5. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS 2011/2012: 4. November 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 4. November 2015)

Definition 1

(i) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen und n Variablen über K ist:

$$(S) \quad \left.\begin{array}{lclcl} a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \quad \begin{array}{lcl} G_1 & = & b_1 \\ G_2 & = & b_2 \\ & \vdots & \\ G_m & = & b_m \end{array}$$

(ii) Eine *Lösung für (S)* ist $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ ein n-Tupel, so dass $\underline{x}$ eine (simultane) Lösung für alle Gleichungen in (S) ist.

Notation $L(S) := \{\underline{x} \in K^n; \underline{x} \text{ ist Lösung }\}$
$L(S)$: die Lösungsmenge.

Ziel Finde und beschreibe $L(S)$.

(iii) (S) ist *homogen*, falls $b_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

(iv) (S) ist *konsistent*, falls $L(S) \neq \emptyset$.
(S) ist ansonsten *inkonsistent* ($L(S) = \emptyset$).

(v) (S) homogen $\Rightarrow \underline{x} = \underline{0} := (0, \ldots, 0) \in L(S)$ (die triviale Lösung). Also insbesondere (S) homogen $\Rightarrow (S)$ konsistent.

Beispiel 1 3 Gleichungen in 3 Variablen über $\mathbb{R}$

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 0x_1 & + & 0x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

(Typ 1 - Umformung)
Vertauschen der ersten mit der dritten Gleichung ergibt

$$\left\{\begin{array}{lrcl} x_1 & & = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 & & = & 4 \\ & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

(Typ 3 - Umformung)
Addition des (-2)-fachen der ersten Gleichung zur zweiten:

$$\left\{\begin{array}{lccrcl} x_1 & & & = & 1 \\ & 2x_2 & & = & 2 \\ & & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

(Typ 2 - Umformung)
Multiplikation der Zweiten und der dritten Gleichung mit 1/2 ergibt schließlich:

$$(S_2)\begin{cases} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Damit ist $(1,1,3)$ eine Lösung (prüfe durch Einsetzen).

$L(S_1) = \{(1,1,3)\}$? Die Frage ist, ob man durch die Umformung obiger Gleichung keine Lösungen verloren hat.
Wir wollen zeigen, dass die Lösungsmenge unter den elementaren Gleichungsumformungen invariant ist. Wir untersuchen sie nun.

Typ 1: **Vertauschen**

$$(S_1)\left.\begin{array}{ccc} G_1 & = & b \\ & \vdots & \\ G_i & = & b_i \\ & \updownarrow & \\ G_j & = & b_j \\ G_m & = & b_m \end{array}\right\} \xrightarrow{Typ\ 1} \left.\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & \vdots & \\ G_j & = & b_j \\ & \vdots & \\ G_i & = & b_i \\ & \vdots & \end{array}\right\} (S_2)$$

Bemerkung I

(i) $(S_2) \xrightarrow{Typ 1} (S_1)$

(ii) $\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2)

Typ 2: **Multiplizieren einer Gleichung mit $\lambda \in K^\times$**

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccc} G_1 & = & b_1 \\ & \vdots & \\ G_i & = & b_i \\ & \vdots & \\ G_m & = & b_m \end{array}\right. \xrightarrow{Typ\ 2} \left.\begin{array}{ccc} G_1 & = & b \\ & \vdots & \\ \lambda G_i & = & \lambda b_i \\ & \vdots & \\ G_m & & \end{array}\right\} (S_2)$$

Bemerkung II

(i) $(S_2) \xrightarrow{Typ\ 2} (S_1)$ (Multiplikation durch λ^{-1})

(ii) $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$ (folgt aus Körperaxiome), also
$\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2)

Typ 3: **Addieren des λ-fachen der i-ten Gleichung zur j-ten Gleichung**
$i \neq j; \lambda \in K$

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} G_1 & = & b_1 \\ & \vdots & \\ G_i & = & b_i \\ & \vdots & \\ G_j & = & b_j \\ & \vdots & \\ G_m & = & b_m \end{array}\right. \quad \xrightarrow{Typ\ 3} \quad \begin{array}{rcl} G_1 & = & b \\ & \vdots & \\ G_i & = & b_i \\ & \vdots & \\ \lambda G_i + G_j & = & \lambda b_i + b_j \\ & \vdots & \\ G_m & = & b_m \end{array}$$

Bemerkung III

(i) $(S_2) \xrightarrow{Typ\ 3} (S_1)$
(Addition $(-\lambda)$-fach der i-ten Gleichung zur j-ten)

(ii) $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$ und addiere $G_j = b_j$
also (Körperaxiome) $\lambda G_i + G_j = \lambda b_i + b_j$.
Also $\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2)

Definition 2 (S_2) ist *äquivalent* zu (S_1), falls man (S_2) aus (S_1) durch endlich viele elementare Gleichungsumformungen erhält.

Bemerkung IV Durch Bemerkung I (i), II (i) und III (i) bekommt man sofort:
(S_2) äquivalent $(S_1) \Rightarrow (S_1)$ äquivalent (S_2).
Also sagen wir: (S_1) *und* (S_2) *sind äquivalent.*

Satz I Äquivalente Systeme haben die gleiche Lösungsmenge.

Beweis Aus Bemerkung I (ii), II (ii) und III (ii) haben wir:
$L(S_1) \subseteq L(S_2)$.
Aus Bemerkung I (i), II (i) und III (i) bekommt man nun umgekehrt
$L(S_2) \subseteq L(S_1)$. Also $L(S_1) = L(S_2)$.

Bemerkung Wir werden die Umkehrung vom Satz später studieren!

Also wollen wir die Gleichung umformen, um "einfachere" Systeme zu bekommen. Wir müssen den Begriff "einfacher" formalisieren. Dafür führen wir nun Matrizen ein.

Kapitel 1: § 3 Matrizen

Definition 3 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$ Matrix über K ist eine Familie in K der Gestalt

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

wobei $a_{ij} \in K$ für alle i, j.

Darstellung (i)

$$\begin{array}{ccc} & S_j := j\text{-te Spalte} & \\ m\text{-Zeilen} \Rightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \leftarrow R_i := i\text{-te Reihe} \\ & \Uparrow n\text{-Spalten} & \end{array}$$

(ii) Die *Koeffizientenmatrix* zum System (S) ist

$$A(S) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$(A, \underline{b}) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Matrix-Darstellung von (S) ist: $A\underline{x} = \underline{b}$, wobei

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(Eine $n \times 1$ Matrix mit Variablen als Koeffizienten.)

und

$$\underline{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(Eine $m \times 1$-Matrix über K.)

(iii) Die *elementaren Zeilenumformungen* von Typ 1, Typ 2 und Typ 3 entsprechen genau den elementaren Gleichungsumformungen.

(iv) Seien A, B $m \times n$ Matrizen. A und B sind *Zeilenäquivalent*, falls man B aus A durch endlich viele Zeilenumformungen erhält (und / oder umgekehrt).
Das ist die Matrix analog von Definition 2 für Systeme.

Satz 2 (Matrix analog von Satz 1)
Bei elementaren Zeilenumformungen (auf die erweiterte Koeffizientenmatrix) ändert sich die Lösungsmenge des linearen Gelichtungssytems nicht.

Nun wollen wir endlich beschreiben, was wir mit "einfacher" meinen.

Definition 4 Eine $m \times n$-Matrix A ist in *reduzierter Zeilenform* (Abkürzung: r.Z.F) falls

(a) der erste Koeffizient $\neq 0$ ist 1 in einer Reihe $R_i \not\equiv 0$.
(Dieser erste Koeffizient verschieden von Null heißt *Hauptkoeffizient* bzw. *Haupteins.*
Bedeutung von $R_i \equiv 0$: eine Reihe der Matirx heißt "Nullreihe", falls alle Koeffizienten, die darin vorkommen, gleich Null sind.

(b) Jede Spalte von A, in der sich eine Haupteins befindet, hat alle anderen Koeffizienten gleich Null.

Beispiel I (Matrix-Form): Erweiterte Matrix von (S_1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \textbf{ nicht } \text{in r.Z.F.}$$

Erweiterte Matrix von (S_2) dagegen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$