# 21. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

**Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl**

**WS2011/2012: 17. Januar 2012**

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 14. Januar 2016)

**Ansatz** Wie in Vorlesung 20: $V$ ist endlich-dimensianal mit Dimension $n$; $\mathcal{B}$ ist eine geordnete Basis für $V$.

**Korollar 1** $\rho : L(V, V) \to K^{n\times n}$. $\rho(T) := [T]_{\mathcal{B}}$ ist ein $K$-Algebren Isomorphismus.

**Beweis** $\rho$ ist ein $K$-Vektorraum-Isomorphismus. Ferner gilt $\rho(T_1 \circ T_2) = \rho(T_1)\rho(T_2)$. $\square$

**Korollar 2** $T : V \to V$. Es gilt: $T$ ist invertierbar genau dann, wenn $[T]_{\mathcal{B}}$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt ferner $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

**Beweis** $T$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ es existiert $T^{-1}$ mit $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id$

$\Leftrightarrow [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}}$

$\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = I_n$

$\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}$. $\square$

**Ansatz** $V$ endlich dim. $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ sind zwei geordnete Basen für $V$. $T \in L(V, V)$.

**Fragestellung** Was ist die Beziehung zwischen $[T]_{\mathcal{B}}$ und $[T]_{\mathcal{B}'}$?

**Lösung** Satz 1 aus Vorlesung 15 liefert eine invertierbare $\underline{P}$, so dass für alle $\alpha \in V$ gilt
$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \underline{P}[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ $(**)$

Und Satz 1 aus Vorlesung 20 $[T]_{\mathcal{B}}$ so, dass fr alle $\alpha \in V$:
$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}$ $(*)$.

Nun gilt $(**)$ für $T(\alpha) \in V$: $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = \underline{P}[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$ $(***)$

$(*), (**)$ und $(***)$ liefern

$$[T]_{\mathcal{B}}\underline{P}[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \qquad \text{oder} \qquad (\underline{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underline{P})[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}.$$

Also erfüllt $(\underline{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underline{P})$ die bestimmende matrizielle Gleichung $(*)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}'$. Die Eindeutigkeit von $[T]_{\mathcal{B}'}$ für die Erfüllung der $(*)$ liefert nun

$$[T]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underline{P}, \text{ wobei } \underline{P} = \left( \begin{array}{c|c|c} [\alpha'_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\alpha'_n]_{\mathcal{B}} \end{array} \right).$$

**Bemerkung** Betrachte die Abbildung $\pi : V \to V$. Die lineare Abbildung ist eindeutig definiert durch die Angaben $\pi(\alpha_j) := \alpha'_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Dieser Operator ist invertierbar, da er eine *Basis auf eine Basis abbildet* (Korollar zu Satz 3, Vorlesung 19). So die Matrix-Darstellung $[\pi]_\mathcal{B}$ ist invertierbar. Es ist

$$[\pi]_\mathcal{B} = \big([\pi(\alpha_1)]_\mathcal{B} \mid \cdots \mid [\pi(\alpha_n)]_\mathcal{B}\big) = \big([\alpha'_1]_\mathcal{B} \mid \cdots \mid [\alpha'_n]_\mathcal{B}\big) = \underline{P}.$$

$\underline{P}$ heißt deshalb "Matrix der Basiswechsel".

Wir haben bewiesen:

**Satz 1** (Ansatz wie oben)
$[T]_{\mathcal{B}'} = [\pi]_\mathcal{B}^{-1}[T]_\mathcal{B}[\pi]_\mathcal{B}$ oder $[T]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}^{-1}[T]_\mathcal{B}\underline{P}$.

**Definition 1** Seien $A, B \in K^{n\times n}$. wir sagen $B$ ist zu $A$ *ähnlich*, falls es eine invertierbare $\underline{P} \in K^{m\times n}$ gibt, so dass $B = \underline{P}^{-1}A\underline{P}$.

Wir haben in Satz 1 bewiesen:
Sind $B = [T]_{\mathcal{B}'}$ und $A = [T]_\mathcal{B}$ die Matrix-Darstellungen des Operators $T$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}'$ bzw. $\mathcal{B}$, dann ist $B$ zu $A$ ähnlich. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung!

**Satz 2** $B$ ist ähnlich zu $A$ genau dann, wenn $B$ und $A$ denselben linearen Operator (begzüglich geeigneter Basen) darstellen.

**Beweis** "$\Leftarrow$" Bereits gemacht. Sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis.

"$\Rightarrow$" Sei $T$ der eindeutig durch $[T]_\mathcal{B} = A$, d.h. $[T(\alpha)]_\mathcal{B} := A[\alpha]_\mathcal{B}$ definierte Operator. $(*)$

Sei ferner $P$ eine invertierbare Matrix so, dass $B = P^{-1}AP$.. Sei $\mathcal{B}'$ die Basis, erhalten von $\underline{P}$, d.h. wofür

$$\underline{P} = \left( \begin{array}{c|c|c} [\alpha'_1]_\mathcal{B} & \cdots & [\alpha'_n]_\mathcal{B} \end{array} \right)$$

sein sollte. Diese Angabe bestimmt also, dass

$$[\alpha'_j]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \alpha'_j := \sum_{i=1}^n P_{ij}\alpha_i.$$

**Behauptung:** Es gilt $[T]_{\mathcal{B}'} = B$. (ÜA, siehe ÜB). □

**Exkurs** **Definition:** Sei $R \subseteq S \times S$ eine Relation.
Schreibe $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$. $R$ heißt Äquivalenzrelation, falls:

(1) $xRx$ für alle $x \in S$ (Reflexivität);

(2) $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in S$ (Symmetrie);

(3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in S$ (Transitivität).

**Beispiel** $B$ ähnlich $A$ ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$:

(1) $B = I_n^{-1} B I_n$

(2) $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}B(P^{-1})$
Setze $Q := P^{-1}$. Also $A = Q^{-1}BQ$

(3) $\left.\begin{array}{c} B = P^{-1}AP \\ C = Q^{-1}BQ \end{array}\right\} \Rightarrow C = (PQ)^{-1}A(PQ)$

$\square$

Mehr dazu im Übungsblatt.