21. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 24. Januar 2017

Unser nächstes Ziel ist es, die Sylow Sätze zu beweisen (Sonderfälle, für die die Umkehrung von Lagrange gilt).

Sylow 1
Sei G eine endliche Gruppe, p Primzahl und $k \in \mathbb{N}$, so dass $p^k||G|$, dann hat G eine Teilgruppe der Ordnung p^k.

Definition 1
Eine solche Teilgruppe H mit $H = p^m$, m maximal, ist eine *Sylow-p-Untergruppe.*

Sylow 2

(1) Sylow-p-Untergruppen sind konjugiert, das heißt es existiert $a \in G$ mit $H_2 = aH_1a^{-1}$.

(2) Die Anzahl der Sylow-p-Untergruppen ist ein Divisor von $[G : H]$ für eine (jede) Sylow-p-Untergruppe H und ist $\equiv 1 \mod p$.

(3) Jede Untergruppe der Ordnung p^k ist enthalten in einer Sylow-p-Untergruppe.

Für die Beweise der Sylow-Sätze brauchen wir Gruppenaktionen:

Definition 2
Sei G eine Gruppe und S eine Menge ($S \neq \emptyset$).

$$\begin{array}{ccc} G \times S & \to & S \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array}$$

eine Abbildung, so dass

(i) $1x = x$ für alle $x \in S$

(ii) $g_1g_2x = g_1(g_2x)$ für alle $x \in S$ und für alle $g_1, g_2 \in G$.

heißt *Gruppenaktion*. Wir sagen G *operiert auf* S.

Definition 3
Sei G operiert auf S und auf S'. Die Aktionen heißen *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $\nu : S \to S'$ gibt pd. $\nu(gx) = g\nu(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in S$.

Proposition 1

Sei G operiert auf S. Definiere

$$\begin{array}{rccc} T(g): & S & \longrightarrow & S \\ & x & \mapsto & gx \end{array}$$

Dann ist $T(g)$ eine Permutation auf S.

Notation

Sym S bezeichnet die Gruppe der Permutationen von S.

Fortsetzung mit Ansatz von Proposition 1:

Proposition 2

Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} T: & G & \longrightarrow & SymS \\ & g & \mapsto & T(g) \end{array}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 4

$\ker T \lhd G$ heißt der ker der Aktion. Die Aktion heißt *effektiv*, wenn $\ker T = \{1\}$.

Beispiele

(0) G operiert auf S und $H \leq G \Rightarrow H$ operiert auf S (durch Einschränkung)
G operiert auf S und $\mathcal{O} \subseteq S \Rightarrow G$ operiert auf $\mathcal{O}$ (auch Einschränkung, wenn wohldefiniert!)

(i) $S = G$. Definiere die Aktion "*linke Multiplikation*":
$(g, x) \mapsto \underbrace{gx}_{\text{Produkt in } G}$ ist eine effektive Aktion.

(ii) Dual dazu "rechte Multiplikation"

(iii) Konjugation: $S = G; (g, x) \mapsto gxg^{-1}$.
Was ist hier der ker dieser Aktion?

$$\begin{array}{rcl} \ker T & = & \{g \mid \forall x \in G : gxg^{-1} = x\} \\ & = & \{g \mid \forall x \in G : gx = xg\} \\ & := & C_G \end{array}$$

C_G heißt *Zentrum von* G und ist eine normale Untergruppe.

Definition 5

$H \leq$ *Sym* S heißt Permutationsgruppe.

Satz (Cayley)

Jede Grupe ist isomorph zu einer Permutationsgruppe.

Beweis

$S = G$ operiert mit der linken Multiplikation auf G.

$$\begin{array}{rccc} T: & G & \longrightarrow & Sym\ G \\ & g & \mapsto & T(g) \end{array}$$

hat trivialen $\ker T = \{1\}$. Also $G \simeq T(G) \leq Sym\ G$. $\square$

Äquivalenzrelation durch Aktion induziert

1. Seien $x, y \in S$. Setze $x \underset{G}{\sim} y$, wenn es ein $g \in G$ gibt, s.d. $y = gx$.
   $\underset{G}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation.
2. $[x] := Gx := \{gx \mid g \in G\}$ heißt die *Orbit* oder *Bahn von x*.
3. $S = \bigsqcup_{x \in S} Gx$.

Beispiele (Fortsetzung)

(i) Sei $H \leq G, S = G$. H operiert durch linke Multiplikation $[x] = Hx = \{hx \mid h \in H\}$ (die Nebenklasse von x).

(ii) G operiert auf G durch Konjugation $[x] = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ heißt die *Konjukationsklasse.*

Proposition 3

(i) Die Konjugationsklasse von x ist $\{x\}$ genau dann, wenn $x \in C_G$.

(ii) Also ist das Zentrum von G die Vereinigung solcher Konjugationsklassen.

Definition 1

1. G *operiert transitiv* auf S, wenn es nur eine Bahn gibt, das heißt für alle $x, y \in S : x \underset{G}{\sim} y$.
2. Der *Stabilisator* $Stab_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ ist eine Untergruppe von G für jedes $x \in S$.

Beispiel 1

G operiert auf G durch Konjugation $\Rightarrow$

$Stab_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = C(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$, der Zentralisator von x in G.

Bemerkung

(i) Wenn $y = ax$, dann ist $Stab_x = a^{-1}(Stab_y)a$.

(ii) Also wenn G auf S transitiv operiert, gilt für alle $x, y \in S$, dass $a \in G$ existiert, so dass $Stab_y = a(Stab_x)a^{-1}$

Beispiel 2

$H \leq G$ operiert transitiv auf $S := \{xH \mid x \in G\}$ mit $g(xH) := (gx)H$.

Beweis

Seien $xH, yH \in S$. Setze $g := yx^{-1}$, dann gilt $gxH = yH$. $\square$

Wir zeigen, dass bis auf Äquivalenz von Aktionen, alle transitive Aktionen so sind.

Satz 1
Es sei G operiert transitiv auf $S \neq \emptyset$. Sei $x \in S$ und $H := Stab_x$. Dann ist die Aktion äquivalent zur Aktion auf $\overline{G} := \{gH \mid g \in G\}$.

Beweis
Definierte $\overline{\alpha} : \overline{G} \to S$ mit $\overline{\alpha}(\overline{g}) := gx$, wobei $\overline{g} := \{a \in G \mid ax = gx\} = \{a \in G \mid g^{-1}a \in H\} = gH$ und $\overline{G} := \{\overline{g} \mid g \in G\}$ ist. Die Aktion ist transitiv $\Rightarrow \overline{\alpha}$ surjektiv.

Übungsaufgabe
$\overline{\alpha}$ ist wohldefiniert und bijektiv. Wir müssen noch prüfen, ob $\overline{\alpha}(h\overline{g}) \stackrel{?}{=} h\overline{\alpha}(\overline{g})$.

Korollar 1
Es sei G endlich, operiert transitiv auf S. Dann ist $|S| = [G : Stab_x]$ für ein (jedes) $x \in S$, insbesondere ist S endlich und $|S| \mid |G|$.

Algemeiner können wir ein Resultat für eine beliebige Aktion herleiten:
Korollar 2 (Bahngleichung)
Es sei G endlich operiert auf S endlich. Es gilt $|S| = \sum_{i=1}^{r} [G : Stab_{x_i}]$, wobei $\{x_1, \ldots, x_r\}$ ein Vertretersystem der Bahnen ist.

Beweis
Seien $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r$ alle Bahnen. Es ist leicht zu sehen, dass die Aktion auf $\mathcal{O}_i$ transitiv ist für jedes $i = 1, \ldots, r$. Also gilt $|\mathcal{O}_i| = [G : Stab_{x_i}]$. Nun ist $S = \bigsqcup_{i=1}^{r} \mathcal{O}_i$, also $|S| = \sum |\mathcal{O}_i|$. $\square$

Korollar 3 (Klassengleichung)
Sei G eine endliche Gruppe. Es gilt $|G| = \sum_{i=1}^{k} [G : C(x_i)]$, wobei $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ein Vetretersystem der Konjukationsklassen ist.

Beweis
G operiert auf G durch Konjugation und $Stab_{x_i} = C(x_i)$ in diesem Fall. $\square$

Korollar 4 (Klassengleichung Bis.)
$|G| = |C_G| + \sum_{i=1}^{\ell} [G : C(y_i)]$, wobei $\{y_1, \ldots, y_\ell\}$ ein Vertretersystem für die Konjugationsklassen in $G \backslash C_G$ ist.

Beweis
Die Konjugationsklassen von x ist $\{x\}$ genau dann, wenn $x \in C_G$ genau dann, wenn $C(x) = G$. In Korollar 3 wird also in der Formel $1 = [G : G] = [G : C(x_i)]$ so oft summiert wie es Elemente in C_G gibt. Also erhalten wir $|C_G|$ als ersten Summand. □

Korollar 5
Sei G endlich, $|G| = p^k, p$ ist Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $C_G \neq \{1\}$.

Siehe Übungsblatt