,\ c \in K$$

Notation: $\mathscr{L}^{(m)}(V_1 \times \ldots \times V_m, K) :=$K-Vektorraum der m-linearen Formen.

Bemerkung: μ multilinear und es existiert ein i mit $\alpha_i = 0 \Rightarrow \mu(\alpha_1, \dots, 0, \dots, \alpha_m) = 0$.

§8. Alternierende multilineare Formen auf K^n

Definition 1: Sei $n \in \mathbb{N},\ V = K^n$. Eine n-lineare Form

$$\delta : \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{\text{n-mal}} \longrightarrow K$$

ist alternierend, falls:

$$\exists i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j \text{ mit } Z_i = Z_j \Rightarrow \delta(Z_1, \ldots, Z_n) = 0 \text{ (für } Z_1, \ldots, Z_n \in K^n)$$

Konvention: δ wird auch als Abbildung auf $K^{n\times n} = \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ aufgefasst, nämlich

$$\delta(A) = \delta(Z_1, \ldots, Z_n), \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix},$$

d.h. Z_i ist die i-te Zeile er $n \times n$-Matrix A.

Lemma 1: Sei δ alternieren. Es gilt:

(i) $Z_1, \ldots, Z_n$ linear abhängig $\Rightarrow \delta(Z_1, \ldots, Z_n) = 0$

(ii) $\delta(Z_1, \ldots, Z_i, \ldots, Z_j, \ldots, Z_n) = -\delta(Z_2, \ldots, Z_j, \ldots, Z_i, \ldots, Z_n)$ für $i \neq j$

Allgemeiner: $\delta(Z_{\pi(1)}, \ldots, Z_{\pi(n)}) = \mathrm{sign}(\pi)\delta(Z_1, \ldots, Z_n),\ \pi \in S_n$

Beweis:

(i) Œ nehmen wir an: $Z_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i Z_i$ für geeignete $c_1, \ldots, c_{n-1} \in K$.
Wir berechnen:

$$\delta\left(Z_1, \ldots, Z_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i Z_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \delta(Z_1, \ldots, Z_{n-1}, Z_i) = 0$$

(ii) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
0 =&\delta(Z_1,\ldots,Z_i+Z_j,\ldots,Z_j+Z_i,\ldots,Z_n)\\
=&\delta(Z_1,\ldots,Z_i,\ldots,Z_j+Z_i,\ldots,Z_n)+\delta(Z_1,\ldots,Z_j,\ldots,Z_j+Z_i,\ldots,Z_n)\\
=&\delta(Z_1,\ldots,Z_i,\ldots,Z_j,\ldots,Z_n) \quad + \quad \underbrace{\delta(Z_1,\ldots,\underline{\underline{Z_i}},\ldots,\underline{\underline{Z_i}},\ldots,Z_n)}_{=0}\\
&+\underbrace{\delta(Z_1,\ldots,\underline{\underline{Z_j}}\ldots,\underline{\underline{Z_j}},\ldots,Z_n)}_{=0} \quad + \quad \delta(Z_1,\ldots,Z_j,\ldots,Z_i,\ldots,Z_n)
\end{aligned}$$

Also:

$$0=\delta(Z_1,\ldots,Z_i,\ldots,Z_j,\ldots,Z-n)+\delta(Z_1,\ldots,Z_j,\ldots,Z_i,\ldots,Z_m)$$

Wie behauptet.

□

Bemerkung:

(1) Falls $\mathrm{Char}(K)\neq 2$, gilt auch die Umkehrung:

$$\delta \text{ erfüllt (ii)} \Rightarrow \delta \text{ alternierend}$$

Nehme $Z_i = Z_j$ für $i \neq j$, also:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta(Z_1,\ldots,Z_i,\ldots,Z_i,\ldots,Z_n)\\
=-&\,\delta(Z_1,\ldots,Z_i,\ldots,Z_i,\ldots,Z_n)
\end{aligned}\right\}\substack{\mathrm{Char}(K)\neq 2\\ \forall\, a\in K:\\ a=-a\Rightarrow a=0}$$

(2) $\delta((a,b),(c,d)) := ac+bd$ auf $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2$ ist Gegenbeispiel, falls $\mathrm{Char}(K)=2$.

Lemma 2: Seien $\delta : K^n\times\ldots\times K^n \longrightarrow K$ alternierende Form und $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ (†)
Es gilt:

(i) $\delta(e(A)) = \delta(A)$ $\quad$ e Zeilenumformung vom Typ 3

(ii) $\delta(e(A)) = -\delta(A)$ $\quad$ e Zeilenumformung vom Typ 1, $i\neq j$

(iii) $\delta(e(A)) = c\delta(A)$ $\quad$ e Zeilenumformung vom Typ 2, $c\in K,\ c\neq 0$

Allgemeiner:

(iv) $\delta(cA) = c^n\delta(A)$ $\quad$ $c\in K,\ c\neq 0$

Beweis:

(i) $\delta(Z_1 + cZ_2, Z_2, \ldots, Z_n) = \delta(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) + c\,\underbrace{\delta(Z_2, Z_2, \ldots, Z_n)}_{=0}$

(ii) Folgt aus Lemma 1 (§8)

(iii) Folgt aus n-Linearität

(iv)
$$\begin{aligned}\delta(cZ_1, \ldots, cZ_n) &= c\delta(Z_1, cZ_2, cZ_3, \ldots, cZ_n)\\ &= c^2\delta(Z_1, Z_2, cZ_3, \ldots, cZ_n)\\ &= \qquad \ldots\\ &= c^n\delta(Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_n).\end{aligned}$$

□

Lemma 3: $\delta(A) = \Delta_A \delta(\text{r.Z.S.F}(A))$ wobei $\Delta_A \in K,\ \Delta_A \neq 0$.
Δ_A hängt nur von $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ab.

Beweis: Wiederholte Anwendung von Lemma 2 (§8).
(Δ_A Produkt der Gestalt $(-1)^\ell c_1 \ldots c_k$ für geeignete $\ell, k \in \mathbb{N}$ und $c_1, \ldots, c_k \in K^\times$)

□

Bemerkung: Für $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ gilt die folgende Dichotomie: (siehe L.A. I)

$$\begin{cases} \underline{\underline{\text{Fall(1)}}} & \text{r.Z.s.F.(A) hat eine Nullzeile} \\ & \text{oder} \\ \underline{\underline{\text{Fall(2)}}} & \text{r.Z.S.F.(A)} = \mathrm{I}_n \end{cases}$$

Also erhalten wir hier die Dichotomie:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\text{Fall(1)}}} & \delta(A) = \Delta_A 0 = 0 \\ & \text{oder} \\ \underline{\underline{\text{Fall(2)}}} & \delta(A) = \Delta_A \delta(\mathrm{I_n}) \end{cases}$$

Korollar 1: $\delta \neq 0$ gdw. $\delta(\mathrm{I}_n) \neq 0$

Beweis:

„$\Leftarrow$" Klar.

„$\Rightarrow$" $\delta(\mathrm{I}_n) = 0 \Rightarrow \delta(A) = 0$ in beiden Fällen (1) und (2).

□

Korollar 2: $\delta(A) \neq 0$ gdw. A invertierbar.

Beweis: A invertierbar $\Leftrightarrow$ r.Z.S.F.$(A) = \mathrm{I}_n$

□

Korollar 3: Seien δ_1, δ_2 n-lineare, alternierende Formen auf K^n.
Es gilt:

$$\delta_1 = \delta_2 \text{ gdw. } \delta_1(e_1, \ldots, e_n) = \delta_2(e_1, \ldots, e_n)$$

(wobei wie immer $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standard-Basis ist)

Definition und Notation: $\mathbb{A} := \mathrm{alt}^{(n)}(K^n)$:=der K-Vektorraum der n-linearen, alternierenden Formen auf K^n.
$\mathbb{A}$ ist ein Unterraum von $\mathscr{L}^{(n)}(K^n \times \ldots \times K^n, K)$

Korollar 4: $\dim\left(\mathrm{alt}^{(n)}(K^n)\right) \leq 1.$

Beweis: Sei $\delta_1 \neq 0$ fixiert, $\delta_2 \in \mathbb{A}$.
Es gilt:

$$(\star) \qquad \delta_2(A) = \Delta_A \delta_2(\mathrm{I}_n) = \Delta_A \left(\frac{\delta_2(\mathrm{I}_n)}{\delta_1(\mathrm{I}_n)}\right) \delta_1(\mathrm{I}_n).$$

Setze $d := \frac{\delta_2(\mathrm{I}_n)}{\delta_1(\mathrm{I}_n)} \in K$. Aus $(\star)$ folgt:

$$\delta_2(A) = d \underbrace{\Delta_A \delta_1(\mathrm{I}_n)}_{=\delta_1(A)} = d\delta_1(A)$$

für $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$. Also ist $\delta_2 = d\delta_1$

□

<u>Definition 2:</u> Die <u>Determinante</u> (Funktionale) ist die eindeutige n-lineare, alternierende Form auf K^n, wofür

$$\det(\mathrm{I}_n) = 1$$

gilt.

Die Formelberechnung:

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ mit $A = (a_{ij}),\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ A = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$ und $\delta \in \mathbb{A}$

Wir schrieben $Z_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij_i} e_{j_i}$ in der Standard-Basis.
Wir berechnen:

$$\delta(A) = \delta\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{ij_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{j_n} e_{j_n}\right) \overset{\text{n-lin.}}{=} \sum_{k_1,\ldots,j_n=1}^{n} a_{1,j_1} \ldots a_{nj_n} \delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) \qquad (\star\star)$$

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \{1,\ldots,n\} &\longrightarrow \{1,\ldots,n\} \\ i &\longmapsto j_i \end{aligned}$$

Falls diese $\underline{\underline{\text{nicht}}}$ injektiv ist, gibt es eine Wiederholung in $(j_1, \ldots, j_n)$
und damit ist $\delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0$.
Falls injektiv, dann ist die Abbildung eine Permutation $\pi \in S_n$ und damit
ist $\delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = \mathrm{sign}(\pi)\delta(e_1, \ldots, e_n)$.
Also können wir $(\star\star)$ umschreiben:

$$\begin{aligned} (\star\star) &= \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \ldots a_{n\pi(n)} \delta(e_1, \ldots, e_n) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \ldots a_{n\pi(n)} \delta(\mathrm{I}_n) \\ (\star\star\star) &= \delta(\mathrm{I}_n) \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \ldots a_{n\pi(n)} \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $\delta(\mathrm{I}_n) = 1$ eine Formel für δ wie in $(\star\star\star)$ liefert:

Satz 1: Definiere für $A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$

$$\delta(A) := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} \tag{det}$$

δ ist eine n-lineare, alternierende Form und erfüllt $\delta(\mathrm{I}_n) = 1$.

Beweis:

- Sei $0 \neq A$ diagonal, also $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Das heißt: die einzige Permutation die einen Beitrag $\neq 0$ bringt ist diejenige, für die $i = \pi(i), \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, d.h. $\pi = (1)$ die Identität$\in S_n$.
  Es bleibt also nur ein Produkt in (det) übrig, nämlich $a_{11}a_{22} \dots a_{nn} = \delta(A)$, insbesondere $\delta(\mathrm{I}_n) = 1$.
- n-linear? Berechne:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(\pi) \left[\left(a_{1\pi(1)} + da'_{1\pi(1)}\right) a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}\right] \\ =&\operatorname{sign}(\pi) \left[\left(a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}\right) + d\left(a'_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}\right)\right] \\ &\text{usw} \dots \qquad \text{Ü.A.} \end{aligned}$$

- alternierend? Sei $Z_1 = Z_2$, d.h. $a_{1j} = a_{2j}, \quad \forall\, 1 \leq j \leq n$,
  d.h. $a_{1\pi(j)} = a_{2\pi(j)}, \quad \forall\, \pi \in S_n,\ 1 \leq j \leq n$.
  Berechne (mit $S_n = A_n \dot\cup A_n(12)$)

$$\begin{aligned} \delta(A) &= \sum_{\pi \in A_n \dot\cup A_n(12)} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)}a_{1\pi(2)}a_{3\pi(3)} \dots a_{n\pi(n)} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{\pi \in A_n} \underbrace{\operatorname{sign}(\pi)}_{=1} a_{1\pi(1)}a_{1\pi(2)}a_{3\pi(3)} \dots a_{n\pi(n)}\right)}_{(I)} \\ &\quad \underbrace{+ \sum_{\pi \in A_n} \underbrace{[\operatorname{sign}(\pi)(12)]}_{=(-1)} a_{1\pi(12)(1)}a_{1\pi(12)(2)}a_{3\pi(12)(3)} \dots a_{n\pi(12)(n)}}_{(II)} \end{aligned}$$

  In der Summe von (II) bekommen wir:

$$\begin{aligned} &\sum_{\pi \in A_n} [-\underbrace{\operatorname{sign}(\pi)}_{=(-1)}] a_{1\pi(2)}a_{1\pi(1)}a_{3\pi(3)} \dots a_{n\pi(n)} \\ =&\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} [-\underbrace{\operatorname{sign}(\pi)}_{=(-1)}] a_{1\pi(1)}a_{1\pi(2)}a_{3\pi(3)} \dots a_{n\pi(n)}}_{(II)} \end{aligned}$$

Wir sehen also: die Terme kürzen sich raus, d.h. in (I) bzw. in (II):
$a_{1\pi(1)}a_{1\pi(2)}a_{3\pi(3)}\dots a_{n\pi(n)}$ und $-a_{1\pi(1)}a_{1\pi(2)}a_{3\pi(3)}\dots a_{n\pi(n)}$,
d.h. $(I)+(II)=0$

□

<u>Korollar 5:</u> $\dim\left(\mathrm{alt}^{(n)}(K^n)\right)=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Das heißt: $\delta(A)=\det(A)\delta(\mathrm{I}_n)$ für $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ und $\delta\in\mathrm{alt}^{(n)}$

<u>Beweis:</u> Da $\det\in\mathrm{alt}^{(n)}$, $\det\neq 0$, ist $\dim\left(\mathrm{alt}^{(n)}\right)=1$.

Sei $\delta\in\mathrm{alt}^{(n)}$, also ist $\delta=d\det$ für $d\in K$. Nun muss $\delta(\mathrm{I}_n)=d\det(\mathrm{I}_n)$ gelten, also $d=\delta(\mathrm{I}_n)$.

□

<u>Bemerkung:</u> Sei R ein kommutativer Ring mit 1. $\delta\in\mathrm{alt}^{(n)}(R^n)$ ist analog definiert.
Der Hauptsatz gilt auch in diesem erweiterten Rahmen:
Sei $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$, $A=(a_{ij})$, $1\le i\le n$, $1\le j\le n$.
Definiere:

$$\det(A):=\sum_{\pi\in S_n}\mathrm{sign}(\pi)a_{1\pi(1)}\dots a_{n\pi(n)}$$

Dann ist det die eind. Funktionale $\delta\in\mathrm{alt}^{(n)}(R^n)$ mit der Eigenschaft $\delta(\mathrm{I}_n)=1$.

<u>Beispiel:</u> $R=K[x]$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$$

Sei $\delta\in\mathrm{alt}^{(3)}(\mathrm{Mat}_{3\times3}(R))$:

$$\delta(A)=\delta(x\varepsilon_1-x^2\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1+x^3\varepsilon_3)$$

wobei $\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ (die Standard Vektoren).

$$\begin{aligned}\delta(A)=&x\,\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1+x^3\varepsilon_3)-x^2\delta(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1+x^3\varepsilon_3)\\ =&x\,\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_1)+x^4\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\\ -&x^2\delta(\varepsilon_3,\varepsilon_3,\varepsilon_1)-x^5\delta(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\\ =&(x^4+x^2)\delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3).\end{aligned}$$

Satz 2: Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$. Es gilt:

$$\det(A) = \det(A^\top)$$

Erinnerung: $(A^\top)_{ji} = A_{ij}$ oder $a_{ji}^\top = a_{ij}$

Beweis: Betrachte

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} &= \prod_{\substack{i,j=1\\ j=\pi(i)}}^{n} a_{ij} \text{ für } \pi \in S_n \\ &= \prod_{\substack{i,j=1\\ i=\pi^{-1}(j)}}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a_{j\pi^{-1}(j)}^\top\end{aligned}$$

Wir berechnen nun:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} \\ &= \sum_{\pi^{-1}\in S_n} \mathrm{sign}(\pi^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j\pi^{-1}(j)} = \det(A^\top)\end{aligned}$$

□

Satz 3: $$\det(AB) = \det(A)\det(B),\ A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$$

Beweis: Fixiere $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$, $A = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$. Definiere $\det_B(A) := \det(AB)$.

Also $\delta_B(Z_1, \dots, Z_n) = \det(Z_1, B, \dots, Z_n B)$

n-linear? $$\begin{aligned}&\delta_B(Z_1 + Cz_1', Z_2, \dots, Z_n) \\ =&\det((Z_1 + cZ_1')B, \dots, Z_n B) \\ =&\det(Z_1 B, Z_2 B, \dots, Z_n B) \\ +&c\det(Z_1' B, Z_2 B, \dots, Z_n B).\end{aligned}$$

alterniernd? $\delta_B(Z_1, Z_1, \ldots, Z_n)$
$=\det(Z_1B, Z_1B, \ldots, Z_nB)$
$=0$

$\dim\left(\mathrm{alt}^{(n)}\right) = 1 \Rightarrow \delta_B(A) = \det(A)\delta_B(\mathrm{I}_n) = \det(A)\det(B)$

□

Korollar 6: Sei A invertierbar . Es gilt:

$$\det\left(A^{-1}\right) = [\det(A)]^{-1}$$

Beweis: $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n) = 1.$

□

Notation: Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ fixiert und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$A[i|j]$:=die $(n-1)\times(n-1)$ – Matrix, die man bekommt nach Entfernung der i^{ten} Zeile und der j^{ten} Spalte von A

$D_{ij}(A) := \det(A[i|j])$

Satz 4: Fixiere $j,\ 1 \le j \le n$.
Betrachte:

$$\delta(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} D_{ij}(A)$$

Es ist:

$$\delta \in \mathrm{alt}^{(n)} \text{ und } \delta(\mathrm{I}_n) = 1$$

Beweis: Für $A = \mathrm{I}_n,\ A_{ij} = 0$, für $i \neq j$, also betrachte nun $i = j$, d.h. $A_{jj} = 1:$
wir bekommen $\delta(\mathrm{I}_n) = (-1)^{2j} A_{jj} \det(\mathrm{I}_{n-1}) = (-1)^{2j} \cdot 1 \cdot 1 = 1$

- alternierend? Sei $A = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$. Seien $Z_k = Z_\ell$ für $k < \ell$.

Falls $i \neq k$ und $i \neq \ell$ hat $A[i|j]$ zwei gleiche Zeilen, also $D_{ij}(A) = 0$.
Also betrachten wir nun $i = k$ oder $i = \ell$:

$$\begin{aligned}\delta(A) =& (-1)^{k+i} A_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} A_{\ell j} D_{\ell j}(A) \\ =& \underbrace{(-1)^{k+j} A_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} A_{kj} D_{\ell j}(A)}_{(\star)}\end{aligned}$$

weil $A_{\ell j} = A_{kj}$ ist.
Betrachte:

$Z_\ell^- = Z_k^-$
ist hiervon die
$(\ell-1)^{\text{te}}$ Zeile

$$A[k|j] = \underbrace{\begin{pmatrix} Z_1^- \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_{k-1}^- \\ Z_{k+1}^- \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_n^- \end{pmatrix}}_{(\star)} \quad \text{und } A[\ell|j] = \underbrace{\begin{pmatrix} Z_1^- \\ \vdots \\ Z_k^- \\ \vdots \\ Z_{\ell-1}^- \\ Z_{\ell+1}^- \\ \vdots \\ Z_n^- \end{pmatrix}}_{(\star\star)}$$

$Z_\ell^- = Z_k^-$
ist hiervon die
k^{te} Zeile

Vergleichen von $(\star)$ und $(\star\star)$ ergibt:
$A[k|j]$ und $A[\ell|j]$ haben die gleichen Zeilen, bis auf Permutation der Zeilen!!
Man kann aber $A[\ell|j]$ aus $A[k|j]$ durch wiederholte Zeilenumformungen vom Typ 1 erhalten, indem man die $(\ell-1)^{\text{te}}$ Teile in $(\star)$ bis zur k^{ten} Zeile in $(\star\star)$ rückt. Dafür benötigt man $(\ell-1)-k$ Transpositionen.

$$\begin{bmatrix} :=\text{Perutationen der Gestalt } (\ell-1 \quad \ell-2), \text{ dann } (\ell-2 \quad \ell-3) \\ \ldots \text{bis } (\ell-(\ell-k-1) \quad \ell-(\ell-k)), \text{ d.h. bis } (k+1 \quad k) \end{bmatrix}$$

Zusammenfassend:
Setze $\pi := (k+1 \quad k) \ldots (\ell-1 \quad \ell-2)$, $\pi \in S_{n-1}$.
$\text{sign}(\pi) = (-1)^{(\ell-1)-k}$. Also $D_{\ell j}(A) = (-1)^{(\ell-1)-k} D_{kj}(A)$.
Zurück in $(\star)$:

$$\delta(A) = (-1)^j \,[\underbrace{(-1)^k A_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{1. Term}} + \underbrace{(-1)^{2\ell-1-k} A_{kj} D_{kj}(A)}_{\text{2.Term}}]$$

Aber:

$$(-1)^k = -\left[(-1)^{2\ell-1-k}\right] = (-2)^{2(\ell-1)-k}$$

Also kürzen dich 1. Term und 2. Term raus und damit ist $\delta(A) = 0$, wie behauptet.

- n-linear? Ü.A.
  Hinweis: Zeige: Für i, j fixiert, ist $A_{ij}D_{ij}(A)$ eine n-lineare Funktion in A. Eine lineare Kombination von n-linearen ist n-linear.
  Also ist δ n-linear.

$\square$

Korollar 7: (Spaltenentwicklung)
Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$. Für jedes $1 \le j \le n$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} D_{ij}(A).$$

Definition 3: $(-1)^{i+j}\det(A[i|j])$ ist der ij^{te}-Kofaktor von A

Notation: $C_{ij} := (-1)^{i+j}\det(A[i|j])$
Also:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}C_{ij}$$

1. Behauptung: $k \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_{ik}C_{ij} = 0$

Beweis: Ersetze die j^{te} spalte von A durch ihre k^{te} Spalte und nenne die so erhaltene Matrix B.
Es gilt also: $B_{ij} = A_{ik}, \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$
Also:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} B_{ij}\det(B[i|j]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ik}\det(A[i|j]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{ik}C_{ik} \end{aligned}$$

$\square$

Diese Eigenschaften fassen wir zusammen:

$$(\star) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = \delta_{jk} \det(A)$$

Definition 4: Die $n \times n$-Matrix $\operatorname{adj}(A)$ ist die Transponierte der Matrix der Kofaktoren von A, d.h.

$$(\operatorname{adj}(A))_{ij} := C_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A[j|i])$$

$\operatorname{adj}(A)$ ist die adjungierte Matrix von A.

Die Formel in $(\star)$ kann man nun zusammenfassen:

$$(\star\star) \qquad (\operatorname{adj}(A))A = \det(A)\mathrm{I}_n.$$

2. Behauptung: $A(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)\mathrm{I}_n$

Beweis: Es ist: $A^\top[i|j] = A[j|i]^\top$. Also:

$$(-1)^{i+j} \det(A^\top[i|j]) = (-1)^{i+j} \det(A[j|i])$$

$$(ji^{\text{te}} \text{ Kofaktor vom } A^\top \ = \ ji^{\text{te}} \text{ Kofaktor von } A.)$$

Also:

$$(\star\star\star) \qquad \operatorname{adj}(A^\top) = (\operatorname{adj}(A))^\top$$

$(\star\star)$ impliziert für $A^\top$:

$$(\operatorname{adj}(A^\top))A^\top = (\det(A^\top))\mathrm{I}_n = (\det(A))\mathrm{I}_n.$$

Also:

$$A(\operatorname{adj}(A^\top))^\top = (\det(A))\mathrm{I}_n.$$

Zusammen mit $(\star\star\star)$ erhalten wir:

$$A(\operatorname{adj}(A)) = (\det(A))\mathrm{I}_n$$

$\square$

Es gilt also:

$$(\dagger) \begin{cases} A(\operatorname{adj}(A)) = (\det(A))\mathrm{I}_n \\ \qquad\qquad \text{und} \\ (\operatorname{adj}(A))A = (\det(A))\mathrm{I}_n \end{cases}$$

Definition 5: $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar, falls es $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ gibt, sodass

$$AB = BA = \mathrm{I}_n$$

[Wenn B existiert, dann ist B eindeutig, $B = A^{-1}$, wie für $R = K$ (Körper)]

Aus (†) sehen wir:

$$\left.\begin{array}{l}\det(A) \text{ invertierbar in } R\\ (\text{ d.h. eine Einheit von } R\ )\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A \text{ invertierbar über } R \text{ und}\\ A^{-1} \;=\; (\det(A))^{-1}\mathrm{adj}(A)\end{cases}$$

Umgekehrt: A invertierbar $\Rightarrow$ $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$ $\Rightarrow$ $\det(AA^{-1}) = 1$

$\Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)$ ist eine Einheit in R

Wir haben bewiesen:

Satz 5: $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ ist invertierbar über R gdw. $\det(A)$ eine Einheit in R ist.
Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = \det(A)^{-1}\mathrm{adj}(A)$.
[Insbesondere: $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ (K Körper) ist invertierbar gdw. $\det(A) \neq 0$]

Sonderfall: $R = K[x],\ f, g \in K[x],\ fg = 1 \Rightarrow \deg f + \deg g = 0 \Rightarrow \deg f = \deg g = 0$
Also sind die Einheiten von R die $\neq 0$ Skalarpolynome.
A ist invertierbar, gdw. $\det(A) \in K^\times$

Beispiel 1: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}),\ \det(A) = -2.$$

A nicht invertierbar über $\mathbb{Z}$. A ist aber invertierbar als Matrix mit den Einträgen aus $\mathbb{Q}$ und

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

Beispiel 2: $R = R[x]$

$$A = \begin{pmatrix} x^2 + x & x + 1\\ x - 1 & 1\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & x + 2\\ x^2 - 2x + 3 & x\end{pmatrix}$$

$\det(A) = x + 1$, $\det(B) = -6$

A nicht invertierbar B invertierbar

<u>Lemma 4:</u> Ähnlich Matrizen haben die gleiche Determinante.

<u>Beweis:</u> $B = P^{-1}AP,\ A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$.

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P)^{-1}\det(P)\det(A) = \det(A)$$

$\square$

<u>Definition 6:</u> $\dim(V) = n,\ V$ K-Vektorraum, $T : V \longrightarrow V$ linearer Operator.
Definiere:

$$\dim(T) := \det([T]_{\mathcal{B}})$$

für eine (jede) Basis $\mathcal{B}$ von V.

<u>Cramer's Formel:</u> Betrachte das Gleichungssystem:

$$AX = Y, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$$

Also:

$$\mathrm{adj}(A)AX = \mathrm{adj}(A)Y$$

Also:

$$(\det(A))X = \mathrm{adj}(A)Y$$

Also:

$$(\det(A))x_j = \sum_{i=0}^{n} (\mathrm{adj}(A))_{ij} y_i$$

also für $1 \leq j \leq n$ gilt:

$$(\det(A))x_j = \sum (-1)^{i+j} y_i \det(A[i|j])$$

$\nearrow$

Hier erkennen wir die Determinante der
Matrix, die man erhält, wenn man die
j^{te} Spalte von A durch Y ersetzt.

Wenn $\det(A) \neq 0$ bekommen wir:

Cramer's Regel: Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, mit $\det(A) \neq 0$.

Sei $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$.

Dann ist die eindeutige Lösung $X = A^{-1}Y$ so beschrieben:

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(A)}$$

Wobei B_j die $n \times n$-Matrix ist, die man erhält, wenn man die j^{te} Spalte von A durch Y ersetzt.

§9. Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1:

(a) Sei V K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$
$c \in K$ ist ein Eigenwert von T, falls $\alpha \in V, \alpha \neq 0$ existiert mit

$$T(\alpha) = c\alpha$$

(b) Sei $\alpha \in V$ und $T(\alpha) = c\alpha$
α heißt Eigenvektor (zum Eigenwert c).

(c) $W_c := \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\}$ ist ein Unterraum,
der Eigenraum (zum Eigenwert c).

Bemerkung 1: $W_c = \ker(T - cI)$, d.h.

$$W_c = \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\} = \{\alpha \mid (T - cI)\alpha = 0\}.$$

c ist also Eigenwert, gdw. $(T - cI)$ singulär ist.

Satz 1: Sei V unendlich-dimensional, $T \in \mathscr{L}(V,V),\ c \in K$
Es sind äquivalent:

(i) c ist Eigenwert von T

(ii) $(T - cI)$ ist nicht invertierbar

(iii) $\det(T - cI) = 0$

Bemerkung 2: $\det(T - xT)$ ist ein Polynom vom Grad n (die Eigenwerte sind also genau dessen Nullstellen). Sei $\mathcal{B}$ eine Basis, $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K),\ A = [T]_{\mathcal{B}}$.
Es ist: $A - xI = [T - xI]_{\mathcal{B}}$.
Nun ist:

$$B := xI - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & x - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & x - a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } b_{ii} = (x - a_{ii})$$

$$\det(B) = \sum_{\tau \in S_n} (\mathrm{sign}(\tau)) \underbrace{b_{1\tau(1)} \dots b_{n\tau(n)}}_{\text{Falls } \uparrow \neq 0 \text{ ist:}}$$

$$\deg(b_{1\tau(1)} \dots b_{n\tau(n)}) = |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \tau(i) = i\}|$$

Also ist $\prod_{i=1}^{n} (x - a_{ii})$ der einzige Term (Hauptterm) vom Grad n. Wir sehen also, dass:

$$\deg\left(\sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sign}(\tau) b_{1\tau(1)} \dots b_{n\tau(n)}\right) = n$$

und außerdem, dass $\det(xI - A)$ ein normiertes Polynom ist.

Definition 2: $c \in K$ ist Eigenwert von A$\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, falls $(cI - A)$ singulär ist.
Also sind die Eigenwerte von A die Nullstellen von $\det(xI - A)$, wie oben.

Definition 3: $f(x) := \det(xI - A)$ ist das charakteristische Polynom von A.

Lemma 1: Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.

Beweis:

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP \Rightarrow \det(xI - B) &= \det(xI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(xI - A)\det(P) = \det(xI - A) \end{aligned}$$

□

Definition 4: Sei V endlich-dimensional, $T \in \mathscr{L}(V, V)$.

$$\operatorname{CharPol}(T) := \operatorname{CharPol}\left([T]_{\mathcal{B}}\right)$$

für irgendeine Basis $\mathcal{B}$ von V (und damit für jede Basis).

Bemerkung und Beispiele:

T kann also nicht mehr als $\dim(V)$ Eigenwerte in K haben.

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ hat keine reellen Eigenwerte, weil $\det(xI - A) = x^2 + 1$ keine reelle Nullstelle hat.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & .1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$$\operatorname{CharPol}(A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$$

Eigenwerte $c = 1,\ c = 2$ in $\mathbb{R}$.

$c = 1,\ \ker(A - I) =: W_1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ hat rang} = 2$$

Also $\dim\left(\ker(A - I)\right) = 1$

Wir wollen eine Basis für W_1 finden.

Löse

$$(A-I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\alpha_1=(1,0,2)$ ist eine Lösung und $\{\alpha_1\}$ ist eine Basis für W_1.

$c=2,\ \ker(A-2I)=:W_2$

$$A-2I=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&-1\\2&2&-2\end{pmatrix}\text{ hat rang}=2$$

Also $\dim W_2=1$.. Wie oben finde Lösung:
$\alpha_2=(1,1,2)$ und $\{\alpha_2\}$ ist Basis für W_2.

Lemma 2: Seien $v_i\neq 0,\ v_i\in V,\ v_i$ ist Eigenvektor zum Eigenwert c_i, für $i=1,\dots,k$.
Falls $c_i\neq c_j$ für $i\neq j,\ i,j\in\{1,\dots,k\}$, dann ist $\{v_1,\dots,v_k\}$ linear unabhängig.

Beweis: Bemerke, dass $v\in V,\ v\neq 0$

$\Rightarrow v$ kann nicht Eigenwert zu verschiedenen Eigenweren sein.

Wir führen einen Beweis per Induktion.
$k=2$: Ist $v_2=cv_1$, so ist $v_2\in W_{c_1}$, also v_2 ist Eigenwert zu c_1 und $c_2\neq c_1$ ↯
Induktionsannahme gelte für $k-1$.
Seien $v_1,\dots,v_k$ linear abhängig.
Œhaben wir also $v_k=\sum\limits_{i=1}^{k-1}v_i$.

$$\left.\begin{array}{c}T(v_k)=c_kv_k=c_k\sum\limits_{i=1}^{k-1}v_i\\ \text{und}\\ T(v_k)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}T(v_i)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}c_iv_i\end{array}\right\}\Rightarrow c_k\sum_{i=1}^{k-1}v_i=\sum_{i=1}^{k-1}c_iv_i\Rightarrow\sum_{i=1}^{k-1}(c_k-c_i)v_i=0$$

$$\Rightarrow\quad \underset{i=1,\dots,k-1}{c_k-c_i=0}\quad\Rightarrow\quad\underset{i=1,\dots,k-1}{c_k=c_i}\quad ↯$$

□

Korollar 1: Seien $\dim(V)=n,\ T\in\mathscr{L}(V,V)$
Nehme an, dass T n verschiedene Eigenwerte $d_1,\dots,d_n$ in K hat.
Dann hat V eine Basis $\mathcal{D}$, bestehen aus Eigenvektoren von T.

Definition 5: Seien $\dim(V) = n,\ T \in \mathscr{L}(V,V)$
T ist diagonalisierbar (über K), falls V eine Basis, bestehend aus Eigenvektoren von T hat.

Bemerkung: Seien $\dim(V) = n,\ T \in \mathscr{L}(V,V),\ d_1, \ldots, d_n$ verschiedene Eigenwerte und α_i Eigenvektor zum Eigenwert d_i. Setze $\mathcal{D} := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
Dann ist $\mathcal{D}$ eine Basis und

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \text{ diagonale Matrix.}$$

Korollar 2: Sei $\dim(V) = n,\ T \in \mathscr{L}(V,V),\ d_1, \ldots, d_k$ verschiedene Eigenwerte.
Für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ sei $\mathcal{B}_i \subseteq W_{d_i},\ \mathcal{B}_i$ linear unabhängig.
Dann ist $\mathcal{B} := \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ auch linear unabhängig.

Beweis: Sei $L := \{v_1, \ldots, v_\ell\} \subseteq \mathcal{B}$. Betrachte eine Linearkombination $\sum\limits_{j=1}^{\ell} c_j v_j$.
Nun setze $L_i := L \cap \mathcal{B}_i$ und $(\star)\quad \alpha_i := \sum\limits_{v_j \in L_i} c_j v_j$, falls $L_i \neq \emptyset$
(und $\alpha_i := 0$ per Konvention, falls $L_i = \emptyset$) Dann ist $\alpha_i \in W_{d_i}$.
Also ist $0 = \sum\limits_{j=1}^{\ell} c_j v_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i$ nur möglich, wenn $\alpha_i = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, k$
(sonst wären die $\alpha_i \neq 0$ Eigenvektoren zu verschiedenen EW
und gleichzeitig linear abhängig. Widerspruch zu Lemma 2 (§9) !)
Nun sind die v_j in $(\star)$ linear unabhängig, also $c_j = 0 \quad \forall\, j$, wie behauptet.

□

Lemma 3: Sei $\dim(V) = n,\ T \in \mathscr{L}(V,V),\ d_1, \ldots d_k$ dir verschiedenen Eigenwerte von T.
Es gilt:

$$T \text{ ist diagonalisierbar} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \dim(W_{d_j}) = n$$

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von Eigenvektoren. Setze $\mathcal{B}_j := \mathcal{B} \cap W_{d_j}$.

Also ist $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$. Setze $\ell_j := |\mathcal{B}_j|$, also $n = |\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} \ell_j$

<u>Behauptung:</u> $\ell_j = \dim(W_{d_j})$
Es ist klar, dass $\ell_j \leq \dim(W_{d_j})$. Ist $\ell_i < \dim(W_{d_i})$, dann existiert $\beta \in W_{d_j}$ mit $\mathcal{B}_i' := \mathcal{B}_i \cup \{\beta\}$ linear unabhängig.
Aber dann ist $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{\beta\} = \dot{\bigcup}_{j \neq i} (\mathcal{B}_j \ \dot{\cup}\ \mathcal{B}_i')$ linear unabhängig (Korollar 1 (§9))
und $|\mathcal{B}'| = n + 1 \quad \lightning$ (unmöglich)

„$\Leftarrow$" Sei $\sum_{j=1}^{k} \sim (W_{d_j}) = n$ und $\mathcal{B}_j$ eine Basis für W_{d_j} für jedes $j = 1, \ldots, k$.

Setze $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$. Dann ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig (Korollar 1 (§9))

und $|\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} |\mathcal{B}_j| = \sum_{j=1}^{k} \dim(W_{d_j}) = n$
Also ist $\mathcal{B}$ eine Basis für V und besteht aus Eigenvektoren von T.
Also ist T diagonalisierbar.

$\square$

Sei nun $\dim(V) = n$, $T \in \mathscr{L}(V, V)$ diagonalisierbar, $d_1, \ldots, d_k$ die verschiedenen Eigenwerte von T, $\mathcal{D}$ eine Basis, bestehend aus Eigenvektoren
(und so geordnet, dass die ersten Basisvektoren Eigenvektoren zu d_1 sind, d_2, usw. ...).
Dann ist

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \overbrace{d_1 & & }^{\ell_1\text{-mal}} & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & d_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \overbrace{d_k & & }^{\ell_k\text{-mal}} \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & d_k \end{pmatrix}$$

wobei $\ell_i := \dim(W_{d_i})$ und damit ist $\mathrm{CharPol}(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{\ell_i} \quad (\star)$
Umgekehrt: Ist $\mathrm{CharPol}(T)$ wie in $(\star)$ (mit $d_i \neq d_j$ für $i \neq j$ und $\ell_i = \dim(W_{d_i})$,
dann ist T diagonalisierbar, weil $\sum_{i=1}^{k} \dim(W_{d_i}) = n$ ist (siehe Lemma 3 (§9)).
Wir haben bewiesen:

Satz 2: Sei V endlich-dimensional, $T \in \mathscr{L}(V, V)$.
Es gilt:

$$\text{T ist diagonalisierbar gdw. } \mathrm{CharPol}(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{\ell_i}$$

wobei die Vielfachheit ℓ_i der Nullstellen d_i die $\dim(W_{d_i})$ ist.

Bemerkung: $\dim(W_d)$ wird auch „geometrische Vielfachheit“ der NS d genannt.

Satz 3: Sei $\dim(V)$ endlich, $T \in \mathscr{L}(V, V)$ und d Eigenwert von T mit Vielfachheit μ.
Es gilt:

$$\ell := dim(W_d) \leq \mu$$

Beweis: Sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ Basis von W_d.
Ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell, \alpha_{\ell+1}, \ldots, \alpha_n\}$ von V.
Es ist:

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{d \quad\quad\quad}^{\ell\text{-mal}} & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & d & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right)$$

Wir berechnen CharPol(A):

$$\det(xI - A) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{x-d \quad\quad\quad}^{\ell\text{-mal}} & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & x-d & \\ \hline & 0 & & xI - C \end{array}\right) = (x-d)^\ell \det(xI - C)$$

Also ist $\ell \leq \mu$.

$\square$

Die Matrizen A aus (i) und (ii) von Beispiel (§9) sind nicht diagonalisierbar.

Beispiel:

(iii) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$
CharPol$(A) = (x-1)(x-2)^2$ (wie in Beispiel (§9) (ii)!)

$d_1 = 1:$

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c}\text{rang}(A-I)\neq 3,\\ \text{weil } (A-I) \text{ singulär}\\ \text{Es ist klar, dass}\\ \text{rang}(A)\geq 2\\ \text{also rang}(A-I)=2\end{array}$$

$d_2 = 2:$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \text{ hat rang}(A-2I) = 1$$

Also $\dim(W_{d_1}) = 1,\ \dim(W_{d_2}) = 2$ und damit $\dim(W_{d_1}) + \dim(W_{d_2}) = 3$
Also ist T diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Basis $\mathcal{D}$ von $\mathbb{R}^3$, sodass

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

§10. Annihilator Ideal

Sei V ein K-Vektorraum und $T \in \mathscr{L}(V,V),\ p \in K[x]$.

Proposition 1: Sei $\dim(V) = n$.
Es gilt:

(1) $\mathcal{A}(T) := \{p \in K[x] \mid p(T) = 0\}$ ist ein Ideal

(2) $\mathcal{A}(T) \neq \{0\}$

Beweis:

(1) $(p+q)(T) = p(T) + q(T)$
$(pq)(T) = p(T)q(T)$.

(2) Betrachte die Elemente $I, T, T^2, \ldots, T^{n^2} \in \mathscr{L}(V,V)$
Da $\dim(\mathscr{L}(V,V)) = n^2$, sind diese Elemente notwendig linear abhängig.
Also existieren $c_0, \ldots, c_{n^2} \in K$ mit $c_0 I + c_1 T + \ldots + c_{n^2} T^{n^2} = 0$,
mit c_i nicht alle gleich Null.

□

Definition 1: Der(eindeutig bestimmte) normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(T)$ ist das Minimalpolynom von T. (MinPol(T))

Bemerkung 1:

(i) $\deg(\text{MinPol}(T)) \leq n^2$, wir werden aber eine bessere obere Schranke bekommen.

(ii) $p := \text{MinPol}(T)$ ist das normierte Polynom vom kleinsten Grad in $\mathcal{A}(T)$. Ist also charakterisiert durch:

(1) $p \in K[x]$

(2) $p(T) = 0$

(3) $\deg q < \deg p \Rightarrow q(T) \neq 0$

Definition 2: $A \in \text{Mat}_{n\times n}(K)$
MinPol(A) ist der normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(A)$ (analog definiert).

Bemerkung 2:

(1) Sei $\mathcal{B}$ Basis für V. Es gilt für $f \in K[x]$:

$$[f(T)]_{\mathcal{B}} = f\left([T]_{\mathcal{B}}\right) \quad \text{(Ü.B.)}$$

Also $f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A = 0$ für $A = [T]_{\mathcal{B}}$

(2) Also haben ähnliche Matrizen gleiche MinPol!

Satz 1: Sei V endlich, $T \in \mathscr{L}(V, V)$ (oder $A \in \text{Mat}_{n\times n}(K)$)
Es gilt:

CharPol(T) und MinPol(T) haben dieselben Nullstellen (bis auf Vielfachheit)

Beweis: Sei $p := \text{MinPol}(T),\ c \in K$
z.z.: $p(c) = 0 \Leftrightarrow c$ Eigenwert von T.

„⇒“ $p(c) = 0 \Rightarrow p = (x-c)q,\ \deg q < \deg p,\ \text{so } q(T) \neq 0$
Wähle $\beta \in V$ mit $d := q(T)(\beta) \neq 0$. Es gilt:

$$0 = p(T)(\beta) = (T - cI)q(T)(\beta) = (T - cI)(\alpha).$$

Also $\alpha \neq 0$ ist Eigenvektor zum Eigenwert c.

„⇐“ Umgekehrt sei $T(\alpha) = c\alpha,\ \alpha \neq 0, \alpha \in V, c \in K$.
Nun gilt also $p(T)(\alpha) = p(c)\alpha$ (Ü.B.)
Da aber $p(T) = 0$ und $\alpha \neq 0$ folgt $p(c) = 0$.

□

<u>Proposition 2:</u> Sei T diagonalisierbar.
Dann zerfällt MinPol(T) in verschiedene lineare Faktoren

(Wir werden später Primäre Zerlegung anwenden, um die Umkehrung dieser Aussage auch zu beweisen.)

<u>Beweis:</u> Sei T diagonalisierbar, $c_1, \dots, c_k \in K$ die verschiedenen Eigenwerte, $p := \mathrm{MinPol}(T)$
<u>Behauptung:</u> $p = (x - c_1)\dots(x - c_k)$
Dies gilt, weil $(T - c_1 T)\dots(T - c_k I)(\alpha) = 0$ für jeden Eigenvektor α
(weil α ist Eigenvektor zum Eigenwert c_i für ein geeignetes i).
Da es eine Basis von Eigenvektoren gibt, ist $p(T) = 0$.

□

<u>Beispiel:</u> Nun berechnen wir MinPol für die Beispiele (i), (ii) und (iii)
Wir bezeichnen $p := \mathrm{MinPol}$.

(iii) $p = (x-1)(x-2)$, weil T diagonalisierbar (Proposition 2 (§10) anwenden)

(iv) T ist nicht diagonalisierbar, also können wir Proposition 2 (§10) hier nicht anwenden, aber Satz 1 (§10) können wir anwenden.
Da $\mathrm{CharPol}(T) = (x-1)(x-2)^2$, hat p die NS 1 und 2.
Wir probieren Polynome der Form $(x-1)^k(x-2)^\ell,\ k \geq 1,\ \ell \geq 1$
(„prüfen“ ob sie T annihilieren).

$(x-1)(x-2)$:

$$(A - I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Also ist $\deg p \geq 3$.
Nun probieren wir $(x-1)^2(x-2)$ oder $(x-1)(x-2)^2$ und wir erhalten $(A - I)(A - 2I)^2 = 0$.
Also ist hier $\mathrm{CharPol}(T) = \mathrm{MinPol}(T)$.

Der Satz von Cayley Hamilton wird uns helfen weniger „prüfen“ zu müssen!

Satz von Cayley Hamilton: Sei V endlich-dimensional, $T \in \mathscr{L}(V,V)$, $f := \mathrm{CharPol}(T)$.
Es gilt:

$$f(T) = 0, \text{ d.h. das MinPol(T) teilt } f.$$

Beweis: Seien $\mathcal{K}$:=die Algebra der Polynome in T, $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ Basis für V und $A := [T]_{\mathcal{B}}$, d.h. $(\alpha_k) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j, \quad \forall\, 1 \le i \le n.$

Wir schreiben diese Gleichung um als

(1) $\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij}T - A_{ji}I)\,\alpha_j = 0, \quad \forall\, 1 \le i \le n$

Sei B die $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten in der Algebra $\mathcal{K}$, definiert durch:

$$B_{ij} := \delta_{ij}T - A_{ji}I$$

Beobachtung: $\det(B) = f(T)$, weil $f(x) = \underbrace{\det(xI - A)}$

und die Eintrage der Matrix $(xI - A)_{ij} = \delta_{ij}x - A_{ji}$.
Also $(xI - A)_{ij}(T) = \delta_{ij}T - A_{ji}I = B_{ij}$ und somit gilt:

$$f(T) = [\det(xI - A)]\,(T) = \det\,[(xI - A)(T)] = \det(B)$$

Wir wollen zeigen: $f(T) = 0$,
also zeigen wir: $(\det(B))(\alpha_k) = 0 \quad \forall\, k = 1, \dots, n$.
Nun gelten für B_{ij} und α_j per Definition:

(2) $\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\alpha_j) = 0, \quad 1 \le i \le n$

Setze $\tilde{B} := \mathrm{adj}(B)$. Aus (2) folgt $\quad \forall\, k, \quad \forall\, i$:

$$\tilde{B}_{ki}\left(\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j\right) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j,$$

Wie summieren über i und bekommen:

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij})}_{kj^{\text{ter}} \text{ Koeffizient von } \tilde{B}B}(\alpha_j)$$

Nun ist $\tilde{B}B = (\det(B))I$, also

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki}B_{ij} = \delta_{ij}\det(B)$$

also

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}(\det(B))(\alpha_j) = (\det(B))(a_k)$$

$\square$

$\boxed{\text{Wichtige Bemerkung:}}$ Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung (z.B. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R},\ \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$), $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(F_0) \subseteq \mathrm{Mat}_{n\times n}(F_1)$

Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{CharPol}_{F_0}(A) \text{ und } \mathrm{MinPol}_{F_0}(A)$$

beziehungsweise

$$\mathrm{CharPol}_{F_1}(A) \text{ und } \mathrm{MinPol}_{F_1}(A)$$

die charakteristischen- bzw. Minimalpolynome von A jeweils als Element aus $\mathrm{Mat}_{n\times n}(F_0)$ und $\mathrm{Mat}_{n\times n}(F_1)$. Wir wollen zeigen, dass

(1) $\mathrm{CharPol}_{F_0}(A) = \mathrm{CharPol}_{F_1}(A)$

und

(2) $\mathrm{MinPol}_{F_0}(A) = \mathrm{MinPol}_{F_1}(A)$

Beweis:

(1) ist einfach, weil $\det(B)$nur von Koeffizienten der Matrix B abhängen.
(i) Wir untersuchen zunächst die folgende Frage:

(2) Wie entscheiden wir für einen gegebenen Körper K und ein $k \in \mathbb{N}$, ob es ein Polynom $p \in K[x]$ gibt, mit $\deg p = k$ und $p(A) = 0$?
Wir lösen ein Matrixgleichungssystem:

$$A^k + x_{k-1}A^{k-1} + \ldots + x_0 I = 0 \qquad (\star)$$

$(\star)$ ist ein lineares Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen in den Variablen $x_0, \ldots, x_{k-1}$. Jede Lösung $a_0, \ldots, a_{k-1} \in K$ gibt es das Polynom $p(x) := x^k + \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ mit $p \in \mathcal{A}(A)$
Wenn wir $(\star)$ (für die kleinste natürliche Zahl k, wofür e eine Lösung gibt) gelöst haben, dann ist die Lösung $a_0, \ldots, a_{k-1}$ eindeutig, weil sie uns die eindeutig definierten Koeffizienten $1, a_{k-1}, \ldots, a_0$ von $\mathrm{MinPol}_K(A)$ liefert.
Wir folgern:
Sei k minimal, so dass $(\star)$ eine Lösung in K hat, dann liefert diese Lösung das $\mathrm{MinPol}(A)$

(ii) Sei $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(F_0),\ F_0 \subseteq F_1$ Körpererweiterung, $Y \in F_0^{m\times 1}$
Betrachte $BX = Y \qquad (S)$
Hat (S) eine Lösung in $F_1^{n\times 1}$, dann hat (S) auch eine Lösung in $F_0^{n\times 1}$ (und umgekehrt natürlich nicht!)

Beweis: Dies gilt, weil die r.Z.S.F. $(B|Y)$ (bzgl. F_1) uns alles liefert bzgl. Existenz und Lösungen. Nun ist aber die r.Z.S.F. eindeutig! Also ist sie gleich bzgl. F_0

□

Aus (i) und (ii) sehen wir, dass $(\star)$ eine Lösung $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in F_0^k$ hat, gdw. es eine Lösung in F_0^k hat. Die Eindeutigkeit des MinPol_{F_1} liefert außerdem, dass die Lösung in F_0^k $(a_0, \dots, a_{k-1})$ sein muss!

□

§11. Trigonalisierbarkeit

Definition 1: $T \in \mathscr{L}(V,V)$ ist trigonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ für V gibt, sodass $[T]_\mathcal{B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. (d.h. $a_{ij} = 0$ für $i > j$)

Satz 1: V endlich-dimensional, $T \in \mathcal{L}(V,V)$
Es gilt:

T ist trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{CharPol}(T)$ zerfällt über K in Linearfaktoren

(d.h. $\mathrm{CharPol}(T) = (x-c_1)^{n_1} \dots (x-c_k)^{n_k}$ mit $c_i \in K$)

Beweis: „$\Rightarrow$“ Klar, weil $[T]_\mathcal{B} = A$ ist obere Dreiecksmatrix, also ist $\det(xI - A)$ ein Produkt der Form $\prod_{i=1}^{n} (x - a_{ii})$.

„$\Leftarrow$“ Wir werden per Induktion eine Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ aufbauen, in der $[T]_\mathcal{B}$ obere Dreiecksmatrix ist. Da T wenigstens einen Eigenwert hat, hat T auch einen Eigenvektor zum Eigenwert $c_1 \in K$. Sei $\alpha \neq 0$ solch ein Eigenvektor und ergänze zu einer Basis $\{\alpha, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ für V.
(so geordnet, dass α der erste Vektor davon ist)
Betrachte die Matrixdarstellung von T diesbezüglich:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right) \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ \vdots \\ a \end{array}}\right\} \Gamma \in \mathrm{Mat}_{(n-1)\times(n-1)}(K)$$

Sei $G \in \mathscr{L}(V,V)$, wobei $W = \operatorname{span}\{\beta_2 \ldots, \beta_n\}$ definiert durch $Gw := \Gamma w$.
Wir sehen also, dass $\operatorname{CharPol}(T) = (x - c_1)\operatorname{CharPol}(G)$.
Da $\operatorname{CharPol}(T)$ Produkt von Linearfaktoren ist, so auch $\operatorname{CharPol}(G)$.
Die I.A. liefert eine Basis $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ bezüglich der G eine obere Dreiecksmatrixdarstellung hat:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{array}\right)$$

Setze $\alpha_1 := \alpha$ und setze $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

□

§12. Invariante Unterräume

<u>Definition 1:</u> $W \subseteq V$ Unterraum, $T \in \mathscr{L}(V,V)$. W ist <u>T-invariant</u>, falls $T(W) \subseteq W$

<u>Beispiel:</u>

(0) $\{0\}$ und V sind T-invariant.

(1) D Ableitungsoperator auf $V = K[x]$.
W Unterraum der Polynome mit $\deg \leq n$ ist D-invariant.

(2) Sei $U \in \mathscr{L}(V,V)$ mit $TU = UT$, dann sind
(i) $W := \operatorname{Im}(U)$ und (ii) $N := \ker(U)$ T-invariant.

<u>Beweis:</u>

(i) Sei $\alpha = U(\beta),\ \alpha \in \operatorname{Im}(U),\ T(\alpha) = T(U(\beta)) = U(T(\beta)) \in \operatorname{Im}(U)$

(ii) $\alpha \in N,\ U(T(\alpha)) = T(U(\alpha)) = T(0) = 0$
$\Rightarrow T(\alpha) \in N$

□

(3) $W \subseteq V$ T-invariant $\Rightarrow$ W $g(T)$-invariant für $g \in K[x]$. (Ü.A.)

(4) Für $g \in K[x],\ U := g(T)$ gilt $g(T)T = Tg(T)$.
Insbesondere für $U := cI - T$, also ist $\ker(T - cI)$ T-invariant.
Eigenraum zum Eigenwert c ist T-invariant.

(5) $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Wir behaupten nun: Nur $\{0\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ sind T-invariant (für $T = T_A$)
Sei $\underbrace{W \neq V,\ W \neq \{0\}}_{\downarrow}$ T-invariant,
es gelte aber dann, dass $\dim(W) = 1$
Sei $\alpha \neq 0,\ \alpha \in W,\ \{a\}$ ist eine Basis und damit ein Eigenvektor.
A hat aber keine reellen Eigenwerte.

Der Operator $T|_W := T_W$
Sei W T-invariant, dann ist $T_W \in \mathscr{L}(W, W)$.
Matrixdarstellung von T_W:
Sei V endlich-dimensional, $W \subseteq V,\ \dim(W) = r$ T-invariant,
$\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ Basis für W ergänze zu $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n\}$ Basis für V.
Betrachte $A := [A]_{\mathcal{B}}$, wir haben die Gleichungen

$$T_{\alpha_j} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_i$$

W T-invariant $\Rightarrow\ T_{\alpha_j} \in W$ für $j \leq r$.
Also $T(\alpha_j) = \sum\limits_{i=1}^{r} A_{ij}\alpha_i$ für $j \leq r$, d.h. $A_{ij} = 0$ für $j \leq r$ und $i > r$.
Also sieht A so aus:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei B $r \times r$
C $r \times (n-r)$
D $(n-r) \times (n-r)$ sind.

Es ist darüber hinaus klar, dass $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

Lemma 1: Sei V K-Vektorraum, $\dim(V) < \infty,\ T \in \mathscr{L}(V, V),\ W \subseteq V$ T-invariant, also $T_W \in \mathscr{L}(W, W)$. Es gelten:
(i) $\mathrm{CharPol}(T_W)$ teilt $\mathrm{CharPol}(T)$
(ii) $\mathrm{MinPol}(T_W)$ teilt $\mathrm{MinPol}(T)$.

Beweis:
(i) ist klar, weil

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_W]_{\mathcal{B}'} & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

und somit ist $\det(xI - A) = \det(xI - B)\det(xI - D)$.

(ii) Betrachte, dass

$$A^k = \begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{wobei } C_k \text{ ist} \\ r \times (n-r) \end{matrix}$$

Also jedes Polynom, das A annihiliert, annihiliert damit auch B.
Also MinPol(B) teilt MinPol(A)

$\square$

<u>Erinnerung:</u> (Quotientenraum und direkte Summen aus L.A. I)

(1) Sei $W \subseteq V$ Unterraum:

$$V/W := \{\mathscr{A} + W \mid \alpha \in V\}$$
mit
$$c(\alpha + W) = c\alpha + W \text{ für } c \in K$$
und
$$(c\alpha + W) + (\beta + W) = (c\alpha + \beta) + W \text{ für } a, \beta \in V.$$

<u>Bezeichnung:</u> $\alpha + W =: \overline{\alpha}$

(2) <u>Kanonischer Homomorphismus:</u>

$$\pi : V \twoheadrightarrow V/W$$
$$\alpha \longmapsto \alpha + W$$

ist surjektiv mit $\ker \pi = W$.

(3) <u>Isomorphiesatz:</u>
Sei $\varphi : V \longrightarrow U$ Homomorphismus von K-Vektorräumen.
Es gilt:

$$V/\ker \varphi \simeq \mathrm{Im}\varphi$$

(4) $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume

$$V = W_1 \oplus W_2 \text{ (direkte Summe),}$$
$$\text{falls } V = W_1 + W_2 \text{ und } W_1 \cap W_2 = \{0\}.$$

D.h. $\forall \alpha \in V\ \exists!\, w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$, sodass $\alpha = w_1 + w_2$.

<u>Projektion Homomorphismus:</u>

$$\pi : W_1 \oplus W_2 \twoheadrightarrow W_2$$
$$w_1 + w_2 \longmapsto \pi(w_1 + w_2) := w_2$$

ist surjektiv mit $\ker \pi = W_1$.
Also gilt:

$$W_1 \oplus W_2 / W_1 \simeq W_2.$$

(5) Die Abbildung

$$\overline{T} : {}^{V}\!/_{W} \longrightarrow {}^{V}\!/_{W}$$

für $W \subseteq V$ T-invariant, wobei $T \in \mathscr{L}(V,V)$ wird definiert durch:

$$\overline{T}(\overline{\alpha}) = \overline{T}(\alpha + W) := T(\alpha) + W = \overline{T(\alpha)}$$

Sie ist wohldefiniert, d.h.
$\alpha_1 + W = \alpha_2 + W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$, weil $\alpha_1 - \alpha_2 \in W$
$\Rightarrow T(\alpha_1 - \alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) - T(a_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$
Die Abbildung ist auch linear (Ü.A.).
Also $\overline{T} \in \mathscr{L}\left({}^{V}\!/_{W}, {}^{V}\!/_{W}\right)$

<u>Satz 1:</u> Sei V endlich-dimensional, $W \subseteq V$, $T \in \mathscr{L}(V,V)$ und W T-invariant.
Sei $\mathcal{B}'$ eine Basis für W. Ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \mathbin{\dot\cup} \mathcal{B}''$ von V.
Es gilt:

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{wobei } B = [T_W]_{\mathcal{B}'} \\ \text{und } \; D = [\,\overline{T}\,]_{\overline{\mathcal{B}''}} \end{array}$$

$$(\ \overline{\mathcal{B}''} := \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \mathcal{B}''\}\ )$$

Für den Beweis brauchen wir folgendes Lemma:

<u>Lemma 2:</u> Sei V endlich-dimensional

(1) Sei $W \subseteq W$ Unterraum, $\mathcal{B}' \subseteq W$ Basis für W, $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ ergänzte Basis für V, dann ist $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für ${}^{V}\!/_{W}$

(2) Umgekehrt sein $\{\overline{\alpha}_{r+1}, \ldots, \overline{\alpha}_n\}$ eine Basis für ${}^{V}\!/_{W}$, dann ist $\mathcal{B}' \cup \{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n\}$ Basis für V.

<u>Beweis:</u> Ü.A. □

<u>Beweis:</u> (zu Satz 1 (§12))

Setze $r := \dim(W)$, B ist $r \times r$, also ist $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n\}$.

- Die Aussage über B ist hier bereits bewiesen worden.
- Wir analysieren die $(n-r) \times (n-r)$-Matrix D.
  Die Matrix $A = [T]_{\mathcal{B}}$ ist durch die folgende Gleichung definiert:

$$(\star) \qquad T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} B \\ r \times r \end{matrix} & [T(\alpha_{r+1})]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \\ \hline & & & \end{array}\right)$$

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_r}_{|\mathcal{B}'|=r}, \underbrace{\alpha_{r-1}, \dots, \alpha_n}_{|\mathcal{B}''|=(n-r)}\}$$

$$\overline{\mathcal{B}''} = \{\underbrace{\overline{\alpha}_{r+1}, \dots, \overline{\alpha}_n}_{|\mathcal{B}''|=(n-r)}\}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & A_{1(r+1)} & & A_{1n} \\ B & \vdots & & \vdots \\ & A_{r(r+1)} & & A_{rn} \\ \hline & A_{(r+1)(r+1)} & \dots & A_{(r+1)n} \\ & \vdots & & \vdots \\ & A_{n(r+1)} & & A_{nn} \end{array}\right)$$

oder

$$(\star\star) \qquad \underset{1 \le i \le n}{T(\alpha_i)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{r} A_{ji}\alpha_j}_{\in W} + \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\alpha_j \quad \text{und damit ist:}$$

$$\overline{T(\alpha_j)} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\overline{\alpha_j} = \overline{T}(\overline{\alpha_i}) \quad \text{für } r+1 \le i \le n$$

□

Korollar 1: $\operatorname{CharPol}(T) = (\operatorname{CharPol}(T_W))(\operatorname{CharPol}(\overline{T}))$

(Für MinPol(T) siehe Ü.B. 8 Aufgabe 8.2)

Korollar 2: T ist trigonalisierbar gdw. CharPol über K in Linearfaktoren zerfällt.

Bemerkung: Wir haben schon diese Tatsache schon bewiesen. Hier geben wir kurz einen zweiten Beweis (mit T_W und $\overline{T}$).

Beweis:

„⇒" Wie im 1. Beweis (§11).

„⇐" Per Induktion (nach $\dim V$)
(Wir wollen eine Basis $\mathcal{B}$ für V, sodass die Matrixdarstellung von T eine Dreiecksmatrix ist.)
Induktionsanfang: $n = 1$ ist trivial.
Induktionsannahme: gilt für $n - 1$
Sei c_1 ein Eigenwert von T und $\alpha_1 \neq 0$ ein Eigenvektor dazu.
Setze $W := \{c\alpha_1 \mid c \in K\}$. Es ist klar, dass W T-invariant.
Betrachte V/W und $\overline{T} \in \mathscr{L}\left(V/W, V/W\right)$. Nun ist $\dim\left(V/W\right) = (n-1)$.
Wir haben:
(†) $\operatorname{CharPol}(T) = (\operatorname{CharPol}(T_W))(\operatorname{CharPol}(\overline{T}))$.
$T_W \in \mathscr{L}(W, W)$, und $T_W(\alpha) = c_1\alpha \quad \forall\, \alpha \in W$
(Weil $T(\alpha) = T)c\alpha_2) = cT(\alpha_1) = cc_1\alpha_1 = c_1c\alpha_1)$
Also ist $A_W := [T_W]_{\{\alpha_1\}} = [c_1]$ und $\det(xI - A_W) = \det(x \cdot 1 - c_1) = (x - c_1)$
Also mit (†) bekommen wir $\operatorname{CharPol}(T) = (x - c_1)\operatorname{CharPol}(\overline{T})$.
Wir sehen also, dass auch $\operatorname{CharPol}(\overline{T})$ in ein Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt. Die Induktionsannahme liefert nun eine Basis $\overline{\beta}_2, \dots, \overline{\beta}_n$ von V/W wofür die Matrixdarstellung von $\overline{T}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
Setze $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \beta_2 \dots, \beta_n\}$.

□

Nun betrachten wir diese Aussage für $\operatorname{MinPol}(T)$:

Korollar 3: Sei V endlich-dimensional, $T \in \mathscr{L}(V, V)$.
T ist trigonalisierbar gdw. $\operatorname{MinPol}(T)$ über K in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis:

Wir zeigen: $\operatorname{CharPol}(T)$ zerfällt in Linearfaktoren über K
gdw.
$\operatorname{MinPol}(T)$ zerfällt in Linearfaktoren über K.

„⇒" MinPol(T) teilt CharPol(T). Da lineare Faktoren irreduzibel sind, folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorisierung in $K[x]$, dass auch MinPol(T) Produkt von linearen Faktoren ist.

„⇐" Sei $\operatorname{MinPol}(T) = \prod_{i=1}^{k}(x - c_i)^{v_i}$. MinPol(T) teilt CharPol(T) und beide Polynome haben dieselben NS in K (und in jeder Körpererweiterung).

Also CharPol(T)=MinPol(T)$q(x)$, $q(x) \in K[x]$. Nun ist $q(x)$ reduzibel in einer algebraisch abgeschlossenen Körpererweiterung $C \supseteq K$ und zerfällt in das Produkt

$$q(x) = \prod_{j=1}^{\ell}(x - d_j) \text{ über } C.$$

Wir behaupten, dass d_j bereits in K liegen und $d_j = c_i$ für geeignetes i.
Dies gilt weil d_j sonst eine NS von MinPol(T) wäre mit $d_j \in C/K$
(d.h. $d_j \in C$ aber $d_j \notin K$). Dies ist aber unmöglich, da MinPol(T) bereits alle seine NS in K hat.

□

§13. Direkte Summen

Lemma 1: Sei V ein K-Vektorraum, $W_1, \dots, W_R$ Unterräume. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $W_1, \dots, W_R$ sind unabhängig, d.h.:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0 \text{ (mit } \alpha_i \in W,\ 1 \leq i \leq k) \Rightarrow \alpha_i = 0,\ \forall i = 1, \dots k$$

(ii) $W_j \cap (W_1 + \dots W_{j-1}) = \{0\}$ für $2 \leq j \leq k$.

(iii) Ist $\mathcal{B}_i$ Basis für W_i, so ist $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ Basis für V.

Notation: Wir schreiben

$$V = W_1, \dots, W_k,$$

wenn V nur die Summe der W_i's ist und

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k,$$

falls $V = W_1 + \dots + W_k$ und eine der Bedingungen (i),(ii) oder (iii) gilt.
In dem Fall heißt V die direkte Summe der W_i's

<u>Satz 1:</u> (Primzerlegung von V bezüglich T)
Sei V K-Vektorraum, $\dim V < \infty$, $T \in \mathscr{L}(V,V)$, $\mathrm{MinPol}(T) = p = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ (wobei p_i verschiedene normierte, irreduzible Polynome in $K[x]$ und $r_i \in \mathbb{N}$) die Primfaktorisierung in $K[x]$ in p.
Setze $W_i := \ker p_i(T)^{r_i}$, $1 \le i \le k$.
Es gilt:

(i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$

(ii) $\mathrm{MinPol}(T|_{W_i}) = p_i^{r_i}$ für $1 \le i \le k$

Wir beweisen den Fall $k = 2$. Der allgemeine Fall folgt per Induktion nach k.

<u>Proposition 1:</u>
Sei $\dim V < \infty$, $T \in \mathscr{L}(V,V)$, $\mathrm{MinPol}(T) = m = m_1 m_2$ mit $\mathrm{ggT}(m_1, m_2) = 1$.
Setze $V_i := \ker m_i(T)$, $i = 1,2$.
Es gilt:

$$V = V_1 \oplus V_2 \text{ und } \mathrm{MinPol}\left(T/V_i\right) = m_i,\ i = 1,2$$

<u>Beweis:</u> Da m_1, m_2 relativprim sind, existieren $q_1, q_2 \in K[x]$ mit $1 = m_1 q_1 + m_2 q_2$, also $I = a_1(T) q_1(T) + m_2(T) q_2(T) \quad (\star)$

<u>Behauptung:</u> $V_1 = \mathrm{I}_m m_2(T)$ und $V_2 = \mathrm{I}_m m_1(T)$.

<u>Beweis:</u> $0 \underset{\text{MinPol}}{\overset{m}{=}} m(T) = m_1(T) m_2(T)$ also $\mathrm{I}_m m_2(T) \subseteq \ker m_1(T)$.
Umgekehrt sei $v \in \ker m_1(T)$, mit $(\star)$ gilt:

$$v = \underbrace{q_1(T) m_1(T)(v)}_{=0} + \underbrace{m_2(T) q_2(T)(v)}_{\in \mathrm{Im}(m_2(T))}$$

□

Wir zeigen: $V = V_1 \oplus V_2$
1.Summe: $v \in V$, mit $(\star)$ gilt:

$$v = \underbrace{m_1(T) q_1(T) v}_{\in \mathrm{Im}(m_1(T))} + \underbrace{m_2(T) q_2(T) v}_{\in \mathrm{Im}(m_2(T))}$$

2. Direkt: Sei $v \in V_1 \cap V_2$, mit $(\star)$ gilt:

$$v = \underbrace{q_1(T) m_1(T)(v)}_{=0,\text{ weil } v \in V_1} + \underbrace{q_2(T) m_2(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_2}$$

Sei nun $\tilde{m_i} = \text{MinPol}(T|_{V_i}),\ i = 1, 2.$
Da $v_i = \ker m_i(T)$ ist es klar, dass $m_i(T|_{v_i}) = 0,\ i = 1, 2,$
also $\tilde{m_1}|m_2,\ \tilde{m_2}|m_2$ und $(\star\star)$.

Behauptung: $\tilde{m_1},\ \tilde{m_2}$ annihiliert T.

Beweis: Berechne

$$\begin{aligned}\tilde{m_1}(T)\tilde{m_2}(T)(v_2 + v_1) =& \tilde{m_1}(T)\left[\tilde{m_2}(T)(v_2) + \tilde{m_2}(T)(v_1)\right],\ v_1 \in V_2,\ v_1 \in V_2 \\ =& \tilde{m_1}(T)(0 + \underbrace{\tilde{m_2}(T)(v_1)}_{\substack{\in V_1 \text{ weil} \\ \tilde{m_2}(T)\text{-invariant ist}}}) \\ =& 0\end{aligned}$$

□

Da $\tilde{m_1}\tilde{m_2}$ T annihiliert, folgt:

$$(\star\star\star) \qquad m_1 m_2 = m | \tilde{m_1}\tilde{m_2}.$$

Da m_1, m_2 relativprim folgt nun aus $(\star\star)$ und $(\star\star\star)$, dass $\tilde{m_i} = m_i,\ i = 1, 2.$

□

Sonderfall: p_i ist linear und $p = (x - c_1)\dots(x - c_k)$ mit $c_i \neq c_j$ für $1 \leq i \neq j \leq k$
Hier ist $W_i = \ker(T - c_i I)$ =Eigenraum zum Eigenwert c_i.
So besagt der Primzerlegungssatz: $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, also hat V eine Basis aus Eigenvektoren, und damit ist T diagonalisierbar.
Wir haben damit die Umkehrung (von Proposition 2 (§11)) gezeigt.
Wir haben nun also bewiesen:

Satz 2: (Diagonalisierbarkeitskriterium für MinPol)

T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ MinPol(T) zerfällt in verschiedene Linearfaktoren über $K[x]$

§14. Jordanketten

Definition 1: Sei $T : V \longrightarrow V$ linear, c Eigenwert, $v_1 \neq 0,\ v_2, \dots, v_\ell \in V$
$(v_1, \dots, v_\ell)$ heißt Jordankette der Länge ℓ zum Eigenwert c, wenn

$$\begin{aligned} (T - cI)(v_1) &= 0, \qquad (v_1 \text{ Eigenvektor zu } c) \\ &\text{und} \\ (T - cI)(v_i) &= v_{i-1}, \qquad i = 2, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Lemma 1: Sei $(v_1, \dots, v_\ell)$ Jordankette. Es gilt für $W = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_\ell\}$:

(i) $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ ist eine Basis für W

(ii) W ist T-invariant

(iii) $[T|_W]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} c & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & c \end{pmatrix}}_{\ell \times \ell} =: J_\ell(c) =$ Jordanzelle der Dimension ℓ zum Eigenwert c

(iv) $W \subseteq V$, Unterraum $W' \subseteq V,\ W'$ ist Komplement von W in V, falls

$$V = W \oplus W'$$

Bemerkung: (i) Komplemente existieren, sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

(ii) Sei $W \subseteq V$ Unterraum, $v_1^1, \dots, v_s^1 \in V$ linear unabhängig, sodass $\operatorname{span}\{v_1^1, \dots, v_s^1\} \cap W = \{0\}$
Dann kann man $\{v_1^1, \dots, v_s^1\}$ zu einer Basis von Komplementen von W in V ergänzen.

Satz 1: (Jordan-Normalform)
Sei V K-Vektorraum, $\dim V < \infty, T \in \mathscr{L}(V, V)$, sei $\operatorname{MinPol}(T) = (x - c)^r,\ c \in K$. Dann hat V eine Basis aus Jordankästchen zum Eigenwert c. Die längsten Ketten haben Länge r, die Anzahl der Ketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

Behauptung: Seien $v^1, \ldots, v^s \in \ker(T-cI)^j$ linear unabhängig und $\operatorname{span}\{v^1, \ldots, v^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-1} = \{0\}$

dann gilt: $W^1 := (T-cI)v^1, \ldots, W^s := (T-cI)v^s \in \ker(T-cI)^{j-1}$ sind linear unabhängig und $\operatorname{span}\{w^1, \ldots, w^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-2} = \{0\}$.

Beweis:

$$0 = (Z-cI)^j v^i = (T-cI)^{j-1} \underbrace{(T-cI)v^i}_{w^i}$$

also $W^i \in \ker(T-cI)^{j-1}$.

Sei nun $\sum_{i=1}^{s} c_i w^i = 0$ (mit $c_i \neq 0$ für ein i), so $\sum_{i=1}^{s} c_i (T-cI)v^i = 0$,

so $(T-cI) \sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$.

Also:

$$\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \ker(T-cI)^{j-1}, \text{ weil } (T-cI)^{j-1}(\sum_{i=1}^{s} c_i v^i) = (T-cI)^{j-2} \underbrace{(T-cI)(\sum_{i=1}^{s} c_i v^i)}_{=0} = 0.$$

Also ist:

$$\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \operatorname{span}\{v, \ldots, v^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-1}$$

Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v_i = 0$ mit $c_i \neq 0$ für ein i $\lightning$ da $\{v_1, \ldots, v_s\}$ linear unabhängig.

Betrachte nun $\sum_{i=1}^{s} c_i w^i$, sodass

$$(T-cI)^{j-1}(\sum_{i=1}^{s} c_i w^i) = 0,$$

dann ist

$$(T-cI)^{j-1}(\sum_{i=1}^{s} c_i v^i) = 0,$$

so $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$ und damit $(T-cI)(\sum_{i=1}^{s} c_i v^i) = 0$, also

$$\sum_{i=1}^{s} c_i (T-cI) v^i 00 = \sum_{i=1}^{s} c_i w^i$$

$\square$

Wir bauen nun Jordanketten folgendermaßen:
(Betrachte, dass $\ker(T-cI) \subseteq \ldots \subseteq \ker(T-cI)^r = V$)

Betrachte:

$n_r =$	$V = V_r$	$\oplus \ker(T-cI)^{r-1}$
$\dim\ker(T-cI)^r$	sei	
$-\dim\ker(T-cI)^{r-1}$	$\{v_1^1,\dots,v_r^{n_r}\}$	Basis für V_r.

setze $v_{r-1}^1 := (T-cI)v_r^1,\dots,v_{r-1}^{n_r} := (T-cI)v_r^{n_r} \in \ker(T-cI)^{r-1}$.
Betrachte nun $\ker(T-cI)^{r-1} = V_{r-1} \oplus \ker(T-cI)^{r-2}$
ergänze zu einer Basis vom Komplement von $\ker(T-cI)^{r-2}$ in $\ker(T_cI)^{r-1}$:

$$\{v_{r-1}^1,\dots,v_{r-1}^{n_r},v_{r-1}^{n_r+1},\dots,v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}\}$$

Also $n_{r-1} = \dim\ker(T-cI)^{r-1} - \dim\ker(T-cI)^{r-2} - n_r$.
Wir verfahren so weiter. Im letzten Schritt bekommen wir:

$$v_1^1 = (T-cI)v_2^1,\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2} = (T-cI)v_2^{n_r+\dots+n_2}$$

welches wir zu einer Basis von $\ker(T-cI)$ ergänzen:

$$v_1^1,\dots,v_1^{n_r+\dots,n_2},v_1^{n_r+\dots+n_2+1},\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}$$

Hierbei ist die Gestalt der Gesamtbasis für V die wie erhalten:

$$\begin{array}{cccc}
v_r^1,\dots,v_r^{n_r} & & & \\
v_{r-1}^1,\dots,v_{r-1}^{n_r}, & v_1^{n_r+1},\dots,v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\underbrace{v_1^1,\dots,v_1^{n_r},}_{\substack{n_r:\ \text{Jordankette}\\ \text{der Länge } r}} & \underbrace{v_1^{n_r+1},\dots,v_1^{n_r+n_{r-1}},}_{\substack{n_{r-1}:\ \text{Jordankette}\\ \text{der Länge } r-1}} & \dots,\ \ \ \ \dots, & \underbrace{v_1^{n_r+\dots+n_2+1},\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}}_{\substack{n_1:\ \text{Jordankette}\\ \text{der Länge } 1}}
\end{array}$$

□

<u>Bemerkung:</u> Die Matrixdarstellung in der Basis der Jordanketten ist:

$$A_c := \begin{pmatrix}
\underbrace{\begin{matrix} J_r(c) & & \\ & \ddots & \\ & & J_r(c)\end{matrix}}_{n_r\text{-mal}} & & 0 \\
& \ddots & \\
0 & & \underbrace{\begin{matrix} J_1(c) & & \\ & \ddots & \\ & & J_1(c)\end{matrix}}_{n_1\text{-mal}}
\end{pmatrix}$$

Korollar 1: Sei V K-Vektorraum, $\dim V < \infty$, $T \in \mathscr{L}(V, V)$.
Falls MinPol(T) (oder CharPol(T)) über K in Linearfaktoren zerfällt, dann hat V eine Basis von Jordanketten zu den verschiedenen Eigenwerten.
Die Anzahl der Jordanketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis: $\text{MinPol}(T) = (x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k}$.
Mit dem Primzerlegungssatz folgt:
$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ mit W_i invariant und $\text{MinPol}(T|_{W_i}) = (x - c_i)^{r_i}$.
Die Jordan-Normalform liefert Basen $\mathcal{B}_{c_i}$ von Jordanketten für $T|_{W_i}$ und jedem c_i.
Setze $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geordnete Basis). $\square$

Bemerkung: Sei $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, W_i T-invariant, $\mathcal{B}_i$=Basis für W_i, $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geordnete Basis).
Es gilt:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_i = [T|_{W_i}]_{\mathcal{B}_i}$.

Korollar 2: Sei K algebraisch abgeschlossen, V K-Vektorraum, $T \in \mathscr{L}(V, V)$.
Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{c_k} \end{pmatrix}$$

wobei $c_1, \dots, c_k$ die Eigenwerte von T sind und $A_{c_i u}$ wie in der Bemerkung (§14) auf Seite 62 beschrieben.

Sei $K = \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$ und V ein K-Vektorraum mit $(x \,|\, y) \in K$.

Bemerkung: $(x \,|\, x) = \overline{(x \,|\, x)}$, also ist $(x \,|\, x) \in \mathbb{R}$.

Erinnerung:

<u>Definition 2:</u> Ein inneres Produkt auf V ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto (x \,|\, y), \end{aligned}$$

sodass
(1) $(x \,|\, y) = \overline{(y \,|\, x)}$
(2) $(c_1 x_1 + c_2 x_2 \,|\, y) = c_1(x_1 \,|\, y) + c_2(x_2 \,|\, y)$
(3) $(x \,|\, x) \geq 0$ und $(x \,|\, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

<u>Notation:</u> $(x \,|\, x) := \|x\|^2$ und $\|x\| := \sqrt{(x \,|\, x)}$ (Norm von x)

<u>Bemerkung:</u>

(i) Es gilt:

$$\|cx\| = |c|\|x\| \text{ für } c \in K, x \in V.$$

(ii) (2')

$$\begin{aligned} (x \,|\, c_1 y_1 + c_2 y_2) &= \overline{(x_1 y_1 + c_2 y_2 \,|\, x)} \\ &= \overline{c_1(y_1 \,|\, x) + c_2(y_2 \,|\, x)} = \overline{c_1}\,\overline{(y_1 \,|\, x)} + \overline{c_2}\,\overline{(y_2 \,|\, x)} \\ &= \overline{c_1}(x \,|\, y_1) + \overline{c_2}(x \,|\, y_2) \end{aligned}$$

<u>Terminologie:</u>

$K = \mathbb{R}$: V heißt <u>Euklidischer Raum</u> und das innere Produkt $(\;|\;)$ heißt <u>symmetrisch bilineare, positiv definite Form</u>.

$K = \mathbb{C}$: V heißt <u>Hermitescher Raum/Unitärraum</u> und das innere Produkt $(\;|\;)$ heißt <u>Hermitesch symmetrische</u> (1), <u>konjugiert bilineare</u> (2) und (2') <u>positiv definite Form</u> (3).

<u>Beispiel:</u> Auf $V = K^n$ das Standard Innere Produkt:
$x = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),\ y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$

$$(x \,|\, y) := \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \overline{\eta_i}$$

Definition 3:

(i) x, y sind orthogonal, falls $(x \mid y) = 0$ (äquivalent: $(y \mid x) = 0$).

(ii) $W_1, W_2 \subseteq V$ sind orthogonal, falls $(x \mid y) = 0, \ \forall x \in W_1, \ \forall y \in W_2$.

(iii) $S \subseteq V$ ist orthonormal, falls

$$(x \mid y) = 0 \text{ wenn } x \neq y$$
$$(x \mid y) = 1 \text{ wenn } x = y$$

Also $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist orthonormal, falls

$$(x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$$

(iv) S orthonormal ist vollständig, falls S maximal (bzgl. Inklusion) mit der Eigenschaft „orthonormal“ ist.

Bemerkung:

(i) S orthonormal $\Rightarrow$ S linear unabhängig.
Beweis: $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0 \ \Rightarrow \ 0 = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, (x_i \mid x_j) = c_j$

□

(ii) $\dim V = n \ \Rightarrow \ |S| \leq n$ für S orthonormal.
In diesem Fall:

Definition 4: orthog. $\dim(V) := \max\{|S| \mid S \text{ orthonormal}\}$

Bemerkung: orthog. $\dim(V) \leq \dim(V)$

Notation: $S^{\perp} := \{x \in V \mid \ (x \mid s) = 0, \ \forall s \in S\}$

Bemerkung:

(i) $S^{\perp}$ ist Unterraum.
Beweis: Seien $x_1, x_2 \in S^{\perp}, \ c \in K$

$$0 = (0 \mid y) \Rightarrow \{0\} \subseteq S^{\perp}, \ (x_1 + c x_2 \mid s) = (x_1 \mid s) + c \, (x_2 \mid s) = 0 + 0 = 0$$

□

(ii) $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp} := S^{\perp\perp}$

(iii) $\operatorname{span}(S) \subseteq S^{\perp\perp}$

Definition 5: Für $W \subseteq V$ Unterraum, ist $W^{\perp} :=$ orthogonales Komplement

Satz 2: (Bessel's Ungleichung)
Sei $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ orthonormal, $x \in V$. Setze $c_i := (x \,|\, x_i)$.
Es gilt:

(i) $\sum\limits_i |c_i|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) $x' := x - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ ist orthogonal zu x_j $(j = 1, \ldots, n)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
0 \leq (x' \,|\, x') &= \left(x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \,\middle|\, x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right) \\
&= (x \,|\, x) - \sum_{i=1}^{n} c_i \,(x_i \,|\, x) - \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i} \,(x \,|\, x_i) + \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \,(x_i \,|\, x_j) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{c_i} - \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i} c_i + \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{c_i} \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2
\end{aligned}$$

Damit ist (i) bewiesen.

$$(x' \,|\, x_j) = (x \,|\, x_j) - \sum_i c_i \,(x_i \,|\, x_j) = c_j - c_j = 0.$$

Damit ist (ii) bewiesen.

□

Satz 3: (Char. von Vollständigkeit)
Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ orthonormal.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) S ist vollständig.

(ii) Aus $(x \mid x_i) = 0,\ \forall i = 1, \dots, n$ folgt: $x = 0$.

(iii) $\mathrm{span}(S) = V$.

(iv) $\forall x \in V \ : \ x = \sum_i (x \mid x_i)\, x_i$.

(v) $\forall x, y \in V \ : \ (x \mid y) = \sum_i (x \mid x_i)\,(x_i \mid y)$.

(vi) $\forall x \in V \ : \ \|x\|^2 = \sum_i |\,(x \mid x_i)\,|^2$.

Beweis:

(i)⇒(ii) $x \neq 0$ setze $x_{n+1} = \frac{x}{\|x\|}$, dann ist $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ orthonormal.
$[(x_{n+1} \mid x_i) = 0$ und $(x_{n+1} \mid x_{n+1}) = \frac{1}{\|x\|^2}\,(x \mid x) = 1]$

(ii)⇒(iii) Sei $x \in V,\ x \notin \mathrm{span}(S)$, dann ist $x' = x - \sum_{i=1}^{n} (x \mid x_i)\, x_i \neq 0$ und (Satz 1 (§14)) ist zu jedem x_i orthogonal. ↯

(iii)⇒(iv) Sei $x \in V,\ x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, also

$$(x \mid x_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i \mid x_j) = c_j$$

(iv)⇒(v)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x \mid x_i)\, x_i \mid \sum_{j=1}^{n} (y \mid x_j)\, x_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} (x \mid x_i)\,\overline{(y \mid x_j)}\,(x_i \mid x_j) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid x_i)\,(x_i \mid y)$$

(v)⇒(vi)

$$(x \mid x) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid x_i)\,(x_i \mid x) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid x_i)\,\overline{(x \mid x_i)} = \sum_{i=1}^{n} |\,(x \mid x_i)\,|^2$$

(vi)⇒(i) Sei $x \notin S$. Wenn $S \cup \{x\}$ orthonormal, dann gilt:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\,(x \mid x_i)\,|^2 = 0 = (x \mid x) \neq 1$$

Widerspruch!

□

Satz 4: (Schwarz)

$$|\,(x\,|\,y)\,| \leq \|x\|\|y\|$$

Beweis: $y = 0$ klar. Also sei nun $y \neq 0$, $y_1 := \frac{y}{\|y\|}$ ist orthonormal und Bessel impliziert:

$$|\,(x\,|\,y_1)\,|^2 \leq \|x\|^2$$

also $\frac{1}{\|y\|^2}|\,(x\,|\,y)\,|^2 \leq \|x\|^2$

$$\Rightarrow |\,(x\,|\,y)\,|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

□

Definition 6:

$$\delta(x,y) := \|x-y\|$$

Proposition 1:

(i) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

(ii) $\delta(x,y) \geq 0,\ \delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$ (Δ-Ungleichung)

(iv) $\delta(x,y) = \delta(x+z, y+z)$

Beweis:

(iii) (Dreiecksungleichung für Normen und Distanz)

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y\,|\,x+y) = \|x\|^2 + (x\,|\,y) + (y\,|\,x) + \|y\|^2\\
&= \|x\|^2 + (x\,|\,y) + \overline{(x\,|\,y)} + \|y\|^2 = \|x\| + 2\mathrm{Re}\,(x\,|\,y) + \|y\|^2\\
&\leq \|y\|^2 + 2|\,(x\,|\,y)\,| + \|y\|^2 \underset{\text{Schwarz}}{\leq} \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

□

Ein inneres Produkt definiert also auch eine Norm:

Definition 7: Sei K=$\mathbb{R},\mathbb{C}$ und V ein K-Vektorraum

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

ist eine Norm, falls:

(i) $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

(ii) $\|cx\| = |c|\|x\|$

(iii) $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Satz 5: (Gram-Schmidt)
Sei V ein n-dimensionaler innerer Produkt K-Vektorraum.
Dann hat V eine Basis, besehend aus einer orthonormalen (vollständigen) Menge.

Definition 8: Sei S eine Basis, S orthonormal, S heißt orthonormale Basis.

Beweis: Sei $\chi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis. Wir werden eine orthonormale Basis $J = \{y_1, \ldots, y_n\}$ per Induktion finden:
I.Anf.: $n = 1,\ x_1 \neq 0$. Setze $y_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$
I.A.: Seien $y_1, \ldots, y_r$ schon definiert, sodass $\{y_1, \ldots, y_r\}$ orthonormal und $y_j \in \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_j\}$ für $j = 1, \ldots, r$.
I.S.: Betrachte:

$$(\star) \qquad z := x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} c_i y_i,\ c_i \in K$$

Berechne:

$$(z \,|\, y_j) = (x_{r+1} \,|\, y_j) - c_j \text{ für } j = 1, \ldots, r$$

Nun setze $c_j := (x_{r+1} \,|\, y_j)$. Mit dieser Wahl in $(\star)$: $(z \,|\, y_j) = 0,\ \forall j = 1, \ldots, r$ und $Z \in \operatorname{span}\{x_{r+1}, y_1, \ldots, y_r\} \subseteq \operatorname{span}\{x_{r+1}, x_1, \ldots, x_r\},\ z \neq 0$, da $x_1, \ldots, x_{r+1}$ linear unabhängig und der Koeffizient in $(\star)$ von x_{r+1} ist nicht Null.
Setze nun $y_{r+1} := \frac{z}{\|z\|}$ □

Satz 6: Sei W Unterraum. Es gilt:

(1) $V = W \oplus W^\perp$

(2) $W^{\perp\perp} = W$

Beweis:

(1) Sei $\chi = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine orthonormale Basis für W und $z \in V$.
Schreibe
$$W \ni x := \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \text{ wobei } c_i = (z \mid x_i)$$
Bessel liefert nun: $y := z - x$ ist orthogonal zu x_i und damit zu W, d.h. $y \in W^\perp$, also $z = x + y,\ x \in W,\ y \in W^\perp$.
Es gilt ferner, dass $W \cap W^\perp = \{0\}$ (weil $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

(2) $z = x + y$, also $(z \mid x) = \|x\|^2 + (y \mid x) = \|x\|^2$. Analog: $(z \mid y) = \|y\|^2$.
Wenn $z \in W^{\perp\perp}$, dann $(z \mid y) = 0 = \|y\|^2$ und somit $z = x \in W$

□

§15. Lineare Funktionale

Satz 1: (Riesz-Darstellung)
Sei V endlich-dimensionaler innerer Produkt-K-Vektorraum. Sei $f \in V^\star$, $\exists!\ x \in V$ mit:
$$(\dagger) \qquad f(x) = (x \mid y)\,,\ \forall x \in V$$

Beweis:

Existenz: $f = 0 \Rightarrow y = 0$ ✓
Sei $f \neq 0$, $W := \ker(f) \subsetneq V$, $W^\perp \neq \{0\}$.
Sei $y_0 \neq 0$, $y_0 \in W^\perp$, Œ $\|y_0\| = 1$. Setze $y := \overline{f(y_0)} y_0$.
Beobachte:
$$(y_0 \mid y) = \left(y_0 \mid \overline{f(y_0)} y_0\right) = f(y_0)\,(y_0 \mid y_0) = f(y_0)$$
so ist (†) ist erfüllt.

$$x = \lambda y_0 \Rightarrow f(\lambda y_0) = \lambda f(y_0) = \lambda\,(y_0 \mid y) = (\lambda y_0 \mid y) \ ✓$$
$$x \in W \Rightarrow (x \mid y) = \left(x \mid \overline{f(y_0)} y_0\right) = f(y_0)\,(x \mid y_0) = 0 = f(x) \ ✓$$

Sei nun $x \in V$. Schreibe:

$$x = x_0 + \lambda y_0 \text{ mit } \lambda := \frac{f(x)}{f(y_0)} \text{ und } x_0 := x - \lambda y_0$$

Berechne $f(x_0) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_0)} f(y_0) = 0$, so $x_0 \in W$ und

$$f(x) = f(x_0) + f(\lambda y_0) = ipx_0y + (\lambda y_0 \,|\, y) = (x_0 + \lambda y_0 \,|\, y) = (x \,|\, y)\,. \checkmark$$

Eindeutigkeit: Seien $y_1, y_2 \in V$ mit $(x \,|\, y_1) = (x \,|\, y_2)\,,\ \forall x \in V$.
Dann ist $(x \,|\, y_1 - y_2) = 0,\ \forall x \in V$, insbesondere für $x := (y_1 - y_2)$ bekommen wir: $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, so $y_1 - y_2 = 0$.

□

Satz 2: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho \,:\, V^\star &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto y \end{aligned}$$

erfüllt

(i) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$

(ii) ρ ist surjektiv

(iii) ρ ist injektiv
aber

(iv) $\rho(cf) = \bar{c}\rho(f)\ \forall c \in K$
d.h. ρ ist konjugierter Isomorphismus.

Beweis:

(ii) $y \in V$, betrachte $f(x =: (x \,|\, y)\,,\ f \in V^\star$ und $\rho(f) = y$.

(iii) $f(x) = (x \,|\, 0) = 0,\ \forall x \in V \Rightarrow f = 0$

(iv) $z := \rho(cf),\ y := \rho(f)$. Zeige: $z := \bar{c}y$, d.h. $\forall x \in V :\ (cf)(x) = (x \,|\, z)$
Berechne:

$$(cf)(x) = cf(x) = x\,(x \,|\, y) = (x \,|\, \bar{c}y)\,.$$

□

Folgerungen:

I. $(f_1 \,|\, f_2) := (\rho(f_2) \,|\, \rho(f_1))$ definiert ein Inneres Produkt auf $V^\star$.

II. Sei $\chi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ Basis für V, dann existiert $J = \{y_1, \ldots, y_n\}$ Basis für V mit $(x_i \,|\, y_j) = \delta_{ij}$.

III. $W \subseteq V^\star$ wird ersetzt durch $W^\perp \subseteq V$

IV. Sei $T \in \mathscr{L}(V, V)$. Definiere $T^\star$ durch $(Tx \,|\, y) := (x \,|\, T^\star y)\,,\ \forall x \in V$.
[d.h. $T^\star(y) = z$ gdw. $\forall x \in V\ :\ (x \,|\, z) = (Tx \,|\, y)$]
Es gilt: $T^\star \in \mathscr{L}(V, V)$. $T^\star$ ist die transponiert, Konjugierte (adjungierte).
Eigenschaften der transponiert Konjugierten:

(i) $(cT)^\star = \overline{c}T^\star$

(ii) Sei $[T]_\chi := A$ und J die Basis wie in II.
Es gilt:

$$[T^\star]_J = \overline{A^\top} =: A^\star$$

[d.h. der ij^{te} Koeffizient von $A^\star$ ist $\overline{a_{ji}}$, wobei a_{ij} der ij^{te} Koeffizient von A ist.]

(iii) $\det(A^\star) = \overline{\det(A)}$

(iv) Die Eigenwerte von $A^\star$ sind die konjugierte der Eigenwerte von A.

Die Folgerungen I.,II.,III.,IV. werden im Ü.B. 11 ausgearbeitet.

§16. Beziehung zum Bidual

<u>Erinnerung:</u>

$$\begin{aligned} y_0 \in V \longmapsto & L_{y_0} \in V^{\star\star} \\ L_{y_0}(f) := & f(y_0) \qquad \forall f \in V^{\star\star} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lambda\ :\ V &\longrightarrow V^{\star\star} \\ y_0 &\longmapsto L_{y_0} \end{aligned}$$

ist ein (kanonischer) Isomorphismus.
Vergleiche mit:

$$\begin{aligned} \delta\ :\ V \longrightarrow & V^\star \\ y_0 \longmapsto & y_0^\star \\ y_0^\star(x) := & (x \,|\, y_0)\,, \\ \forall x \in & V \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \gamma\ :\ V^\star \longrightarrow & V^{\star\star} \\ y_0^\star \longmapsto & y_0^{\star\star} \\ y_0^{\star\star}(y^\star) = & (y^\star \,|\, y_0^\star)\,, \\ \forall y^\star \in & V^\star \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \lambda\ :\ V \longrightarrow & V^{\star\star} \\ y_0 \longmapsto & L_{y_0} \end{aligned}$$

mit

$$L_{y_0}(y^\star) := y^\star(y_0) \text{ für } y^\star \in V^\star \qquad (\star)$$

einerseits und andererseits:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] \arrow[rr, bend right, "\gamma\circ\delta"'] & V^\star \arrow[r, "\gamma"] & V^{\star\star} \end{tikzcd}$$

$$y_0 \longmapsto y_0^{\star\star}$$

Behauptung: $L_{y_0} = y_0^{\star\star}$.
Es genügt zu zeigen, dass $y_0^{\star\star}$ $(\star)$ erfüllt.
Wir berechnen:

$$y_0^{\star\star} = (y^\star \,|\, y_0^\star) = (y_0 \,|\, y) = y^\star(y_0).$$

$\square$

§17. Hermitesche Operatoren

Definition 1:

(i) $T \in \mathscr{L}(V,V)$ ist hermitesch (oder selbstadjungiert), falls

$$T = T^\star \text{ d.h. } (Tx \,|\, y) = (x \,|\, Ty)\,,\ \forall x, y \in V$$

(ii) $K = \mathbb{R}$, $T = T^\star$, T heißt auch reell symmetrisch.

(iii) $K = \mathbb{C}$, $T = T^\star$ heißt auch komplex hermitesch.

Matrixdarstellungen von hermiteschen Operatoren

Sei χ orthonormale Basis, $J = \chi$ (χ ist selbst dual, siehe Ü.B. 11).
Also $T = T^\star$ impliziert: A ist hermitesch, wobei

$$A := [T]_\chi = [T^\star]_J = [T^\star]_\chi = \overline{A^\top} =: A^\star$$

Das heißt: $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (A ist komplex hermitesch), und im reellen Fall $a_{ij} = a_{ji}$, d.h. $A = A^\top$ (A ist symmetrisch).

Bemerkungen:

(i) Umgekehrt sei A hermitesch und $chi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ orthogonale Basis für V. Definiere:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right) := A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Dann ist T hermitesch.

(ii) T_1, T_2 hermitesch $\Rightarrow T_1 + T_2$ hermitesch.

(iii) $T \neq 0$ hermitesch, $d \notin k,\ d \neq 0$, dann ist dT hermitesch gdw. $d \in \mathbb{R}$.

(iv) T invertierbar und hermitesch gdw. T^{-1} hermitesch.

Satz 1: Seien T_1, T_2 hermitesch. Es gilt:

$$T_2, T_2 \text{ ist hermitesch, gdw. } T_1T_2 = T_2T_1.$$

Beweis:

$$T_1T_2 = T_2T_1 \Leftrightarrow (T_1T_2)^\star = (T_2T_1)^\star \Leftrightarrow T_2^\star T_1^\star = T_1^\star T_2^\star \Leftrightarrow T_2T_1 = T_1T_2.$$

□

Satz 2:

(i) Sei T_1 hermitesch, dann ist $T_2^\star T_1 T_2$ hermitesch.

(ii) Umgekehrt ist $T_2^\star$ hermitesch und T_2 invertierbar, dann ist T_1 hermitesch.

Beweis:

(i)

$$(T_2^\star T_1 T_2)^\star = T_2^\star T_1^\star T_2^{\star\star} = T_2^\star T_1 T_2.$$

(ii)

$$T_2^\star T_1 T_2 = (T_2^\star T_1 T_2)^\star = T_2^\star T_1 \star T_2$$

Multiplizieren links mit $(T_2^\star)^{-1}$ und rechts mit T_2^{-1} ergibt $T_1 = T_1^\star$.

□

Definition 2: $T \in \mathscr{L}(V,V)$ ist schiefsymmetrisch, falls $T^\star = -T$.
[für $K = \mathbb{C}$ heißt es „komplex schief-hermitesch“,
für $K = \mathbb{R}$ heißt es „schief-symmetrisch“]

§18. Kartesische Zerlegung eines Operators

Sei $T \in \mathscr{L}(V,V)$, schreibe $T = T_1 + T_2$, wobei

$$T_1 := \frac{T + T^\star}{2} \text{ und } T_2 := \frac{T - T^\star}{2}$$

Berechne $T_1^\star = T_1$ und $T_2^\star = -T_2$, also ist T_1 hermitesch und T_2 schief-hermitesch.

Ferner: T_2 schief-hermitesch und $K = \mathbb{C} \Leftrightarrow T_2 = \mathrm{i}T_3$ mit T_3 komplex hermitesch.
Also $T = T_1 + \mathrm{i}T_3$.

Satz 1: Sei $T \in \mathscr{L}$ hermitesch. Es gilt:

$$(Tx \,|\, x) \in \mathbb{R},\ \forall x \in V$$

und alle Eigenwerte von T sind reell.

Beweis:

$$(Tx \,|\, x) = (x \,|\, T(x)) = \overline{(Tx \,|\, x)}$$

Sei nun $Tx = cx$ mit $x \neq 0$, dann ist

$$\underbrace{(Tx \,|\, x)}_{\in\mathbb{R}} = (cx \,|\, x) = c\underbrace{\|x\|}_{\in\mathbb{R}}^2, \text{ also } c \in \mathbb{R}$$

□

Erinnerung: $T^\star$ ist definiert durch $(Tx \,|\, y) = (x \,|\, T^\star y)$ oder $(x \,|\, Ty) = (T^\star x \,|\, y)$.

§19. Isometrie

Definition 1: Sei $U \in \mathscr{L}(V,V)$, sodass $U^\star = U^{-1}$, dann heißt U Isometrie.
Wenn $K = \mathbb{R}$ und $U^\top = U^{-1}$, heißt U orthogonal.
Wenn $K = \mathbb{C}$ und $U^\star = U^{-1}$, heißt U unitär.

Satz 1: Für $U \in \mathscr{L}(V,V)$ sind äquivalent:

(i) $U^\star U = UU^\star = \mathrm{Id}$

(ii) $(Ux \,|\, Uy) = (x \,|\, y)\,,\ \forall x, y \in V$ (U erhält (|))

(iii) $\|Ux\| = \|x\|,\ \forall x \in V$ (U erhält die Norm).

Beweis:

(1)⇒(2): $(Ux \,|\, Uy) = (x \,|\, U^\star Uy) = (x \,|\, y)\,,\ \forall x, y \in V$

(2)⇒(3): (2) anwenden mit $x = y$.

(3)⇒(1): $(Ux \,|\, Ux) = (U^\star Ux \,|\, x) = (x \,|\, x)$, also $([U^\star U - \mathrm{Id}]x \,|\, x) = 0,\ \forall x \in V$.
Nun ist aber $T := U^\star U - \mathrm{Id}$ hermitesch und $(Tx \,|\, x) = 0,\ \forall x \in V$ impliziert $T = 0$.
↕
siehe Ü.B. 12

□

□

Bemerkungen:

(i) (3) impliziert: U erhält Distanz:

$$(4) \qquad \|Ux - Uy\| = \|x - y\|,\ \forall x, y \in V$$

(ii) Isometrien sind invertierbar und erhalten das innere Produkt. Also:

$$U \,:\, (V, (\ |\ )) \xrightarrow{\sim} (V, (\ |\ ))$$

ist ein Automorphismus des inneren Produkt-Vektorraums $(V, (\ |\ ))$.

Satz 2: Eigenwerte von Isometrien haben den Absolutbetrag gleich 1.

Beweis: Sei $Ux = cx,\ x \neq 0,\ c \in \mathbb{C}$.
Es ist:

$$\|Ux\| = \|x\| \text{ und } \|Ux\| = \|cx\| = |c|\|x\|, \text{ also } \|c\| = 1.$$

□

§20. Orthonormalbasiswechsel

Satz 1: $\chi = \{x_1, \ldots, x_n\}$ Orthonormalbasis und $U \in \mathscr{L}(V,V)$ eine Isometrie.
Dann ist $U\chi := \{Ux_1, \ldots, Ux_n\}$ eine orthonormale Basis.

Umgekehrt ist $U \in \mathscr{L}(V,V)$, χ orthonormale Basis, sodass $U\chi$ wieder orthonormale Basis ist, dann ist U eine Isometrie.

Beweis:

„$\Rightarrow$" $(Ux_i \,|\, Ux_j) = (x_i \,|\, x_j) = \delta_{ij}$, also $U\chi$ orthonormal und $U\chi$ ist eine Basis weil U invertierbar ist.

„$\Leftarrow$" Sei $U\chi$ orthonormal. Es gilt also: $(Ux_i \,|\, Ux_j) = \delta_{ij} = (x_i \,|\, x_j)\,,\ \forall\, 1 \leq i,j \leq n$ und damit gilt mit der Linearität: $(Ux \,|\, xy) = (x \,|\, y)\,,\ \forall x,y \in V$.

□

Matrix-Version

Definition 1: $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ist orthogonal $(K = \mathbb{C})$ oder unitär $(K = \mathbb{C})$, falls

$$AA^\star = A^\star A = \mathrm{I_n}.$$

Bemerkung:

(i) U Isometrie und χ Orthonormalbasis impliziert:

$$A := [U]_\chi \text{ ist unitär (bzw. orthogonal).}$$

(ii) Matrixversion von Satz 1 (§20):
Sei χ Orthonormalbasis und $\mathcal{B}'$ eine beliebige Basis, dann ist $\mathcal{B}'$ orthonormal gdw. die Basiswechselmatrix unitär ist.

§21. Spektraltheorie

Sei wie immer $\dim V < \infty$. Bisher haben wir 3 wichtige Klassen von Operatoren studiert:

(a) hermitesche	(b) schief-hermitesche	(c) unitäre
$T^\star = T$	$T^\star = -T$	$T^\star = T^{-1}$

Alle erfüllen die folgende Eigenschaft:

Definition 1: $T \in \mathscr{L}(V,V)$ ist normal, falls

$$T^\star T = TT^\star.$$

Wir werden die Struktur von normalen Operatoren genau untersuchen.
Wir brauchen:

Lemma 1: Sei $T \in \mathscr{L}(V,V)$, $W \subseteq V$ T-invariant, dann ist $W^\perp \subseteq V$ $T^\star$-invariant.

Beweis: Sei $u \in W^\perp$, $w \in W$ und berechne $(w \,|\, T^\star u) = \Big(\underset{W}{\underset{\Cap}{Tw}} \,\Big|\, \underset{W^\perp}{\underset{\Cap}{u}}\Big) = 0,\ \forall w \in W$
also ist $T^\star u \in W^\perp$

□

Wir wollen unseren Hauptsatz beweisen:

Satz 1: (Spektralsatz für normale Operatoren)
Sei $\dim V < \infty$, $T \in \mathscr{L}(V,V)$ normal, $p := \mathrm{MinPol}(T)$.
Es gilt:

$p = p_1 \dots p_k$, wobei $p_i \neq p_j$ und p_i normiert und irreduzibel für $i \neq j$ ist.
(d.h. $\deg p_i = 1$ oder $\deg p_i = 2$).

Setze $W_i := \ker p_i(T)$, $W_i \subseteq V$ ist T-invariant.
Dann gilt:

W_i ist orthogonal zu W_j für $i \neq j$ und $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_R$
(orthogonale direkte Summe).

<u>Satz 2:</u> (orthonormale Trigonalisierung)
Sei $K = \mathbb{C}$, V endlich-dimensionaler innerer Produkt-K-Vektorraum, $T \in \mathscr{L}(V, V)$.
Dann gibt es eine orthonormale Basis χ, sodass $[T]_\chi$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

<u>Beweis:</u> Induktion nach $n := \dim V$:
Sei $c \in \mathbb{C}$ und $x \neq 0$ mit $T^\star x = cx$, $W := (\operatorname{span}\{x\})^\perp$, $\dim W = \dim V - 1 = n-1$.
Lemma 1 (§21) impliziert: W ist T-invariant, also ist $T|_W$ wohldefiniert.
Per Induktionsannahme: Setze: $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ Orthonormalbasis für W, wofür die Matrixdarstellung von $T|_W$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
Setzte $x_n := \frac{x}{\|x\|}$. Dann ist $\chi := \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ die gesuchte Basis.

□

<u>Korollar 1:</u> Für jede $n \times n$-Matrix A über $\mathbb{C}$ gibt eine unitäre Matrix U,
sodass $U^{-1}AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

<u>Beweis:</u> Wähle χ eine Orthonormalbasis und definiere

$$T(x) = A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{wobei } x = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i$$

für $\chi = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Finde J wie in Satz 2 (§21) und setze U :=Basiswechselmatrix.
Dann ist $U = U^\star$ und $U^{-1}AU = B$ ist obere Dreieckmatrix.

□

§22. Orthonormale Diagonalisierung

<u>Lemma 1:</u> Sei T normal, $g(x) \in K[x]$, $W := \ker g(T)$. Dann ist $W^\perp$ T-invariant.

<u>Beweis:</u>
<u>Behauptung:</u> W ist $T^\star$-invariant
<u>Beweis:</u> Sei $u \in W$. Berechne:

$$g(T)(T^\star(u)) = T^\star(g(T)(u)) = T^\star(0) = 0$$

(weil $T^\star$ kommutiert mit T, also auch mir $g(T)$).

□

Lemma 1 (§21) impliziert nun: $W^\perp$ ist T-invariant.

□

<u>Satz 1:</u> (Spektralsatz)
Sei T normal, $T \in \mathscr{L}(V,V)$, $p := \text{MinPol}(T)$.
Es gilt:

(i) $p = p_1 \dots p_k$ wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, p_i irreduzibel und normiert.

(ii) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ für $W_i = \ker p_i(T)$ und W_i ist orthogonal zu W_j für $i \neq j$

<u>Hilfsbemerkung:</u> Ist g ein Faktor von MinPol, dann ist $g(T)$ <u>nicht</u> invertierbar.

<u>Beweis:</u> $p = gh$ mit $\deg h < \deg p$.
Wäre $g(T)$ invertierbar, dann hätten wir:

$$0 = g(T)^{-1}p(T) = g(T)^{-1}g(T)h(T)$$

und damit $h(T) = 0$ $\lightning$ da $\deg p$ minimal!

□

<u>Beweis:</u> (Spektralsatz)
Per Induktion:
Lemma 1 (§22) impliziert: $W_1^\perp$ ist T-invariant. Betrachte $T|_{W_1^\perp}$ und bemerke, dass $p_1\left(T|_{W_1^\perp}\right) = \{0\}$ $(x \in W_1^\perp$ und $x \in \ker p_1(T) = W_1 \Rightarrow x = 0)$.
Also ist $p_1(T|_{W_1^\perp})$ invertierbar und damit ist p_1 <u>kein</u> Faktor vom $MinPol(T|_{W_1^\perp}) = p_2 \dots p_k$.
Aber $p_1 = \text{MinPol}(T|_{W_1})$ und p_1 teilt nicht $p_2, \dots, p_k$.
Also ist $p_1 \neq p_j$, $j = 2, \dots, k$.
Fortsetzung per Induktion. □

<u>Korollar 1:</u> $K = \mathbb{C}$.
T normal $\Rightarrow$ es existiert eine orthonormale Basis, bestehend aus Eigenvektoren von T.

<u>Beweis:</u> $p_i = (x - c_i)$ linear über $\mathbb{C}$, also W_i =Eigenraum zum Eigenwert c_i.
Gram-Schmidt: Wähle orthonormale Basis χ_i für W_i, $i = 1, \dots, k$).
χ_i besteht aus Eigenvektoren zum Eigenwert c_i.
Also ist $\chi = (\chi_1 \cup \dots \cup \chi_k)$ die gewünschte Basis.

□

Definition 1: $B, A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

(i) A ist normal, falls $AA^\star = A^\star A$

(ii) A ist unitär äquivalent zu B, falls es eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ gibt mit $B = U^{-1}AU$.

Korollar 2: (Matrixversion von Korollar 1 (§22))
Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

A normal $\Rightarrow$ A ist unitär äquivalent zu einer Diagonalmatrix $D \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$

§23. Anwendung vom Spektralsatz

V endlich-dimensional.

Korollar 3: $K = \mathbb{C}$, T normal.
Es gilt:

T ist hermitesch $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind reell.

Beweis: „$\Rightarrow$“ schon bewiesen worden.

„$\Leftarrow$“ Seien alle Eigenwerte reell und J eine orthonormale Basis, bestehend aus Eigenvektoren. Also ist

$$D := [T]_J = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix},\ d_i \in \mathbb{R}$$

Es ist klar, dass D hermitesch ist. ($D^\star = \overline{D^\top} = D^\top = D$), also ist auch T hermitesch. (Ü.B.)

□

Korollar 4: $K = \mathbb{C}$, T normal.
Es gilt:

T ist unitär $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte haben Absolutbetrag 1

Beweis:

„$\Rightarrow$" schon bewiesen.

„$\Leftarrow$" Seien die Eigenwerte $z_1, \dots, z_n$ und J orthogonale Basis, bestehend aus Eigenvektoren, sodass

$$[T]_J = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} = D$$

Behauptung: D ist unitär.

Beweis: Berechne:

$$D^\star = \overline{D^\top} = \begin{pmatrix} \overline{z1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z_n} \end{pmatrix}$$

Also ist

$$DD^\star = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1\overline{z1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n\overline{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I_n}.$$

□

Also ist auch T unitär. (Ü.B.)

□

Wir wollen nun den Spektralsatz anwenden im Fall $K = \mathbb{R}$.
Dann sind die p_i entweder linear $p_i = (x - r_i),\ r_i \in \mathbb{R}$ oder quadratisch irreduzibel, d.h. der Form $(x-a)^2 + b^2,\ a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$.

Beispiel: Sei $r > 0,\ \Theta \in \mathbb{R},\ \Theta \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ (d.h. Φ erfüllt $\sin(\Theta) \neq 0$), $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit der Matrix (bezüglich der Standard-Orthonormalbasis $\{e_1, e_2\}$)

$$A = r \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & -\sin(\Theta) \\ \sin(\Theta) & \cos(\Theta) \end{pmatrix}$$

A ist normal: $AA^\top = A^\top A$.
Sei $p = \mathrm{CharPol}(T) = \det(xI - A) = (x - r\cos(\Theta))^2 + r^2\sin^2(\Theta)$.

Setze $a := r\cos(\Theta),\ b := r\sin(\Theta),\ b \neq 0$.
Also ist $p = (x-a)^2 b^2,\ b \neq 0$ irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$ und damit $\operatorname{MinPol}(T) = p$.

Wir zeigen nun die Umkehrung:

Satz 2: Sei $\dim V = n$, $T \in \mathscr{L}$ normal mit $\operatorname{MinPol}(T) =: p = (x-a)^2 + b^2,\ a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$.
Es gilt: Es existieren 2-dimensionale T-invariante Unterräume $V_1, \ldots, V_s,\ (s = \frac{n}{2})$, sodass

(i) V_i ist orthogonal zu V_j für $i \neq j$.

(ii) $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$

(iii) V_j hat eine orthonormale Basis $\{\alpha_j, \beta_j\}$, sodass

$$T\alpha_j = a\alpha_j + b\beta_j \text{ und } T\beta_j = -b\alpha_j + a\beta_j$$

Das heißt:

$$\left[T|_{V_j}\right]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

wobei $\{\alpha_j, b_j\}$ die geordnete orthonormale Basis ist .

(iv) $\operatorname{CharPol}(T) = p^s$

(v) $TT^\star = (a^2 + b^2)\mathrm{I}$

(vi) T ist invertierbar und $T^\star = (a^2 + b^2)T^{-1}$

(also setze $r := \sqrt{a^2 + b^2}$, wähle Θ mit $a = r\cos(\Theta)$ und $b = r\sin(\Theta)$).
Dann ist V die orthogonale direkte Summe von 2-dimensionalen Unterräumen und die Beschränkung $T|_{V_i}$ ist eine „r-fache Drehung um den Winkel Θ“.
Wir brauchen eine Bemerkung und ein Hilfslemma bevor wir den Satz beweisen.

Bemerkung:

(i) Sei $K = \mathbb{R},\ U \in \mathscr{L}(V, V)$.
Es gilt:

$$(U\alpha \,|\, \beta) = (U^\star\beta \,|\, \alpha) \text{ für } \alpha, \beta \in V$$

(ii) Sei nun U normal, es gilt:

$$\|U\alpha\| = \|U^\star\alpha\|,\ \forall \alpha \in V$$

Beweis:

(i) $$(U^\star\beta \,|\, \alpha) = (\beta \,|\, U\alpha) = \overline{(U\alpha \,|\, \beta)} = (U\alpha \,|\, \beta)$$

(ii) $$\|U\alpha\|^2 = (U\alpha \,|\, U\alpha) = (\alpha \,|\, U^\star U\alpha) = (\alpha \,|\, UU^\star\alpha) = (U^\star\alpha \,|\, U^\star\alpha) = \|U^\star\alpha\|^2$$

□

<u>Hilfslemma:</u> Sei $K = \mathbb{R}$, S normal, sodass $S^2 + \mathrm{I} = 0$. Sei $\alpha \in V$ und setze $\beta := S\alpha$.
Es ist:
(†) $S^\star\alpha = -\beta,\ S^\star\beta = \alpha,\ (\alpha \,|\, \beta) = 0$ und $\|\alpha\| = \|\beta\|$

<u>Beweis:</u> $S\alpha = \beta$ und $S\beta = S^2\alpha = -\alpha$, also

$$\begin{aligned} 0 =& \|S\alpha - \beta\|^2 + \|S\beta + \alpha\|^2 \\ =& \|S\alpha\|^2 - 2\,(S\alpha \,|\, b) + \|\beta\|^2 + \|S\beta\|^2 + 2\,(S\beta \,|\, \alpha) + \|\alpha\|^2 \end{aligned}$$

Da S normal ist, folgt:

$$\begin{aligned} 0 =& \|S^\star\alpha\|^2 - 2\,(S^\star\beta \,|\, \alpha) + \|\beta\|^2 + \|S^\star\beta\|^2 + 2\,(S^\star\alpha \,|\, \beta) + \|\alpha\|^2 \\ =& \|S^\star\alpha + \beta\|^2 + \|S^\star - \alpha\|^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt (†).
Berechne nun:

$$(\alpha \,|\, \beta) = (S^\star\beta \,|\, \beta) = (\beta \,|\, S\beta) = (\beta \,|\, -\alpha) = -\,(\alpha \,|\, \beta)$$

also $(\alpha \,|\, \beta) = 0$.
Schließlich:

$$\|\alpha\|^2 = (S^\star\beta \,|\, \alpha) = (\beta \,|\, S\alpha) = (\beta \,|\, \beta) = \|\beta\|^2$$

<u>Beweis</u> (zu Satz 2 (§22)):
Sei $\{V_1, \ldots, V_s\}$ eine maximale Menge von 2-dimensionalen Unterräumen mit den Eigenschaften (i),(iii) und (v).
Setze $W := V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$.
<u>Behauptung:</u> $W = V$

<u>Beweis:</u> Sonst ist $W^\perp \neq \{0\}$ und (iii) und (v) implizieren, dass W T- und $T^\star$-invariant ist, also ist $W^\perp$ $T^\star$- und $T^{\star\star}$-invariant.
Setze $S := b^{-1}(T - a\mathrm{I})$.
Bemerke, dass $S^\star = b^{-1}(T^\star - a\mathrm{I})$ und damit $S^\star S = S^\star S^\star S$ (S normal) und $W^\perp$ ist auch S- und $S^\star$-invariant und $(T - a\mathrm{I})^2 + b^2\mathrm{I} = 0$ impliziert $S^2 + \mathrm{I} = 0$.
Also können wir Hilfslemma für S und $W^\perp$ anwenden und bekommen:
$\alpha \in W^\perp,\ \|\alpha\| = 1,\ \beta := A\alpha,\ \beta \in W^\perp$ und $S\beta = -\alpha$.
Da $T = aT + bS$ haben wir außerdem:

$$\left.\begin{aligned} T\alpha &= a\alpha + b\beta \\ T\beta &= -b\alpha + a\beta \end{aligned}\right\} (iii)$$

Darüber hinaus:

$$S^\star\alpha = -\beta,\ S^\star\beta = \alpha,\ (\alpha \,|\, \beta) = 0 \text{ und } \|\beta\| = 1.$$

Nun ist $T^\star = a\mathrm{I} + bS^\star$, also

$$\left.\begin{aligned} T^\star\alpha &= a\alpha - b\beta \\ T^\star\beta &= b\alpha + a\beta \end{aligned}\right\} (v)$$

Widerspruch zur maximalen Wahl von $\{V_1, \ldots, V_s\}$, also $W = V$.

□

Nun ist $\det \begin{pmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{pmatrix} = (x-y)^2 + b^2$.
Es folgt aus (i),(ii),(iii), dass

$$\det(x\mathrm{I} - T) = \left[(x-a)^2 + b^2\right]^s.$$

Zu (vi):
Aus (iii) und (v) haben wir:

$$\left[T|_{V_j}\right]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ und } \left[T^\star|_{V_j}\right]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \\ &= [T^\star|_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}}[T|_{V_j}]_{\{\alpha_j,b_j\}} \\ &= [T^\star T|_{V_j}]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} \\ &= (a^2+b^2)\mathrm{I}_2 \end{aligned}$$

Also $TT^\star = (a^2+b^2)\mathrm{I}$.

□