Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 12

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

Aufgabe 12.1

Seien $\tau > 0$ eine reelle Zahl und $s, t \in \mathbb{N}$.
Der Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass das Volumen von

$$X(s,t,\tau) := \{(x_1,...,x_s,a_1,b_1,...,a_t,b_t) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{2s} \mid \sum_{i=1}^{s} |x_i| + 2\sum_{j=1}^{t} |a_j^2 + b_j^2|^{1/2} \leq \tau\}$$

gleich

$$2^s (\pi/2)^t \frac{\tau^{s+2t}}{(s+2t)!}$$

ist.
Sei

$$Y(s,t,\tau) := \{(x_1,...,x_s,a_1,b_1,...,a_t,b_t) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{2s} \mid x_1,...,x_s \geq 0\} \cap X(s,t,\tau).$$

(a) Zeigen Sie durch Induktion nach s, dass das Volumen von $Y(s,0,\tau)$ durch

$$\frac{\tau^s}{s!}$$

gegeben ist.

Hinweis: Fubini

(b) Angenommen, dass das Volumen von $Y(s,t,\tau)$ durch

$$\frac{\tau^{s+2t}}{(s+2t)!}(\pi/2)^t$$

gegeben ist.

Zeigen Sie, dass dann das Volumen von $Y(s,t+1,\tau)$ durch

$$\left| \int_{r=0}^{\tau/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{(\tau-2r)^{s+2t}}{(s+2t)!}(\pi/2)^t r dr d\theta \right|$$

gegeben ist.

Hinweis: Polarkoordinaten

(c) Zeigen Sie durch Induktion nach $s+2t$, dass das Volumen von $Y(s,t,\tau)$ durch

$$\frac{(\pi/2)^t \tau^{s+2t}}{(s+2t)!}$$

gegeben ist.

(d) Folgern Sie, dass das Volumen von $X(s, t, \tau)$ durch

$$2^s (\pi/2)^t \frac{\tau^{s+2t}}{(s+2t)!}$$

gegeben ist.

Aufgabe 12.2
Zeigen Sie, dass der Ring der ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein Hauptidealbereich ist, falls $d = -1, -3, -7, 2, 3, 6, 13$ oder 17.

Aufgabe 12.3
Berechnen Sie die Idealklassengruppe von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.
Hinweis: Aufgabe 1.4

Aufgabe 12.4

(a) Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei mit $d \equiv 2, 3 \bmod 4$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 - dy^2 = 1$$

unendlich viele Lösungen hat.

(b) Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei mit $d \equiv 1 \bmod 4$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 - dy^2 = 4$$

unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe 12.5
Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}]^\times = \{\pm(2+\sqrt{3})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$