20. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS2011/2012: 13. Januar 2012
(WS 2015/2016: Korrekturen vom 14. Januar 2016)

Kapitel 3: § 4 Matrix-Darstellung von linearen Transformationen

Ansatz Seien V und W zwei K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung.
Seien $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis für V und $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m\}$ eine geordnete Basis für W.

Definition 1 T ist eindeutig bestimmt durch $T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_n) \in W$. Schreibe

$$[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

und setze

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := \left(\begin{array}{c|c|c} [T(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} \end{array} \right)$$

Diese $m \times n$-Matrix heißt die *Matrix-Darstellung von T bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$*. Welche Eigenschaften hat $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$?

Satz 1 Es gilt für $\alpha \in V : [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}}$ $(*)$

Beweis Setze $A := [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [A_{ij}]_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nun ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$. Also ist $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\alpha'_i$.

Berechne nun:

$$T(\alpha) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(\alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\alpha'_i = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j)\alpha'_i.$$

Es folgt: $$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{mj}x_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$ □

Behauptung $(*)$ bestimmt die Matrix $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ eindeutig !

Beispiel 1 Sei A eine $m \times n$-Matrix. Wir haben zwei lineare Abbildungen dazu assoziiert:

(1) $T : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ mit $T(x) := Ax$

(2) $U : K^m \to K^n$ mit $U(\alpha) := \alpha A$.

(1) Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ die Standard-Basen für $K^{n\times 1}$ und $K^{m\times 1}$. Wir berechnen $[T]_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$. Setze $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m\}$, $\mathcal{E}' = \{\mathcal{E}'_1, \dots, \mathcal{E}'_m\}$

Dafür berechne $[T(\mathcal{E}_j)]_{\mathcal{E}'}$. Nun haben wir

$$T(\mathcal{E}_j) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = j\text{-te Spalte von } A = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\mathcal{E}'_i.$$

Also $[T(\mathcal{E}_j)]_{\mathcal{E}'} = j$-te Spalte von A, insbesondere haben wir $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = A$.
$\square$

(2) Für (2) siehe ÜB.

Satz 2 Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \rho : L(V,W) & \to & K^{m\times n} \\ T & \mapsto & [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \end{array}$$

ist eine Isomorphie von K-Vektorräumen.

Beweis Ist ρ linear?
Berechne

$$\rho(cT_1+T_2) = [cT_1+T_2]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \big([(cT_1+T_2)(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} \mid \cdots \mid [(cT_1+T_2)(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'}\big) = ?$$

Nun haben wir

$$\overbrace{[(cT_1+T_2)(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}^{j\text{-te Spalte von } \rho(cT_1+T_2)} = [cT_1(\alpha_j) + T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{c[T_1(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j\text{-te Spalte von } \rho(T_1)} + \underbrace{[T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j\text{-te Spalte von } \rho(T_2)}$$

Also: Die j-te Spalte von $\rho(cT_1+T_2)$ ist gleich wie die j-te Spalte von $\rho(T_2)$ plus c-mal die j-te Spalte von $\rho(T_1)$. Also

$$\rho(cT_1+T_2) = c\rho(T_1) + \rho(T_2).$$

Ist ρ injektiv?
Sei $T \in L(V,W)$ mit $\rho(T) = 0_{m\times n}$.

Dann ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Aber dann ist $T(\alpha_j) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Also ist T identisch mit der Nullabbildung. Daraus folgt, dass ρ surjektiv ist,
weil $mn = \dim L(V, W) = \dim K^{m \times n}$ (siehe ÜB). $\square$

Sonderfall Wir betrachten $T : V \to V$ ist ein linearer Operator und $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Definition und Bezeichnung 2 Schreibe $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$ ist die *Matrixdarstellung des Operators in der Basis* $\mathcal{B}$. Hier gilt also die folgende Version von $(*)$:

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Nun betrachten wir die Matrixdarstellung

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{U} Z \text{ und } V \xrightarrow{U \circ T} Z$$

Ansatz:

V, W, Z sind endlich dim K-Vektorräume. T, U sind lineare Abbildungen.
$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ist eine Basis für V
$\mathcal{B}' = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ ist eine Basis für W
$\mathcal{B}'' = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$ ist eine Basis für Z
Setze $A = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $B = [U]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$ und $C = [U \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} =?$

Satz 3 $C = BA$.

Beweis $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \overset{(*)}{=} A[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[U(T(\alpha))]_{\mathcal{B}''} \overset{(*)}{=} B[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$.

Also $[(U \circ T)(\alpha)]_{\mathcal{B}''} = BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$. $(*)$ erfüllt also die Matrix BA bezüglich $U \circ T$.
Die Eindeutigkeit impliziert nun unsere Behauptung. $\square$