

16. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 13. Dezember 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 21. Dezember 2015)

Erinnerung

$$(i) \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \alpha_i : i\text{-te Zeile.}$$

Es gilt: $yA = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n$.

$$(ii) \quad i\text{-te Zeile von } BA = [i\text{-te Zeilenmatrix von } B] A = \\ (B_{i1}, \dots, B_{in}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Also ist die i -te Zeile von BA eine lineare Kombination der Zeilen von A .

Korollar 1

A $n \times n$ über K , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Zeilenvektoren von A linear unabhängig $\Rightarrow A$ invertierbar.

Beweis

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine Basis für K^n , also schreibe Standard Basisvektor:
 $e_i = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j \quad 1 \leq i \leq n$.

Sei B die $n \times n$ -Matrix mit B_{ij} als Koeffizienten. Betrachte die Matrix BA , die i -te Zeile von $BA = [i\text{-te Zeile von } B]A$, ie. $(B_{i1}, \dots, B_{in})A = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j = e_i$.
 Also $BA = I_n$. \square

Für die Umkehrung siehe Übungsblatt.

Kapitel 2: § 5 Zeilenraum

Definition 1 Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ - - - - \\ - - - - \\ - - - - \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ $m \times n$ über K und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K^n$ Zeilen von A .

Der *Zeilenraum* von A ist $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq K^n$ (Unterraum).

Der *Zeilenrang* von A ist die Dimension davon.

Satz 1 Zeilenäquivalente Matrizen haben denselben Zeilenraum.

Beweis $B = PA$; P invertierbar; A, B $m \times n$.
 A $m \times n$; B $m \times n$; P $m \times m$
 So $B = P A \leftarrow$ jede B -Zeile ist eine Linearkombination von A -Zeilen.
 Also $A = P^{-1}B \leftarrow$ jede A -Zeile ist eine Linearkombination von B -Zeilen.
 Also liegt jede B -Zeile im $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ und umgekehrt.
 Also Zeilenraum von $A =$ Zeilenraum von B . □

Wir werden auch die Umkehrung von Satz 1 zeigen. Dafür studieren wir den Zeilenraum von Matrizen in r.Z.S.F.

Satz 2 Sei $R \neq 0$ in r.Z.S.F. Dann bilden die Zeilenvektoren von R die ungleich 0 sind, eine Basis für den Zeilenraum von R (also Zeilenrang von $R = \#$ der Zeilen, die ungleich 0 sind).

Beweis Seien p_1, \dots, p_r die Zeilen $\neq 0$; $R = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ \vdots \end{pmatrix}$

Es ist klar, dass p_1, \dots, p_r den Zeilenraum erzeugen. Wir zeigen nun lineare Unabhängigkeit (analog Beispiel 1 (d) in 13. Vorlesung).

Seien $k_1 < \dots < k_r$ die Spaltenindexe (in der die Haupteinse der p_i erscheinen)
 $c_1 p_1 + \dots + c_r p_r = c_1(0, \dots, 1, \dots, 0) + c_2(\dots, 0, 1, \dots, 0) + \dots + c_r(0, \dots, 0, 1, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$ impliziert $c_1 = \dots = c_r = 0$. □

Hilfslemma Seien R und R' $m \times n$ in r.Z.S.F. Es gilt: R und R' haben denselben Zeilenraum **impliziert** $R = R'$.

Beweis $k_1 < \dots < k_r \leftarrow$ Haupteins-Spalten. $k'_1 < \dots < k'_r$ Index wie oben.
 Beobachte: Wenn p_i eine lineare Kombination von $\{p'_1, \dots, p'_r\}$ ist, dann gilt $k_i = k'_i$ für alle $1, \dots, r$. □

Satz 3 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Sei W ein Unterraum von K^n ; $\dim W \leq m$. Es gilt: $\exists!$ $m \times n$ -Matrix in r.Z.S.F. R mit Zeilenraum $R = W$.

Beweis **Existenz:** $\dim W \leq m$. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W$; $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = W$. Setze

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ - \\ - \\ - \\ \alpha_m \end{pmatrix} m \times n\text{-Matrix.}$$

Zeilenraum $A = W$. A Z. ä. zu R in r.Z.S.F. und Zeilenraum $A =$ Zeilenraum $R = W$.

Eindeutigkeit: Sei R' eine Matrix in r.Z.S.F. mit Zeilenraum $R' = W$. Dann gilt: Zeilenraum $R =$ Zeilenraum $R' \stackrel{(H.L.)}{\Rightarrow} R = R'$. \square

Korollar 1 Jede $m \times n$ -Matrix ist zeilenäquivalent zu einer *eindeutigen* Matrix in r.Z.S.F.

Beweis A ist zeilenäquivalent zu R und A ist zeilenäquivalent zu R'
 \Rightarrow Zeilenraum $R =$ Zeilenraum $A =$ Zeilenraum $R' \Rightarrow R = R'$. \square

Korollar 2 A, B sind $m \times n$ -Matrizen über K . Es gilt A ist zeilenäquivalent zu B genau dann, wenn Zeilenraum $A =$ Zeilenraum B .

Beweis " \Rightarrow " \checkmark
 " \Leftarrow " Zeilenraum $A =$ Zeilenraum $R =$ Zeilenraum $B =$ Zeilenraum R'
 $\Rightarrow R = R'$. Also ist A zeilenäquivalent zu R und B ist zeilenäquivalent zu $R \Rightarrow A$ ist zeilenäquivalent zu B . \square

Korollar 3 A, B sind $m \times n$ -Matrizen über K . Folgende sind äquivalent:

- (1) A und B sind zeilenäquivalent.
- (2) A und B haben denselben Zeilenraum.
- (3) $B = PA$; P invertierbar $m \times m$.

Zusammenfassung

- (I) Verfahren zum Berechnen von Basis und Dim von Zeilenraum von A .
 - Reduziere A zu R in r.Z.S.F..
 - Eine Basis für Zeilenraum $A = \{p_1, \dots, p_r\}$ (die nicht Nullzeilen von R).
- (II) Nun betrachten wir den Lösungsraum $\subseteq K^n$ zu $AX = 0$, wobei A eine $m \times n$ -Matrix ist. Setze $S =$ Lösungsraum. Wir berechnen eine Basis und die Dimension.
 - Reduziere A zu R in r.Z.S.F. S ist auch Lösungsraum für $RX = 0$.
 - Seien p_1, \dots, p_r die nicht Nullzeilen von R und k_1, \dots, k_r die Spaltenindexe, in denen die Haupteins der Zeilen erscheinen.

Erinnerung Lösungsverfahren:
 $\{x_{k_1}, \dots, x_{k_r}\}$ Hauptvariablen $J = \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\}$
 $\{x_j, j \in J\}$ freie Variablen; $|J| = n - r$.

Löse

$$\left. \begin{array}{l} x_{k_1} = \sum_{j \in J} c_{1j} x_j \\ \vdots \\ x_{k_r} = \sum_{j \in J} c_{rj} x_j \end{array} \right\} (*) c_{ij} \in K; 1 \leq i \leq r; j \in J$$

- Alle Lösungen bekommt man durch Einsetzen **beliebiger** Werte für $x_j, j \in J$.
- Also sei E_j die Lösung, die man bekommt durch Einsetzen von $x_j = 1$ und $x_i = 0$ für alle $i \in J \setminus \{j\}$.

Behauptung Die $(n - r)$ -Vektoren $\{E_j; j \in J\}$ sind eine Basis für S .

Beweis

- (1) Lineare Unabhängigkeit wie oben. (Die Spaltenmatrix E_j hat eine 1 in der j -ten Zeile und 0 in den anderen Zeilen, die durch Elemente aus J indiziert sind.)
- (2) Erzeugen: folgt aus (*).

Details: ÜA. Also $\{E_j; j \in J\}$ Basis. Es gilt also: $\dim S = n - r$.