Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 8

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

Aufgabe 8.1

(a) Seien θ eine Nullstelle von $x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ und $K = \mathbb{Q}(\theta)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\theta] = \mathcal{O}_K$.

(b) Seien θ eine Nullstelle von $x^3 + x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ und $K = \mathbb{Q}(\theta)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\theta] = \mathcal{O}_K$.

Aufgabe 8.2
Sei $K/\mathbb{Q}$ eine endliche Erweiterung vom Grad n. Seien $\omega_1, ..., \omega_n \in \mathcal{O}_K$ eine $\mathbb{Q}$-Basis für $K/\mathbb{Q}$ und $d := D(\omega_1, ..., \omega_n)$. Für jedes $1 \leq i \leq n$ wählen Sie $a_{ii} \in \mathbb{N}$ minimal, so dass $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ für $1 \leq j < i$ existieren mit

$$\alpha_i := 1/d \sum_{j=1}^{i} a_{ij}\omega_j \in \mathcal{O}_K.$$

Zeigen Sie, dass $\alpha_1, ..., \alpha_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{O}_K$ ist.

Aufgabe 8.3
Seien θ eine Nullstelle von $f := x^3 - x^2 - 2x - 8 \in \mathbb{Q}[x]$ und $K = \mathbb{Q}(\theta)$.

(a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Sei $\beta := \frac{\theta^2+\theta}{2}$. Zeigen Sie, dass $\beta^3 - 3\beta^2 - 10\beta - 8 = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass $D(1, \theta, \theta^2) = -4 \cdot 503$ und $D(1, \theta, \beta) = -503$. Folgern Sie, dass $1, \theta, \beta$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{O}_K$ ist.

Aufgabe 8.4
Seien θ eine Nullstelle von $f := x^3 - x^2 - 2x - 8 \in \mathbb{Q}[x]$ und $K = \mathbb{Q}(\theta)$. Zeigen Sie, dass $D(1, y, y^2)$ gerade für jedes $y \in \mathcal{O}_K$ ist. Folgern Sie, dass es kein $y \in \mathcal{O}_K$ gibt, so dass $1, y, y^2$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{O}_K$ ist.
Hinweis: Seien $\beta := \frac{\theta^2+\theta}{2}$ und $y = a + b\theta + c\beta$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Betrachten Sie $D(1, y, y^2)$ modulo 2.

Abgabe **Montag, 24.06.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

---

http://www.math.uni-konstanz.de/~gregory/ANT.html