3. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 4. November 2016

Proposition
$M \lhd R$ ist maximal genau dann, wenn R/M ein Körper ist.

Beweis
M ist maximal, denau dann, wenn $M \subsetneq R$ und es keine Ideale A gibt mit

$$M \subsetneq A \subsetneq R$$

d.h. genau dann, wenn R/M nur $M/M = \{0\}$ und R/M als Ideale hat. Nun erste Proposition aus der 2. Vorlesung anwenden. $\square$

Beispiel
$n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ ist maximal genau dann, wenn $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \backsimeq \mathbb{Z}_n$ ein Körper ist, genau dann, wenn $n = p$ eine Primzahl ist (Lineare Algebra I, 3. Vorlesung).

Definition
$P \lhd R$ ist ein Primideal, wenn

(1) P echt ist, i.e. $P \subsetneq R$.

(2) Aus $ab \in P$ $(a, b, \in R)$ folgt $a \in P$ oder $b \in P$.

Beispiel
$\{0\} \neq p\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ ist Primideal genau dann, wenn p eine Primzahl ist.

Proposition
$P \lhd R$ ist Primideal genau dann, wenn R/P ein Integritätsbereich ist.

Beweis
seien $a, b, \in R$ und $P \lhd R$. Dann ist P Primideal genau dann,
wenn $[\overline{ab} = \overline{a}\overline{b} = 0 \Rightarrow \overline{a} = \overline{0}$ **oder** $\overline{b} = \overline{0}]$ ($\overline{a} = \overline{0}$ bedeutet $a \in P$) genau dann, wenn R/P integer ist. $\square$

Korollar
Jedes maximale Ideal ist Primideal.

Definition

(1) Seien R, S Ringe. Wir definieren Ringoperationen auf $R \times S$ (koordinatenweise).

$$\left.\begin{array}{ccccc} (r_1, s_1) & + & (r_2, s_2) & := & (r_1 + r_2, s_1 + s_2) \\ (r_1, s_2) & \times & (r_2, s_2) & := & (r_1 r_2, s_1 s_2) \end{array}\right\} \text{für alle } r_1, r_2 \in R \text{ und } s_1, s_2 \in S$$

$R \times S$ heißt *Ringprodukt*.

(2) $A, B \lhd R$ sind *teilerfremd*, wenn $A + B = R$ (wobei $A + B := \{a + b; a \in A, b \in B\}$).

Satz (Chinesischer Reste-Satz)
Seien $A_1, \ldots, A_k \lhd R$. Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & R & \to & \prod_{i=1}^{k}(R/A_i) \\ & r & \mapsto & (r + A_1, \ldots, r + A_k) \end{array}$$

ist ein Ringhomomorphismus mit $\ker \varphi = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$.

wenn A_i, A_j teilerfremd sind für alle $i \neq j$, dann ist φ surjektiv. In diesem Fall gilt also (Isomorphiesatz):

$$R / \bigcap_{i=1}^{k} A_i \simeq \prod_{i=1}^{k}(R/A_i).$$

Beweis
Ohne Einschränkung $k = 2$. Prüfe, ob $\varphi(r_1 + r_2) \stackrel{?}{=} \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(r_1 + r_2) & = & ((r_1 + r_2) + A_1, (r_1 + r_2) + A_2) \\ & = & ((r_1 + A_1) + (r_2 + A_1), (r_1 + A_2) + (r_2 + A_2)) \\ & = & ((r_1 + A_1), r_1 + A_2)) + ((r_2 + A_1), (r_2 + A_2)) \\ & = & \varphi(r_1) + \varphi(r_2) \end{array}$$

usw.
Also ist φ ein Ringhomomorphismus.

$$\begin{array}{rcl} \ker \varphi & = & \{r | \varphi(r) = 0\} \\ & = & \{r | \varphi(r) = (A_1, A_2)\} \\ & = & \{r | r \in A_1 \text{ und } r \in A_2\}. \end{array}$$

Sei nun $A_1 + A_2 = R$. Also existieren $x \in A_1$ und $y \in A_2$ mit $x + y = 1$, insbesondere $\varphi(x) = (0, 1)$ und $\varphi(y) = (1, 0)$.

Sei nun $(r_1 + A_1, r_2 + A_2) \in R/A_1 \times R/A_2$ beliebig.
Setze $r := r_2x + r_1y$ und berechne:

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \varphi(r_2x + r_1y) \\
&= \varphi(r_2)\varphi(x) + \varphi(r_1)\varphi(y) \\
&= (r_2 + A_1, r_2 + A_2)(0,1) + (r_1 + A_1, r_1 + A_2)(1,0) \\
&= (0, r_2 + A_2) + (r_1 + A_1, 0) \\
&= (r_1 + A_1, r_2 + A_2).
\end{aligned}$$

Also ist φ surjektiv. $\square$

Bruchringe

Definition
$D \subseteq R$ ist multiplikativ, falls $1 \in D$ und $st \in D$ für alle $s, t \in D$.

Beispiele

(*i*) $D = R^\times$

(*ii*) $D = R \backslash P$ mit $P \lhd R$ Prim.

Sei nun D multiplikativ, ohne Nullteiler, $0 \notin D$ (*). Definiere eine Relation $\sim$ auf $R \times D$:
$(r,d) \sim (r', d') \Leftrightarrow rd' = dr'$.
$\sim$ ist Äquivalenzrelation

$$\begin{array}{llcl|l}
\text{(e.g.} & (r,d) & \sim & (s,e) & \\
\text{und} & (s,e) & \sim & (t,f) &
\end{array} \Rightarrow + \begin{array}{ccccc|l}
re & - & sd & = & 0 & \times f \\
sf & - & te & = & 0 & \times d
\end{array} \text{ ergibt } (rf - td)e = 0,$$

e ist kein Nullteiler $e \neq 0$. Also muss $rf - td = 0$ sein und damit $rf = td$.
Also $(r,d) \sim (t,f)$).

Notation
Schreibe $\frac{r}{d} := [(r,d)]$ (die Äquivalenzklasse von (r,d)) und setze $D^{-1}R :=$ die Menge der Äquivalenzklassen.
Versehe $D^{-1}R$ mit den folgenden Ringoperationen:

$$\frac{r_1}{d_1} + \frac{r_2}{d_2} := \frac{r_1d_2 + r_2d_1}{d_1d_1} \quad \text{und} \quad \frac{r_1}{d_1} \cdot \frac{r_2}{d_2} := \frac{r_1r_2}{d_1d_2}.$$