12 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 2: § 3 Basen und Dimension

Definition 12.1.
Sei V ein K-Vektorraum. $S \subseteq V$ ist *linear abhängig (l.a.)* über K, falls verschiedene $v_1, \ldots, v_n \in S$ und skalaren $c_1, \ldots, c_n \in K$ nicht alle Null existieren mit $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$.
S ist linear *unabhängig (l.u.)* über K, falls S nicht linear abhängig ist (e.g. $\emptyset$ ist linear unabhängig).

Konvention
Sei $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ endlich. Wir sagen: $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig / linear abhängig.

Bemerkung 12.2.
1. $S_1 \subseteq S_2$ und S_1 l. a. $\Rightarrow S_2$ l. a. also
2. $S_1 \subseteq S_2$ und S_2 l.u. $\Rightarrow S_1$ linear unabhängig.

Beispiel 12.3.
3. (i) $0 \in S \Rightarrow S$ l.a. (weil $1.0 = 0$)
   (ii) $\{v\}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $v = 0$
   (iii) $\{v_1, v_2\}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $v_1 = cv_2$ für ein $c \in K$
4. S ist linear unabhängig genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von S ist linear unabhängig, d.h. genau dann, wenn für verschiedene Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in S$ und alle $c_1, \ldots, c_n \in K$ aus $\sum c_iv_i = 0$ folgt $c_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$.

Beispiel 12.4.

$$\left.\begin{array}{rcl} v_1 &=& (3, 0, -3) \\ v_2 &=& (-1, 1, 2) \\ v_3 &=& (4, 2, -2) \\ v_4 &=& (2, 1, 1) \end{array}\right\} \in \mathbb{R}^3$$

$2v_1 + 2v_2 - v_3 + 0.v_4 = 0 \Rightarrow$ l.a. über $\mathbb{R}$.

Beispiel 12.5.
Seien $\beta_1 = (1, 1, 2), \beta_2 = (1, 0, 1), \beta_3 = (2, 1, 3)$. Ist $\operatorname{span}(\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}) = \mathbb{R}^3$?
Sei $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, können wir $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ finden mit
$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1, 1, 2) + c_2(1, 0, 1) + c_3(2, 1, 3)$.
D.h.: Hat das LGS

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 &+& c_2 &+& 2c_3 &=& b_1 \\ c_1 & & &+& c_3 &=& b_2 \\ 2c_1 &+& c_2 &+& 3c_3 &=& b_3 \end{array}$$

eine Lösung für **jede** $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$?

Satz 9.8 $\Rightarrow$ dies ist der Fall genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Beispiel 12.6.
$v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (5, 6, -1), v_3 = (3, 2, 1)$ linear abhängig?
Betrachte $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$. Also homogene LGS:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & 5c_2 & + & 3c_3 & = & 0 \\ -2c_1 & + & 6c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ 3c_1 & - & c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array}\right\} v_1, v_2 v_3 \text{ l. a., gdw es keine triviale Lösung gibt.}$$

Also v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist (Satz 9.8).

Definition 12.7.
Sei V ein K-Vektorraum. Eine *Basis* für V ist eine linear unabhängige Teilmenge, die V erzeugt.
V ist *endlich dimensional*, falls es eine endliche Basis für V gibt, i.e.
$S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ mit

(*i*) S linear unabhängig

(*ii*) $\operatorname{span}(S) = V$.

Beispiel 12.8.
$V = K^n$. Die Standardbasis ist $\{e_i; i = 1, \ldots, n\}$, wobei $e_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0); 1 \to i$-te Stelle.

Satz 12.9.
Sei V ein K-Vektorraum, so dass V endlich erzeugt ist, i.e.
ex. $\beta_1, \ldots, \beta_m \in V$ mit $\operatorname{span}(\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}) = V$. Dann ist jede linear unabhängige Teilmenge endlich und hat höchstens m Elemente.

Beweis
Wir zeigen: Hat $S \subseteq V$ mehr als m Elemente, dann ist S linear abhängig.
Seien $v_1, \ldots v_n \in S; n > m$.
$\forall j = 1, \ldots, n,\ v_j \in$ span $(\{\beta_1, \ldots \beta_m\})$, also für $j = 1, \ldots, n$ ex. $A_{1j}, \ldots, A_{mj} \in K$ mit

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \beta_i.$$

Wir analysieren nun lineare Kombinationen der $v_j; 1 \leq j \leq n$.
Für $x_1, \ldots, x_n \in K$ berechne

$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \beta_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (A_{ij} x_j) \beta_i$
$= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j) \beta_i$ (*)

Betrachte das homogene LGS in m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$:

$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = 0 \quad 1 \leq i \leq m$ (**)

$n > m$ also Satz (Korollar 7.2) impliziert, dass es nicht triviale Lösungen gibt.

Also ex. $x_1, \dots, x_n \in K$ nicht alle Null, so dass $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Zurück in $(*)$ ergibt l.a. der $v_j; 1 \leq j \leq n$. $\square$